Inteligência Artificial – ACH2016
Aula 14 – Representação do Conhecimento e Lógica *Fuzzy*

Norton Trevisan Roman
(norton@usp.br)

29 de abril de 2019

Representação do Conhecimento

Ontologias

- São o primeiro passo na formalização lógica de um domínio

Representação do Conhecimento

Ontologias

- São o primeiro passo na formalização lógica de um domínio
- Buscam organizar tudo conforme uma hierarquia de categorias

Ontologias

- São o primeiro passo na formalização lógica de um domínio
- Buscam organizar tudo conforme uma hierarquia de categorias
  - Descrição dos tipos de objetos que temos em nosso mundo e suas possíveis propriedades e relações

Representação do Conhecimento

Ontologias

- São o primeiro passo na formalização lógica de um domínio
- Buscam organizar tudo conforme uma hierarquia de categorias
  - Descrição dos tipos de objetos que temos em nosso mundo e suas possíveis propriedades e relações
  - Cobrem também conceitos gerais: ações, tempo, objetos físicos e crenças

Representação do Conhecimento

Ontologias

- São o primeiro passo na formalização lógica de um domínio
- Buscam organizar tudo conforme uma hierarquia de categorias
  - Descrição dos tipos de objetos que temos em nosso mundo e suas possíveis propriedades e relações
  - Cobrem também conceitos gerais: ações, tempo, objetos físicos e crenças
  - A representação de tais conceitos é conhecida como **Engenharia ontológica**

Ontologias

Vantagens

Ontologias

Vantagens

- Organizam o conhecimento em categorias e sub-categorias

Ontologias

Vantagens

- Organizam o conhecimento em categorias e sub-categorias
  - Ainda que a interação com o mundo aconteça com objetos individuais, pode ser útil raciocinar em termos de categorias

Ontologias

Vantagens

- Organizam o conhecimento em categorias e sub-categorias
  - Ainda que a interação com o mundo aconteça com objetos individuais, pode ser útil raciocinar em termos de categorias
- Permitem fazer previsões sobre objetos, uma vez que foram classificados

Ontologias

Vantagens

- Organizam o conhecimento em categorias e sub-categorias
  - Ainda que a interação com o mundo aconteça com objetos individuais, pode ser útil raciocinar em termos de categorias
- Permitem fazer previsões sobre objetos, uma vez que foram classificados
  - A partir da percepção de forma e cor (sensores), podemos inferir que um objeto é um melão

Ontologias

Vantagens

- Organizam o conhecimento em categorias e sub-categorias
  - Ainda que a interação com o mundo aconteça com objetos individuais, pode ser útil raciocinar em termos de categorias
- Permitem fazer previsões sobre objetos, uma vez que foram classificados
  - A partir da percepção de forma e cor (sensores), podemos inferir que um objeto é um melão
  - A partir dessa classificação, podemos inferir que é bom em salada de frutas

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x \; comida(x) \Rightarrow comestível(x)$

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x \; comida(x) \Rightarrow comestível(x)$
  - $\forall x \; fruta(x) \Rightarrow comida(x)$

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x \; comida(x) \Rightarrow comestível(x)$
  - $\forall x \; fruta(x) \Rightarrow comida(x)$
  - $\forall x \; maçã(x) \Rightarrow fruta(x)$

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x\ comida(x) \Rightarrow comestível(x)$
  - $\forall x\ fruta(x) \Rightarrow comida(x)$
  - $\forall x\ maçã(x) \Rightarrow fruta(x)$
  - $maçã(M)$

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x \ comida(x) \Rightarrow comestível(x)$
  - $\forall x \, fruta(x) \Rightarrow comida(x)$
  - $\forall x \, maçã(x) \Rightarrow fruta(x)$
  - $maçã(M)$
  - Deduzimos então que M é comestível

Ontologias

Representando categorias como predicados

- A categoria é um predicado
- Exemplo:
  - $\forall x \; comida(x) \Rightarrow comest\acute{\imath}vel(x)$
  - $\forall x \; fruta(x) \Rightarrow comida(x)$
  - $\forall x \; ma\c{c}\tilde{a}(x) \Rightarrow fruta(x)$
  - $ma\c{c}\tilde{a}(M)$
  - Deduzimos então que M é comestível
  - M pertence à categoria das maçãs, que pertence à categoria das frutas, que pertence à categoria das comidas, que pertence à categoria das coisas comestíveis

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria
  - $\forall x\ membro(x, comida) \Rightarrow membro(x, comestível)$

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria
  - $\forall x \; membro(x, comida) \Rightarrow membro(x, comestível)$
  - $\forall x \; membro(x, fruta) \Rightarrow membro(x, comida)$

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria
  - $\forall x\ membro(x, comida) \Rightarrow membro(x, comestível)$
  - $\forall x\ membro(x, fruta) \Rightarrow membro(x, comida)$
  - $\forall x\ membro(x, maçã) \Rightarrow membro(x, fruta)$

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria
  - $\forall x\ membro(x, comida) \Rightarrow membro(x, comestível)$
  - $\forall x\ membro(x, fruta) \Rightarrow membro(x, comida)$
  - $\forall x\ membro(x, maçã) \Rightarrow membro(x, fruta)$
  - $membro(M, maçã)$

Ontologias

Representando categorias como objetos

- A categoria é um objeto
  - Transformar predicado em objeto chama-se **reificação**
- Precisamos de predicados para definir que um objeto pertence a uma categoria
  - $\forall x \; membro(x, comida) \Rightarrow membro(x, comestível)$
  - $\forall x \; membro(x, fruta) \Rightarrow membro(x, comida)$
  - $\forall x \; membro(x, maçã) \Rightarrow membro(x, fruta)$
  - $membro(M, maçã)$
  - Também podemos deduzir que M é comestível

Ontologias

Herança

Ontologias

Herança

- Serve para organizar e simplificar a base de conhecimentos

Ontologias

Herança

- Serve para organizar e simplificar a base de conhecimentos
  - Qualquer propriedade pertencente a uma categoria é herdada pelas suas sub-categorias

Ontologias

Herança

- Serve para organizar e simplificar a base de conhecimentos
  - Qualquer propriedade pertencente a uma categoria é herdada pelas suas sub-categorias
  - Propriedades de “comestível” são herdadas por “comida”, “fruta” e “maçã”

