Processamento espectral

Prof. Regis Rossi A. Faria

EACH
Escola de Artes, Ciências e Humanidades
Universidade de São Paulo

Rev. Sem1/2021

Requisitos

- Para compreensão do processamento espectral é necessário compreender
  - O conceito de frequência, que é a variável ou parâmetro analisado e/ou manipulado
  - A representação de sinais no domínio da frequência
  - As transformações de Fourier, incluindo a FFT (*Fast Fourier Transform*), que permitem obter as representações do sinais em frequência ou representações espectrais

Tópicos

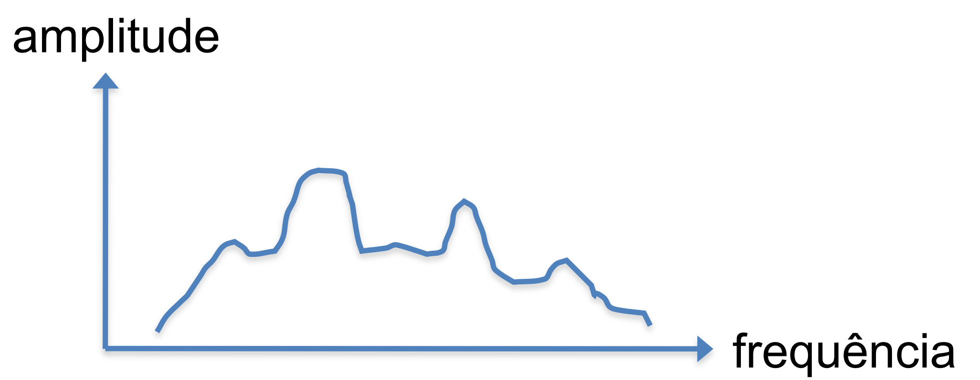
- Conceitos fundamentais
  - Frequência
  - Representação de sinal no domínio do tempo X domínio da frequência
  - Transformações de Fourier e FFT
- Processamentos espectrais típicos
  - Filtragem e filtros típicos
  - Equalização

Conceitos sobre frequência

- Indica a presença de sinais periódicos, cujos períodos se repetem com uma taxa medida por ciclos na unidade de tempo
- Frequência analógica em ciclos/seg e em radianos/seg
- Frequência digital
- Conceito de bins

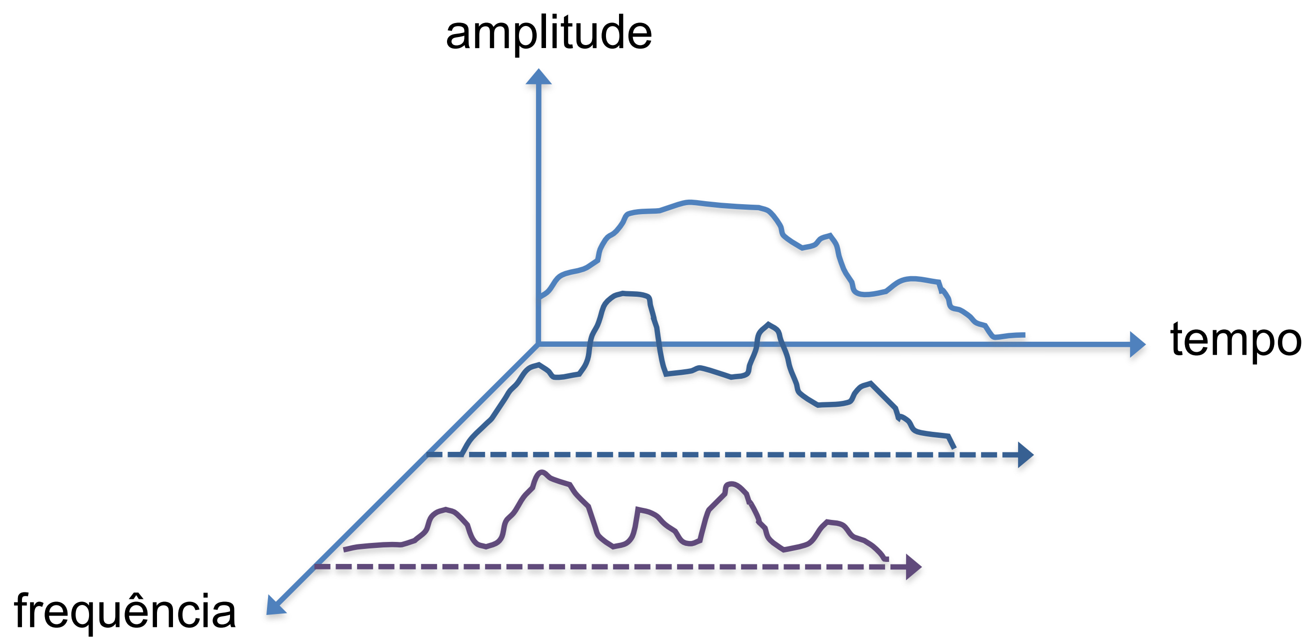
Representação espectral

- Os *espectros* sonoros são diagramas de amplitude *versus* frequência (isto é, diagramas relacionando *A x f*) que permitem avaliar o conteúdo de frequências de um sinal sonoro



