

Sistemas Fuzzy

Lógica Fuzzy e Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Profa. Dra. Sarajane Marques Peres
EACH – USP

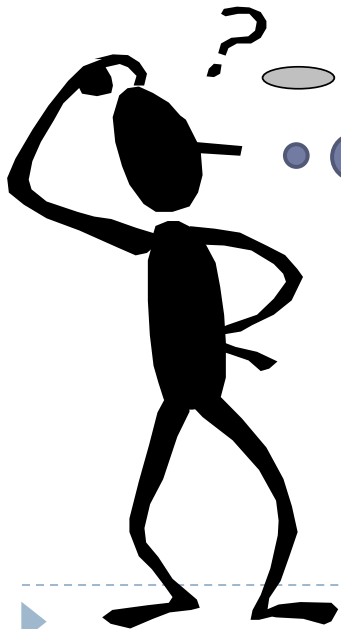
<http://each.uspnet.usp.br/sarajane/>

Lógica
Fuzzy

Introdução

LÓGICA
FUZZY ?

Lógica Nebulosa (Difusa)



Motivação: Grau de Crença vs. Grau de Verdade

- ▶ Grau de crença:
 - ▶ População composta de brancos e negros
 - ▶ Probabilidade de alguém ser branco.
- ▶ Grau de verdade:
 - ▶ A partir do momento em que escolhemos um indivíduo, a probabilidade se desfaz.
 - ▶ População de mestiços
 - ▶ Grau de verdade na afirmação “x é negro”.

Motivação: Paradoxo do Careca



- ▶ Regra: Tirar **um fio** de cabelo de uma pessoa **não a torna** careca.
- ▶ Uma pessoa, inicialmente **não-careca**, se torna careca se tirarmos seus fios de cabelo um a um. Mas, em **nenhuma das etapas ele se tornou careca**.
- ▶ Logo, **Ele se tornou careca sem se tornar careca**.
- ▶ Este paradoxo desarma a **lógica tradicional**.

Motivação: Outros Exemplos

- ▶ Grande parte da compreensão humana sobre acontecimentos dos fatos é **imprecisa e incompleta**
- ▶ Em muitos casos, a **precisão** pode ser um tanto **quanto inútil**, enquanto **instruções vagas** podem ser melhor interpretadas e realizadas

- ▶ Exemplo

- ▶ Comece a frear 10 metros antes do sinal PARE OU
 - ▶ Comece a frear quando estiver perto do sinal PARE



- ▶ Outro Exemplo

- ▶ Suponha que sua patroa tenha delegado a difícil tarefa de comprar “maças maduras”. Você poderia descrever em palavras o que seria uma maçã madura?



Motivação: Outros Exemplos

▶ Mais um Exemplo

- ▶ Ao se lançar mão da lógica clássica, é necessário se definir regras do tipo:
 - ▶ Pessoas jovens são aquelas cujas idades estão entre 0 e 20
- ▶ Mas será que a definição de “jovem” aqui está plenamente de acordo com o nosso senso desse conceito?
 - ▶ Será que uma pessoa com 20 anos e 1 dia não seria mais considerada uma pessoa jovem??



- ▶ Surgiu com *Lofti Zadeh* em 1965.
- ▶ Entre o verdadeiro e o falso, **podem existir vários valores verdade** que os fatos podem assumir
 - ▶ Falso, pouco verdadeiro, não falso e não é verdade
- ▶ Serve para representar e manipular bem informações vagas e incertas: “a maioria”, “mais ou menos”,...
- ▶ **O boom foi nos anos 80, no Japão.**
- ▶ Lógica *Fuzzy* é uma nova forma de pensamento sobre o mundo.
- ▶ É uma técnica baseada **em graus de verdade**.
 - ▶ os valores 0 e 1 ficam nas extremidades
 - ▶ inclui os vários estados de verdade entre 0 e 1

Introdução

- ▶ O conhecimento humano **é incerto, incompleto ou impreciso.**
- ▶ Ex.:Você vai para o show de Titãs?
 - ▶ talvez sim.
 - ▶ se não chover eu vou.
 - ▶ se o ingresso não for caro vou.
 - ▶ vou logo cedo.
- ▶ Muitas das frases e estimativas humanas não são facilmente definidas através de formalismos matemáticos.

- ▶ Permite soluções **mais eficientes** para problemas tratados com técnicas não-*fuzzy*.
- ▶ Reduz o **tempo de desenvolvimento**.
- ▶ Modela **sistemas não-lineares** complexos.
- ▶ Sistemas **avançados** precisam de menos **chips** e sensores.

Complexidade e Compreensão

- ▶ *Zadeh* percebeu que a complexidade do sistema vem de como as variáveis foram representadas e manipuladas.
- ▶ *Zadeh* representa o raciocínio humano em termos de conjuntos *fuzzy*.

▶ Incerteza Estocástica

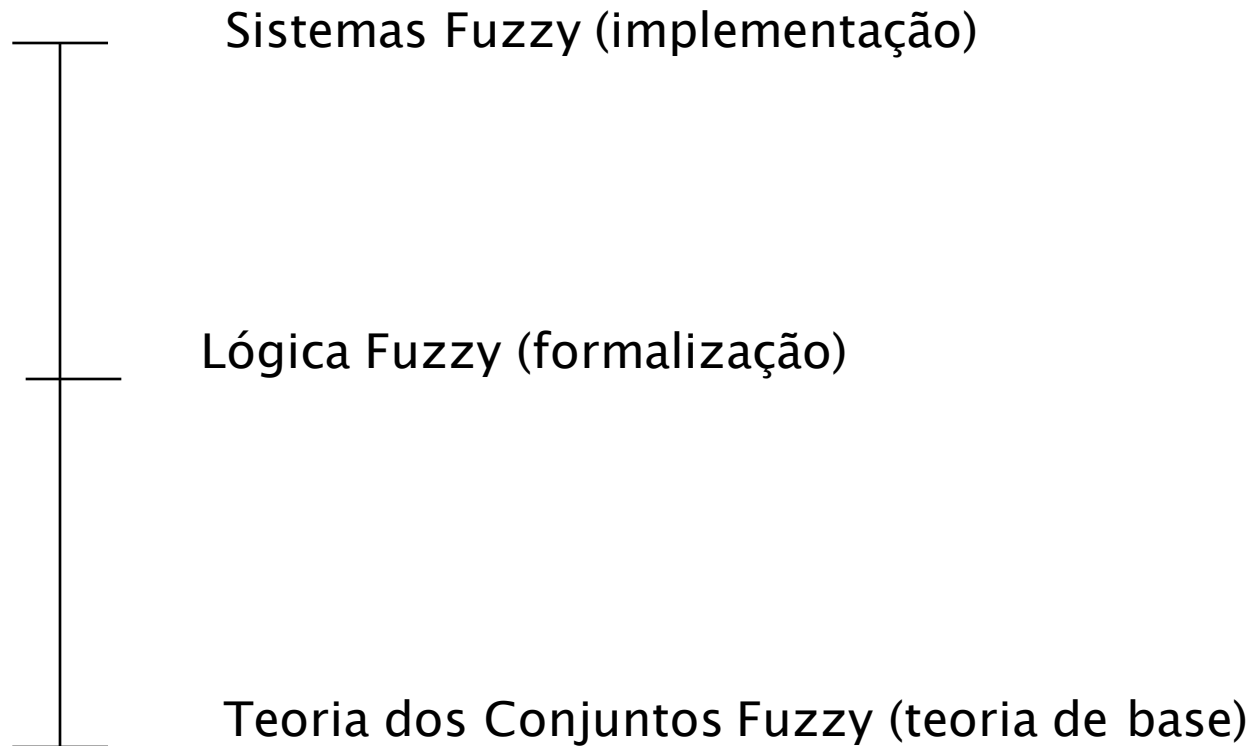
- ▶ um evento ocorre com uma dada probabilidade
- ▶ Exemplo: **jogando dados**

▶ Incerteza lingüística

- ▶ Descrição imprecisa de um objeto ou conceito
- ▶ Exemplo: **preço baixo**, pessoa alta, idade jovem

▶ Incerteza Informacional

- ▶ Incerteza causada por falta ou informação incompleta
- ▶ Exemplo: **Credibilidade, honestidade**





Conjuntos Fuzzy



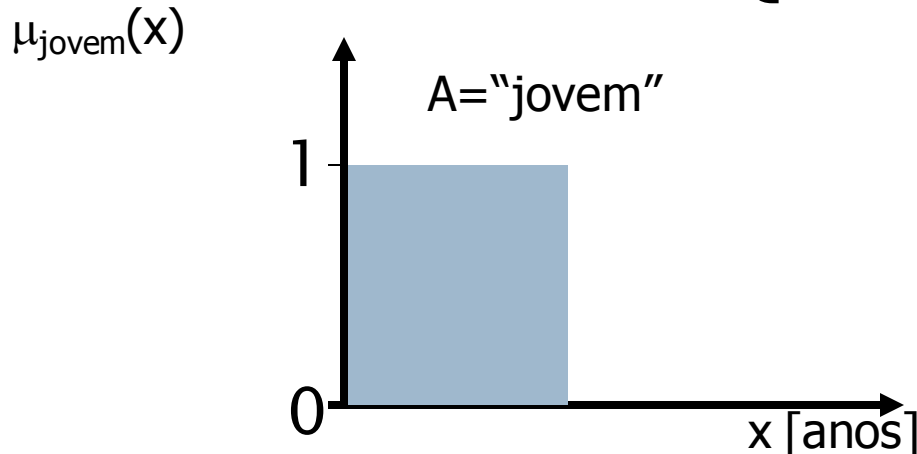
- ▶ Não é um **método específico** para qualquer aplicação.
- ▶ É mais geral que a Lógica *Fuzzy* e o cálculo das proposições *Fuzzy*.
- ▶ Suporta a lógica usada para criar e manipular sistemas *Fuzzy*.

$$\text{jovem} = \{ x \in P \mid \text{idade}(x) \leq 20 \}$$

Função característica:

Pessoas jovens são aquelas com idade menores que 20 anos

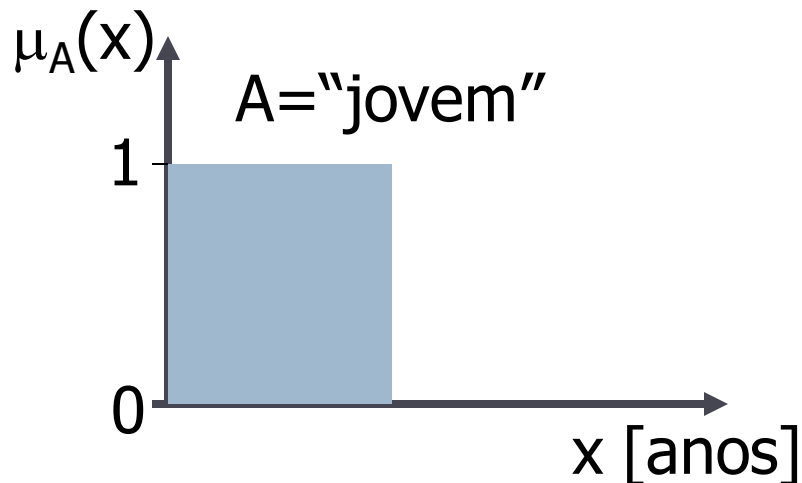
$$\mu_{\text{jovem}}(x) = \begin{cases} 1 & : \text{age}(x) \leq 20 \\ 0 & : \text{age}(x) > 20 \end{cases}$$



Lógica Clássica

Elemento x pertence ao conjunto A ou não:

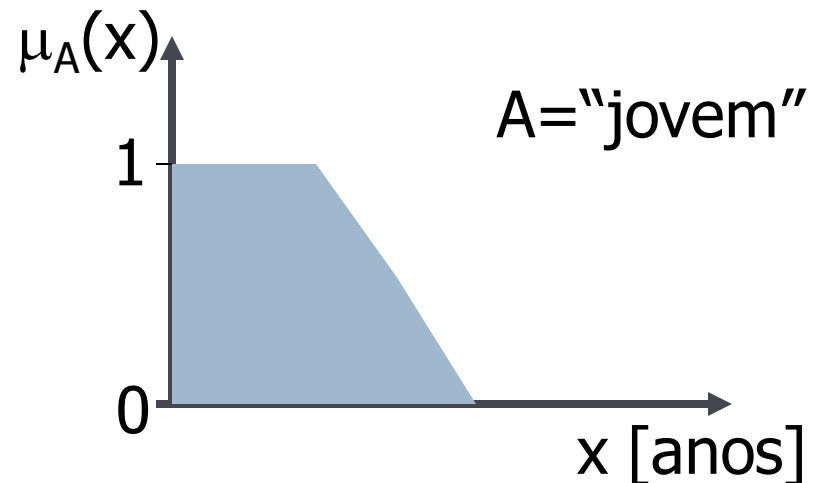
$$\mu(x) \in \{0, 1\}$$



Lógica Fuzzy

Elemento x pertence ao conjunto A com algum grau de pertinência:

$$\mu(x) \in [0, 1]$$



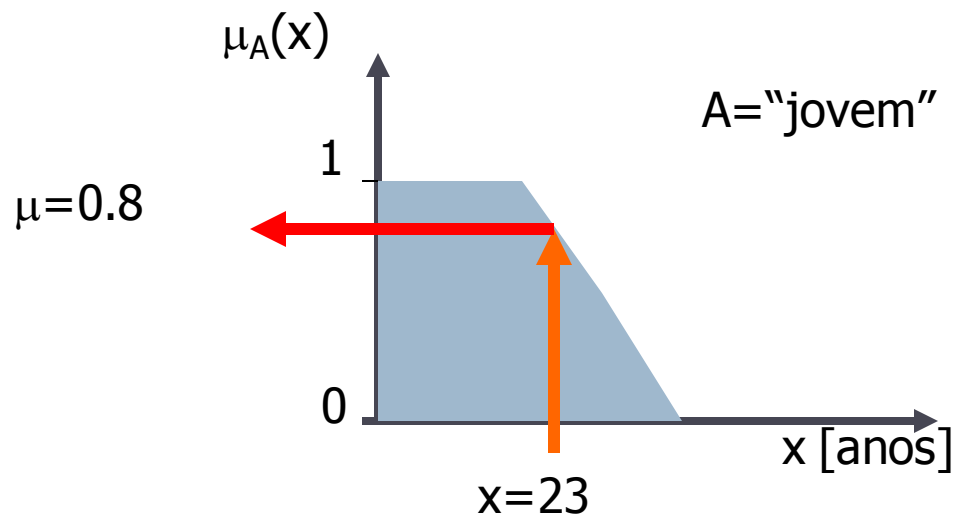
Conjuntos *Fuzzy*

- ▶ São funções que mapeiam o valor que poderia ser um membro do conjunto para um número entre 0 e 1.
- ▶ O grau de pertinência 0 indica que o valor não pertence ao conjunto.
- ▶ O grau 1 indica que o valor é uma representação completa do conjunto.
- ▶ Um conjunto *fuzzy* indica com qual grau um projeto específico é membro do conjunto de projetos LONGOS.
- ▶ A definição do que é um projeto LONGO depende do contexto.

Definição :

Conjunto Fuzzy $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$

- um universo de discurso $X : 0 \leq x \leq 100$
- uma função de pertinência $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$



Conjuntos Fuzzy

► Grau de Compatibilidade:

- Podemos falar num conjunto listando os seus elementos ou descrevendo uma característica com a qual seus elementos devem ser compatíveis.
- Nos conjuntos difusos esta compatibilidade se estende de dois valores “0” e “1” para o intervalo $[0,1]$.

► Exemplo:

- Discreto (crisp): No conjunto dos números naturais, o subconjunto dos números primos.

$$\mu_A : X \rightarrow \{0,1\} \longrightarrow$$

Função de pertinência de um conjunto clássico A é μ_A , onde X é o universo de discurso.

- Fuzzy: No conjunto das pessoas, o subconjunto das pessoas altas.

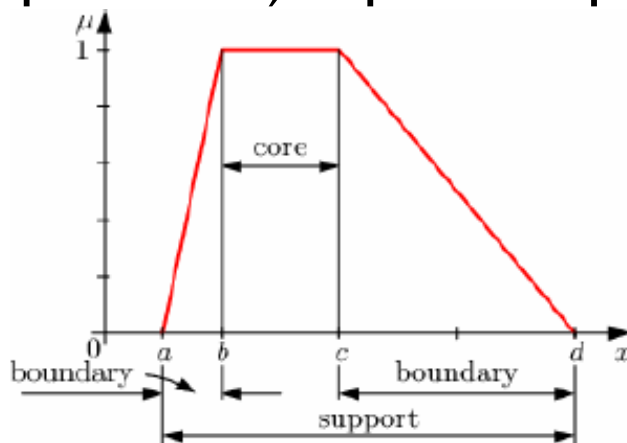
$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \longrightarrow$$

Função de pertinência de um conjunto fuzzy A é μ_A , onde X é o universo de discurso (um conjunto de elementos *crisp*).