Ontologias

Taxonomia

Ontologias

Taxonomia

- Hierarquia de classes e subclasses

Ontologias

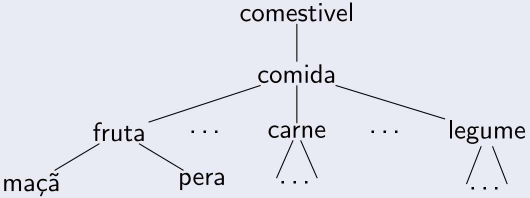
Taxonomia

- Hierarquia de classes e subclasses
  - Arranjo particular dos elementos de uma ontologia

Ontologias

Taxonomia

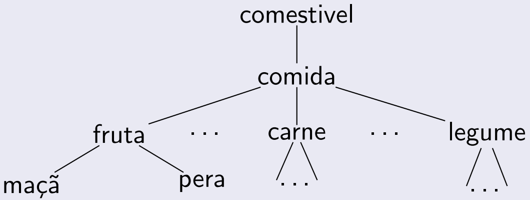
- Hierarquia de classes e subclasses
  - Arranjo particular dos elementos de uma ontologia
- Definida pelas relações entre subclasses:



Ontologias

Taxonomia

- Hierarquia de classes e subclasses
  - Arranjo particular dos elementos de uma ontologia
- Definida pelas relações entre subclasses:

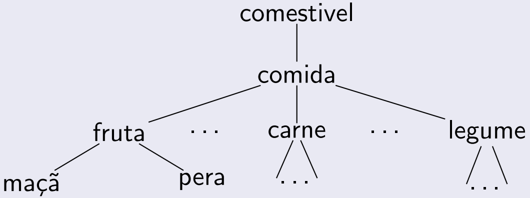


- Usada por séculos e em várias áreas

Ontologias

Taxonomia

- Hierarquia de classes e subclasses
  - Arranjo particular dos elementos de uma ontologia
- Definida pelas relações entre subclasses:



- Usada por séculos e em várias áreas
  - Biologia: Reino– filo – classe – ordem – família – gênero

Lógica Nebulosa (*Fuzzy*)

Representação do Conhecimento

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:

Representação do Conhecimento

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:
  - Proposições são verdadeiras ou falsas no mundo

Representação do Conhecimento

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:
  - Proposições são verdadeiras ou falsas no mundo
- Contudo, quando descrevemos algo, muitas vezes o fazemos de forma vaga e ambígua

Representação do Conhecimento

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:
  - Proposições são verdadeiras ou falsas no mundo
- Contudo, quando descrevemos algo, muitas vezes o fazemos de forma vaga e ambígua
  - "Embora esteja um pouco pesado, o mecanismo aguenta mais um tempo"

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:
  - Proposições são verdadeiras ou falsas no mundo
- Contudo, quando descrevemos algo, muitas vezes o fazemos de forma vaga e ambígua
  - "Embora esteja <u>um pouco</u> pesado, o mecanismo aguenta <u>mais um tempo</u>"
  - O que isso significa?

Representação do Conhecimento

Imprecisão

- A lógica vista até agora apresenta um comprometimento ontológico claro:
  - Proposições são verdadeiras ou falsas no mundo
- Contudo, quando descrevemos algo, muitas vezes o fazemos de forma vaga e ambígua
  - "Embora esteja <u>um pouco</u> pesado, o mecanismo aguenta <u>mais um tempo</u>"
  - O que isso significa?
  - Mais importante, como representamos isso?

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão
  - Em que proposições podem ser “meio que” verdadeiras

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão
  - Em que proposições podem ser "meio que" verdadeiras
  - Essa é a **Lógica Nebulosa** (*Fuzzy Logic*)

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão
  - Em que proposições podem ser "meio que" verdadeiras
  - Essa é a **Lógica Nebulosa** (*Fuzzy Logic*)
- Lembre, contudo, que lógica nebulosa não se trata de uma lógica que é nebulosa

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão
  - Em que proposições podem ser "meio que" verdadeiras
  - Essa é a **Lógica Nebulosa** (*Fuzzy Logic*)
- Lembre, contudo, que lógica nebulosa não se trata de uma lógica que é nebulosa
  - Em vez disso, se trata de lógica usada para descrever imprecisão

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- A solução passa por uma ontologia que permita imprecisão
  - Em que proposições podem ser "meio que" verdadeiras
  - Essa é a **Lógica Nebulosa** (*Fuzzy Logic*)
- Lembre, contudo, que lógica nebulosa não se trata de uma lógica que é nebulosa
  - Em vez disso, se trata de lógica usada para descrever imprecisão
  - Ou seja, lógica que trata de descrições nebulosas

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" × "O motor está realmente quente"

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" $\times$ "O motor está realmente quente"
  - Como diferenciar um do outro, no limiar que os divide?

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" $\times$ "O motor está realmente quente"
  - Como diferenciar um do outro, no limiar que os divide?
- A lógica convencional nos força a criar linhas entre membros e não-membros de uma classe

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" $\times$ "O motor está realmente quente"
  - Como diferenciar um do outro, no limiar que os divide?
- A lógica convencional nos força a criar linhas entre membros e não-membros de uma classe
  - "Pedro é alto, tem 1,81m" $(Alto(x) \Rightarrow Altura(x) \geq 1,80)$

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" $\times$ "O motor está realmente quente"
  - Como diferenciar um do outro, no limiar que os divide?
- A lógica convencional nos força a criar linhas entre membros e não-membros de uma classe
  - "Pedro é alto, tem 1,81m" $(Alto(x) \Rightarrow Altura(x) \geq 1,80)$
  - Como fica então João, que tem 1,79?

Representação do Conhecimento

Lógica *Fuzzy*

- Baseia-se na ideia de que todas as coisas admitem graus de veracidade
  - "O motor está quente" × "O motor está realmente quente"
  - Como diferenciar um do outro, no limiar que os divide?
- A lógica convencional nos força a criar linhas entre membros e não-membros de uma classe
  - "Pedro é alto, tem 1,81m" $(Alto(x) \Rightarrow Altura(x) \geq 1,80)$
  - Como fica então João, que tem 1,79?
  - Não é uma questão de incerteza. Sabemos as alturas de Pedro e João, só não sabemos classificá-las

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**
- Conjuntos nebulosos?

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**
- Conjuntos nebulosos?

