AULA 6

Fluxos em redes

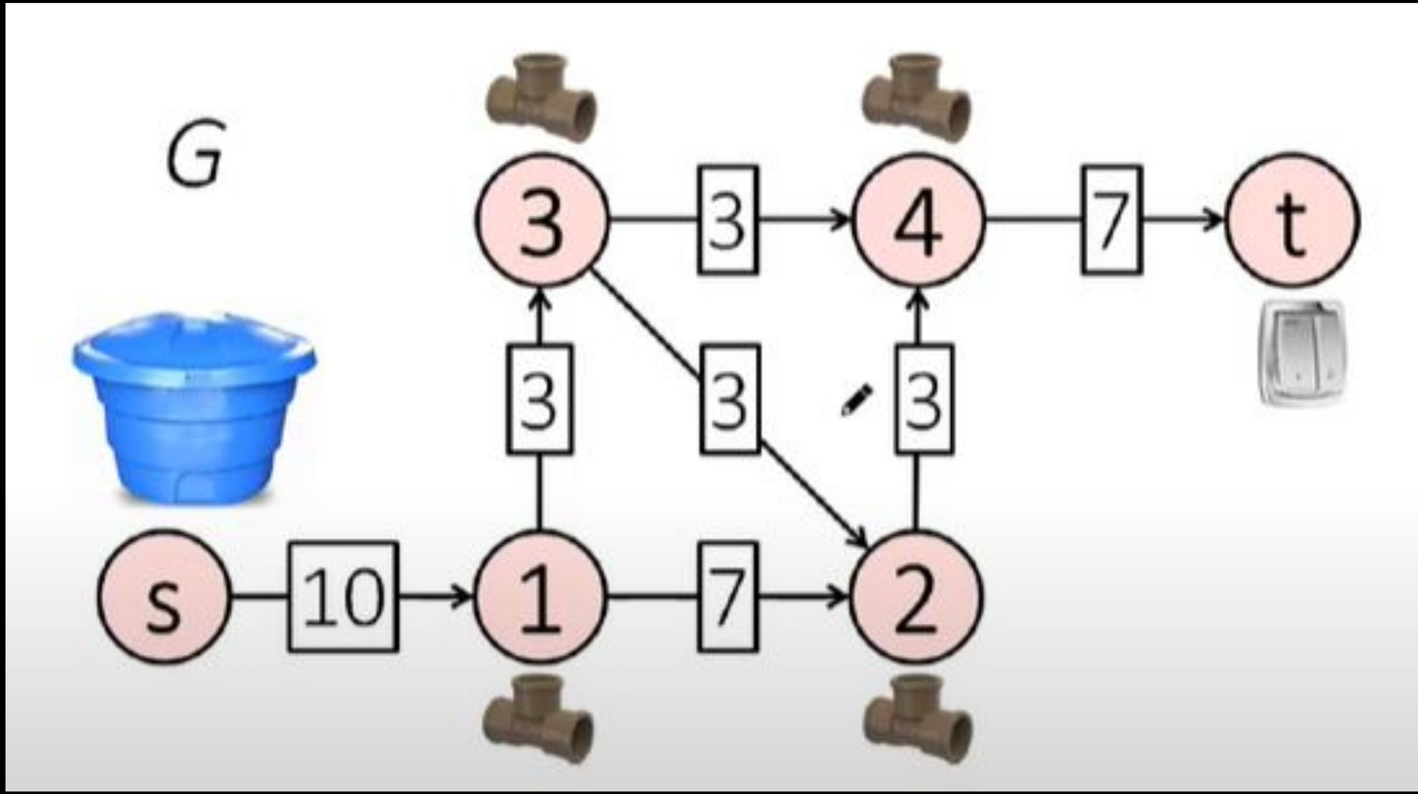
Karina Valdivia Delgado

Roteiro

Motivação
Fluxos em redes
O problema de fluxo máximo
O problema de corte mínimo
O método de Ford-Fulkerson

Motivação

Suponha que temos líquidos fluindo por tubos e desejamos saber qual a quantidade máxima de água em cm^3/s que pode fluir da caixa (s) a descarga (t).