Conjuntos Fuzzy

- ▶ Um conjunto fuzzy A definido no universo de discurso X é caracterizado por uma função de pertinência μ_A , a qual mapeia os elementos de X para o intervalo $[0, 1]$

$$\mu_{A:X} \rightarrow [0, 1]$$
- ▶ Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento x pertencente a X um número real $\mu_{A(x)}$ no intervalo $[0, 1]$, que representa o grau de pertinência do elemento x ao conjunto A , isto é, o grau de compatibilidade do elemento x ao conceito (propriedades) capturado pelo conjunto A



► Definição Formal

- Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de pertinência (MF)}}) \mid x \in X\}$$

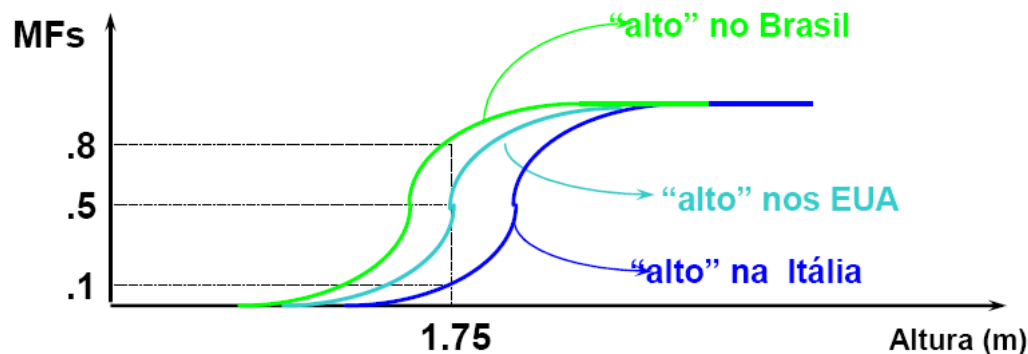
Conjunto fuzzy

Universe ou Universo de discurso

Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência (MF)

Funções de Pertinência

- ▶ Reflete o conhecimento que se tem em relação ao grau de compatibilidade de um dado objeto com relação a um certo conjunto (conceito) fuzzy
- ▶ Características das funções de pertinências
 - ▶ Medidas subjetivas
 - ▶ Funções não-probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente



Funções de Pertinência - Formulação

Função Triangular

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Função Trapezoidal

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

Função Gaussiana

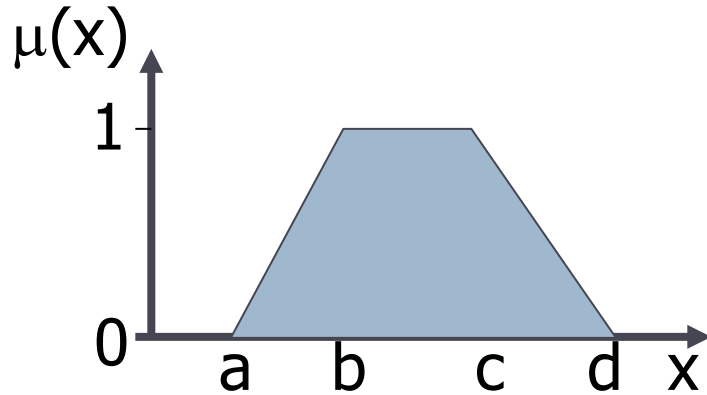
$$\text{gaussmf}(c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Função Sino
Generalizada

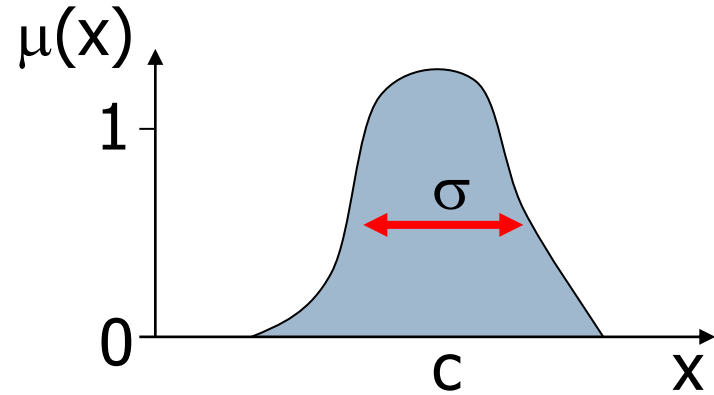
$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Tipos de Função de Pertinência

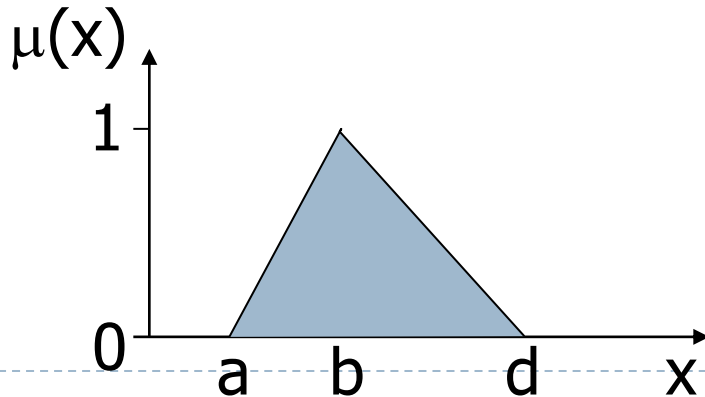
Trapezoidal: $\langle a, b, c, d \rangle$



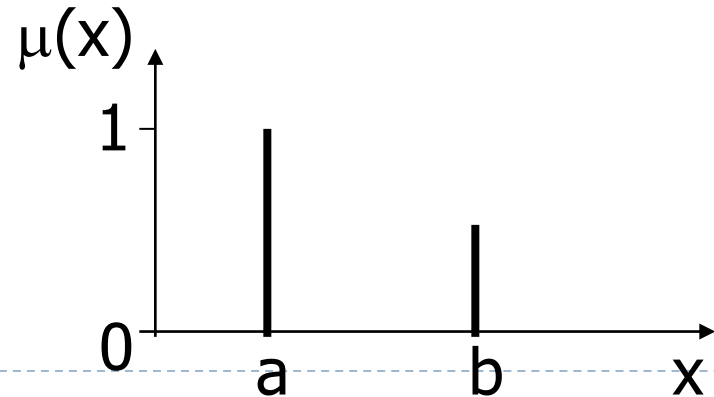
Gaussiano: $N(c, \sigma)$



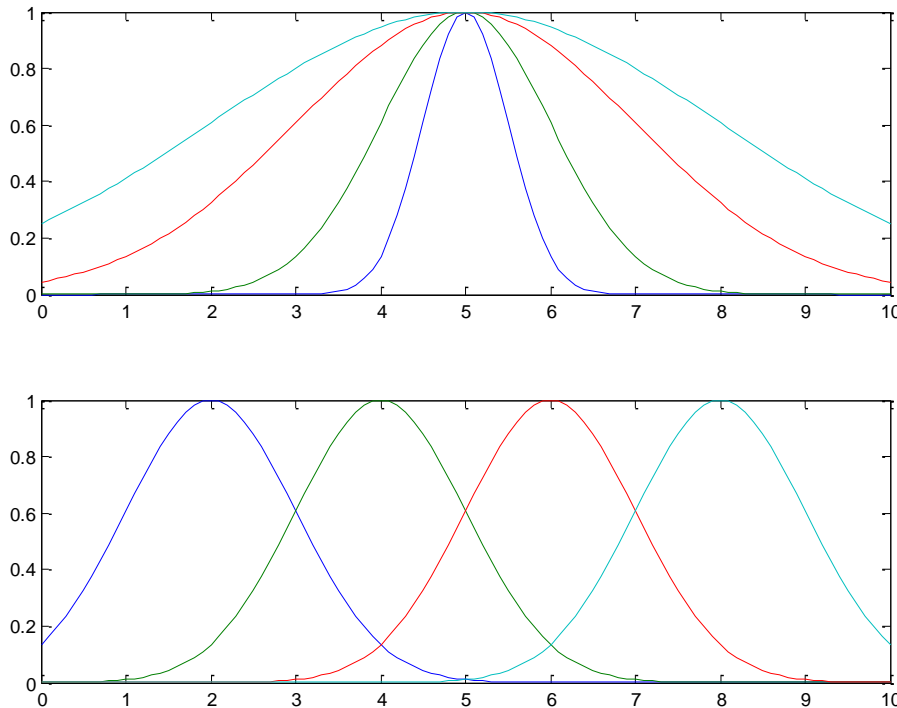
Triangular: $\langle a, b, c \rangle$



Singleton: $(a, 1)$ and $(b, 0.5)$

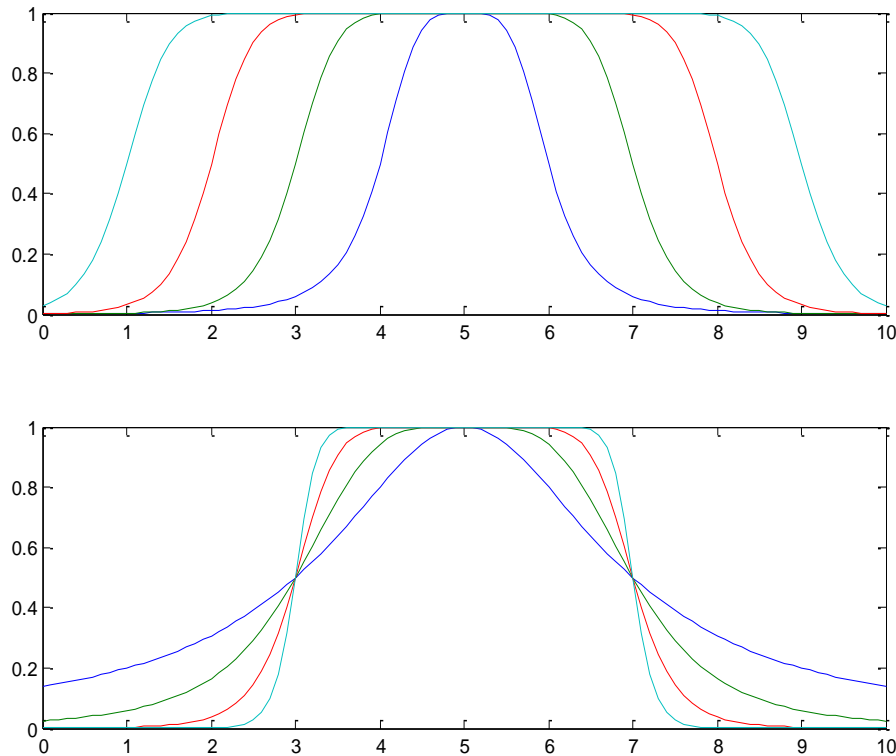


Tipos de Função de Pertinência



```
x = (0:0.1:10)';
y1 = gaussmf(x, [0.5 5]);
y2 = gaussmf(x, [1 5]);
y3 = gaussmf(x, [2 5]);
y4 = gaussmf(x, [3 5]);
subplot(211); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
y1 = gaussmf(x, [1 2]);
y2 = gaussmf(x, [1 4]);
y3 = gaussmf(x, [1 6]);
y4 = gaussmf(x, [1 8]);
subplot(212); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'gaussmf', 'numbertitle',
'off');
```

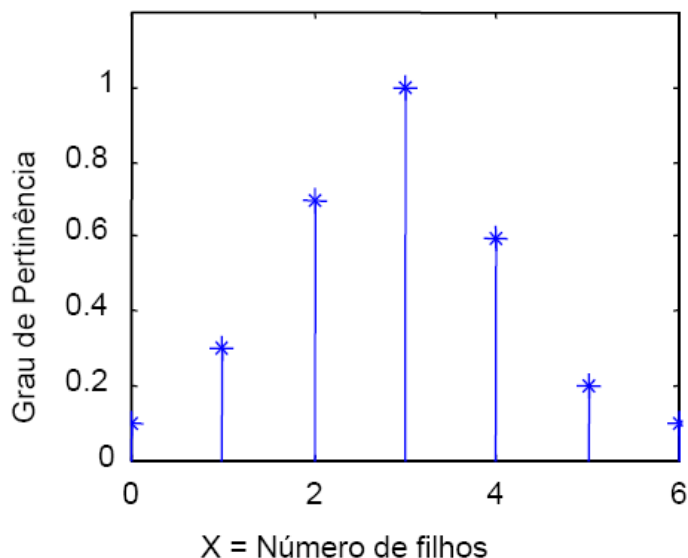
Tipos de Função de Pertinência



```
x = (0:0.1:10)';
y1 = gaussmf(x, [0.5 5]);
y2 = gaussmf(x, [1 5]);
y3 = gaussmf(x, [2 5]);
y4 = gaussmf(x, [3 5]);
subplot(211); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
y1 = gaussmf(x, [1 2]);
y2 = gaussmf(x, [1 4]);
y3 = gaussmf(x, [1 6]);
y4 = gaussmf(x, [1 8]);
subplot(212); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'gaussmf',
'numbertitle', 'off');
```

Função de Pertinência

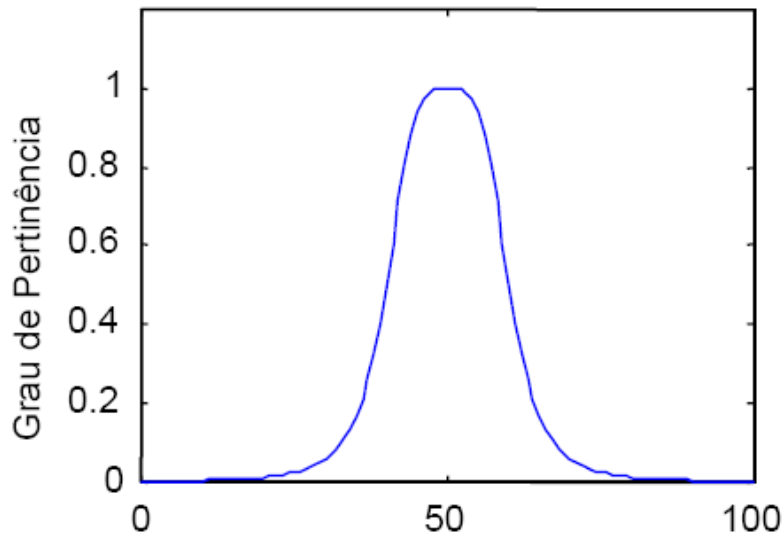
(a) Universo discreto



- $X = \{SF, Boston, LA\}$
(discreto e não-ordenado)
 - $C = \text{"Cidade desejável para se viver"}$
 - $C = \{(SF, 0.9), (Boston, 0.8), (LA, 0.6)\}$
- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(discreto)
 - $A = \text{"Número de filhos"}$
 - $A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0.1)\}$

Função de Pertinência

(b) Universo contínuo



X = Idade

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

- X=(Conjunto de números reais positivos) (contínuo)
 - B = “Pessoas com idade em torno de 50 anos”
 - B = $\{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

Função de Pertinência

- Um conjunto fuzzy A pode alternativamente ser denotado por:

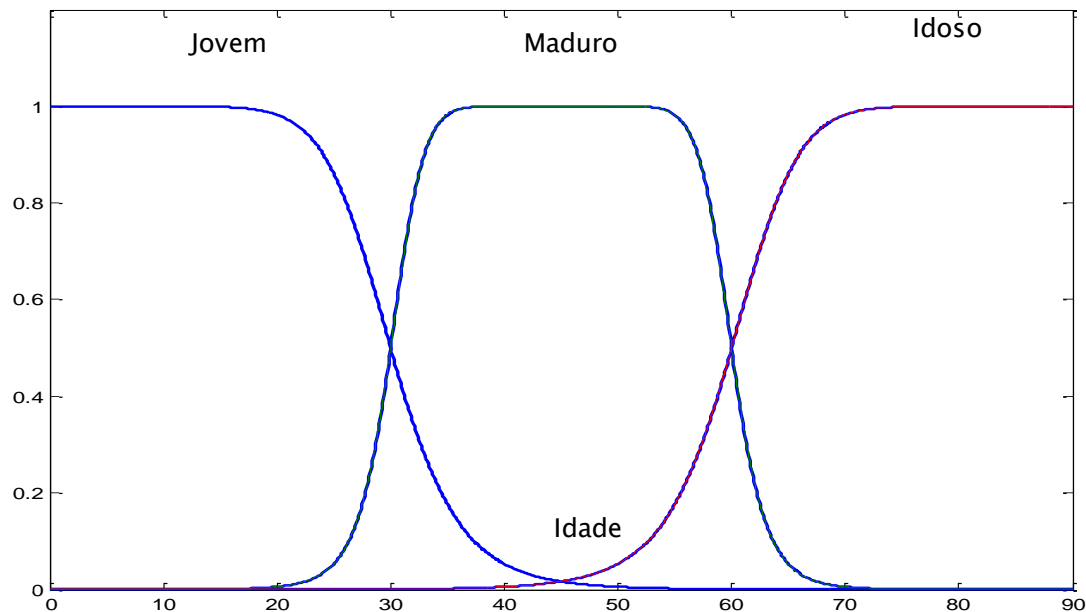
$$x \text{ (discreto)} \implies A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) \mid x_i$$

$$x \text{ (contínuo)} \implies A = \int_X \mu_A(x) \mid x$$

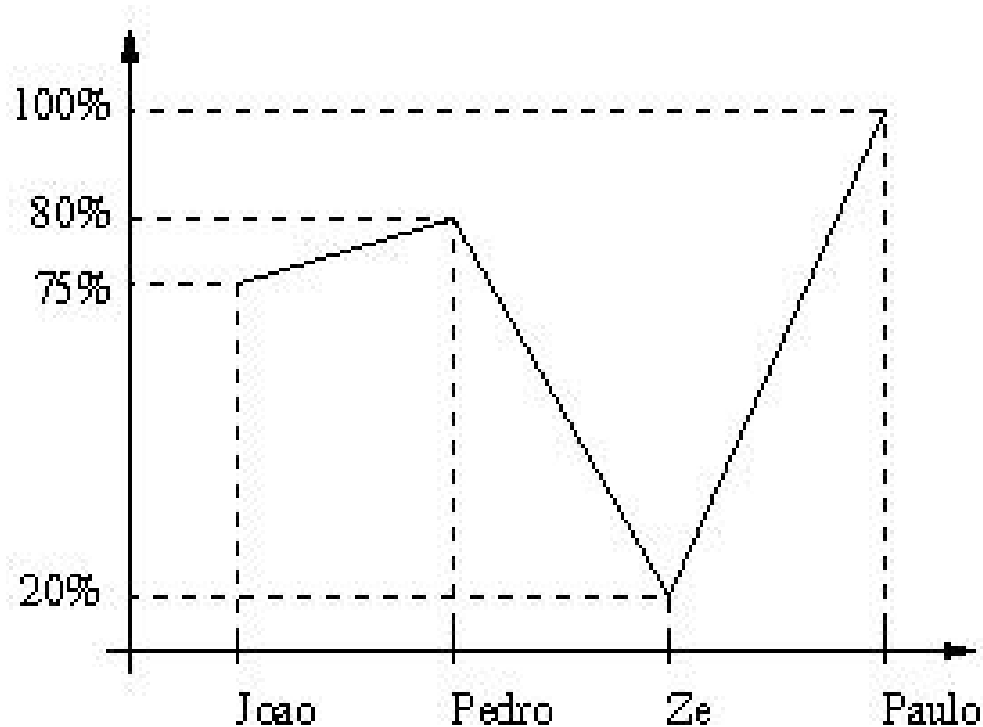
- Obs: Os símbolos \sum e \int representam o conjunto dos pares ordenados $(x, \mu_{A(x)})$

Partição Fuzzy

- Partição fuzzy do universo de discurso X representando “idade”, formada pelos conjuntos fuzzy “jovem”, “maduro” e “idoso”.

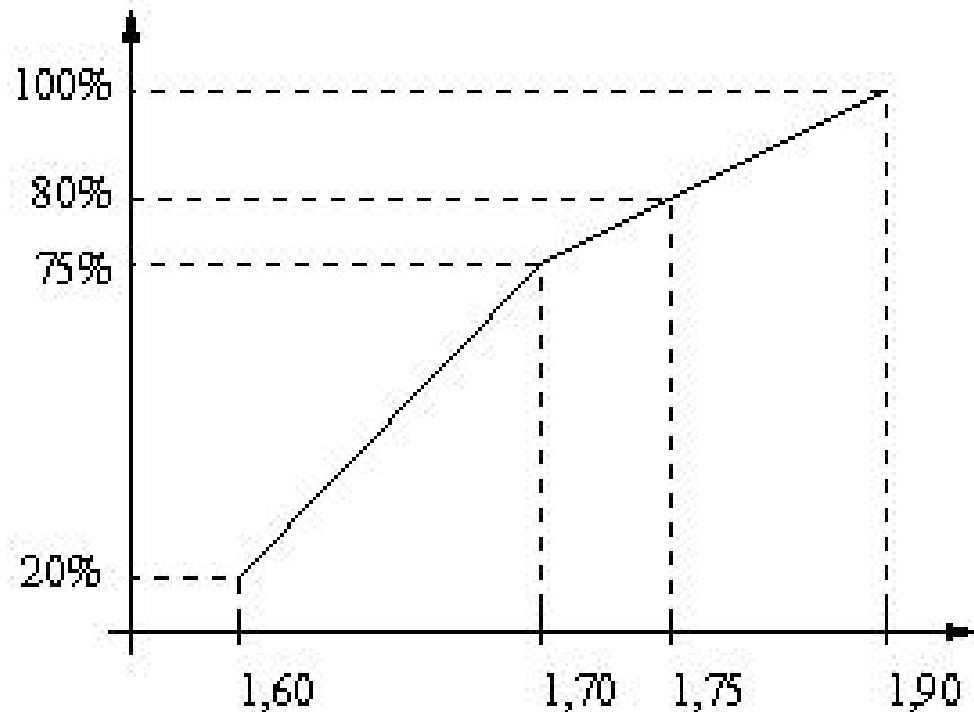


- Um conjunto Fuzzy...



Considerações Sobre o Domínio

- O mesmo conjunto, com o domínio reorganizado.
- E agora, abstraindo. Os nomes foram substituídos pela informação relevante: a altura.

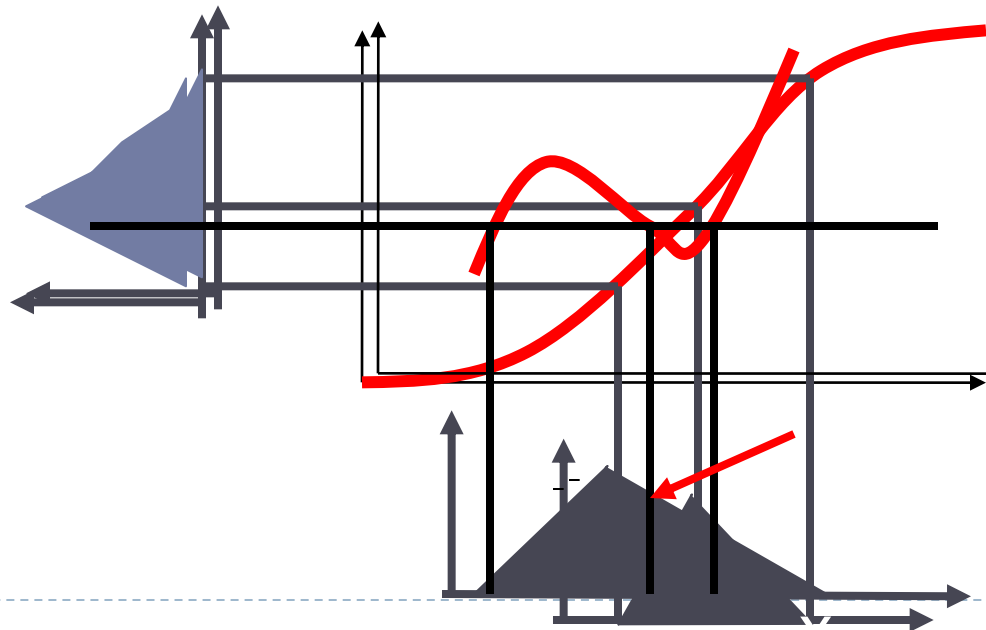


O Princípio da Extensão

Considere um Conjunto Fuzzy A e uma função f:
Como o conjunto fuzzy $f(A)$ parece?

Para uma função f arbitrária:

$$\mu_{f(A)}(y) = \max\{\mu_A(x) \mid y=f(x)\}$$



Exemplo

- ▶ Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f(x) = x + 2$. Se $A = \{1/0.1, 2/0.2, 3/0.7, 4/1\}$ então a imagem de A por meio de f é dado por
- ▶ $B = f(A) = \{3/0.1, 4/0.2, 5/0.7, 6/1\}$
- ▶ $f(x) = (x-2)^2$
- ▶ $C = f(A) = \{ ? \}$

- ▶ Subconjunto
 - ▶ $A \subset B$, se $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$
- ▶ Igualdade
 - ▶ $A=B$, se $\mu_{B(x)} = \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$
- ▶ Complemento
 - ▶ $\neg A = X - A \rightarrow \mu_{\neg A(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$
- ▶ Complemento Relativo
 - ▶ $\mu_{E(x)} = \max(0, \mu_{A(x)} - \mu_{B(x)})$
- ▶ União
 - ▶ $C = A \cup B \rightarrow \mu_{C(x)} = S(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
 - ▶ $S : S$ – norma (ou t co-norma)
- ▶ Intersecção
 - ▶ $C = A \cap B \rightarrow \mu_{C(x)} = T(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
 - ▶ $T : T$ – norma

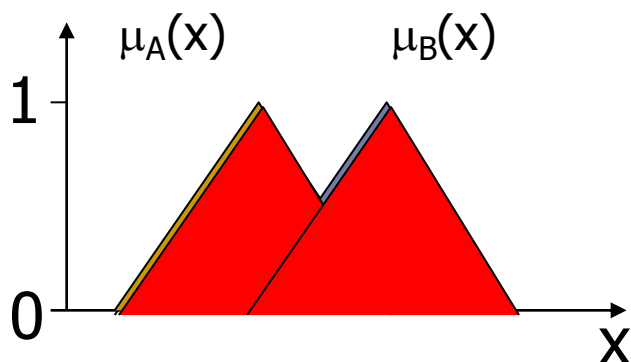
Operações básicas

► Exemplos de T-norma e S-norma

Type	t-norm	t-conorm
Standard	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Algebraic	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
Limited	$\text{Max}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$	$\min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
Robust	$\begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x), & \text{if } \mu_A(x) = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), & \text{if } \mu_A(x) = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

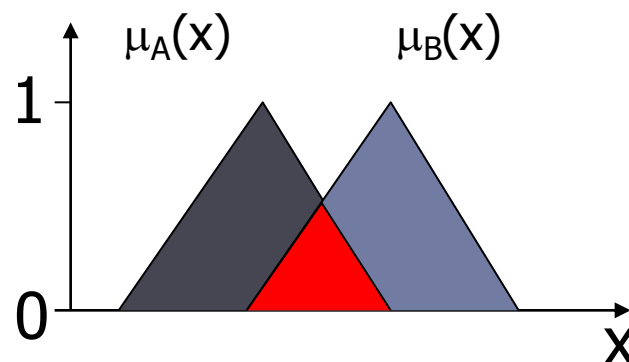
União

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

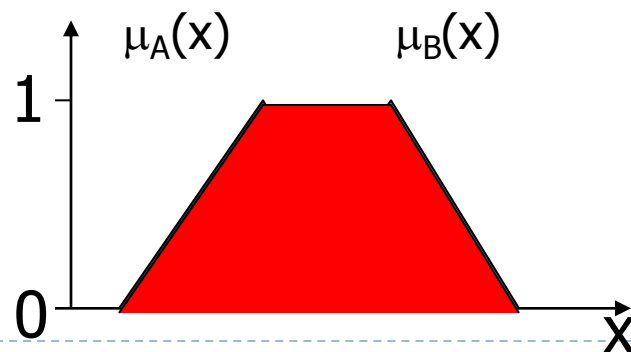


Intersecção

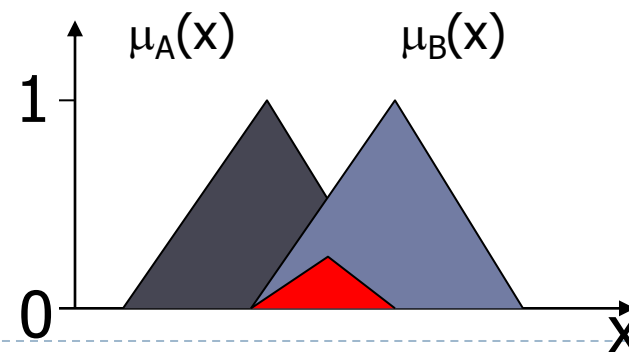
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

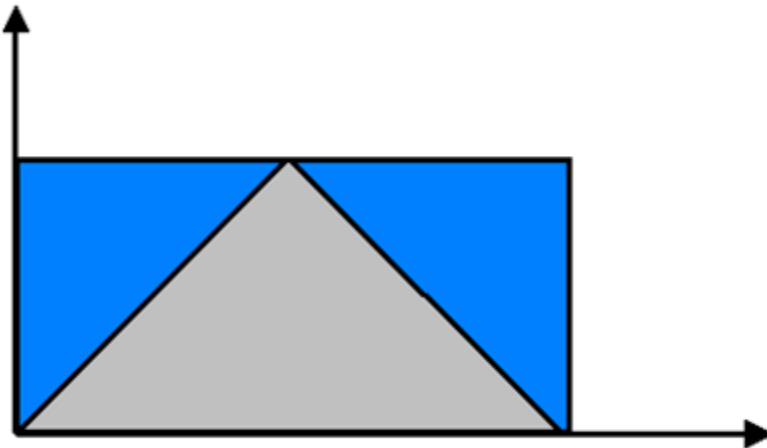


$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$



► Complemento

Sejam X conjunto de pontos, A um conjunto contido em X e $\forall x \in X$.



$$\neg\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Operações básicas

▶ Exemplo

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\text{▶ } A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$$

$$\text{▶ } B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$$

▶ União

$$\bullet C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$$

▶ Interseção

$$\bullet D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$$

Propriedades

- ▶ **Comutatividade**

- ▶ $A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A$

- ▶ **Idempotência**

- ▶ $A \vee A = A, \quad A \wedge A = A$

- ▶ **Associatividade**

- ▶ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$

- ▶ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$

- ▶ **Distributividade**

- ▶ $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- ▶ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- ▶ **Propriedades padrões são válidas para os conjuntos fuzzy**

Complemento

Negação: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Leis Classicas que nem sempre são verdade:

$$\mu_{\neg A \vee A}(x) \equiv 1$$

$$\mu_{\neg A \wedge A}(x) \equiv 0$$

Exemplo : $\mu_A(x) = 0.6$

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) = 0.4$$

$$\mu_{\neg A \vee A}(x) = \max(0.6, 0.4) = 0.6 \text{ diferente } 1$$

$$\mu_{\neg A \wedge A}(x) = \min(0.6, 0.4) = 0.4 \text{ diferente } 0$$

- ▶ Em conjuntos *Fuzzy*,

$$\mu(\neg A \cup A) \neq \mu(TRUE) \text{ e } \mu(\neg A \cap A) \neq \mu(FALSE),$$

o que não satisfaz a teoria dos conjuntos clássica.

- ▶ Considere $\mu(A) = 1/2$,

$$\mu(\neg A \cup A) = \max(\neg\mu(A), \mu(A))$$

$$= \max(1 - 1/2, 1/2)$$

$$= 1/2 \neq 1$$

$$\mu(\neg A \cap A) = \min(\neg\mu(A), \mu(A))$$

$$= \min(1 - 1/2, 1/2)$$

$$= 1/2 \neq 0$$

Relação Classica

$$R : X \times Y \text{ definida por } \mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in R \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin R \end{cases}$$

Relação Fuzzy

$$R : X \times Y \text{ definida por } \mu_R(x,y) \in [0,1]$$

$\mu_R(x,y)$ descreve para que grau x e y estão relacionados

Pode também ser interpretado como o valor verdade da proposição $x R y$

Relações Fuzzy

- ▶ Relações fuzzy são uma generalização do conceito clássico de relações, e admitem a noção de associação parcial entre pontos num universo e discurso.

- ▶ Relação clássica:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Relação fuzzy:

$$R = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 1,0 & 0,5 \\ 0 & 0,9 & 1,0 & 1,0 \\ 0,7 & 0,8 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$X = \{ \text{chuvoso, nublado, ensolarado} \}$

$Y = \{ \text{nadando, pedalando, acampando, lendo} \}$

X/Y	nadando	pedalando	Acampando	Lendo
Chuvoso	0.0	0.2	0.0	1.0
nublado	0.0	0.8	0.3	0.3
ensolarado	1.0	0.2	0.7	0.0



Lógica Nebulosa



- ▶ Construída sobre a teoria dos conjuntos Fuzzy.
- ▶ Estende as Lógicas:
 - ▶ Binária
 - ▶ Multivalorada.
- ▶ Estende a definição dos conectivos:
 - ▶ AND, OR, e NOT.