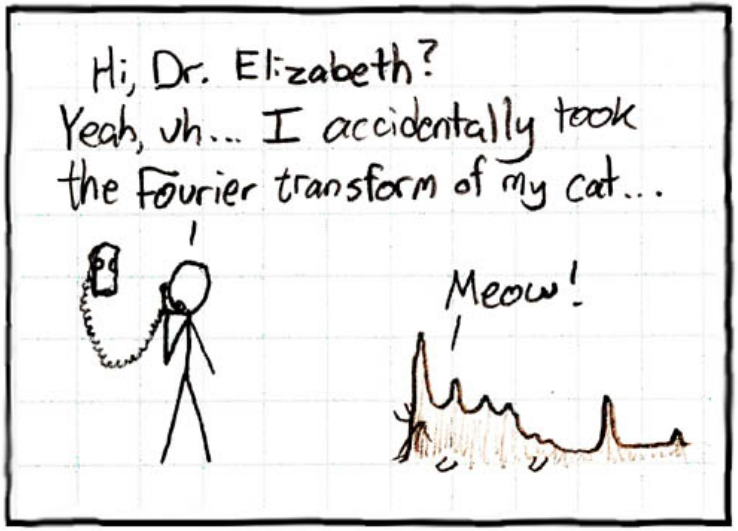
Representação espectral

- Como oconteúdo de frequências varia ao longo do tempo, usamos os *espectrogramas*, ferramentas que permitem avaliar o conteúdo espectral em cada trecho do sinal ao longo do tempo, gerando diagramas que relacionam $A \times f \times t$



Transformações de Fourier

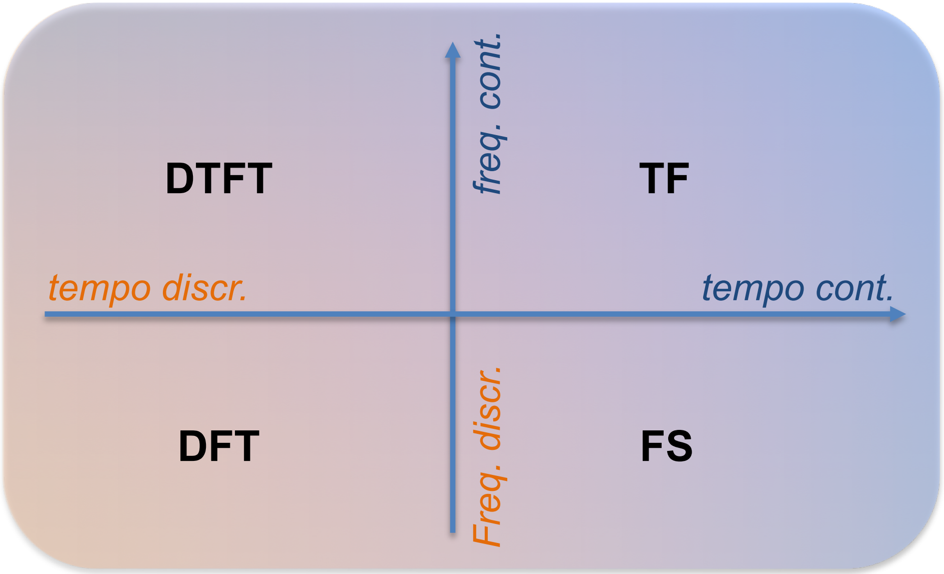
- Uma transformada ou transformação é uma operação que permite mapear o sinal de um domínio (ex: do tempo) para outro domínio (ex: da frequência), onde seja mais fácil caracterizar uma propriedade do sinal
- A mais fundamental delas é baseada na teoria desenvolvida pelo matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



- A transformação de Fourier baseia-se no conceito de que *um sinal complexo pode ser decomposto em uma somatória de sinais senoidais (tons puros*)

Transformações de Fourier

- São 4 tipos de transformações ou transformadas:
  - A série de Fourier (*t contínuo, f discreta*) ou FS
  - A transformada de Fourier (*t e f contínuos*) ou TF
  - A transformada de tempo discreta (*t discreto, f contínua*) ou DTFT
  - A transformada discreta de Fourier (DFT) e a FFT (*t e f discretos*)



Transformações de Fourier

- Leitura:
  - Notas em Matemática Aplicada, v. 38 (série disponível no site da SBMAC - Soc. Bras. de Matemática Aplicada e Computacional https://proceedings.science/notas-sbmac).
    - Carvalho, Paulo Cezar P. *Métodos Matemáticos e Computacionais em Música.* **Volume 38**. São Carlos, SP : SBMAC, 2009, 108 p. Cap. 2: Processamento de sinais sonoros: Modelo Espectral de Sinais e Transformada de Fourier, p.24-27. (capítulo disponível no edisciplinas)
    - Sampaio, Rubens et al. *Análise e Processamento de Sinais*. **Volume 22**. São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 130 p. Cap. Recomendados: 1.3 (Transformada de Fourier); 1.4 (Convolução); 2.4 (Amostragem de sinais contínuos); 2.6 (Transformada Discreta de Fourier DFT); (baixe o livro grátis no site da SBMAC)
- Vídeos:
  - Velaroo, V. *Short-Time Fourier Transform Explained Easily*, https://www.youtube.com/watch?v=-Yxj3yfvY-4, 2020.