Motivação

O fluxo em redes pode ser usado para modelar:

- Líquidos fluindo por tubos
- Corrente fluindo por redes elétricas
- Escoamento de produção
- Gerenciamento de transporte

Dois problemas importantes de fluxo em redes

- Problema do fluxo máximo
- Problema do corte mínimo
- Problema do fluxo de custo mínimo

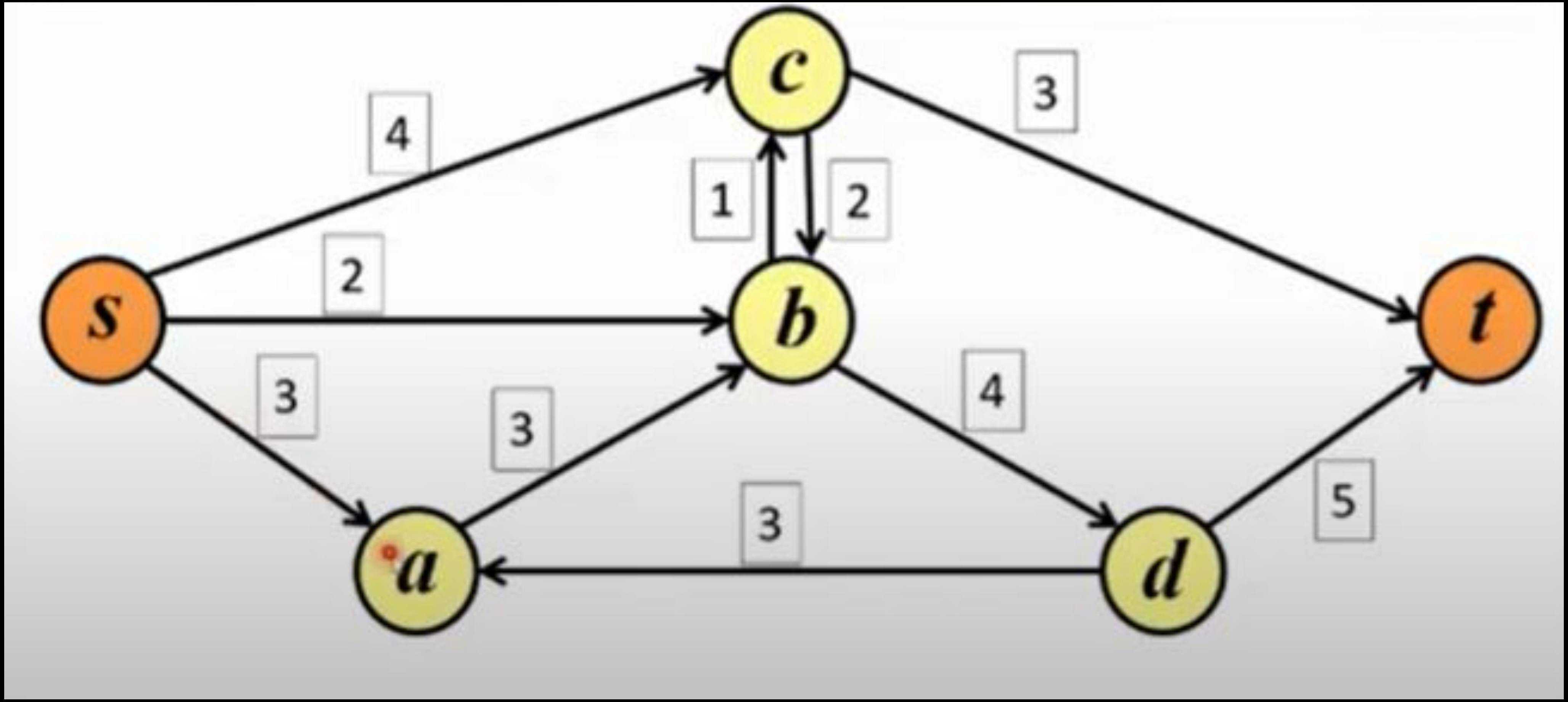
Fluxos em redes

Fluxos em redes

Um **fluxo em rede** é um grafo orientado G=(V,E) em que cada aresta (u,v) em E tem uma **capacidade** não negativa c(u,v)>=0.