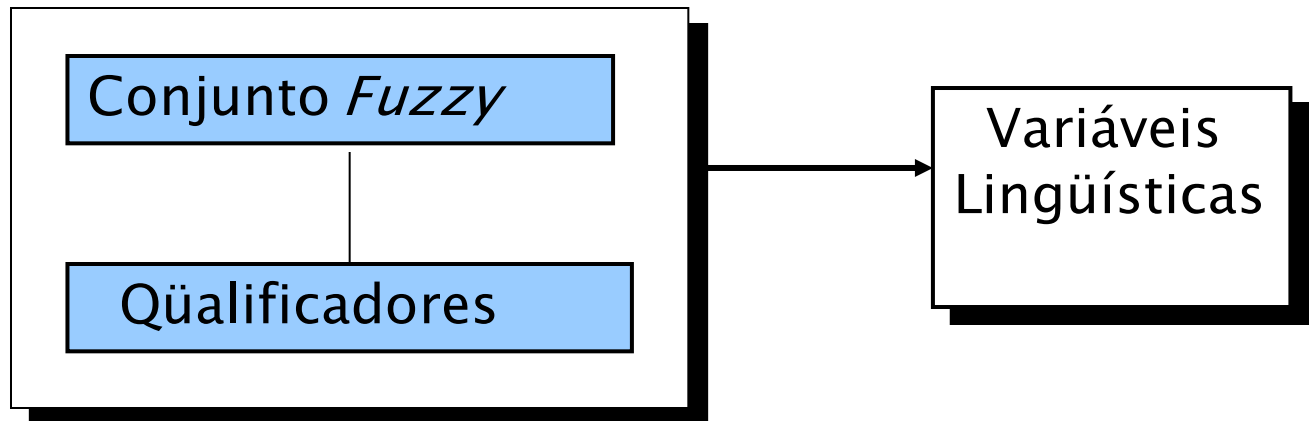
- Dependendo de como são definidos os conectivos AND e OR, uma nova lógica é criada. O conectivo NOT é, em geral, imutável.

	Intersecção (AND)	União (OR)
Zadeh	$\text{Min}(\mu_A[x], \mu_B[y])$	$\text{Max}(\mu_A[x], \mu_B[y])$
produto	$\mu_A[x] \cdot \mu_B[y]$	$(\mu_A[x] + \mu_B[y]) - (\mu_A[x] \cdot \mu_B[y])$
Soma limitada	$\text{Max}(0, \mu_A[x] + \mu_B[y] - 1)$	$\text{Min}(1, \mu_A[x] + \mu_B[y])$

Variáveis Lingüísticas

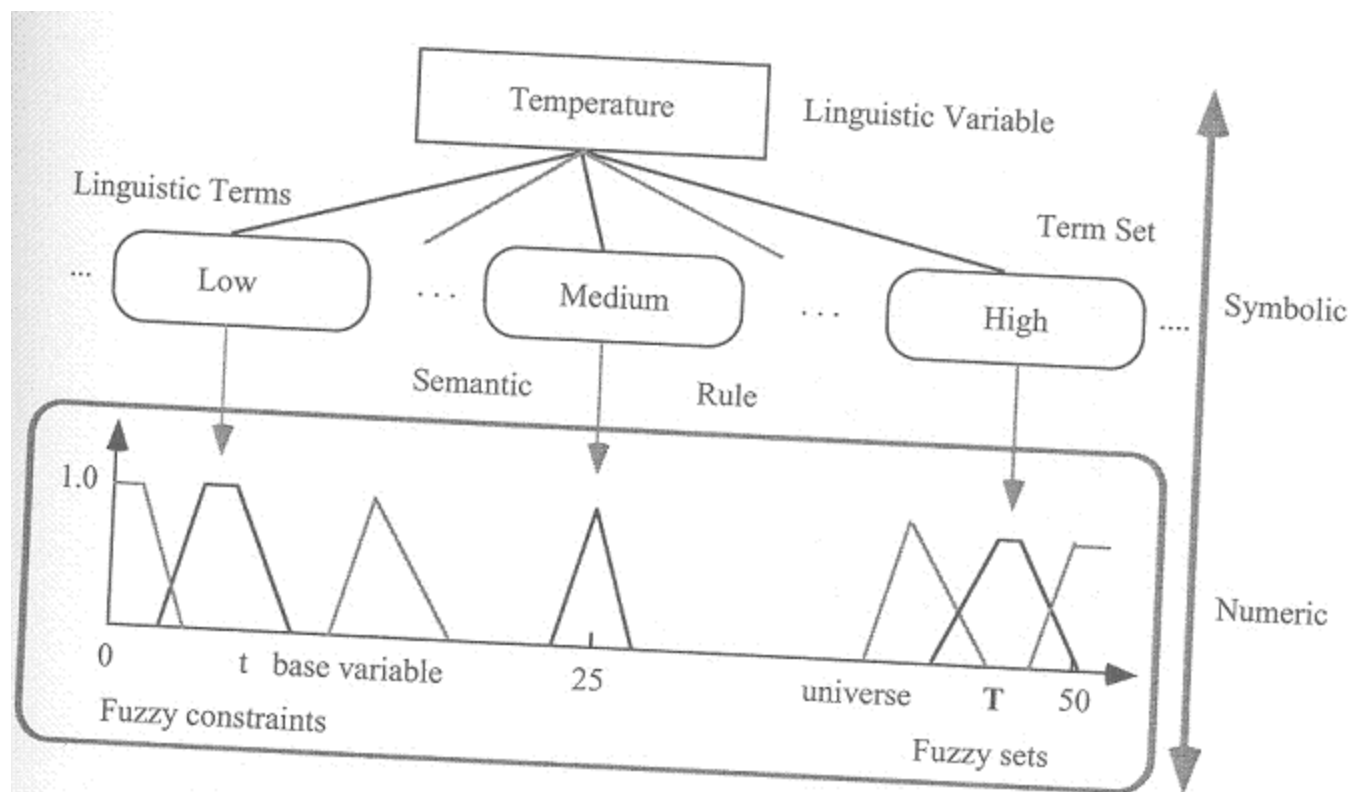
- ▶ É o centro da técnica de modelagem de sistemas *fuzzy*.
- ▶ Uma variável lingüística é o **nome do conjunto fuzzy**.
- ▶ Pode ser usado num sistema baseado em regras para tomadas de decisão.
- ▶ Exemplo: *if projeto.duração is LONGO
then risco is aumentado.*
- ▶ Transmitem o conceito de qualificadores.
- ▶ Qualificadores mudam a forma do conjunto *fuzzy*.

- ▶ Algumas variáveis lingüísticas do conjunto LONGO com qüalificadores:
 - ▶ muito LONGO
 - ▶ um tanto LONGO
 - ▶ ligeiramente LONGO
 - ▶ positivamente não muito LONGO



Variáveis Lingüísticas

- Pode-se definir uma variável lingüística informalmente como uma variável cujos valores são palavras ou sentenças, ao invés de números.



- Formalmente, uma variável lingüísticas é caracterizada pela quintupla:

$$\langle X, T(X), U, G, M \rangle$$

Sendo:

- **X** o nome da variável;
- **T(X)** o conjunto de termos de X cujos elementos são rótulos de valores lingüísticos de X ;
- **U** Universo de Discurso
- **G** uma gramática para gerar os nomes de X ; regra sintática para gerar os valores de X como uma composição de termos de $T(x)$, conectivos lógicos (negação, interseção e união), modificadores e delimitadores
- **M** uma regra semântica para associar cada rótulo $L \in T(X)$ ao significado $M(L)$ que é um conjunto fuzzy no universo X , cuja variável base é x . *Regra semântica, para associar a cada valor gerado por G um conjunto fuzzy em U*

► Variável lingüística chamada *temperatura*.

- $X = \textit{temperatura}$ com temperaturas variando no intervalo $T = [0,50]$ e variável base $t \in T$.
- O conjunto de termos associado a essa variável pode ser, entre outros, $T(\textit{temperatura}) = \textit{muito baixa, baixa, média, alta, não baixa e não muito alta, muito alta}$ em que cada termos em $T(\textit{temperatura})$ é um rótulo de um valor lingüístico de *temperatura*.
- $M(T)$ é um conjunto fuzzy de T , cuja função de pertinência $T(t)$ cobre a semântica do nome de T .
- Os termos *muito baixa, não baixa e não muito alta e muito alta* podem ter suas funções de pertinência derivadas da aplicação de interseção ou complemento e/ou da aplicação de modificadores sobre as funções de pertinências dos termos *baixa* e *alta*, caracterizando a “**computação com variáveis e termos lingüísticos**”.

- ▶ $V = \{\text{baixo, alto, médio, muito, não, e ...}\}.$
- ▶ $\Sigma = \{S, A, B, C, D, E, F, ... \}$
- ▶ e P
 - $S \rightarrow A;$ $C \rightarrow E;$
 - $A \rightarrow B;$ $A \rightarrow A \text{ e } B;$
 - $B \rightarrow C;$ $B \rightarrow \text{not } C;$
 - $C \rightarrow D;$ $C \rightarrow F;$
 - $C \rightarrow \text{muito } D;$ $E \rightarrow \text{muito } E;$
 - $D \rightarrow \text{baixo};$ $E \rightarrow \text{alto};$
 - $F \rightarrow \text{médio};$

- ▶ Permitem que a linguagem da modelagem *fuzzy* expresse a semântica usada por especialistas.
- ▶ Exemplo:
*If projeto.duração is positivamente não muito LONGO
then risco is reduzido um pouco*
- ▶ Encapsula as propriedades dos conceitos imprecisos numa forma usada computacionalmente.
- ▶ Reduz a complexidade do problema.
- ▶ Sempre representa um espaço *fuzzy*.

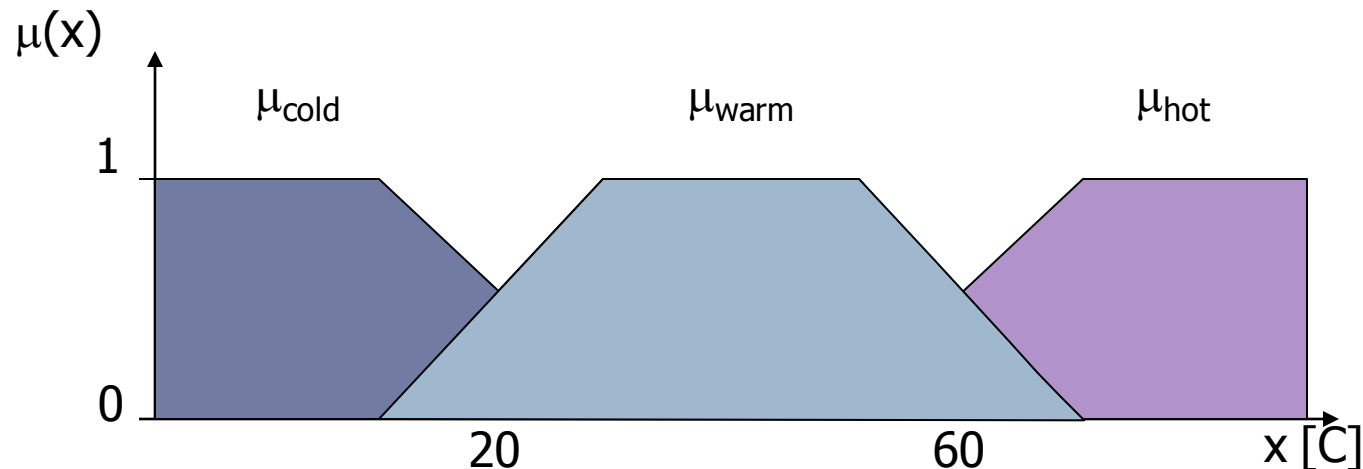
Variáveis Lingüísticas

- ▶ Uma variável lingüística possui valores que não são numéricos, mas sim lingüísticos (palavras ou frases na linguagem natural): termos primários ou lingüísticos
 - ▶ Idade (variável) → maduro (termo)
- ▶ Um termo lingüístico é um conjunto fuzzy
- ▶ Todos os valores lingüísticos formam um conjunto de termos:
- ▶ $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, novo, ...}$
- ▶ $\text{Maduro, não-Maduro, coroa, ...}$
- ▶ $\text{Velho, não-velho, ancião, ...}$
- ▶ $\text{Não-jovem e não velho, ...}$

Uma variável linguística combina alguns conjuntos fuzzy.

variavel linguisitica : temperature

termos linguisticos (conjuntos fuzzy) : { cold, warm, hot }



Qualificadores (hedges)

- ▶ Mesmo papel que advérbios
- ▶ Modifica o gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy.
- ▶ É uma função, assim como um conjunto difuso
- ▶ Aumenta significativamente o nosso poder descritivo.
- ▶ **Conjuntos Fuzzy + Qualificadores = variável lingüística.**
- ▶ Termos que são usados para modificar a semântica dos conjuntos fuzzy
 - ▶ Ex: Muito, mais ou menos, um pouco
- ▶ São universais
- ▶ Compostos de nome e fórmula

Tipos de qualificadores

- ▶ Muito

$$\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^2$$

- ▶ Extremamente

$$\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^3$$

- ▶ Muitíssimo

$$\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^4$$

- ▶ Um pouco

$$\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^{1,3}$$

- ▶ Mais ou menos

$$\mu_A^M(x) = \begin{cases} \sqrt{\mu_A(x)} \\ 2 * (\mu_A(x))^2, 0 \leq \mu \leq 0,5 \end{cases}$$

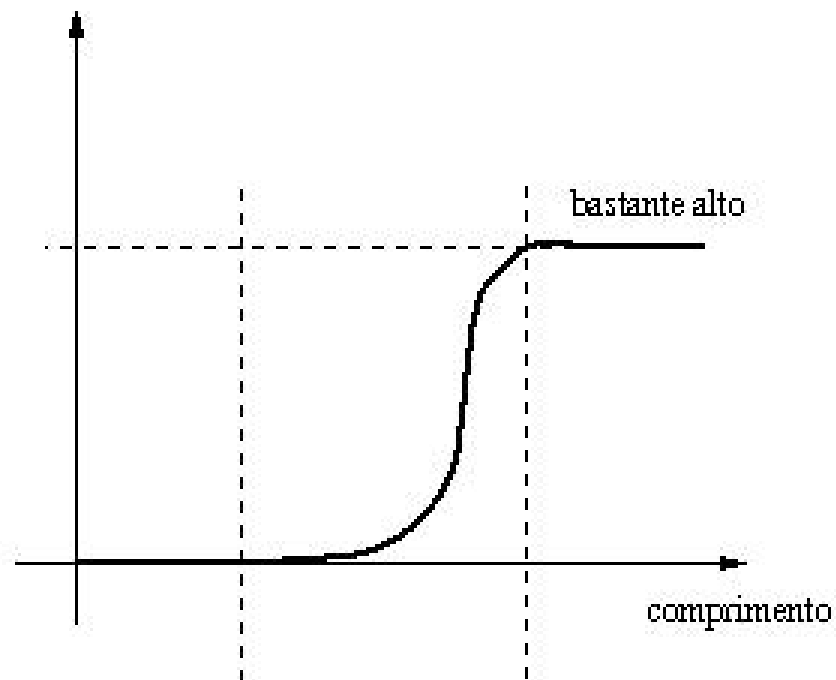
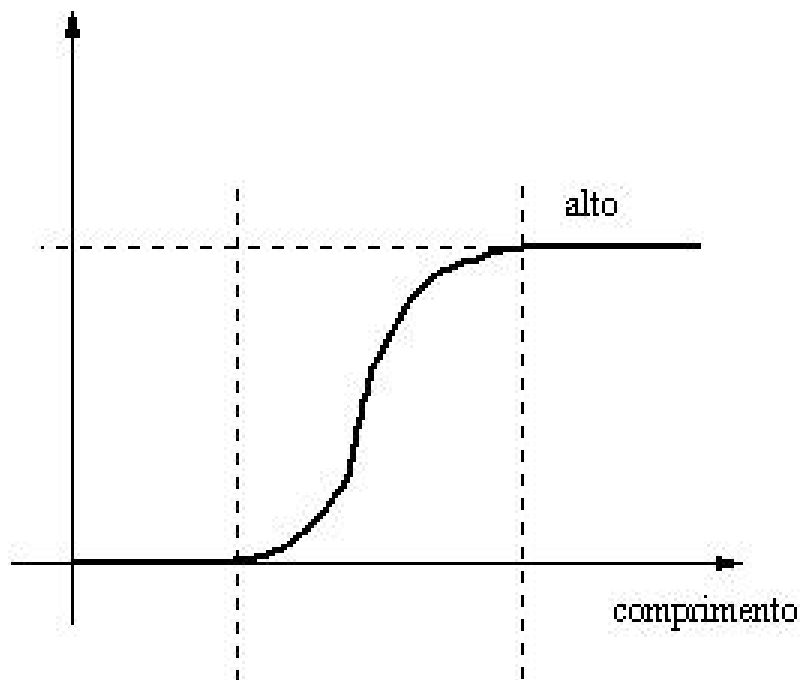
- ▶ Certamente

$$\mu_A^M(x) = \begin{cases} 2 * (\mu_A(x))^2, 0 \leq \mu \leq 0,5 \\ 1 - 2(1 - \mu_A(x))^2, 0,5 \leq \mu \leq 1 \end{cases}$$