A série e a transformada de Fourier

- Uma função *f(t)* ***periódica*** (com período T) pode ser expressa por uma soma trigonométrica como abaixo (denominada a série de Fourier):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \cos(2\pi 2 f_0 t) + \cdots + b_1 \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) + b_2 \operatorname{sen}(2\pi 2 f_0 t) + \cdots =$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \cdots + b_k \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)] =$$

$$f(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) \text{ onde } E_0 = \frac{a_0}{2}, E_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ e } \theta_k = arctg\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i2\pi k f_0 t} \text{ onde } F_k = |F_k| e^{-i\theta_k} \text{ onde } |F_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ e } \theta_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

- F_k é o coeficiente da série, que é um *número complexo*, podendo ser decomposto numa parte real e outra imaginária

$$\rightarrow F_k = |F_k| \cos(\theta_k) + i |F_k| sen(\theta_k)$$

- E F_k (*série discreta*) pode ser obtido a partir de *f(t) (contínua e periódica)*:

$$F_k = F(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

A série e a transformada de Fourier

- Quando $f_0 \rightarrow 0$, a série de Fourier converge para uma integral, que é a expressão da Transformada de Fourier (TF):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$, cuja inversa é dada por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Estas expressões tem as propriedades: *somável, linear*
- Nesta formulação, *f(t)* e $F(\omega)$ são *aperiódicas* e contínuas
- Usando a fórmula de Euler, podemos expressar

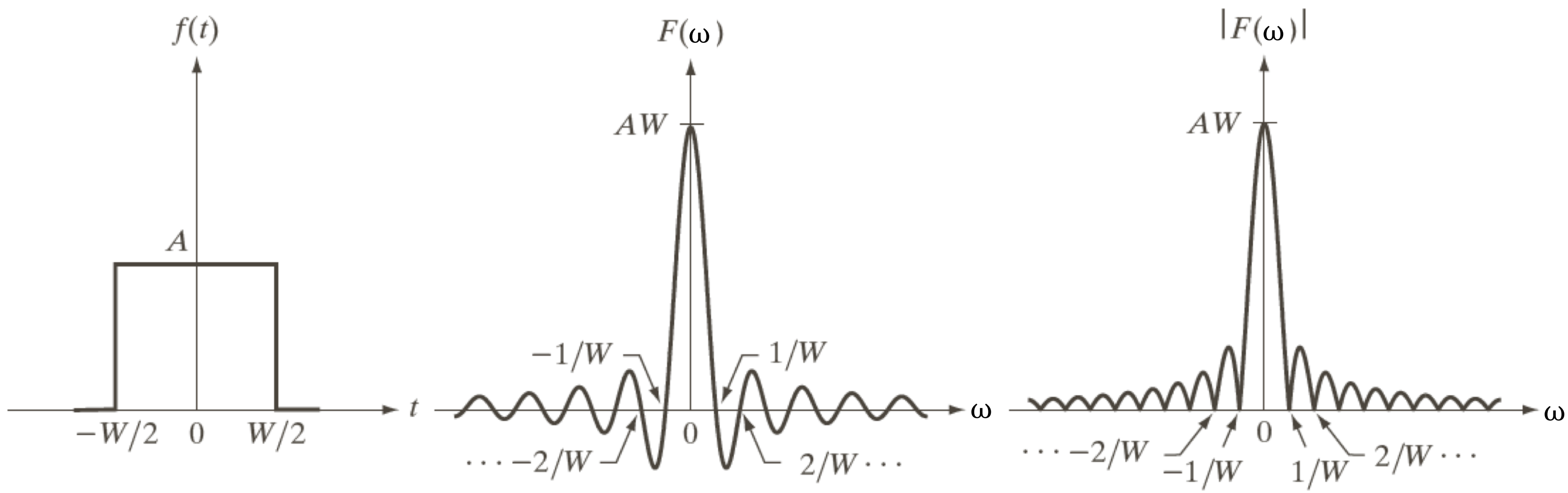
$F(\omega) = R_{TF}(\omega) + iI_{TF}(\omega)$ e a magnitude da TF será $|F(\omega)| = \sqrt{R_{TF}^2 += I_{TF}^2}$

- Esta magnitude é o chamado ***Espectro*** de Fourier, que é a quantidade expressa nos espectrogramas
- O quadrado do espectro – *chamado de espectro de potência ou densidade espectral de potência* – é uma expressão da energia do sinal, dada por

$$P(\omega) = |F(\omega)|^2 = R_{TF}^2 += I_{TF}^2$$

A série e a transformada de Fourier

- Exemplo: A função *f(t)* abaixo é um clássico envelope ou janela retangular. Sua transformada de Fourier é a função *sinc*, dada por $F(\omega)$ abaixo. O espectro da janela retangular é dada pela magnitude $|F(\omega)|$.