Fonte: `https://hiveminer.com/User/periklis`

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**
- Conjuntos nebulosos?
  - Modo de especificar o quanto um objeto satisfaz uma descrição vaga

Fonte: `https://hiveminer.com/User/periklis`

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**

- Conjuntos nebulosos?
  - Modo de especificar o quanto um objeto satisfaz uma descrição vaga

Fonte: https://hiveminer.com/User/periklis

  - A ideia básica dos conjuntos nebulosos é que um elemento pertence a um conjunto com um certo grau de adesão

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- Lógica nebulosa baseia-se na **teoria dos conjuntos nebulosos**
- Conjuntos nebulosos?
  - Modo de especificar o quanto um objeto satisfaz uma descrição vaga

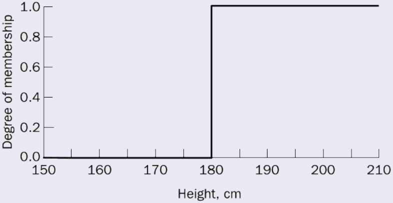
Fonte: https://hiveminer.com/User/periklis

  - A ideia básica dos conjuntos nebulosos é que um elemento pertence a um conjunto com um certo grau de adesão
  - Assim, uma proposição pode ser parte verdadeira e parte falsa

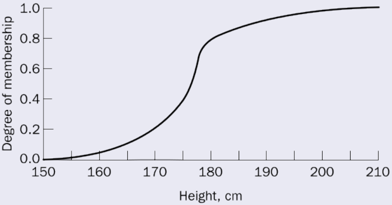
Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* – Exemplo

- Pedro é alto?
- Quão alto é Pedro?



Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

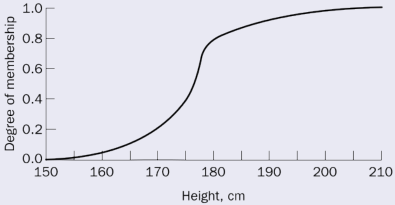
Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* – Exemplo

- Pedro é alto?

Teoria de Conjuntos Clássica

- Quão alto é Pedro?



Teoria de Conjuntos Nebulosos

Fonte: AI. Negnevitsky.

- $Alto(x)$ é tratado como um predicado nebuloso:

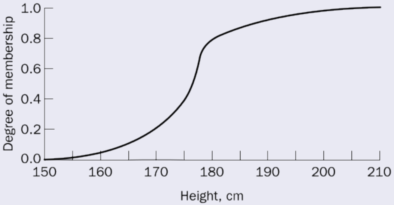
Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* – Exemplo

- Pedro é alto?

Teoria de Conjuntos Clássica

- Quão alto é Pedro?



Teoria de Conjuntos Nebulosos

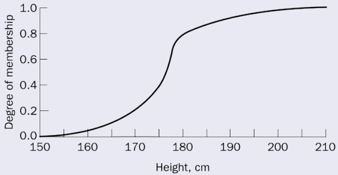
Fonte: AI. Negnevitsky.

- *Alto*(x) é tratado como um predicado nebuloso:
  - Seu valor verdade é um número entre 0 e 1, em vez de ser verdadeiro ou falso

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0, 1]$:

Teoria de Conjuntos Clássica



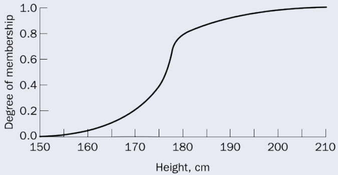
Teoria de Conjuntos Nebulosos

Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0,1]$:
  - $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$ está totalmente em A

Teoria de Conjuntos Clássica

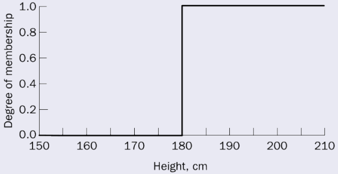


Teoria de Conjuntos Nebulosos

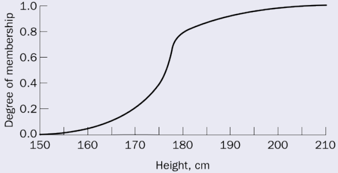
Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0, 1]$:
  - $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$ está totalmente em A
  - $\mu_A(x) = 0 \rightarrow x$ não está em A



Teoria de Conjuntos Clássica



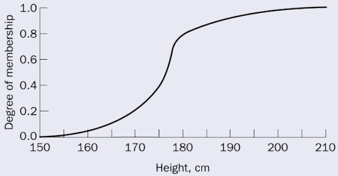
Teoria de Conjuntos Nebulosos

Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0, 1]$:
  - $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$ está totalmente em A
  - $\mu_A(x) = 0 \rightarrow x$ não está em A
  - $0 < \mu_A(x) < 1 \rightarrow x$ está parcialmente em A

Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

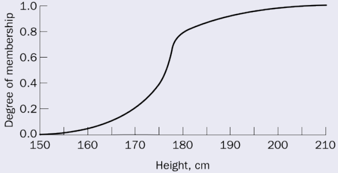
Fonte: AI. Negnevitsky.

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0, 1]$:
  - $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$ está totalmente em A
  - $\mu_A(x) = 0 \rightarrow x$ não está em A
  - $0 < \mu_A(x) < 1 \rightarrow x$ está parcialmente em A
- Teoria clássica:

Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

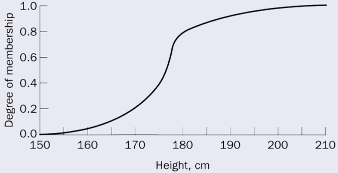
Fonte: AI. Negnevitsky.

Representação do Conhecimento

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

- O conjunto A é definido por sua **função de pertinência** $\mu_A(x) \in [0,1]$:
  - $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$ está totalmente em A
  - $\mu_A(x) = 0 \rightarrow x$ não está em A
  - $0 < \mu_A(x) < 1 \rightarrow x$ está parcialmente em A
- Teoria clássica:
  - $\mu_A(x) \in \{0,1\}$ (ou $x \in A$, ou $x \notin A$)

Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Função de Pertinência (*Membership*)

- Para cada elemento x do universo X, $\mu_A(x)$ define o grau de compatibilidade de x em relação a A

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

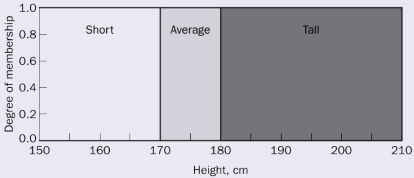
Função de Pertinência (*Membership*)

- Para cada elemento x do universo X, $\mu_A(x)$ define o grau de compatibilidade de x em relação a A
  - Chamado **grau de pertinência** de x em A

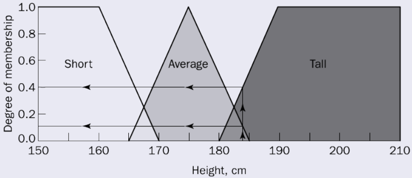
Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Função de Pertinência (*Membership*)