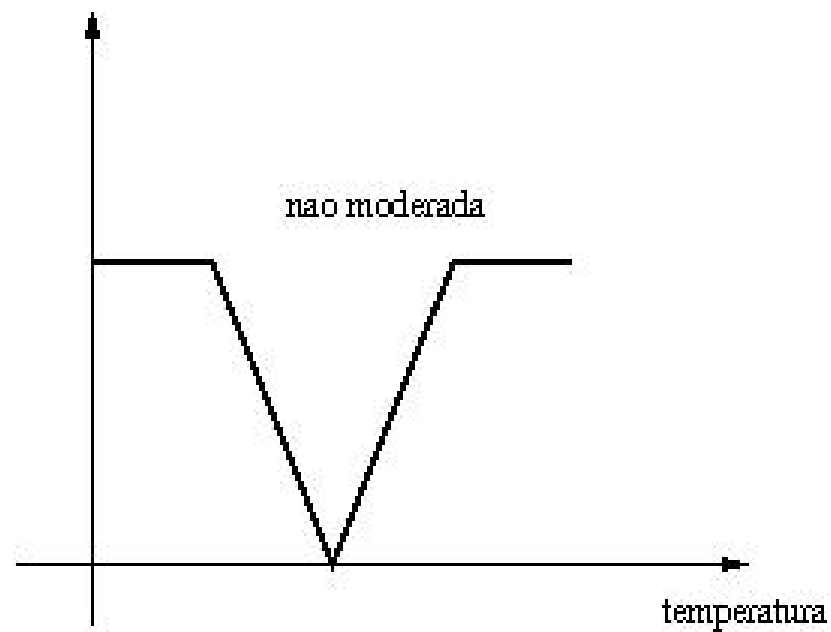
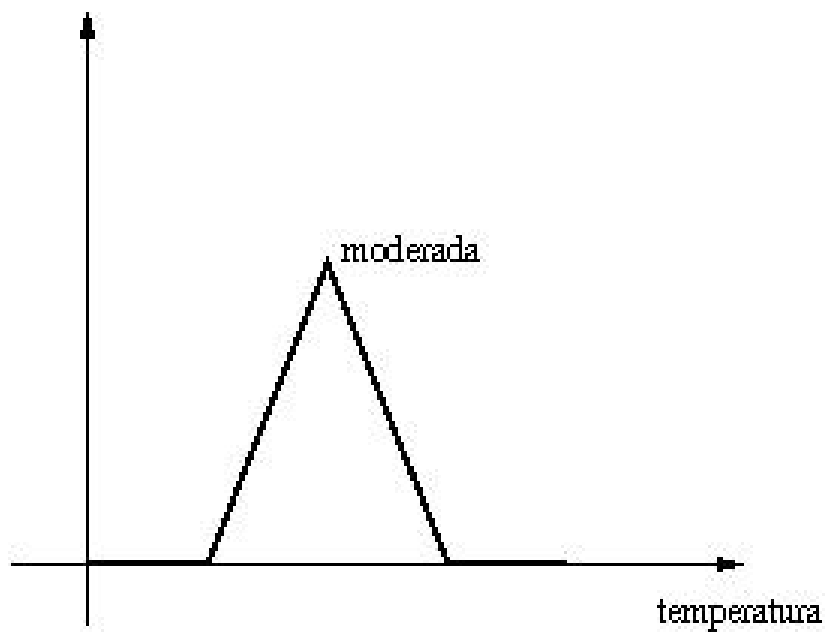
Tipos de qualificadores

Qualificador	Função
Por volta de, Aproximadamente	Aproxima um escalar
Bastante, extremamente	Aumenta a precisão do conjunto
Um pouco	Dilui o conjunto
Não	Complementar
Mais que, maior que	Restringe uma região
Menos que, menor que	Restringe uma região

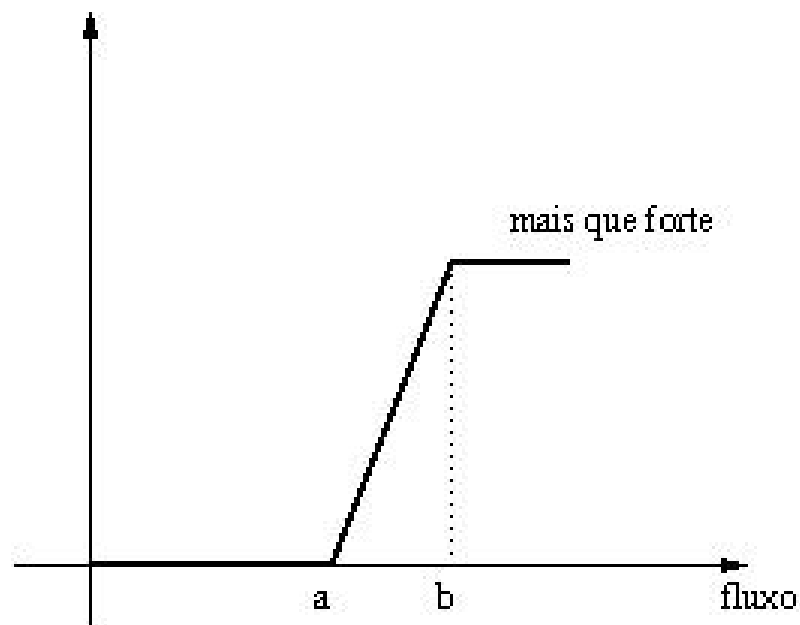
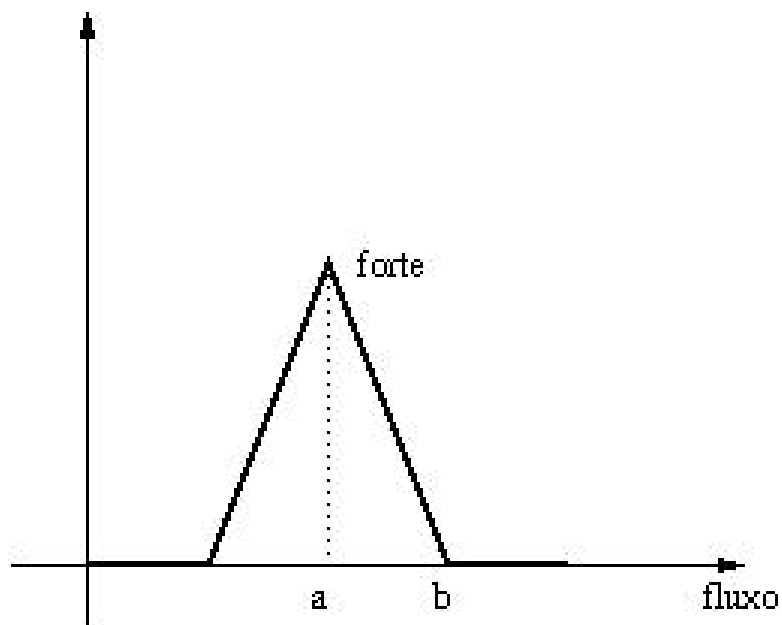
O Qualificador “bastante”



O Qualificador “não”



O Qualificador “mais que”

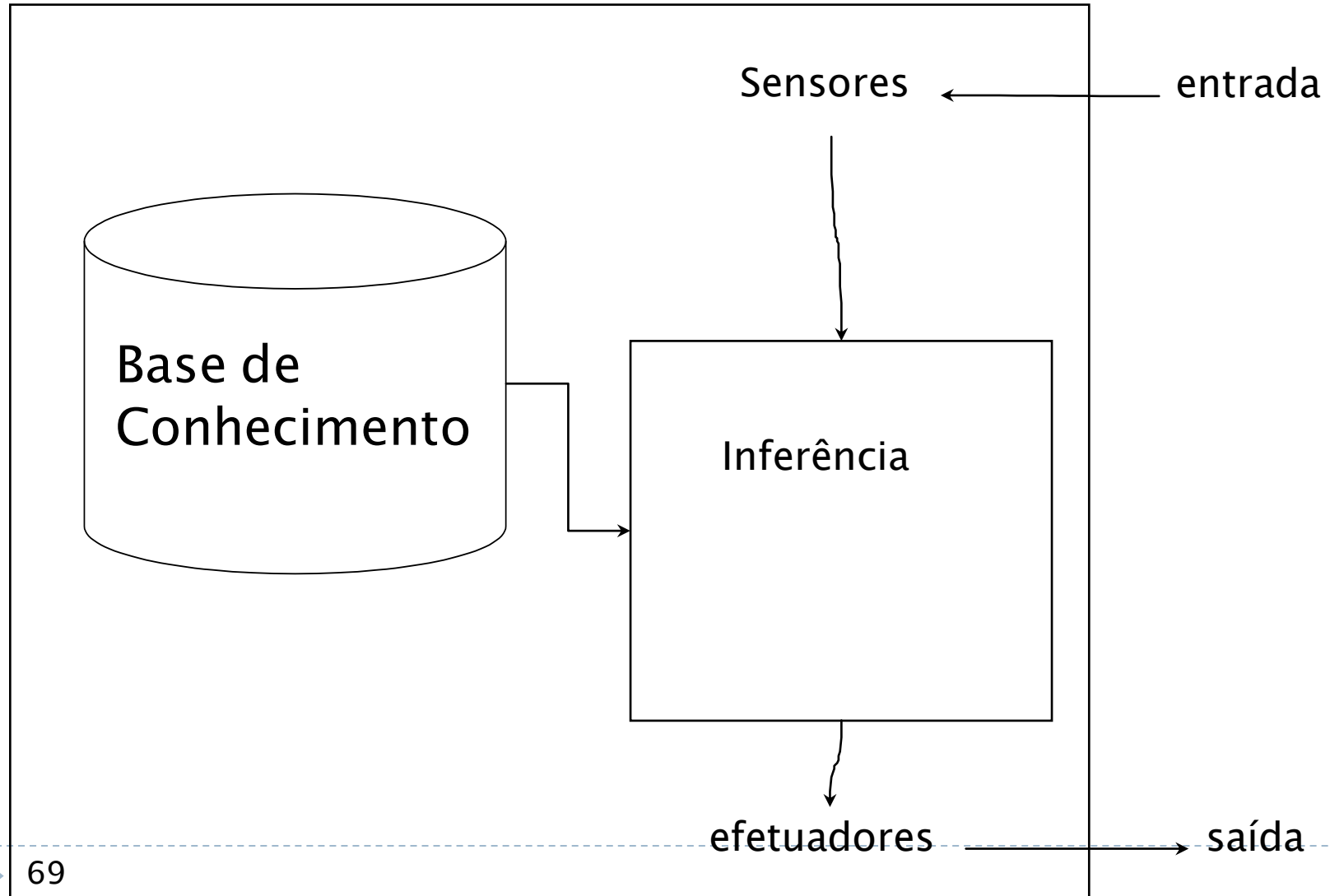


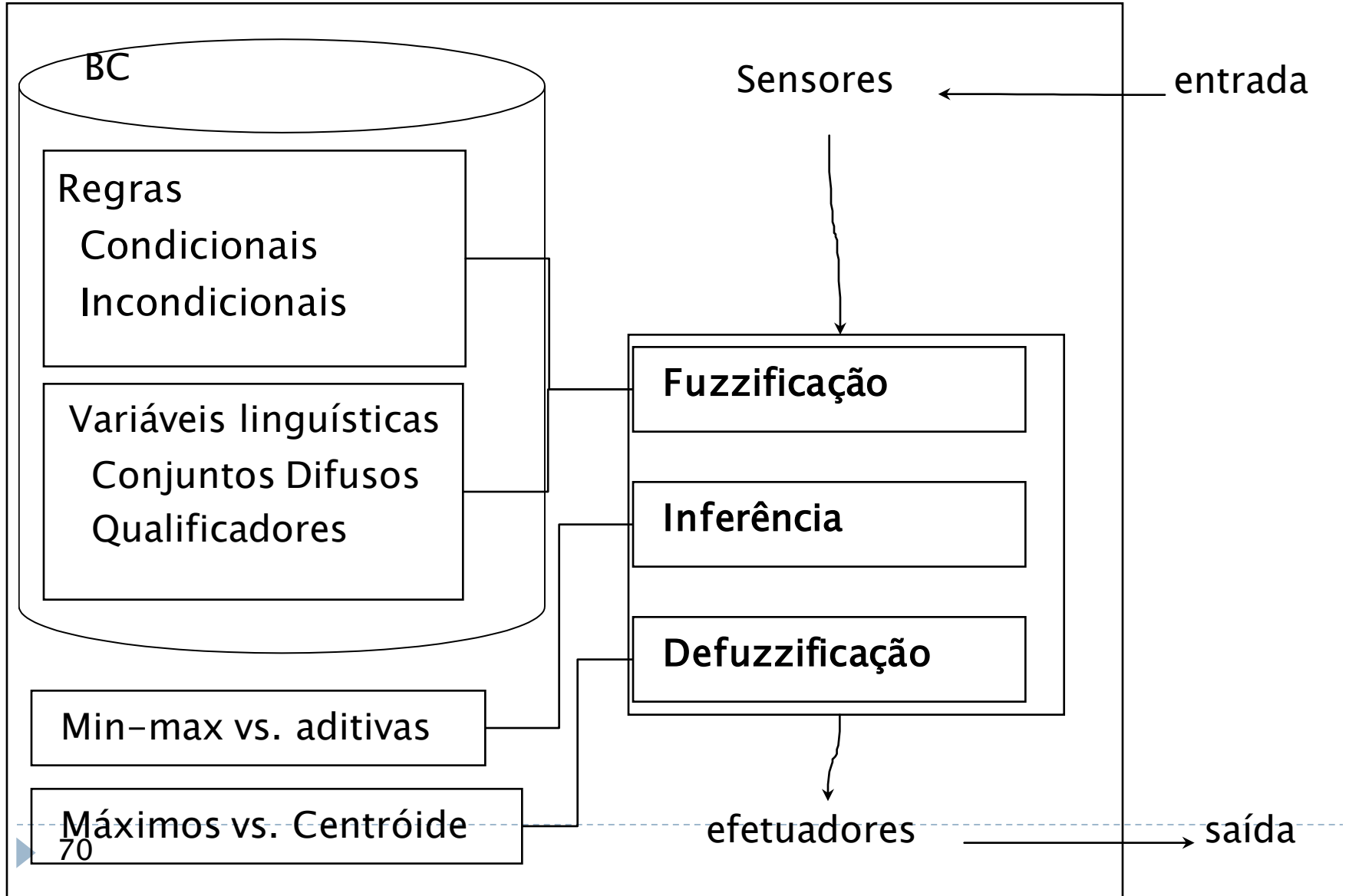


Sistemas Fuzzy



Um “agente” inteligente com BC





- ▶ Externamente são menos complexos e mais fáceis de entender.
- ▶ Os problemas são rapidamente isolados e fixados, reduzindo o tempo de manutenção.
- ▶ Requisitam menos regras, por isso o tempo médio entre as falhas diminui.

- ▶ Possuem **grande habilidade** para modelar sistemas comerciais altamente complexos.
 - ▶ sistemas convencionais tem dificuldade em resolver problemas não-lineares complexos.
- ▶ São capazes de **aproximar** o comportamento do sistema
 - ▶ porque apresentam várias propriedades não-lineares e pouco compreensíveis.

- ▶ **Benefícios para os especialistas:**
 - ▶ habilidade em codificar o conhecimento de uma forma próxima a linguagem usada por eles.
- ▶ **Mas o que faz uma pessoa ser um especialista?**
 - ▶ é a capacidade em fazer diagnósticos ou recomendações em termos imprecisos.
- ▶ **Sistemas *Fuzzy* capturam uma habilidade próxima do conhecimento do especialista.**
- ▶ **O processo de aquisição do conhecimento é:**
 - ▶ mais fácil,
 - ▶ mais confiável,
 - ▶ menos propenso a falhas e ambigüidades.

- ▶ É capaz de modelar sistemas envolvendo **múltiplos especialistas**.
- ▶ Nos sistemas do mundo real, há vários especialistas sob um mesmo domínio.
- ▶ Representam bem a **cooperação múltipla**, a colaboração e os conflitos entre os especialistas.
- ▶ Um exemplo das posições dos gerentes de controle, de produção, financeiro e *marketing*.
 - ▶ Nosso preço deve ser baixo.
 - ▶ Nosso preço deve ser alto.
 - ▶ Nosso preço deve ser em torno de $2 \times \text{custo}$
 - ▶ Se o preço dos concorrentes não é muito alto então nosso preço deve ser próximo do preço deles.

- ▶ Devido aos seus benefícios, como:
 - ▶ regras próximas da linguagem natural
 - ▶ fácil manutenção
 - ▶ simplicidade estrutural
- ▶ Os modelos baseados em sistemas *Fuzzy* são validados com maior precisão.
- ▶ A confiança destes modelos cresce.

- ▶ **Sistemas especialistas** convencionais são modelados a partir da:
 - ▶ **probabilidade Bayesiana**
 - ▶ algumas **fatores de confiança ou certeza**.
- ▶ Ambas alternativas confiam na transferência de valores incertos fora do próprio modelo.
- ▶ Sistemas *Fuzzy* fornecem a sistemas especialistas um método mais consistente e matematicamente forte para manipulação de incertezas.