Manipulando frequências

- Frequências contínuas:
  - Freq. Hertziana de sinais sonoros: f (Hz) (ciclos/s) tem dimensão de 1/s = s^{-1}
  - Freq. angular: ω (radianos/s) = 2.pi.f
  - Freq. de amostragem: f_a (amostras/segundo) = 1/T, onde T = período (s)
- Frequências discretas:
  - Freq. digital: F = f/f_a (ciclos/s*s/amostras) = f/f_a (ciclos/amostra)
  - Freq. angular digital = Ω = 2.pi.f/f_a = ω/f_a (rad/s*s/am) = ω/f_a (rad/amostra)
- F = f/f_a = k/N → f (Hz) = k . f_a/N (1/s)

número de bins

número de amostras (tamanho do bloco em análise)

  - Ω digital = ω/f_a = 2.pi. k/N → ω = k (no. de bins).2.pi. f_a /N (rad/s)
  - Ω (rad/am) = 2.pi.k/N (rad/am)
- Relações úteis:
  - f = k.fa/N e t = n.T
  - $2\pi . f . t = 2\pi . k . \frac{f_a}{N} . nT = 2\pi . k . \frac{1}{T.N} . nT = \frac{2\pi}{N} nk$

Bins de frequência são intervalos entre amostras no domínio da frequência. Ex: se a taxa de amostragem é f_a = 100 Hz e o tamanho da FFT é N=100, então há 100 pontos entre [0 100) Hz → a faixa de 100 Hz está dividida em 100 pontos, como 0-1 Hz, 1-2 Hz etc. Cada um desses pequenos intervalos é um bin de frequência.

A transformada discreta de Fourier

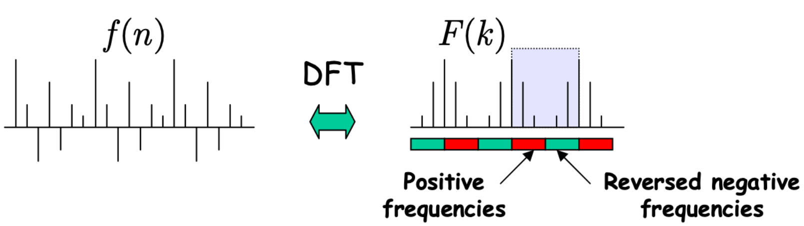
- Quando mapeamos 2π rad sobre a faixa finita de amostragem de f_a Hz, temos que no domínio da frequência o espectro é periódico e simétrico em relação à origem. O domínio da TDF será das frequências positivas [0 a π)+[π a 2π)→[0,f_a/2) e de [f_a/2 a f_a). Isso implica na periodicidade assumida de *f(n)* em N (extensão do bloco de amostras).
- A expressão da análise é:
  - $F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$

É isto que a FFT (transformada rápida de Fourier) calcula

k: índice de frequência discreta | n: índice de tempo discreto

N: extensão do bloco de amostras

- A expressão da síntese ou inversa da análise é:
  - $f(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(k) e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$



Transformada Rápida de Fourier

- Embora conhecida desde a primeira metade do século XIX, a clássica Transformada de Fourier, tornou-se um instrumento popular e indispensável em análise espectral em decorrência do invento do algoritmo da *Transformada Rápida de Fourier*, a FFT (*Fast Fourier Transform*)
- Publicado primeiro por Cooley e Tukey em 1965, hoje há muitas variações, adições e versões melhoradas do algoritmo de FFT acessíveis na literatura específica
- Usando-se a FFT os programas de análise espectral calculam e constroem espectros e sonogramas/espectrogramas em tempo real

A transformada de Fourier de tempo curto

- A chamada Transformada de Fourier de Tempo Curto ou *Short-time Fourier Transform (STFT)* é simplesmente a aplicação da transformada de Fourier em fatias do sinal no domínio do tempo
- A STFT é o algoritmo básico construtor dos espectrogramas
- Os seguintes conceitos principais estão envolvidos na operação
  - Princípio de (en)janelamento e deslizamento de janelas por um certo número de amostras
  - Superposição de janelas (*overlap and add*)
  - Balanço entre a resolução de frequência X resolução temporal, que são finitas e recíprocas uma da outra

STFT

- A Transformada de Fourier de Tempo curto (STFT) ou Transformada (en)janelada de Fourier na forma discreta pode ser expressa como:

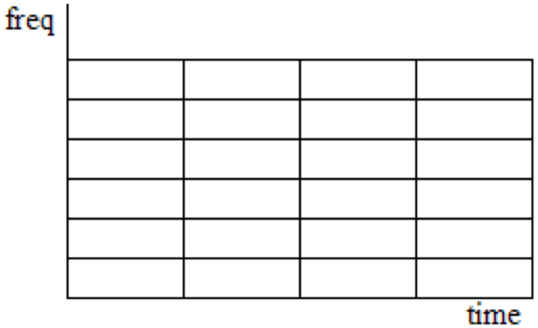
$$F(m,k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)w(n-m)e^{-i\omega_0 \omega k n}$$

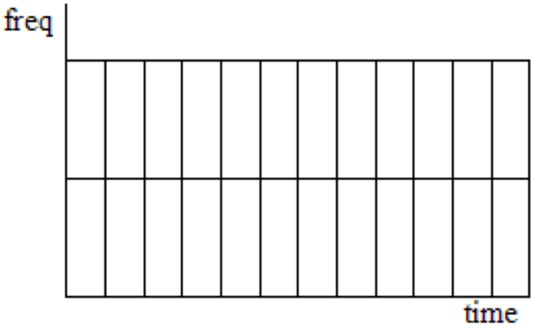
onde w é a janela que seleciona a parte de f(t) sob análise

- Isto corresponde a uma TF da convolução de *f* e a janela *w*: *f(t).w(m-t)dt = s(m-v).w(v)dv* → o que pode levar à interpretação da STFT como um filtro.
- Considerando a propriedade de que a TF da convolução *s*w* é *S(ω).F(ω)* esta interpretação fica mais visível.

