

Quanto à terceira propriedade, energia finita, observamos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} p_{1/n}(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} p_{1/n}(t) dt = 1. \quad (2.2.8)$$

A função impulso é de grande importância na teoria dos sinais, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista das aplicações. Uma de suas propriedades mais importantes é dada pela equação

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(x - t) dt. \quad (2.2.9)$$

Essa equação mostra que todo sinal pode ser escrito como uma soma infinita de impulsos devidamente transladados e modulados pelo valor do sinal. Deixamos ao leitor a tarefa de se convencer da validade da equação (2.2.9) usando a definição de δ como limite de sinais do tipo pulso (equação (2.2.7)).

2.2.4 Modelo Espectral de Sinais

Vimos que no modelo temporal um sinal é determinado por uma função $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que define a variação do sinal no domínio do tempo U . A interpretação física do significado das variáveis no domínio e no contradomínio de uma representação funcional de um sinal, apesar de ser irrelevante do ponto de vista matemático, é de fundamental importância nas aplicações onde diferentes modelos funcionais de sinais podem ser utilizados. Para melhor entender o modelo espectral de sinal, considere a sinal definido por uma senoide $f(t) = a \sin(2\pi\omega_0 t + \Phi)$. Esse sinal fica completamente caracterizado pela sua amplitude a , pela sua frequência ω_0 e pelo seu ângulo de fase Φ . A frequência nos dá uma medida da variação do sinal por unidade de comprimento (o sinal dá ω_0 ciclos completos por unidade de comprimento), conforme ilustramos na Figura 2.7 para frequências 2, 4 e 8.

Com base no exemplo acima podemos tentar caracterizar um sinal através de suas componentes de frequência. Ou seja, devemos obter um modelo funcional de um sinal que associa a cada frequência presente no sinal a amplitude e o ângulo de fase correspondentes. Considere, por exemplo, o sinal periódico $f(t) = a \cos(2\pi\omega_0 t)$ cujo gráfico é mostrado na Figura 2.8(a). Esse sinal é constituído por uma única componente de frequência ω_0 com amplitude a e ângulo de fase 0. Portanto a sua representação funcional usando frequências é dada pela função

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} a & \text{se } s = \omega_0; \\ 0 & \text{se } s \neq \omega_0, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

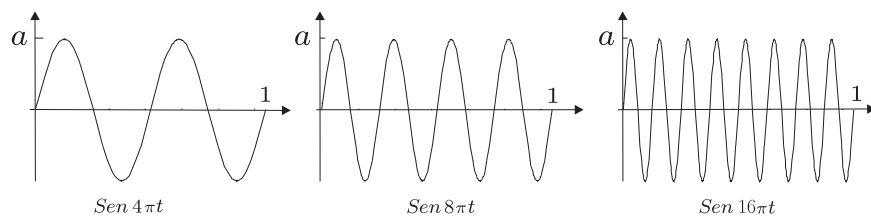


Figura 2.7: Sinais com frequências 2, 4 e 8.

cujá representação gráfica é feita conforme mostramos na Figura 2.8(b). Vamos agora fazer uma observação importante com relação à definição de $\hat{f}(s)$. Como

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad (2.2.11)$$

podemos escrever o sinal $f(t)$ na forma

$$f(t) = \frac{a}{2}(e^{2\pi i\omega_0 t} + e^{2\pi i(-\omega_0)t}). \quad (2.2.12)$$

Vemos nessa representação que temos duas componentes de frequência simétricas, ω_0 e $-\omega_0$, ambas com amplitude $a/2$. É comum portanto utilizar a representação gráfica do modelo de frequências \hat{f} conforme mostramos na Figura 2.8(c).

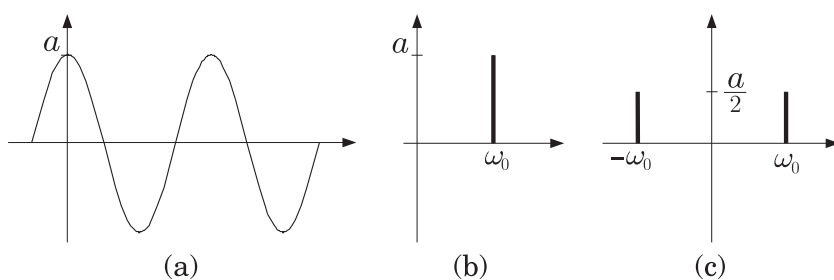


Figura 2.8: Sinal periódico e seus modelos de frequência.

A representação com o modelo funcional de frequências utilizada no sinal acima pode ser generalizada para obter uma representação no espaço de frequências para qualquer sinal periódico utilizando a série de Fourier. Com efeito, a teoria das séries de Fourier garante que um sinal periódico f

de período T_0 pode ser escrito como uma série

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi k\omega_0 t}, \quad (2.2.13)$$

onde ω_0 é a *freqüência fundamental* do sinal, definida por $\omega_0 = 1/T_0$.