- ▶ Um exemplo de sistema especialista baseado em regras simples para prever o peso de uma pessoa:
 - ▶ *If altura > 1.65 and altura < 1.68*
then peso is 60, CF = .082
- ▶ O mesmo exemplo baseado lógica *Fuzzy*:
 - ▶ *if altura is ALTA then peso is PESADO*

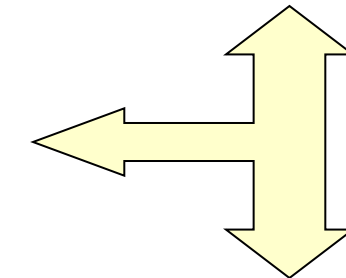
- ▶ Nos sistemas especialista convencionais:
 - ▶ as proposições são executadas sequencialmente
 - ▶ heurísticas e algoritmos são usados para reduzir o número de regras examinadas.
- ▶ Nos sistemas especialistas *Fuzzy*:
 - ▶ o protocolo de raciocínio é um paradigma de processamento paralelo
 - ▶ todas as regras são disparadas

Etapas do Raciocínio

1ª FUZZIFICAÇÃO

2ª INFERÊNCIA

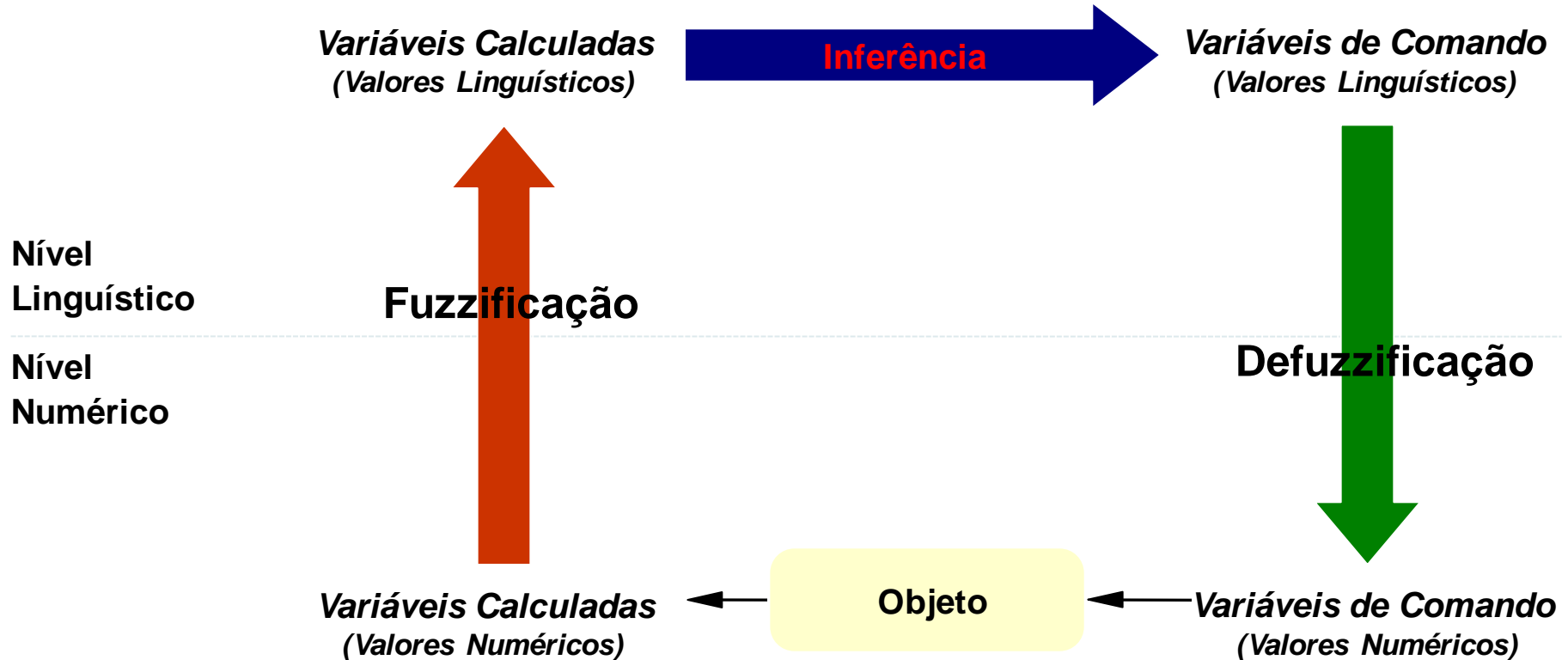
AGREGAÇÃO



COMPOSIÇÃO

3ª DEFUZZIFICAÇÃO

Etapas do Raciocínio



► Consistem:

- Conjunto de condições IF
- (usando conectivos and, or ou not)
- Uma conclusão THEN
- Uma conclusão opcional ELSE

► Exemplo

- Velocidade $[0, 220]$
- Se velocidade > 100
Então DPF é 30 metros
- Se velocidade < 40
Então DPF é 10 metros

- Baixa, Media Alta
- Se velocidade é alta
Então DPF é longa
- Se velocidade é baixa
Então DPF é curta

- ▶ Condicionais.
 - ▶ **If** x is X **then** a is A.
 - ▶ **If** x is X and y is Y **then** a is A.
 - ▶ **If** x is muito X **then** a is A.

- ▶ Incondicionais.
 - ▶ X is A.
 - ▶ X is mais que A.

- ▶ Variáveis linguísticas: Conjuntos Fuzzy e Qualificadores.
- ▶ Técnica de armazenamento:
 - ▶ Guardar a expressão da função.
 - ▶ Guardar um par de vetores X e Y

- ▶ Dependencia de causa podem ser expressadas na forma regras *if-then-rules*

- ▶ Forma Geral:

if <antecedente> *then* <consequente>

- ▶ Exemplo:

if temperatura está fria e óleo está barato *then*
aquecimento está alto

Variáveis linguísticas

Valores/ termos linguísticos
(Conjuntos Fuzzy)

Base Regras Fuzzy

Aquecimento	Temperatura :		
Oil price:	cold	warm	hot
cheap	high	high	medium
normal	high	medium	low
expensive	medium	low	low

if temperature is cold and oil price is low then heating is high

If temperature é hot and oil price is normal then heating is low

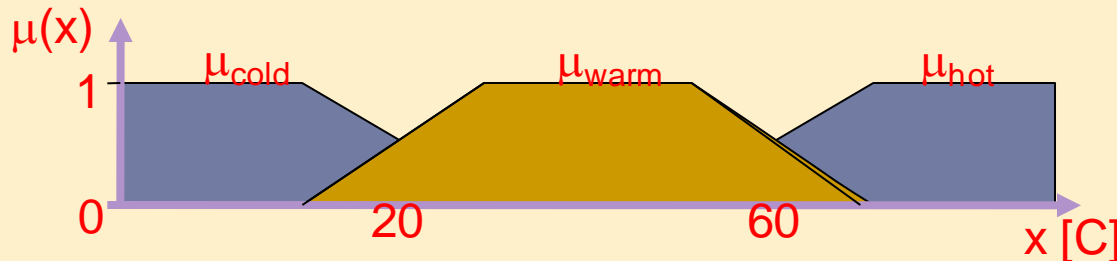
Base Conhecimento Fuzzy

Base Conhecimento fuzzy

Base Dados Fuzzy:

Definição das variáveis linguísticas de entrada e saída

Definição da função de pertinência Fuzzy



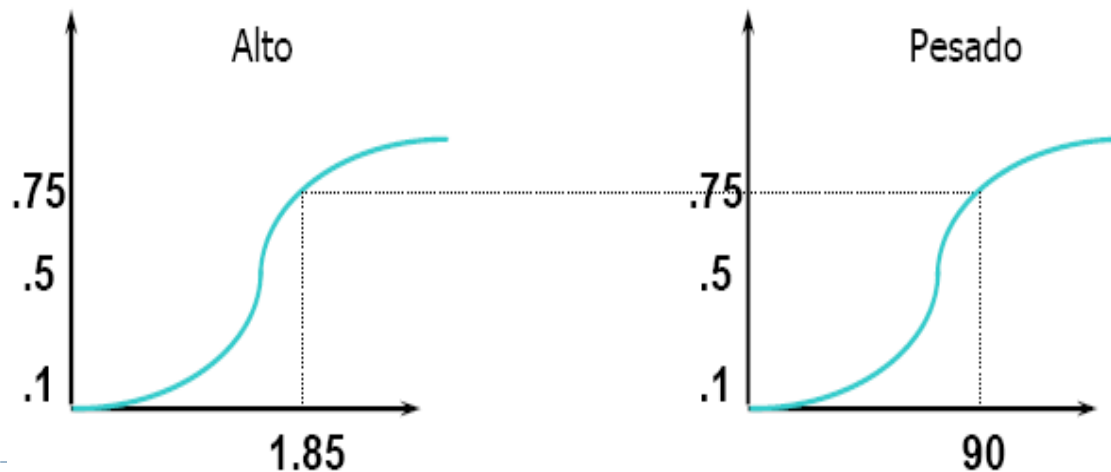
Base de Regras Fuzzy:

if temperature is cold and oil price is cheap
then heating is high

....

- E o raciocínio?

- Avaliar o antecedente (matching)
- Aplicar o resultado ao conseqüente
- As regras são ativadas (engatilhadas) parcialmente, dependendo do antecedente
- Ex: Se a altura é alta, o peso é pesado (altura 1.85, peso = ?)



- E no caso de existirem vários termos antecedentes?
 - É necessário realizar **um processo de agregação** dos valores de matching individual de cada termo
- E no caso de existirem vários conseqüentes?
 - Cada um deles terá seu valor “modulado” separadamente pelo valor da agregação

- Etapa no qual as variáveis lingüísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência).

Engloba:

Análise do Problema;

Definição das Variáveis;

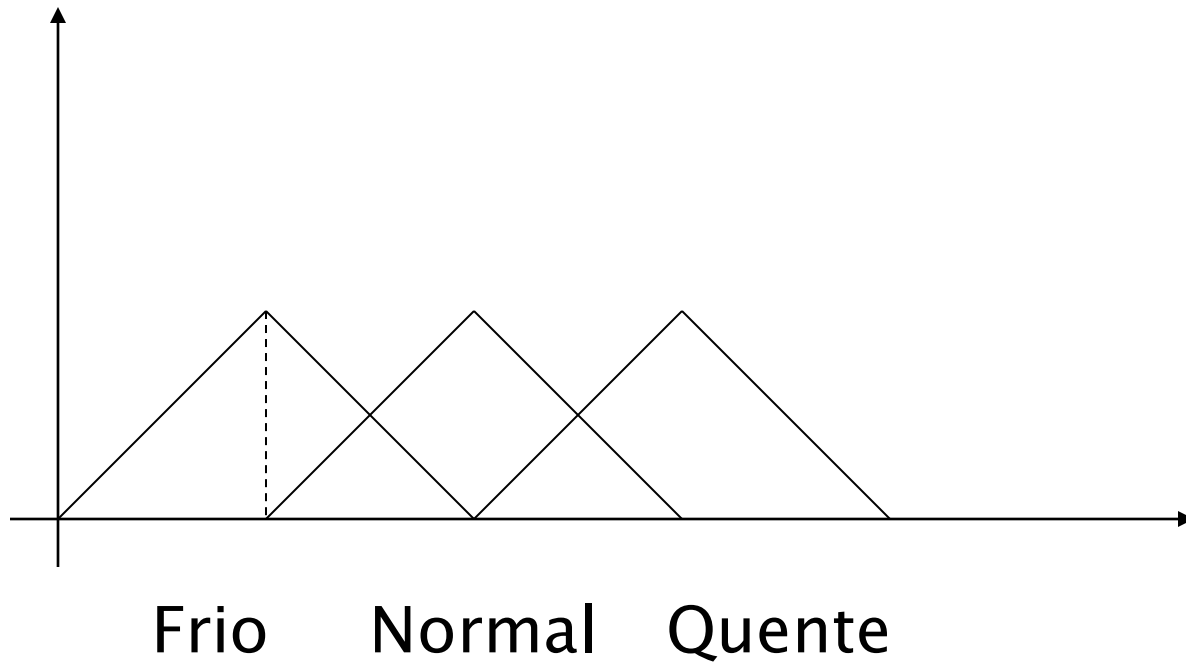
Definição das Funções de Pertinência; e

Criação das Regiões.

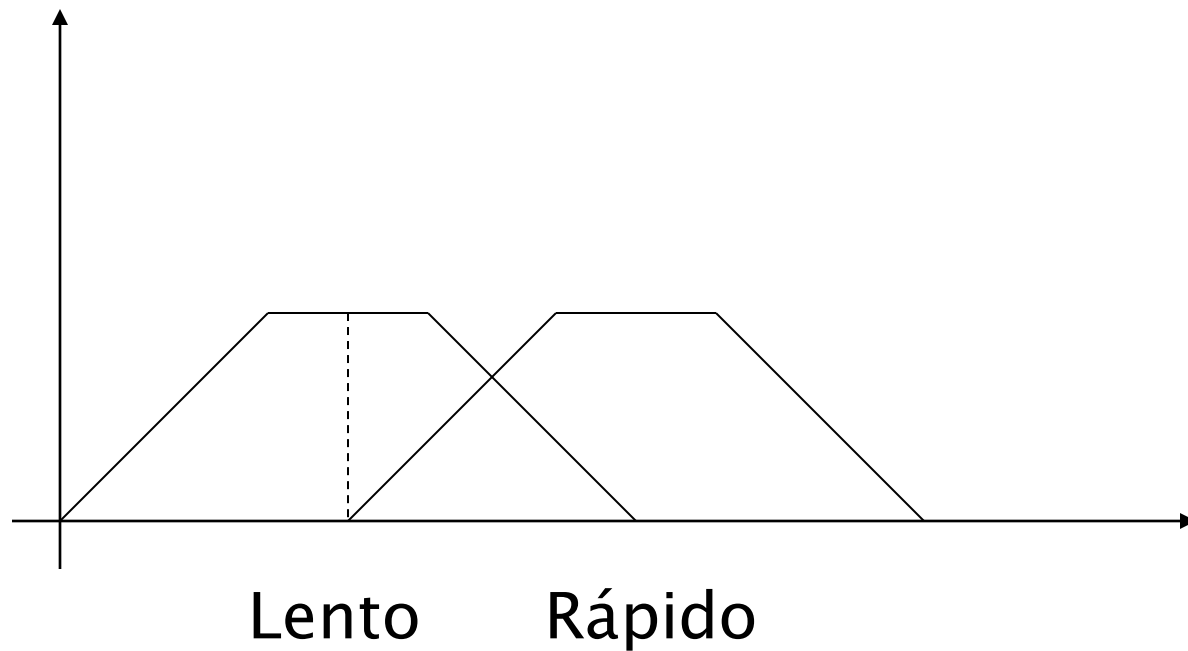
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados.
- Os mais comuns são: Triangular, Trapezoidal, Singleton e Shouldered

- Etapa na qual as variáveis numéricas são transformadas em variáveis lingüísticas via um processo de conversão escalar fuzzy
- Cada variável lingüística já deve ter seus termos lingüísticos especificados a priori (ou seja, com suas funções de pertinência definidas)
- Os termos antecedentes de cada regra são processados via interseção fuzzy entre os graus de pertinência das entradas atuais nos termos primários definidos para cada variável processo de agregação
- É gerado ao final um coeficiente de disparo para cada regra de produção fuzzy na BC que irá modular o(s) valor(es) da(s) correspondentes variável(is) de saída no(s) termo(s) conseqüente(s)

TRIANGULAR:



TRAPEZOIDAL:



Fuzzificação – Exemplo

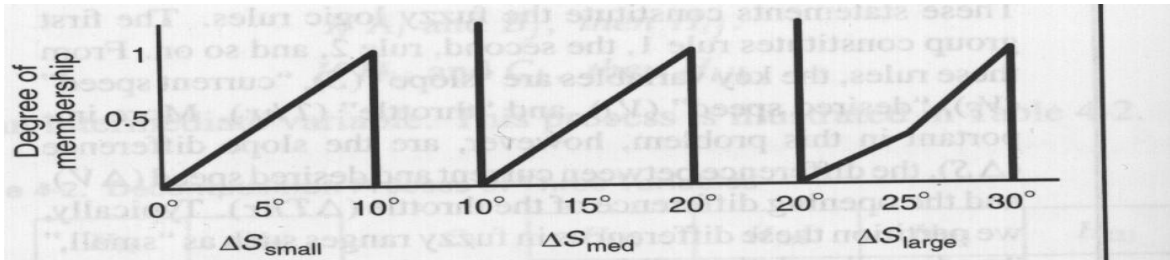


Figure 4-2 Membership functions for ΔS .