Propriedades da STFT

- Resolução do espectrograma:
  - Pela expressão, o tamanho N, o espaçamento (n-m), e o tipo de janela w irão influenciar na resolução espectral do sinal *F(m,k)* que é um sinal com 2 variáveis: uma de frequência k, e outra de tempo m (*o índice m que faz a varredura de w sobre f será a variável temporal do espectro F*)
  - Reduzindo o período de janelamento (tamanho da janela N) a resolução em frequência (do espectrograma) ficará mais grosseira (sem definição) mas a resolução temporal ficará melhor.
  - Se por outro lado aumentar N (tamanho da janela), a frequência ficará mais bem resolvida e a resolução temporal ficará menor. Este compromisso é imposto pelo princípio de incerteza de Heisenberg que diz que $\Delta t . \Delta f \geq 1/4\pi$





Propriedades da STFT

- Inversibilidade de F(m,k) e a sobreposição de janelamentos sucessivos:
  - A função F(m,k) é inversível, pressupondo a soma de sucessivas FFT (para m=0 até M-1 janelamentos).
  - Para que seja inversível, diferentes tipos de janelas w exigem diferentes espaçamentos (*hop-size*) ou deslocamentos entre cada FFT tomada. Para janelas retangulares este espaçamento é igual ao comprimento da janela, isto é, não há sobreposição entre os janelamentos. Para janelas de Hamming ou Hanning, deve haver sobreposição de 50%.

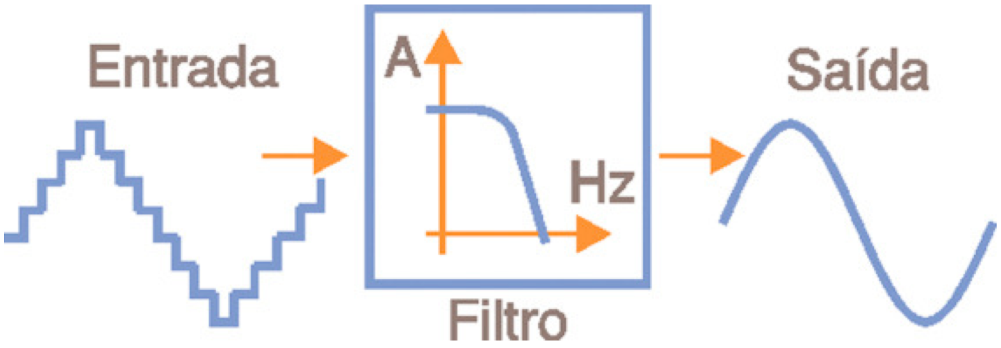
Processamentos espectrais

- As ferramentas fundamentais usadas para alterar certas frequências do som, modificando sua forma de onda, sua tonalidade, timbre e brilho, e desta forma produzindo efeitos espectrais, são os ***filtros***

Fonte imagem: http://www.sabereletronica.com.br/artigos/1539-como-funcionam-os-codecs-de-udio

Processamentos espectrais

- Os filtros são usados para produzir alterações momentâneas ou periódicas no espectro de um som, sendo idealmente projetados no *domínio da frequência*, especificando a *amplitude* de cada *frequência* do sinal
  - Para isso usamos gráficos de *amplitude (dB)* versus *frequência (f expressa em Hz ou em frequência angular ω*)

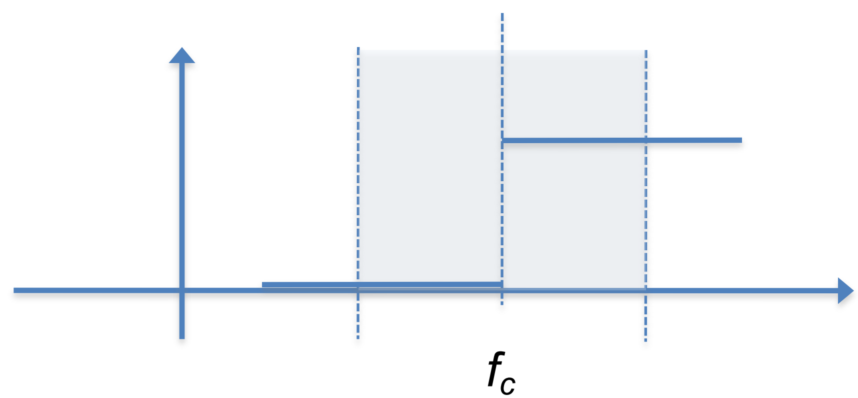


Fonte imagem: http://www.sabereletronica.com.br/artigos/1539-como-funcionam-os-codecs-de-udio

Filtros: uso

- No seu uso mais simples, um filtro é concebido para atuar a partir de uma determinada frequência f_c acima da qual ele deixa passar ou então atenua de forma progressiva a amplitude das frequências