Distinguimos dois vértices em um fluxo de rede: uma **origem s** e um **destino t**. Tal que, s é uma fonte que alcança todos os demais, e t é um sumidouro (ou sorvedouro) alcançado por todos os demais.

Fluxos em redes

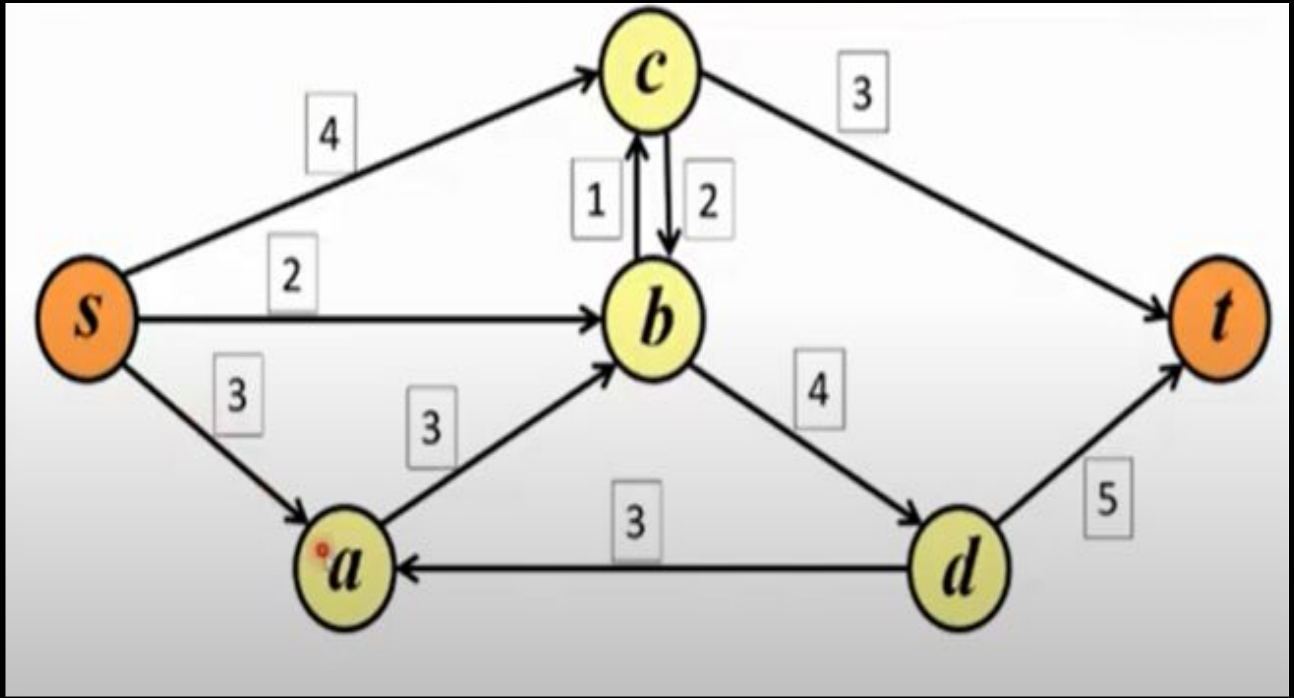


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo

Um fluxo em G é uma função f: E → R^+ que satisfaz as seguintes propriedades:

- **Restrição de capacidade: f(u,v)<=c(u,v) para toda aresta (u,v)**
- **Conservação de fluxo: $\sum_x f(x,v) = \sum_z f(v,z)$ para todo v em V-{s,t}**