- Para cada elemento x do universo X, $\mu_A(x)$ define o grau de compatibilidade de x em relação a A
  - Chamado **grau de pertinência** de x em A
- Ex: $A = \{Baixo, Médio, Alto\}$



Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

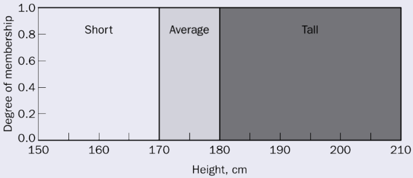
Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

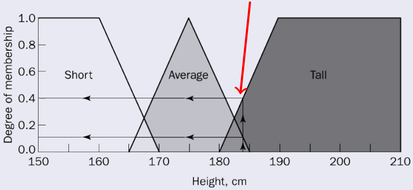
Função de Pertinência (*Membership*)

- Para cada elemento x do universo X, $\mu_A(x)$ define o grau de compatibilidade de x em relação a A
  - Chamado **grau de pertinência** de x em A
- Ex: $A = \{Baixo, Médio, Alto\}$

Note que 1,84m é 0.4 alto e $\approx$ 0.1 médio



Teoria de Conjuntos Clássica



Teoria de Conjuntos Nebulosos

Fonte: AI. Negnevitsky.

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Subconjuntos

- $A \subseteq X$ é um subconjunto nebuloso de X sse

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Subconjuntos

- $A \subseteq X$ é um subconjunto nebuloso de X sse
  - $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $x \in X, \mu_A(x) : X \to [0, 1]$

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

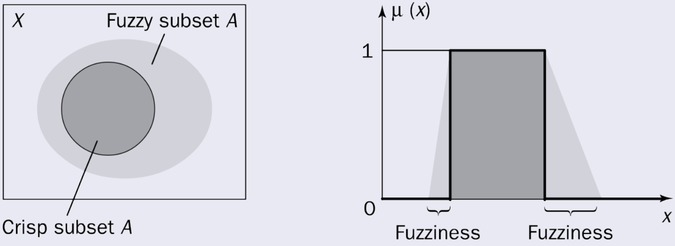
Subconjuntos

- $A \subseteq X$ é um subconjunto nebuloso de X sse
  - $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $x \in X, \mu_A(x) : X \to [0, 1]$
  - No caso particular em que $\mu_A(x) : X \to \{0, 1\}$, o subconjunto nebuloso torna-se rígido

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Subconjuntos

- $A \subseteq X$ é um subconjunto nebuloso de X sse
  - $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $x \in X$, $\mu_A(x) : X \to [0, 1]$
  - No caso particular em que $\mu_A(x) : X \to \{0, 1\}$, o subconjunto nebuloso torna-se rígido



Representação de subconjuntos nebulosos e rígidos
Fonte: AI. Negnevitsky.

Operações em conjuntos nebulosos

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:
  - Que conjuntos pertencem a outros conjuntos?

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:
  - Que conjuntos pertencem a outros conjuntos?
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall x \in X$

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:
  - Que conjuntos pertencem a outros conjuntos?
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall x \in X$
- Interseção

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:
  - Que conjuntos pertencem a outros conjuntos?
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \ \forall x \in X$
- Interseção
  - Quanto do elemento está em ambos os conjuntos?

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- Complemento:
  - O quanto os elementos não pertencem ao conjunto?
  - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$ (X é o conjunto universo)
- Inclusão:
  - Que conjuntos pertencem a outros conjuntos?
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall x \in X$
- Interseção
  - Quanto do elemento está em ambos os conjuntos?
  - $\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x),\ \forall x \in X$

Operações em conjuntos nebulosos

- União:

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- União:
  - Quanto do elemento está em algum dos conjuntos?

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- União:
  - Quanto do elemento está em algum dos conjuntos?
  - $\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x),\ \forall x \in X$

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Operações em conjuntos nebulosos

- União:
  - Quanto do elemento está em algum dos conjuntos?
  - $\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x), \ \forall x \in X$
- Comutatividade, associatividade, distributividade, idempotência, identidade, transitividade e De Morgan permanecem as mesmas dos conjuntos clássicos

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas
  - A partir de análise estatística de frequência

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas
  - A partir de análise estatística de frequência
  - Aprendida via redes neurais

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas
  - A partir de análise estatística de frequência
  - Aprendida via redes neurais
  - Etc

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas
  - A partir de análise estatística de frequência
  - Aprendida via redes neurais
  - Etc
- Em seguida mapeamos os elementos do conjunto ao seu grau de pertinência

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Representação em um computador

- Primeiro determinamos a função de pertinência
  - A partir de conhecimento de um ou mais especialistas
  - A partir de análise estatística de frequência
  - Aprendida via redes neurais
  - Etc
- Em seguida mapeamos os elementos do conjunto ao seu grau de pertinência
  - Se o conjunto for contínuo, precisamos expressá-lo como uma função

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos
  - Ex: $Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)$

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos
  - Ex: $Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)$
  - Seu valor verdade nebuloso (*fuzzy*) é uma função do valor verdade de seus componentes

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos
  - Ex: $Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)$
  - Seu valor verdade nebuloso (*fuzzy*) é uma função do valor verdade de seus componentes
- Trata-se de uma lógica multivalorada

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos
  - Ex: $Alto(Pedro) \land Pesado(Pedro)$
  - Seu valor verdade nebuloso (*fuzzy*) é uma função do valor verdade de seus componentes
- Trata-se de uma lógica multivalorada
  - Lida com graus de pertinência e graus de verdade

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Método para raciocinar com expressões lógicas dentro de conjuntos nebulosos
  - Ex: $Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)$
  - Seu valor verdade nebuloso (*fuzzy*) é uma função do valor verdade de seus componentes
- Trata-se de uma lógica multivalorada
  - Lida com graus de pertinência e graus de verdade
  - A lógica clássica pode ser vista como um caso especial da multivalorada

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Trabalha com um contínuo de valores lógicos entre 0 (totalmente falso) e 1 (totalmente verdadeiro)

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Trabalha com um contínuo de valores lógicos entre 0 (totalmente falso) e 1 (totalmente verdadeiro)
  - Aceita que coisas possam ser parcialmente verdadeiras ao mesmo tempo em que são também parcialmente falsas

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Trabalha com um contínuo de valores lógicos entre 0 (totalmente falso) e 1 (totalmente verdadeiro)
  - Aceita que coisas possam ser parcialmente verdadeiras ao mesmo tempo em que são também parcialmente falsas
- As variáveis usadas em expressões *fuzzy* são denominadas **variáveis linguísticas**