$f_c \rightarrow$ frequência de corte

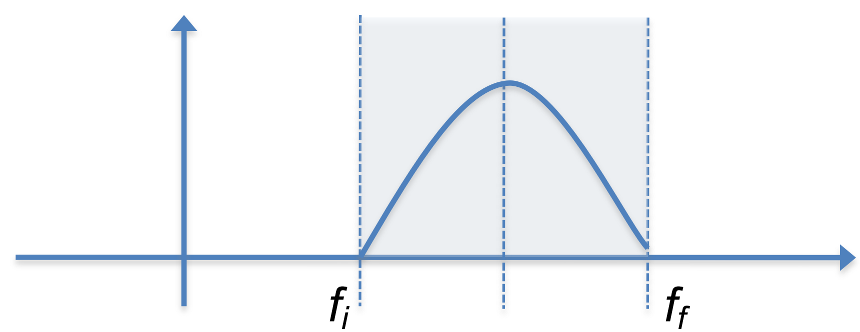


- Este comportamento em torno da frequência f_c é todavia idealizado, abrupta demais, não ocorrendo na natureza, sendo somente possível em implementações digitais

Filtros: uso

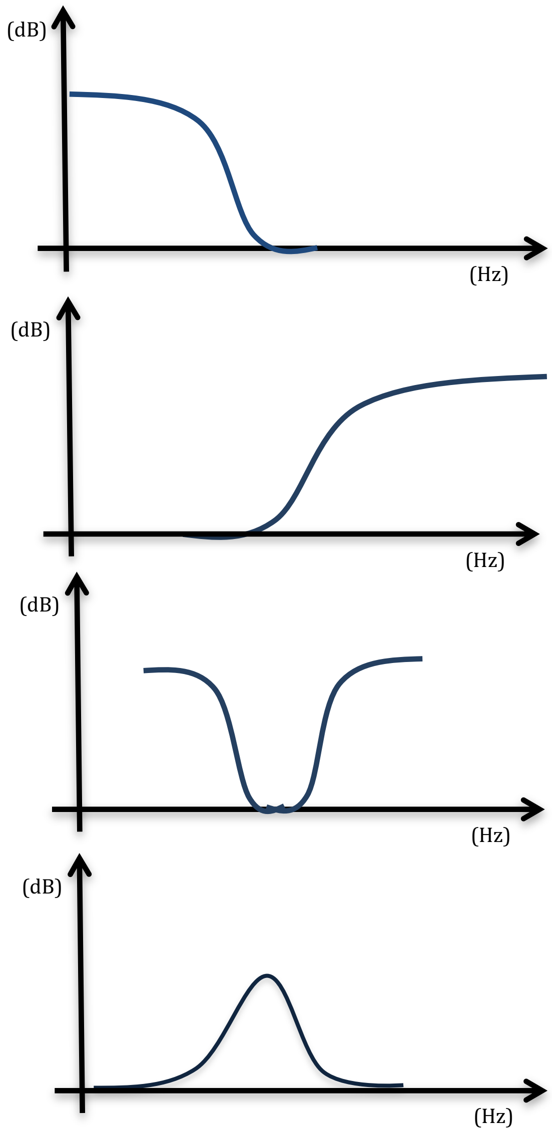
- Na prática usamos filtros para que atuem numa determinada *faixa de frequências* que queremos alterar, especificada pela sua frequência inicial (f_i) e frequência final (f_f)
- Basicamente os filtros deixarão *passar* certas frequências sem alterá-las (faixa de passagem) ou então *rejeitarão* estas frequências atenuando suas amplitudes (faixa de rejeição), e terão transições contínuas entre a passagem e a rejeição

f_i < faixa de frequências < f_f



Filtros: topologias clássicas

- Podemos descrever 4 tipos básicos de filtros
  - Passa-baixa (deixa passar as frequências abaixo de uma f_o e atenua a amplitude das frequências acima de f_o)
  - Passa-alta (deixa passar as frequências acima de uma f_o e atenua a amplitude das frequências abaixo de f_o *)*
  - *Rejeita-faixa (atenua uma faixa de frequências e deixa passar as outras)*
  - *Passa-faixa (deixa passar uma faixa de frequências e atenua as outras)*

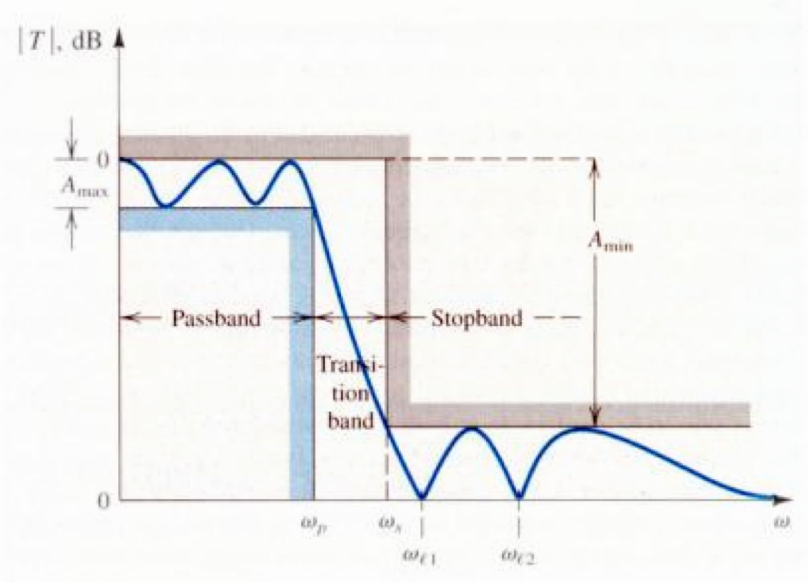


Filtros: projeto

- Os filtros são usualmente projetados no *domínio da frequência*, especificando-se as *amplitudes* para cada *faixa de frequências* do sinal
- Em projetos clássicos especificamos a amplitude da faixa (banda) de passagem, a amplitude da faixa de rejeição, e as faixas em si, delimitadas por frequências iniciais e finais de cada uma