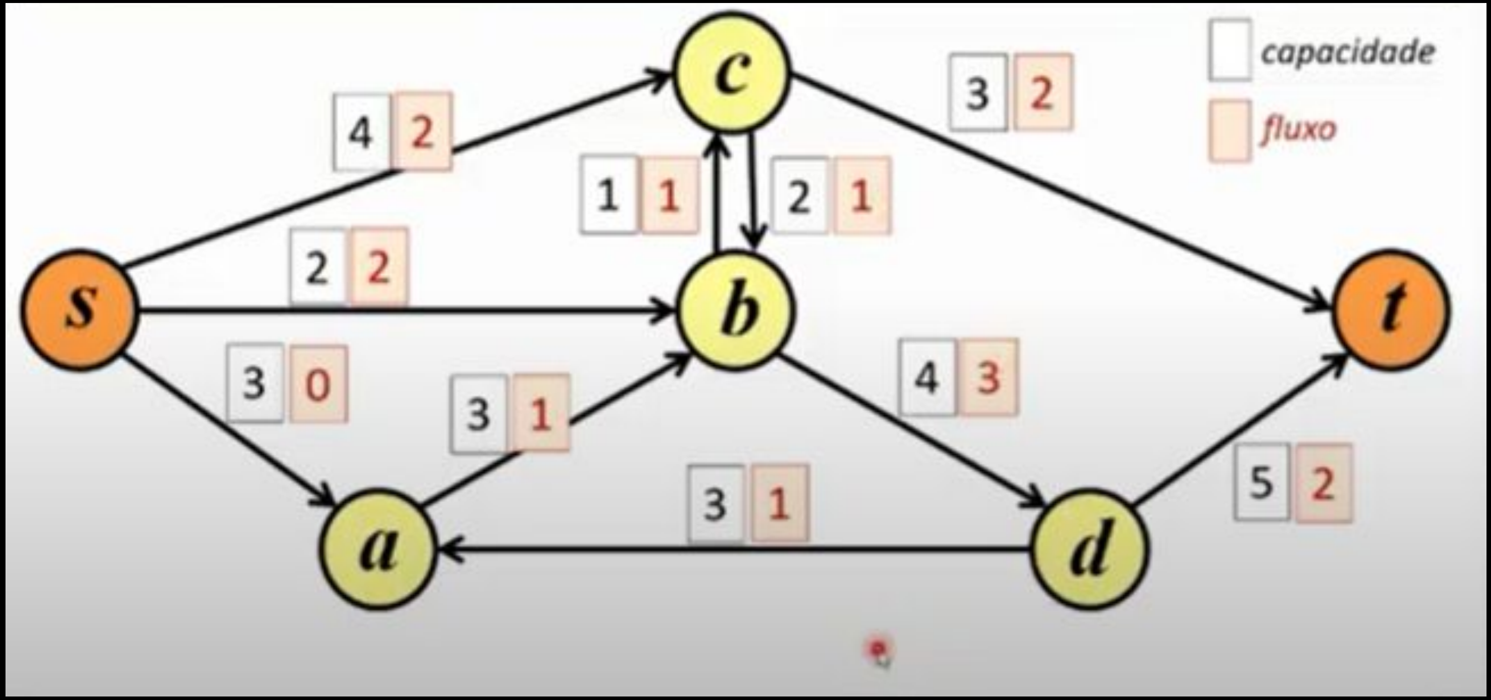


Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo

Um **fluxo** em G é uma função f: E → R^+ que satisfaz as seguintes propriedades:

- **Restrição de capacidade**: f(u,v)<=c(u,v) para toda aresta (u,v)
- **Conservação de fluxo**: $\sum_x f(x,v) = \sum_z f(v,z)$ para todo v em V-{s,t}