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Trabalha com um contínuo de valores lógicos entre 0 (totalmente falso) e 1 (totalmente verdadeiro)
  - Aceita que coisas possam ser parcialmente verdadeiras ao mesmo tempo em que são também parcialmente falsas
- As variáveis usadas em expressões *fuzzy* são denominadas **variáveis linguísticas**
  - Ex: "Pedro é alto" $\rightarrow$ a variável linguística *Pedro* recebe o valor linguístico *alto*

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

- Trabalha com um contínuo de valores lógicos entre 0 (totalmente falso) e 1 (totalmente verdadeiro)
  - Aceita que coisas possam ser parcialmente verdadeiras ao mesmo tempo em que são também parcialmente falsas
- As variáveis usadas em expressões *fuzzy* são denominadas **variáveis linguísticas**
  - Ex: "Pedro é alto" $\rightarrow$ a variável linguística *Pedro* recebe o valor linguístico *alto*
  - A gama de valores possíveis para uma variável linguística representa seu **universo de discurso**

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
    - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:
  - Modificadores de propósito geral: *muito*, *um tanto*, *extremamente* ...

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:
  - Modificadores de propósito geral: *muito*, *um tanto*, *extremamente* ...
  - Valores verdade: *bastante verdade*, *majoritariamente falso* ...

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:
  - Modificadores de propósito geral: *muito*, *um tanto*, *extremamente* ...
  - Valores verdade: *bastante verdade*, *majoritariamente falso* ...
  - Probabilidades: *provável*, *não muito provável* ...

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:
  - Modificadores de propósito geral: *muito*, *um tanto*, *extremamente* ...
  - Valores verdade: *bastante verdade*, *majoritariamente falso* ...
  - Probabilidades: *provável*, *não muito provável* ...
  - Quantificadores: *a maioria*, *muitos*, *poucos* ...

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- Trazem consigo o conceito de **qualificadores fuzzy**, ou **hedges**
  - Termos que modificam a forma dos conjuntos nebulosos
- *Hedges* são usados como:
  - Modificadores de propósito geral: *muito*, *um tanto*, *extremamente* ...
  - Valores verdade: *bastante verdade*, *majoritariamente falso* ...
  - Probabilidades: *provável*, *não muito provável* ...
  - Quantificadores: *a maioria*, *muitos*, *poucos* ...
  - Possibilidades: *quase impossível*, *bastante possível* ...

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- *Hedges* também agem como operações

Lógica *Fuzzy*

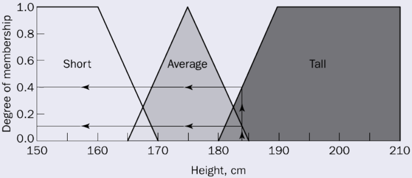
Variáveis Linguísticas

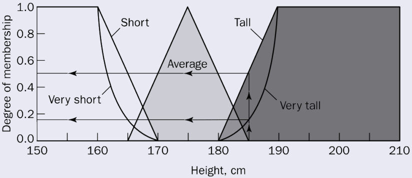
- *Hedges* também agem como operações
  - Ex: *muito*, quando aplicado ao conjunto de *homens altos*, gera o subconjunto de *homens muito altos*

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- *Hedges* também agem como operações
  - Ex: *muito*, quando aplicado ao conjunto de *homens altos*, gera o subconjunto de *homens muito altos*





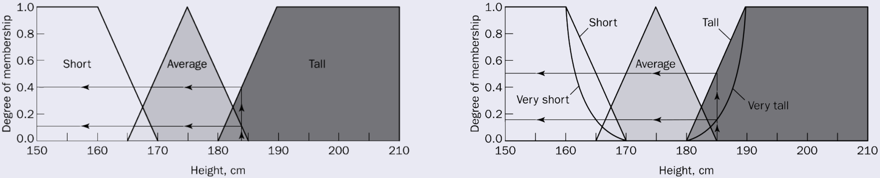
Conjunto modificado pelo qualificador *muito*

Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- *Hedges* também agem como operações
  - Ex: *muito*, quando aplicado ao conjunto de *homens altos*, gera o subconjunto de *homens muito altos*



Conjunto modificado pelo qualificador *muito*

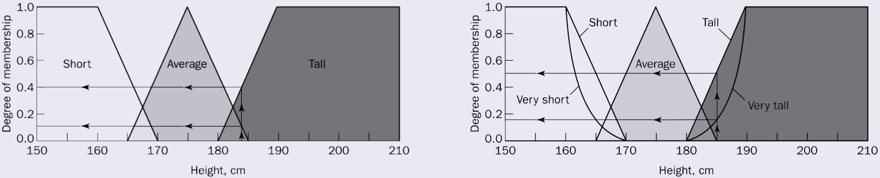
Fonte: AI. Negnevitsky.

- Também quebram contínuos em intervalos *fuzzy*

Lógica *Fuzzy*

Variáveis Linguísticas

- *Hedges* também agem como operações
  - Ex: *muito*, quando aplicado ao conjunto de *homens altos*, gera o subconjunto de *homens muito altos*



Conjunto modificado pelo qualificador *muito*

Fonte: AI. Negnevitsky.

- Também quebram contínuos em intervalos *fuzzy*
  - Ex: *muito frio*, *frio*, *normal*, *quente* e *muito quente*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$
  - Uma pertinência de 0.8 em $A = alto$ ($\mu_{alto}(x) = 0,8$) corresponde a 0,64 em *muito alto* ($\mu_{alto}^{muito}(x) = 0,64$)

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$
  - Uma pertinência de 0.8 em $A = alto$ ($\mu_{alto}(x) = 0,8$) corresponde a 0,64 em *muito alto* ($\mu_{alto}^{muito}(x) = 0,64$)
- *Extremamente*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$
  - Uma pertinência de 0.8 em $A = alto$ ($\mu_{alto}(x) = 0,8$) corresponde a 0,64 em *muito alto* ($\mu_{alto}^{muito}(x) = 0,64$)
- *Extremamente*
  - $\mu_A^{extremamente}(x) = [\mu_A(x)]^3$