Ex: especificações de um filtro passa-baixa

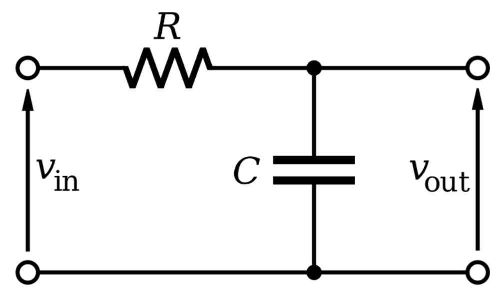
- ω_p: *freq. superior da banda passagem*
- ω_s: *freq. Inferior da banda corte*
- A_{min}: *atenuação mínima para a banda de corte*
- A_{max}: *atenuação máxima para a banda de passagem*



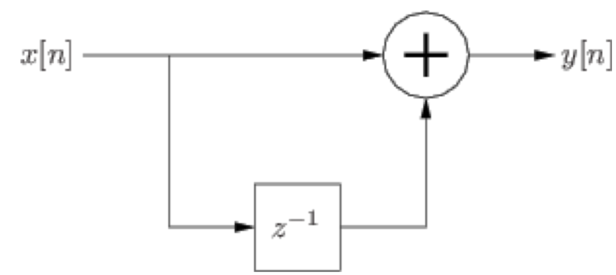
Fonte imagem: Apontamentos sobre filtros contínuos, http://cadeiras.iscte-iul.pt/cse//Folhas/Filtros/Filtros.htm

Filtros: implementação

- Os filtros podem ser implementados
  - de forma *analógica,* usando-se circuitos elétricos, ou
  - de forma *digital*, por meio de equações de diferenças em programas (algoritmos de *DSP* em *software*)



$$\frac{v_i - v_o}{R} = C\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t}$$



y[n] = x[n] + x[n - 1]

Fonte imagens: Wikipedia, Digital Filtering (McGill) em http://www.music.mcgill.ca/~gary/307/week2/filters.html#SECTION00011000000000000000, e http://groovit.disjunkt.com/analog/time-domain/timefilt.html

Filtros: implementação

- Em sua implementação digital os filtros podem ser de dois tipos
  - FIR (*finite impulse response*)
  - IIR (*infinite impulse response*) ou recursivos
- Exemplo
  - Filtro pente (*comb filter*)

Saiba mais sobre Filtros

- Ver o capítulo sobre Filtros do livro do Miller Puckette em http://msp.ucsd.edu/techniques/latest/book-html/node127.html
- E os exemplos de filtros “pré-fabricados” em http://msp.ucsd.edu/techniques/latest/book-html/node156.html
- O próximo *slide* traz também exemplos de filtros construídos no programa Pd (Pure Data)

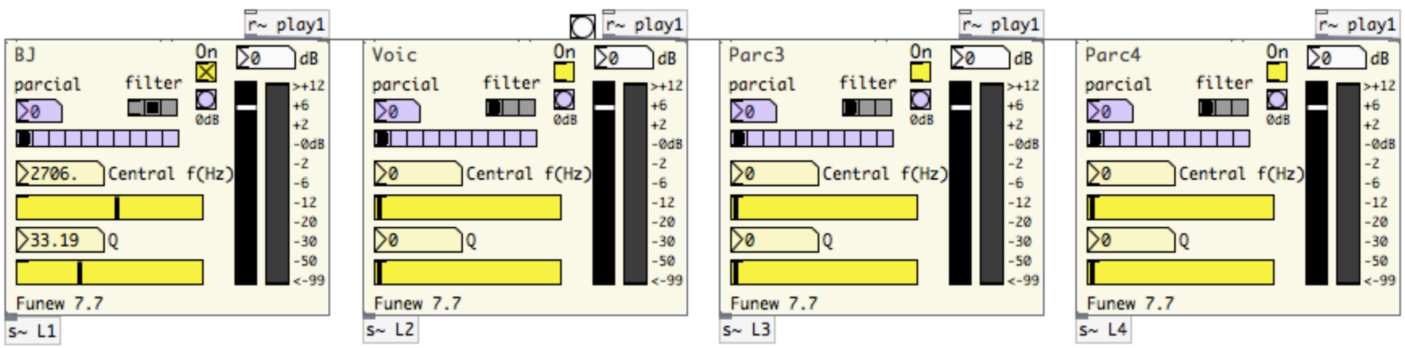
Filtros: exemplos

- Topologias fundamentais
  - Usando o programa Pd, abra o “browser” no menu “help/ Pure Data/3.audio.examples” e abra os *patches* de filtros fundamentais:
    - H01 (passa-baixa)
    - H02 (passa-alta)
    - H03 (passa-banda)

- Para definir o comportamento do filtro ao longo das frequências, determinando por exemplo a *forma da curva*, o grau de sua *atenuação* em *dB por oitavas* e a *faixa* em que opera usamos técnicas de projeto de filtros sofisticadas que estão além do escopo deste curso.