Esse desenvolvimento em série de Fourier mostra que um sinal periódico contém todas as freqüências múltiplas de sua freqüência fundamental ω_0 , e apenas essas freqüências. O modelo de freqüências do sinal pode então ser definido por uma função que associa a cada múltiplo $k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$, da freqüência fundamental, a amplitude c_k . No caso de c_k ser um número complexo, podemos representar o modelo freqüências da parte real e imaginária em separado. Outra opção nesse caso é utilizar a forma polar do número complexo c_k representando, para cada múltiplo $k\omega_0$ da freqüência fundamental, o módulo de c_k e o seu ângulo de fase.

Example 2.2. (*Sinal dente de serra*). Considere o sinal periódico $f(t)$ cujo gráfico é mostrado na Figura 2.9(a) (*sinal dente de serra*). Tomando $\omega_0 = 1/T_0$, a série de Fourier de f é dada por

$$f(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{8}{\pi^2 T_0} \left[\cos(2\pi\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(6\pi\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(10\pi\omega_0 t) + \dots \right]. \quad (2.2.14)$$

O gráfico da representação por freqüências do sinal f é mostrado na Figura 2.9(b)

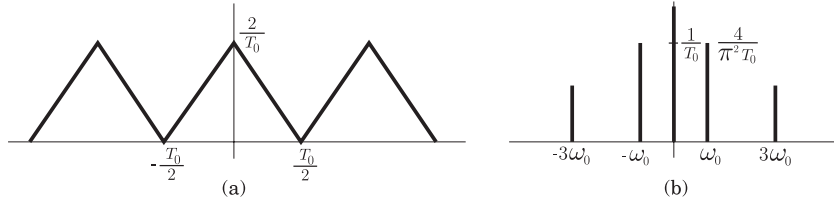


Figura 2.9: Modelo espacial (A), e modelo de freqüências (B), do sinal dente de serra.

A série de Fourier nos permitiu definir um modelo funcional de freqüências para sinais periódicos. Desejamos agora estender o modelo funcional de freqüências para sinais não-periódicos. Para isso, precisamos encontrar uma ferramenta que nos permita medir a ocorrência de uma determinada

freqüência em um sinal arbitrário. É claro que não podemos utilizar a série de Fourier para esse fim. No caso não-periódico o sinal pode conter freqüências arbitrárias, ou seja, podemos ter um “continuum” de freqüências. O método clássico para fazer essa medida é a *transformada de Fourier* conforme explicamos abaixo.

Transformada de Fourier

Dado um sinal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a sua *transformada de Fourier* é definida por

$$f \mapsto \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi its} dt. \quad (2.2.15)$$

É imediato verificar que a transformada de Fourier define um operador linear $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, $f \mapsto \hat{f} = F(f)$, entre dois espaços de sinais.

É fácil ver, de modo intuitivo, que a transformada de Fourier cumpre o papel de detectar freqüências no sinal f . Com efeito o núcleo $e^{-2\pi its}$ é um sinal periódico com freqüência s . Desse modo, para cada $s \in \mathbb{R}$ a modulação $f(t)e^{-2\pi its}$ resalta as regiões da reta onde a freqüência do sinal f entra em ressonância com as freqüências do núcleo $e^{-2\pi its}$. A integral em (2.2.15) é uma medida da “densidade” da freqüência s no sinal f em todo o seu domínio. Portanto o valor $\hat{f}(s)$ indica a ocorrência da freqüência s no sinal f porém não nos dá informação sobre a localização dessa freqüência no domínio do sinal.

A transformada de Fourier F possui uma transformada inversa F^{-1} , definida por

$$f(t) = F^{-1}(\hat{f}(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)e^{2\pi ist} ds. \quad (2.2.16)$$

Note que, intuitivamente, a equação (2.2.16) mostra que o sinal f é uma soma infinita de sinais com freqüência s , $s \in \mathbb{R}$, e amplitude $\hat{f}(s)$.

Portanto, um sinal pode ser caracterizado tanto pelo seu modelo espacial f , como pelo seu modelo de freqüências \hat{f} . A transformada de Fourier, e sua inversa, fazem a conversão entre os dois modelos. O modelo funcional, $\hat{f} = F(f)$, de freqüências de um sinal é chamado de *modelo espectral*. Desse modo, o modelo espacial nos dá informação sobre a variação do sinal no domínio do espaço, enquanto o modelo espectral nos dá informações sobre a variação do sinal no domínio da freqüência. De um modo geral o modelo espacial é utilizado para síntese enquanto que o modelo espectral é mais utilizado para a análise de sinais.