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$
  - Uma pertinência de 0.8 em $A = alto$ ($\mu_{alto}(x) = 0,8$) corresponde a 0,64 em *muito alto* ($\mu_{alto}^{muito}(x) = 0,64$)
- *Extremamente*
  - $\mu_A^{extremamente}(x) = [\mu_A(x)]^3$
- *Muitíssimo*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Muito*
  - $\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2$
  - Uma pertinência de 0.8 em $A = alto$ ($\mu_{alto}(x) = 0,8$) corresponde a 0,64 em *muito alto* ($\mu_{alto}^{muito}(x) = 0,64$)
- *Extremamente*
  - $\mu_A^{extremamente}(x) = [\mu_A(x)]^3$
- *Muitíssimo*
  - $\mu_A^{muitíssimo}(x) = [\mu_A^{muito}(x)]^2 = [\mu_A(x)]^4$

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Mais ou menos*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Mais ou menos*
  - $\mu_A^{maisoumenos}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Mais ou menos*
  - $\mu_A^{maisoumenos}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$
- *Certamente*

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Mais ou menos*
  - $\mu_A^{maisoumenos}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$
- *Certamente*
  - $\mu_A^{certamente}(x) = \begin{cases} 2[\mu_A(x)]^2 & \text{se } 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2 & \text{se } 0.5 < \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$

Variáveis Linguísticas

Hedges frequentemente usados

- *Mais ou menos*
  - $\mu_A^{maisoumenos}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$
- *Certamente*
  - $\mu_A^{certamente}(x) = \begin{cases} 2[\mu_A(x)]^2 & \text{se } 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2 & \text{se } 0.5 < \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$
- Essas definições, contudo, podem ser modificadas, adequando-se ao domínio em questão

Lógica *Fuzzy*

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos

Lógica *Fuzzy*

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)
    - Nessa notação, $T(Alto(Pedro)) = \mu_{Alto}(Pedro)$

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)
    - Nessa notação, $T(Alto(Pedro)) = \mu_{Alto}(Pedro)$
  - $T(A \vee B) = max(T(A), T(B))$ (união de conjuntos)

Lógica *Fuzzy*

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)
    - Nessa notação, $T(Alto(Pedro)) = \mu_{Alto}(Pedro)$
  - $T(A \vee B) = max(T(A), T(B))$ (união de conjuntos)
  - $T(\neg A) = 1 - T(A)$ (complemento de um conjunto)

Lógica *Fuzzy*

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)
    - Nessa notação, $T(Alto(Pedro)) = \mu_{Alto}(Pedro)$
  - $T(A \vee B) = max(T(A), T(B))$ (união de conjuntos)
  - $T(\neg A) = 1 - T(A)$ (complemento de um conjunto)
- Estes, contudo, podem ser customizados se necessário

Lógica *Fuzzy*

Operadores

- Os operadores padrão para avaliar a veracidade de sentenças complexas seguem suas definições correspondentes em conjuntos
  - $T(A \wedge B) = min(T(A), T(B))$ (interseção de conjuntos)
    - Nessa notação, $T(Alto(Pedro)) = \mu_{Alto}(Pedro)$
  - $T(A \vee B) = max(T(A), T(B))$ (união de conjuntos)
  - $T(\neg A) = 1 - T(A)$ (complemento de um conjunto)
- Estes, contudo, podem ser customizados se necessário
  - Ex: Podemos fazer $T(A \wedge B) = T(A) \times T(B)$

Operadores – Problema

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$
  - Então $T(Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), T(Pesado(Pedro))) = 0,4$

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$
  - Então $T(Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), T(Pesado(Pedro))) = 0,4$
  - Parece razoável

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$
  - Então $T(Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), T(Pesado(Pedro))) = 0,4$
  - Parece razoável
- E $T(Alto(Pedro) \wedge \neg Alto(Pedro))$?

Lógica *Fuzzy*

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$
  - Então $T(Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), T(Pesado(Pedro))) = 0,4$
  - Parece razoável
- E $T(Alto(Pedro) \wedge \neg Alto(Pedro))$?
  - $T(Alto(Pedro) \wedge \neg Alto(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), 1 - T(Alto(Pedro))) = 0,4$

Lógica *Fuzzy*

Operadores – Problema

- Suponha que sabemos que $T(Alto(Pedro)) = 0,6$ e $T(Pesado(Pedro)) = 0,4$
  - Então $T(Alto(Pedro) \wedge Pesado(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), T(Pesado(Pedro))) = 0,4$
  - Parece razoável
- E $T(Alto(Pedro) \wedge \neg Alto(Pedro))$?
  - $T(Alto(Pedro) \wedge \neg Alto(Pedro)) = min(T(Alto(Pedro)), 1 - T(Alto(Pedro))) = 0,4$
  - Soa, no mínimo, estranho...

Lógica *Fuzzy*

Inferência

Lógica *Fuzzy*

Inferência

- Processo de mapeamento de uma entrada a uma saída, usando a teoria de conjuntos nebulosos

Lógica *Fuzzy*

Inferência

- Processo de mapeamento de uma entrada a uma saída, usando a teoria de conjuntos nebulosos
- Baseia-se em conjuntos de **Regras Fuzzy**

Lógica *Fuzzy*

Inferência

- Processo de mapeamento de uma entrada a uma saída, usando a teoria de conjuntos nebulosos
- Baseia-se em conjuntos de **Regras Fuzzy**
  - Condicionais na forma "`SE x é A ENTÃO y é B`"

    Onde x e y são variáveis linguísticas, e A e B são valores linguísticos determinados por conjuntos nebulosos no universo dos discursos X e Y, respectivamente

Lógica *Fuzzy*

Inferência

- Processo de mapeamento de uma entrada a uma saída, usando a teoria de conjuntos nebulosos
- Baseia-se em conjuntos de **Regras Fuzzy**
  - Condicionais na forma "`SE x é A ENTÃO y é B`"

    Onde x e y são variáveis linguísticas, e A e B são valores linguísticos determinados por conjuntos nebulosos no universo dos discursos X e Y, respectivamente
- Note que essas não são booleanas

Lógica *Fuzzy*

Inferência

- Processo de mapeamento de uma entrada a uma saída, usando a teoria de conjuntos nebulosos
- Baseia-se em conjuntos de **Regras Fuzzy**
  - Condicionais na forma "`SE x é A ENTÃO y é B`"

    Onde x e y são variáveis linguísticas, e A e B são valores linguísticos determinados por conjuntos nebulosos no universo dos discursos X e Y, respectivamente
- Note que essas não são booleanas
  - $x = Pedro$ ser $A = Alto$ não o remove completamente de outros conjuntos, como *Mediano* e *Baixo*

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:
  - Avaliar o antecedente (SE)

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:
  - Avaliar o antecedente (SE)
  - Executar a implicação $\rightarrow$ aplicar o resultado ao consequente (ENTÃO)