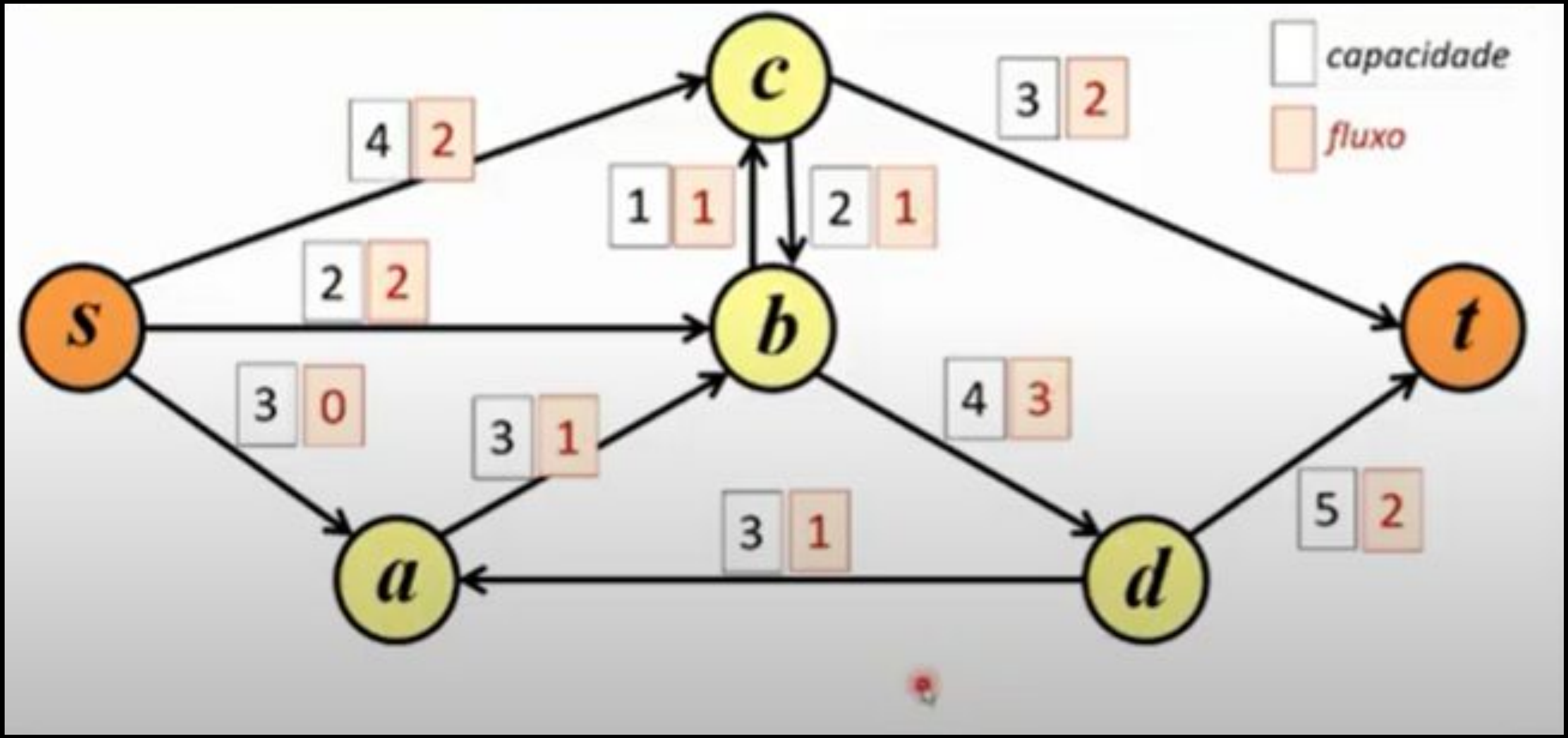


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Valor do fluxo

O valor do fluxo em v é definido como $\sum_x f(x,v)$ (ou $\sum_z f(v,z)$) para todo v em V-{s,t}