Exemplos de Filtros

- REACTIVE Funew: filtro harmônico progressivo, desenvolvido no LATM para o desenvolvimento de ferramentas para processamento e criação musical reativas



Glossário sobre filtros

- Parâmetros essenciais para trabalhar com filtros incluem
  - Frequência de corte (f_c) ou frequência inferior e superior de bandas de passagem/rejeição (*passband*/*stopband*)
    - onde em f_c a potência do sinal cai pela metade, isto é, a atenuação é -3dB
  - Grau de atenuação (em dB/oitavas ou dB/décadas)
  - Ordem do filtro
  - Largura de banda de passagem/rejeição
  - Fator de qualidade Q, onde $Q = \frac{f_c}{\Delta}$

Equalização

- Equalização (EQ) são transformações realizadas sobre o conteúdo espectral do sinal, isto é, sobre $S(\omega)$ com ω em rad/s [ou $S(f)$ com f em Hz]
- As operações envolvidas implicam em *atenuar* ou *amplificar* o ganho do sinal $S(\omega)$, isto é, aumentar ou reduzir a amplitude do espectro em cada frequência ω (isto é, em cada frequência $f = \omega/2\pi$) de uma determinada faixa de frequências
- Estas operações fazem uso de filtros que agem sobre uma faixa de frequências determinada por projeto, atenuando ou amplificando o ganho na faixa

Equalização

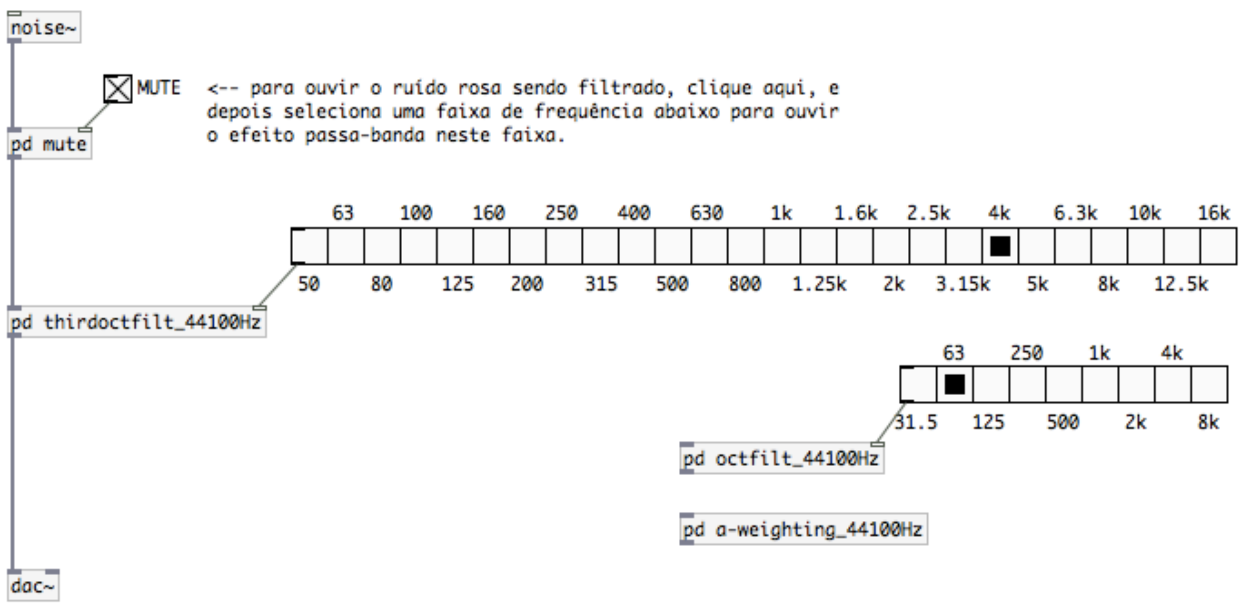
- Usando-se uma série de filtros de EQ atuando em faixas contíguas de frequência podemos projetar um *equalizador de banda larga*
- Este processamento tem impacto no espectro do sinal mas não acrescenta novas frequências ao sinal, sendo portanto considerado uma forma de distorção linear

Equalização

- A equalização pode ser executada tanto no *domínio do tempo* quanto no *domínio da frequência*
  - Exemplo no *domínio do tempo:* filtros analógicos
  - Exemplo no *domínio da frequência:* processadores digitais, que digitalizam s(t) em s(n), tranformam o sinal s(n) → S(ω) , operam sobre S(ω) produzindo S’(ω) e então recuperam s’(n) e sua versão analógica s’(t)

Exemplo de filtro de EQ

- Veja o patch exemplo “EQ_octave_filters.pd” que implementa filtros passa-banda usados em medições acústicas (filtros de 1/3 oitava)
- Estes filtros podem ser usados para construir um EQ



eof