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:
  - Avaliar o antecedente (SE)
  - Executar a implicação $\rightarrow$ aplicar o resultado ao consequente (ENTÃO)
- Em sistemas nebulosos, contudo, o antecedente também é nebuloso

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:
  - Avaliar o antecedente (SE)
  - Executar a implicação $\rightarrow$ aplicar o resultado ao consequente (ENTÃO)
- Em sistemas nebulosos, contudo, o antecedente também é nebuloso
  - Todas as regras são ativadas, pelo menos parcialmente

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- O raciocínio com regras fuzzy compreende:
  - Avaliar o antecedente (SE)
  - Executar a implicação $\rightarrow$ aplicar o resultado ao consequente (ENTÃO)
- Em sistemas nebulosos, contudo, o antecedente também é nebuloso
  - Todas as regras são ativadas, pelo menos parcialmente
  - Isso porque se o antecedente é verdadeiro com um certo grau de pertinência, então o consequente também o será com o mesmo grau de pertinência

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Esse tipo de inferência é chamado de **Seleção Monotônica**

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Esse tipo de inferência é chamado de **Seleção Monotônica**
  - Onde o valor de pertinência do consequente pode ser estimado diretamente do valor de pertinência do antecedente

Lógica *Fuzzy* – Inferência

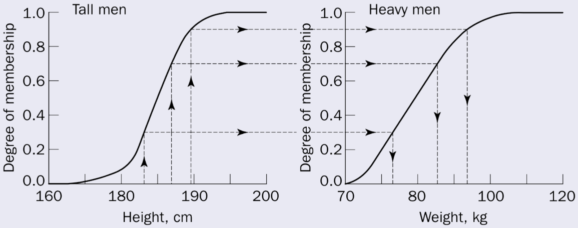
Regras *Fuzzy*

- Esse tipo de inferência é chamado de **Seleção Monotônica**
  - Onde o valor de pertinência do consequente pode ser estimado diretamente do valor de pertinência do antecedente
  - Ex: "*SE altura é Alta ENTÃO peso é Pesado*"

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Esse tipo de inferência é chamado de **Seleção Monotônica**
  - Onde o valor de pertinência do consequente pode ser estimado diretamente do valor de pertinência do antecedente
  - Ex: "*SE altura é Alta ENTÃO peso é Pesado*"



Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*
  - Todas as partes do antecedente são calculadas e resolvidas usando os operadores *fuzzy*, resultando em um único número

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*
  - Todas as partes do antecedente são calculadas e resolvidas usando os operadores *fuzzy*, resultando em um único número
  - Este é então mapeado ao consequente (seleção monotônica)

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*
  - Todas as partes do antecedente são calculadas e resolvidas usando os operadores *fuzzy*, resultando em um único número
  - Este é então mapeado ao consequente (seleção monotônica)
- E também pode ter múltiplos consequentes:

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*
  - Todas as partes do antecedente são calculadas e resolvidas usando os operadores *fuzzy*, resultando em um único número
  - Este é então mapeado ao consequente (seleção monotônica)
- E também pode ter múltiplos consequentes:
  - *SE temperatura é Quente ENTÃO água_quente é Muita; água_fria é Pouca*

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Regras *Fuzzy*

- Uma regra pode ter múltiplos antecedentes
  - *SE duração é Longa* $\wedge$ *caixa é Baixo ENTÃO risco é Alto*
  - Todas as partes do antecedente são calculadas e resolvidas usando os operadores *fuzzy*, resultando em um único número
  - Este é então mapeado ao consequente (seleção monotônica)
- E também pode ter múltiplos consequentes:
  - *SE temperatura é Quente ENTÃO água_quente é Muita; água_fria é Pouca*
  - Nesse caso, todas as partes do consequente são afetadas igualmente pelo antecedente (mesmo valor de pertinência)

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...
- Constitui de 4 passos:

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...
- Constitui de 4 passos:
  - Fuzzificação das variáveis de entrada

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...
- Constitui de 4 passos:
  - Fuzzificação das variáveis de entrada
  - Aplicação das regras

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...
- Constitui de 4 passos:
  - Fuzzificação das variáveis de entrada
  - Aplicação das regras
  - Agregação das saídas das regras

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de (Ebrahim) Mamdani (1975)

- Técnica comum de inferência
  - Há outras, contudo...
- Constitui de 4 passos:
  - Fuzzificação das variáveis de entrada
  - Aplicação das regras
  - Agregação das saídas das regras
  - Defuzzificação

Lógica *Fuzzy* – Inferência

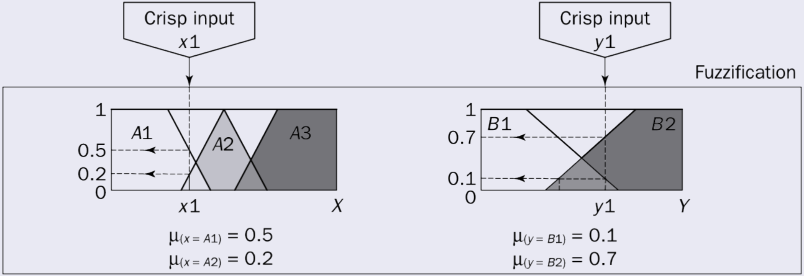
Técnica de Mamdani – Exemplo

- Considere as seguintes regras:
  1. $SE\ x\ é\ A_3 \vee y\ é\ B_1\ ENTÃO\ z\ é\ C_1$
  2. $SE\ x\ é\ A_2 \wedge y\ é\ B_2\ ENTÃO\ z\ é\ C_2$
  3. $SE\ x\ é\ A_1\ ENTÃO\ z\ é\ C_3$
- Onde
  - x, y e z são variáveis linguísticas
  - A_1, A_2 e A_3 são valores linguísticos (não numéricos) representados por conjuntos nebulosos no universo de discurso X
  - B_1 e B_2, e C_1, C_2 e C_3 correspondem aos universos Y e Z

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

1. Fuzzificação das variáveis de entrada
   - Determina o grau com que as entradas (valores numéricos) pertencem a cada conjunto nebuloso

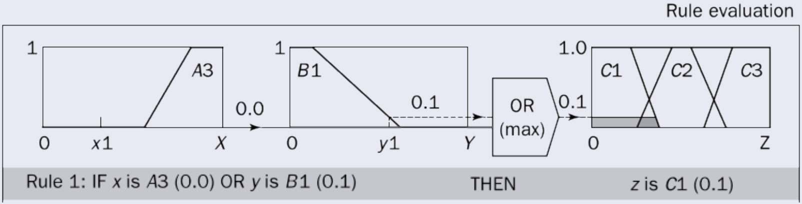


Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

2. Aplicação das regras
   - Aplicação das entradas fuzzificadas aos antecedentes das regras, cujo resultado é então aplicado ao seus consequentes