O valor do fluxo em s é definido como $\sum_z f(s,z)$ e em t é $\sum_x f(x,t)$

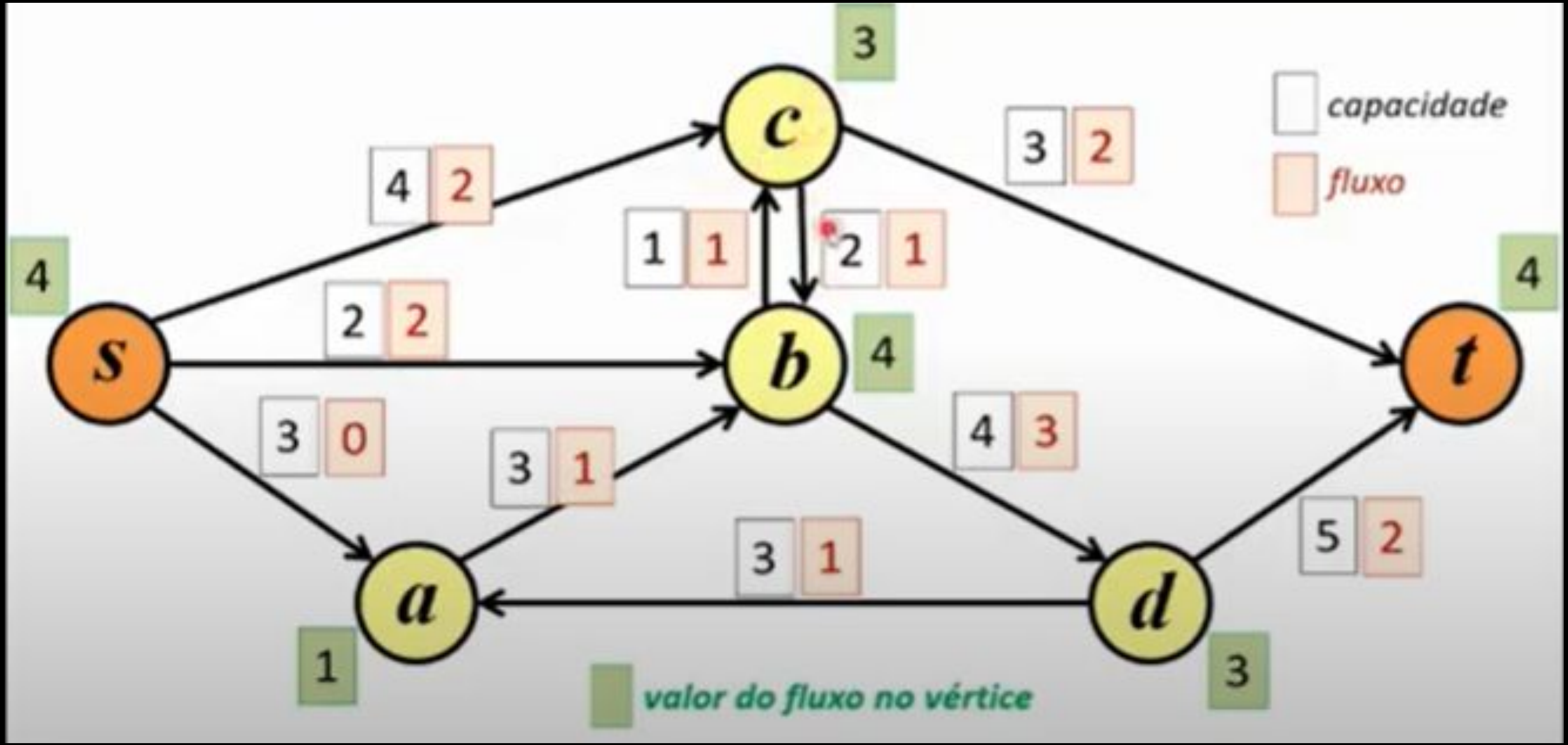


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Valor do fluxo

O valor do fluxo em v é definido como $\sum_x f(x,v)$ (ou $\sum_z f(v,z)$) para todo v em V-{s,t}