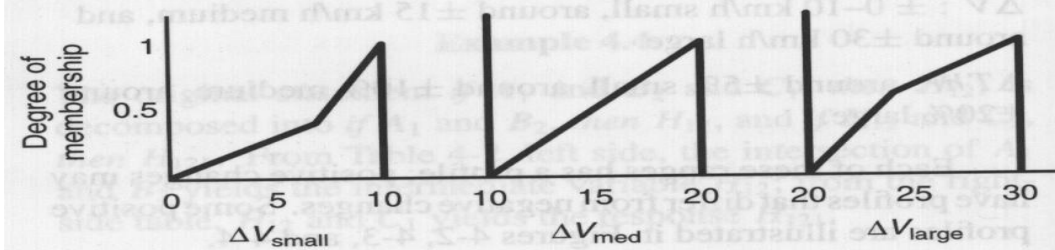
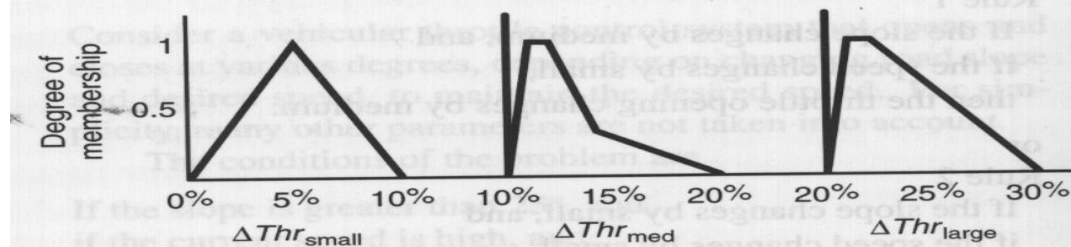


Figure 4-3 Membership functions for ΔV .

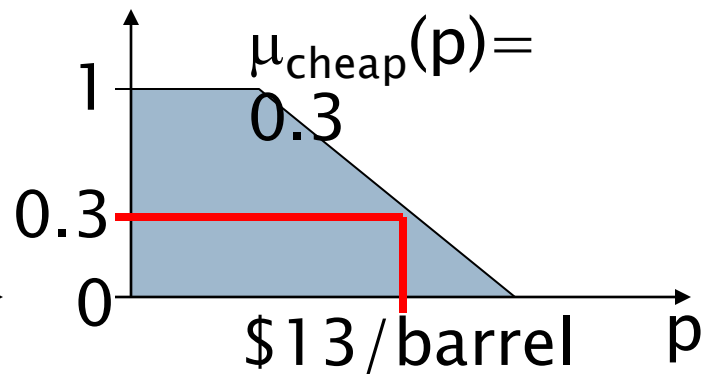
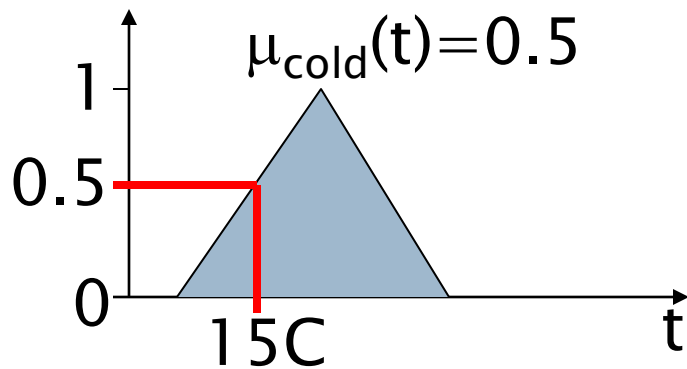


1. Fuzzificação

Determine o grau de pertinência para cada termo de uma variável de entrada :

temperatura : $t=15\text{ C}$

Preço óleo : $p=\$13/\text{barril}$



If *temperature* is *cold* ... and *oil* is *cheap* ...

- Etapa na qual informações qualitativas são agrupadas e posteriormente transformadas em outra informação qualitativa geral
- Uma operação global de união fuzzy vai compor um único conjunto fuzzy para cada variável de saída, contendo informações sobre todas as regras disparadas para as entradas atuais

$$\mu_{B'_i}(y) = S_{k=1..n} [T(D^{(k)}, \mu_{B_i}(y))] = \max_{k=1..n} [\min(D^{(k)}, \mu_{B_i}(y))], \forall y \in U_{y_2}$$

Coeficiente de disparo

Efeito de modulação

Composição das regras

Engloba:

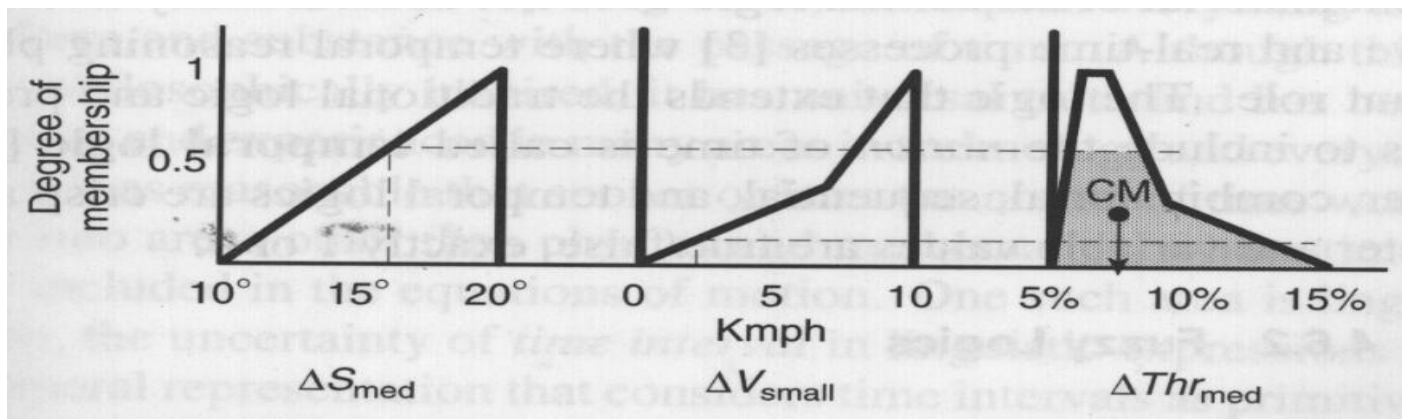
- Definição das proposições;
- Análise das Regras; e
- Criação da região resultante.

AGREGAÇÃO:

Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente (cálculo da parte do IF).

COMPOSIÇÃO:

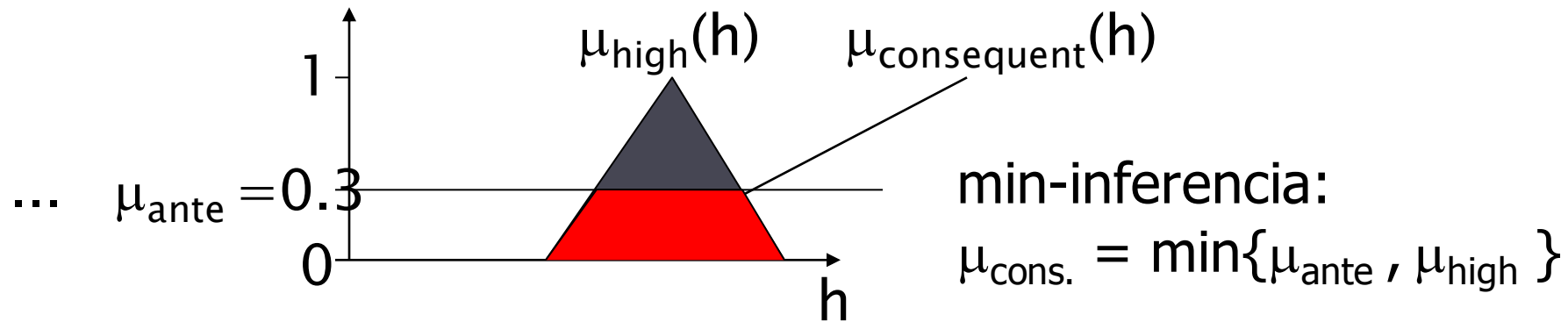
Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída (Cálculo da parte do then).



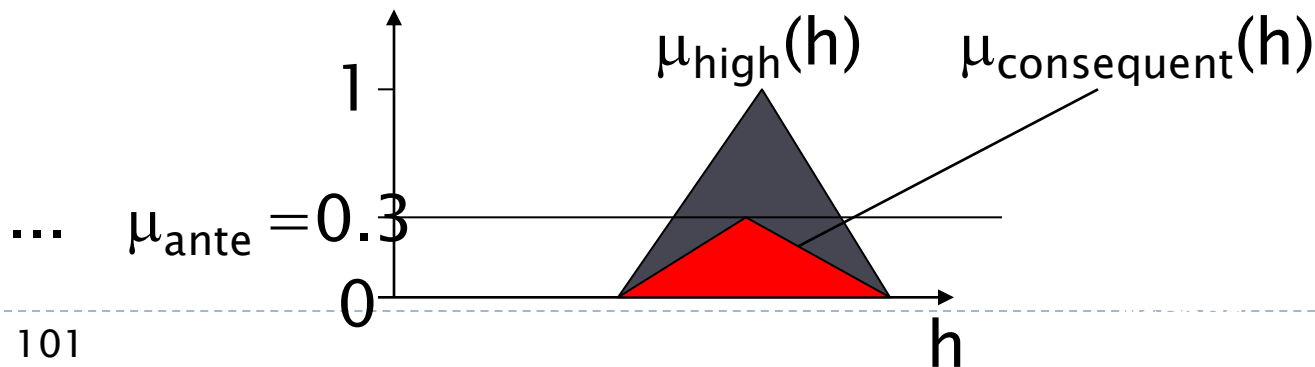
Regras de Inferência:

- 1^a – IF duração = longa AND qualidade = alta THEN risco = médio
- 2^a – IF duração = média AND qualidade = alta THEN risco = baixo
- 3^a – IF duração = curta AND qualidade = baixa THEN risco = baixo
- 4^a – IF duração = longa AND qualidade = média THENA risco = alto

2. Passo Agregação: Aplica o grau de pertinência do antecedente para o consequente da regra



... then heating is high

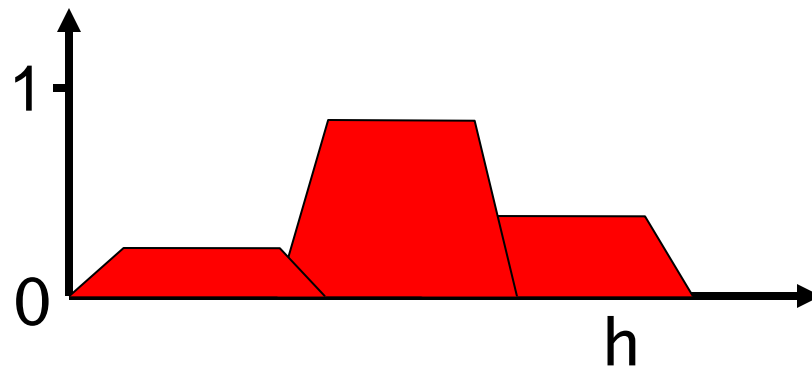


3. Composição: Agrega todas as regras dos consequentes usando o operador **max** para união

... then heating is high

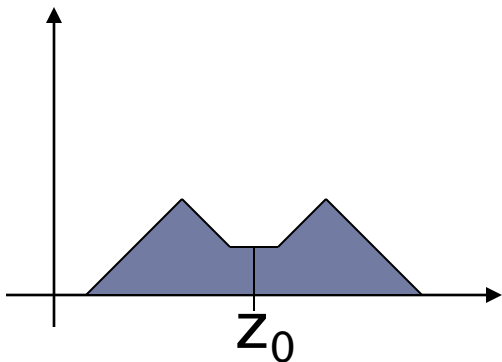
... then heating is medium

... then heating is low

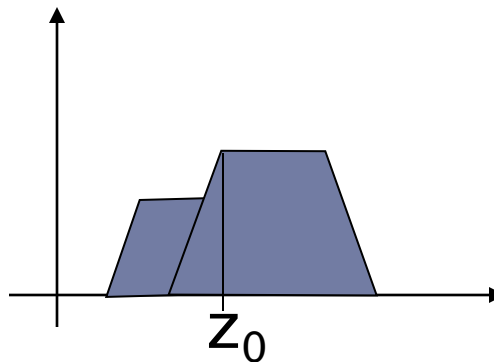


- Etapa no qual os conjuntos fuzzy resultantes são convertidos em valores escalares para as variáveis de saída do sistema
 - Conversão fuzzy \rightarrow escalar
- Dentre os diversas técnicas de defuzzificação destacam-se:
 - Centro de massa total
 - Centro de massa da maior subregião
 - Primeiro (último) dos máximos locais
 - Média dos máximos locais Máximo global Etc.

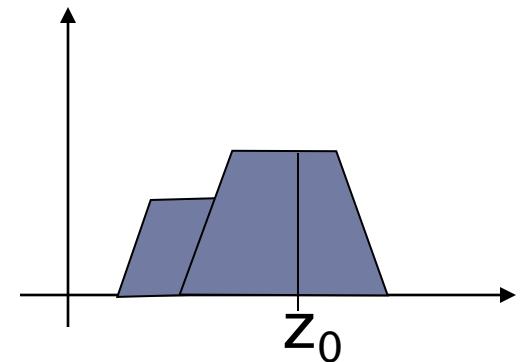
Exemplos:



Centro de
gravidade

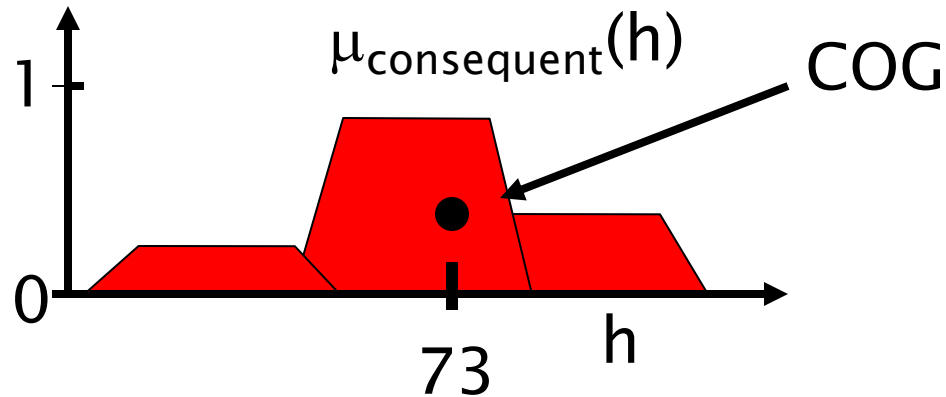


First-of-
Maxima



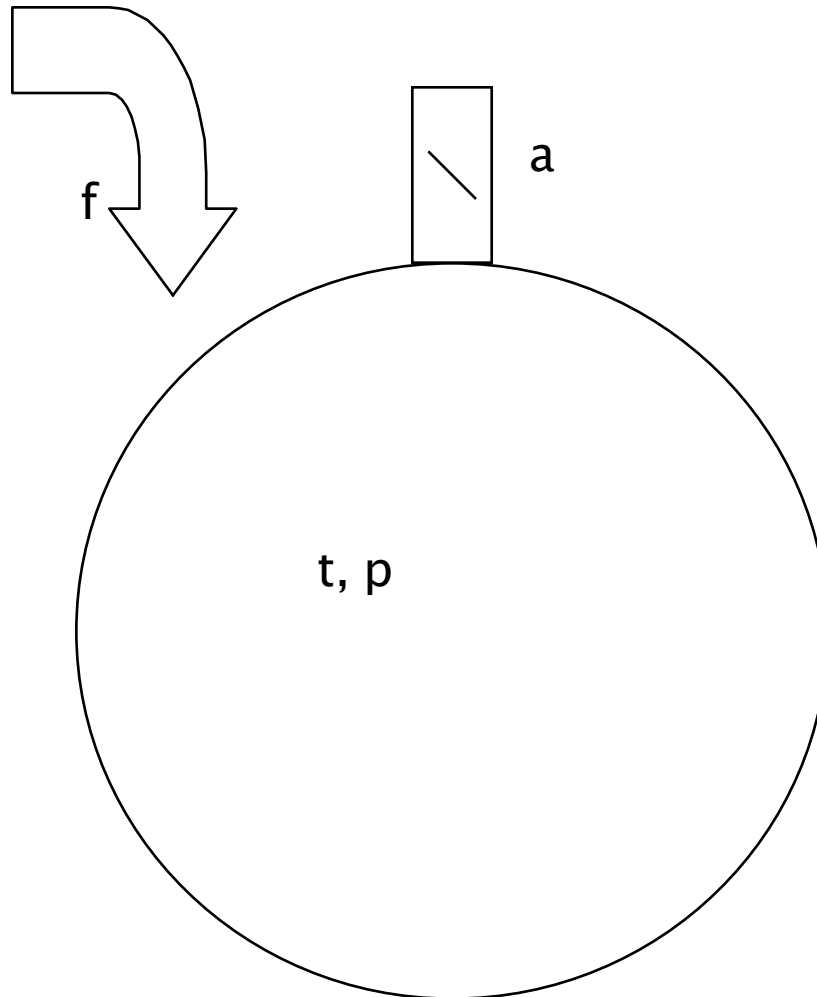
Critério
Máximo

4. Determine crisp value from output membership function for example using “Center of Gravity”-method:



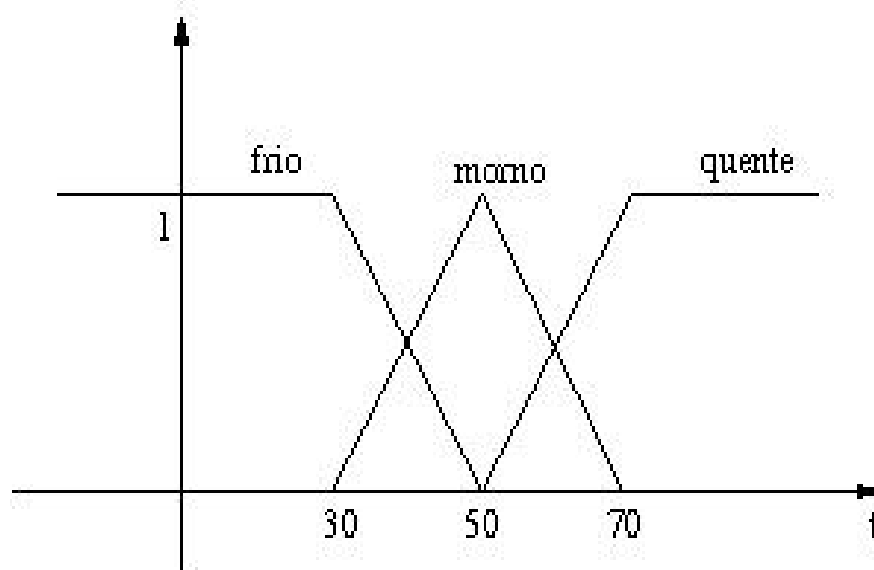
Estudo de Caso

t: temperatura
p: pressão
a: ângulo
f: fluxo



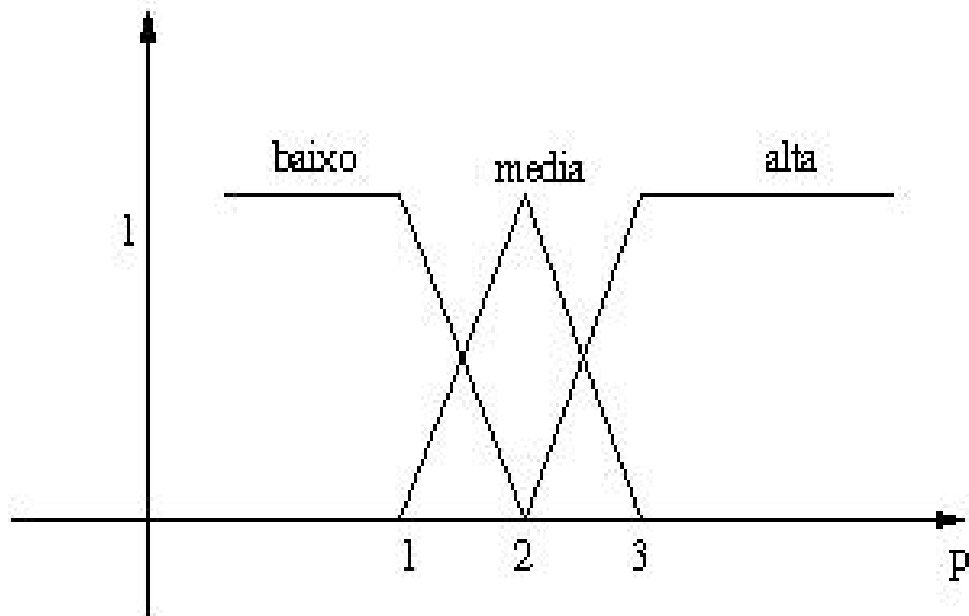
- ▶ Construir os conjuntos fuzzy fundamentais (Variáveis Lingüísticas sem qualificador).
- ▶ Construir os qualificadores.
- ▶ Definir as estratégias para o passo de composição e de defuzzificação.
- ▶ Construir as regras:
 - ▶ condicionais.
 - ▶ incondicionais.

- Construindo os conjuntos fuzzy fundamentais
- Temperatura



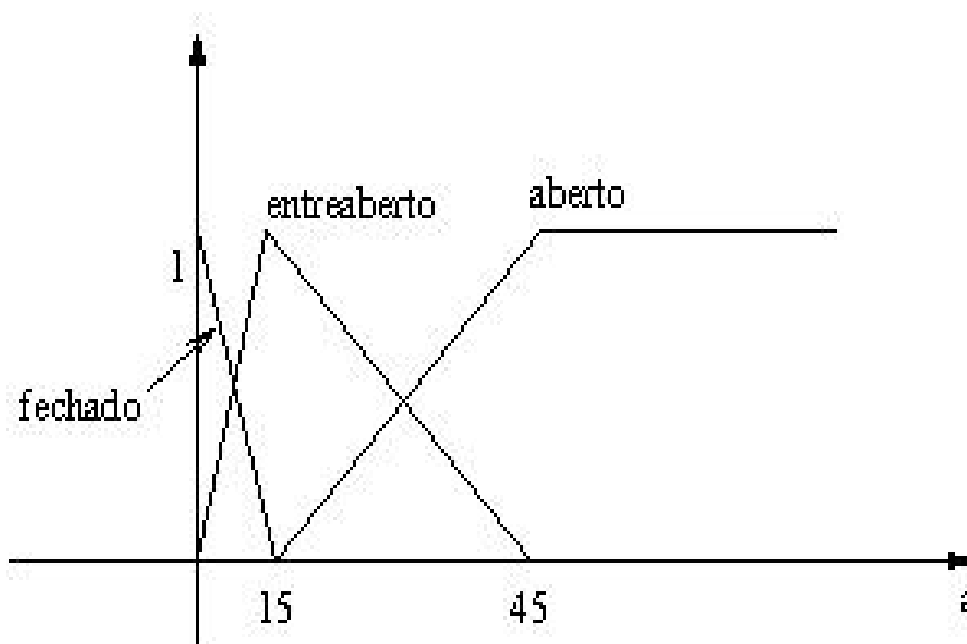
Construção

- Construindo os conjuntos fuzzy fundamentais
 - Pressão

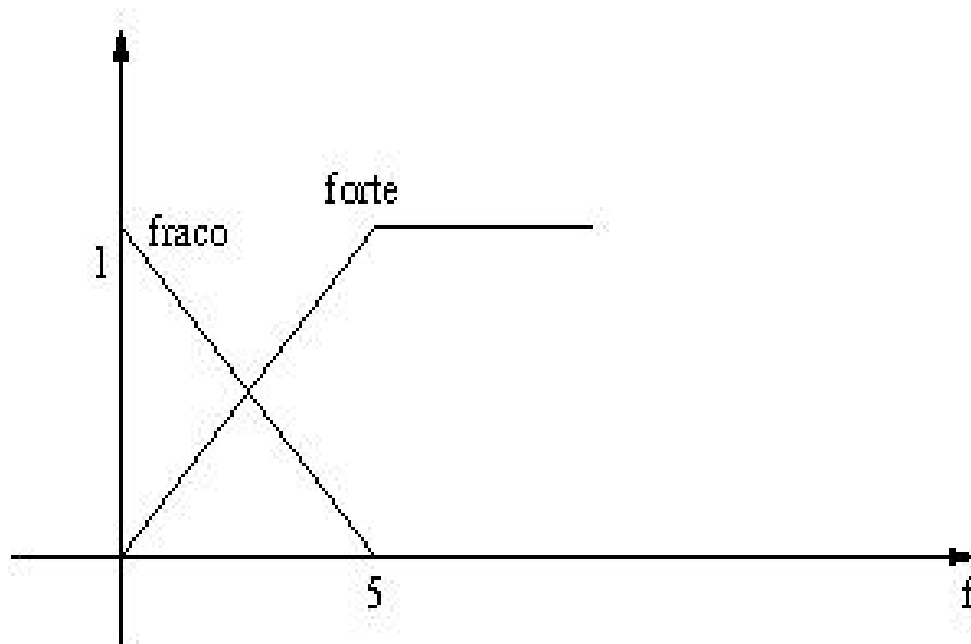


Construção

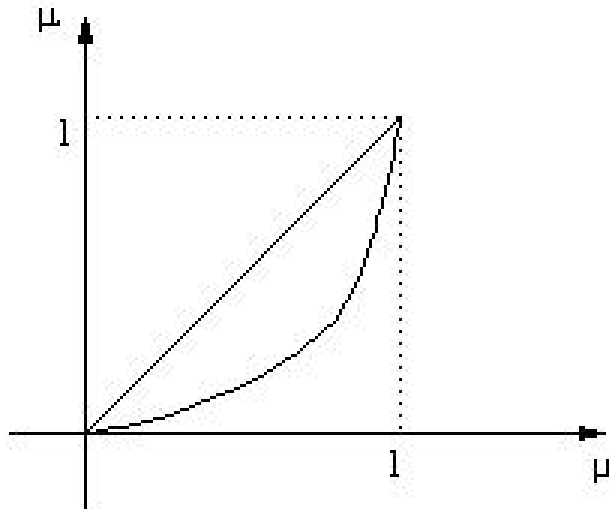
- Construindo os conjuntos fuzzy fundamentais
 - Ângulo de abertura



- Construindo os conjuntos fuzzy fundamentais
 - Fluxo



- ▶ Construindo o qualificador.
- ▶ Muito.



- ▶ Escolhendo a estratégia de composição:
 - ▶ min-max ou aditiva
 - ▶ Vamos escolher aditiva.
- ▶ Escolhendo a estratégia de defuzzificação:
 - ▶ centróide, máximos, ou etc...
 - ▶ Vamos escolher centróide.

- ▶ Construir as regras incondicionais.
 - ▶ a is Fechado
 - ▶ f is fraco

► Construir as regras condicionais.

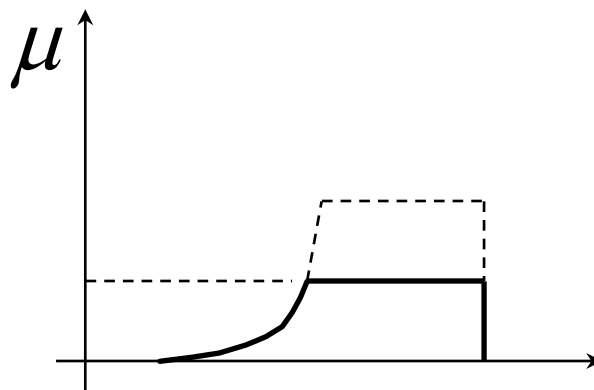
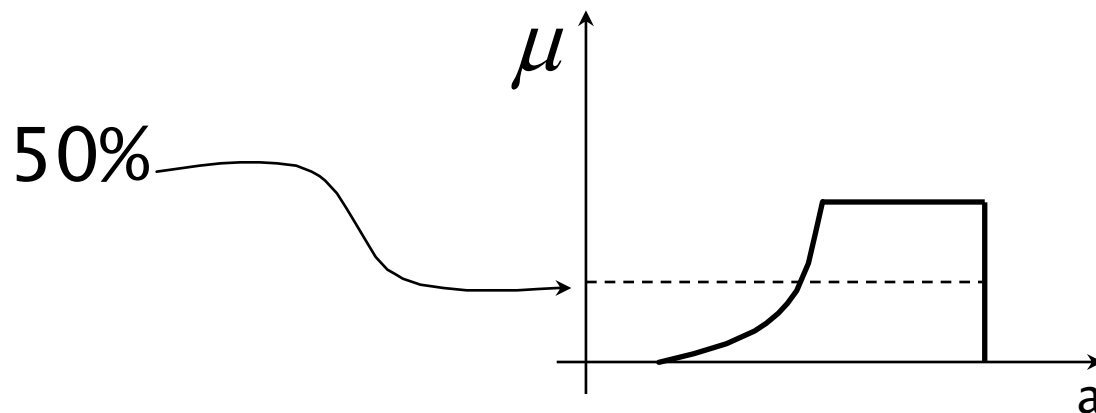
- **If** t is frio and p is media **then** a is muito entreaberto
- **If** t is frio and p is alta **then** a is aberto
- **If** t is morno and p is media **then** a is entreaberto
- **If** t is morno and p is alta **then** a is muito aberto
- **If** t is quente **then** f is forte
- **If** t is quente **then** a is aberto

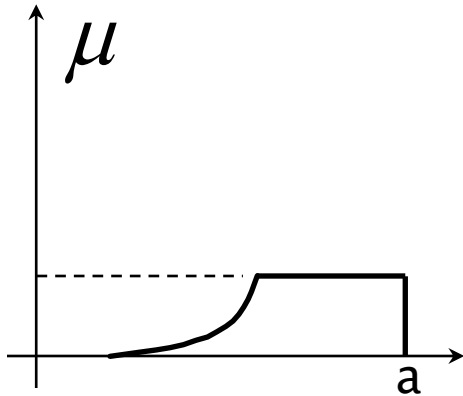
- ▶ Suponha a seguinte situação:
 - ▶ $t = 60^{\circ}\text{C}$
 - ▶ $p = 4 \text{ atm}$
- ▶ O agente vai inferir os valores de a e f , a partir de t e p .
- ▶ Os três passos serão realizados:
 - ▶ Fuzzificação
 - ▶ Inferência
 - ▶ Defuzzificação

Fuzzificação

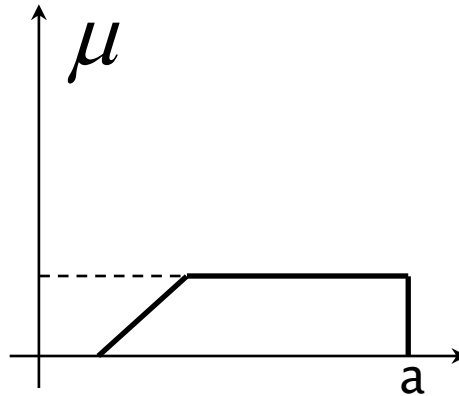
If t is morno and p is alta then a is muito aberto

0.5 and 1

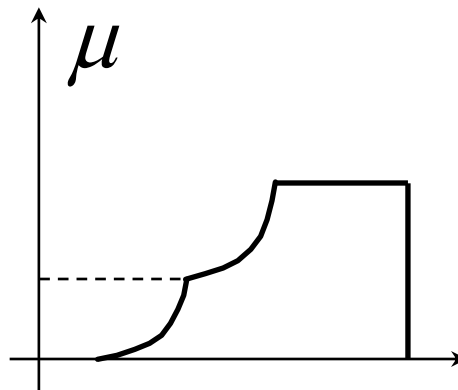
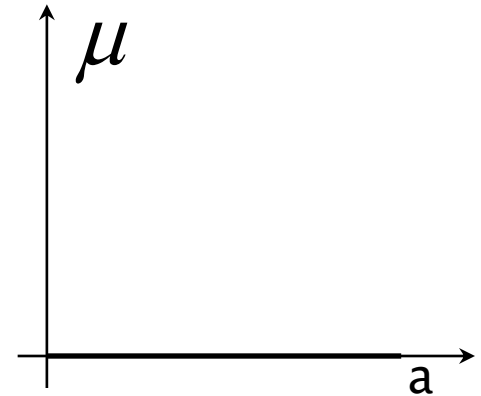


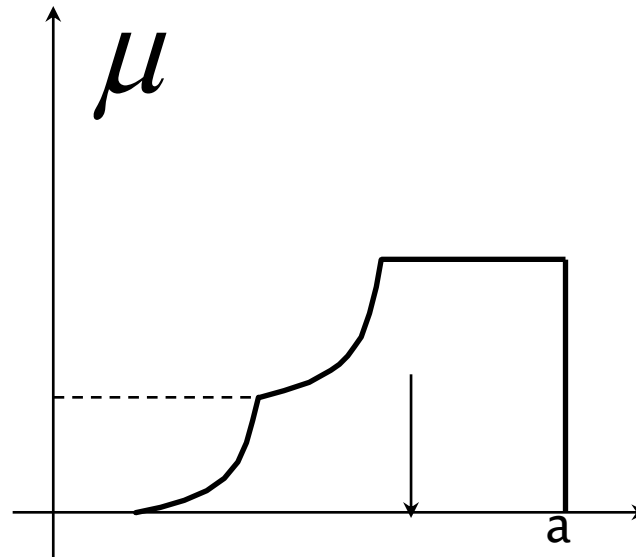


Regra 1



Regra 1





$$a = 60^\circ$$

- ▶ Lógica Binária vs. Lógica Multivalorada vs. Lógica Fuzzy
- ▶ Quanto mais geral o modelo, mais difícil e complexo.
 - ▶ Se o modelo simples resolve, não use o complicado
- ▶ Generalidade da Teoria Difusa.
 - ▶ Zadeh, o criador de Lógica difusa, afirma que a teoria difusa pode ser usada para generalizar qualquer área do conhecimento baseada no discreto, e não apenas a lógica.

Lógica *Fuzzy* é uma importante ferramenta para auxiliar a concepção de sistemas complexos, de difícil modelagem, e pode ser utilizada em conjunto com outras tecnologias de ponta, como é o caso da combinação entre Lógica *Fuzzy* e Redes Neurais Artificiais.