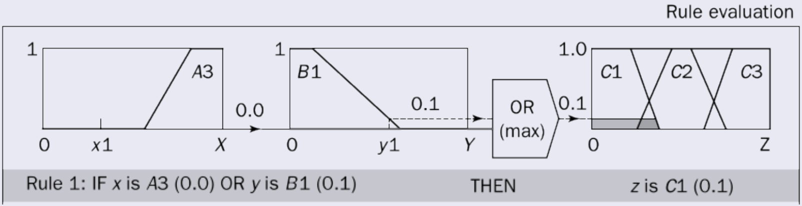


Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

2. Aplicação das regras
   - Aplicação das entradas fuzzificadas aos antecedentes das regras, cujo resultado é então aplicado ao seus consequentes

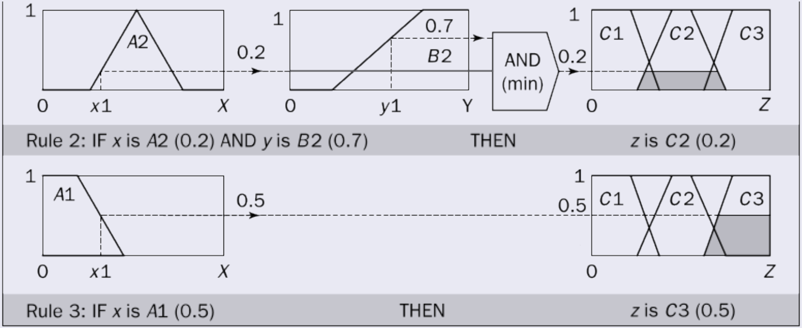


Fonte: AI. Negnevitsky.

   - Note a aplicação de $T(A \vee B) = max(T(A), T(B))$

Técnica de Mamdani – Exemplo

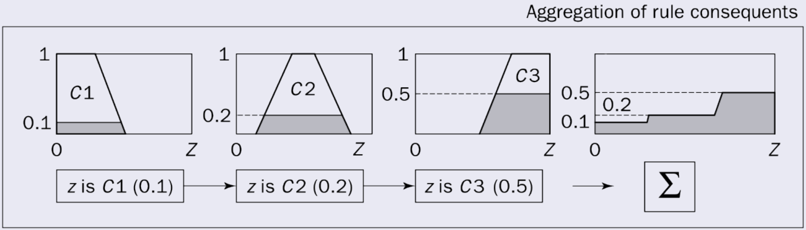
2. Aplicação das regras (cont.)



Fonte: AI. Negnevitsky.

Técnica de Mamdani – Exemplo

3. Agregação das saídas das regras
   - Processo de unificação das saídas de todas as regras

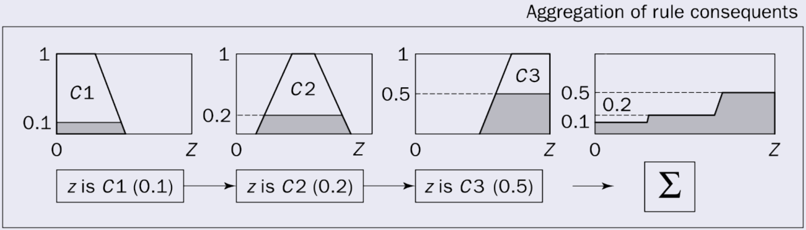


Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

3. Agregação das saídas das regras
   - Processo de unificação das saídas de todas as regras



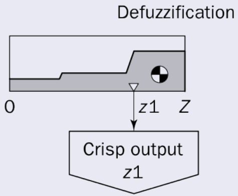
Fonte: AI. Negnevitsky.

   - Ao unirmos simplesmente definimos o grau de pertinência de cada valor C_i em Z

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

4. Defuzzificação
   - O resultado final de um sistema nebuloso tem que ser um valor – uma resposta final ao problema

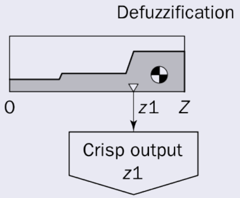


Fonte: AI. Negnevitsky.

Lógica *Fuzzy* – Inferência

Técnica de Mamdani – Exemplo

4. Defuzzificação
   - O resultado final de um sistema nebuloso tem que ser um valor – uma resposta final ao problema



Fonte: AI. Negnevitsky.

   - Há várias técnicas para calcular isso. Uma delas é a **Técnica do Centróide**

Lógica *Fuzzy* – Técnica de Mamdani

Defuzzificação – Técnica do Centróide

- Busca o ponto de divisão do conjunto em duas massas iguais

Lógica *Fuzzy* – Técnica de Mamdani

Defuzzificação – Técnica do Centróide

- Busca o ponto de divisão do conjunto em duas massas iguais
  - Ou seja, busca o **centro de gravidade** do conjunto

$$CG = \frac{\int_a^b \mu_A(x)x dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx}$$

Lógica *Fuzzy* – Técnica de Mamdani

Defuzzificação – Técnica do Centróide

- Busca o ponto de divisão do conjunto em duas massas iguais
  - Ou seja, busca o **centro de gravidade** do conjunto

$$CG = \frac{\int_a^b \mu_A(x)x dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx}$$

  - E temos o centro de gravidade do conjunto nebuloso A no intervalo $[a, b]$

Lógica *Fuzzy* – Técnica de Mamdani

Defuzzificação – Técnica do Centróide

- Essa função, contudo, é calculada sobre um contínuo de pontos

Lógica *Fuzzy* – Técnica de Mamdani

Defuzzificação – Técnica do Centróide

- Essa função, contudo, é calculada sobre um contínuo de pontos
  - Podemos aproximar essa função calculando o centro de gravidade em uma amostra de pontos

$$CG = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)}$$

Referências

- Russell, S.; Norvig P. (2010): Artificial Intelligence: A Modern Approach. Prentice Hall. 3a ed.
  - Slides do livro: aima.eecs.berkeley.edu/slides-pdf/
- Negnevitsky, M. (2005): Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems. Addison-Wesley. 2a ed.
- ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-034Spring-2005/LectureNotes/index.htm
- https://artint.info/html/ArtInt_335.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Frame_problem
- http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/logica_borrosa/web/fuzzy_inferencia/main_en.htm