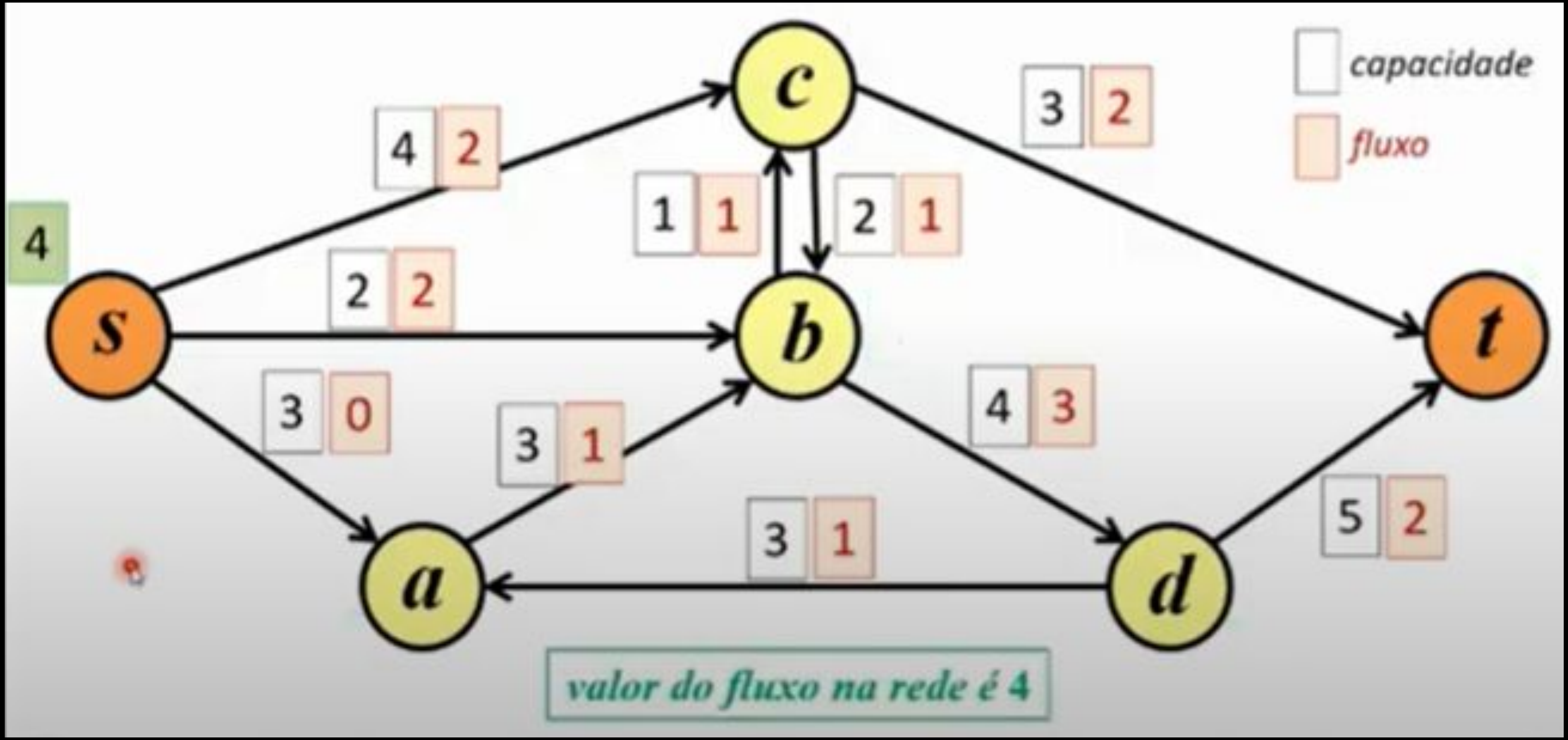
O valor do fluxo em s é definido como $\sum_z f(s,z)$ e em t é $\sum_x f(x,t)$



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Valor do fluxo

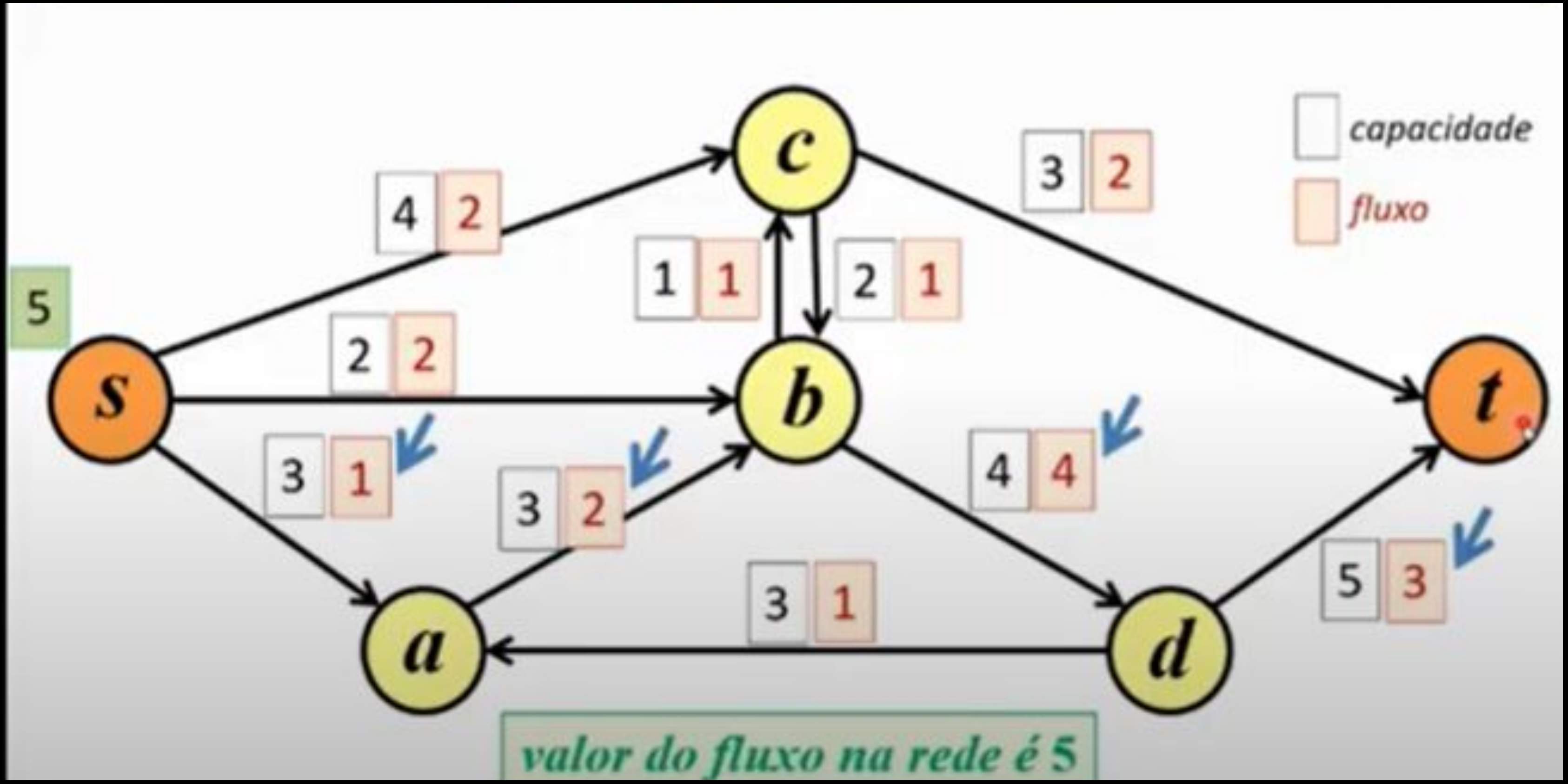
O valor do fluxo na rede é definido como o valor do fluxo em s, isto é, $\sum_z f(s,z)$.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Valor do fluxo

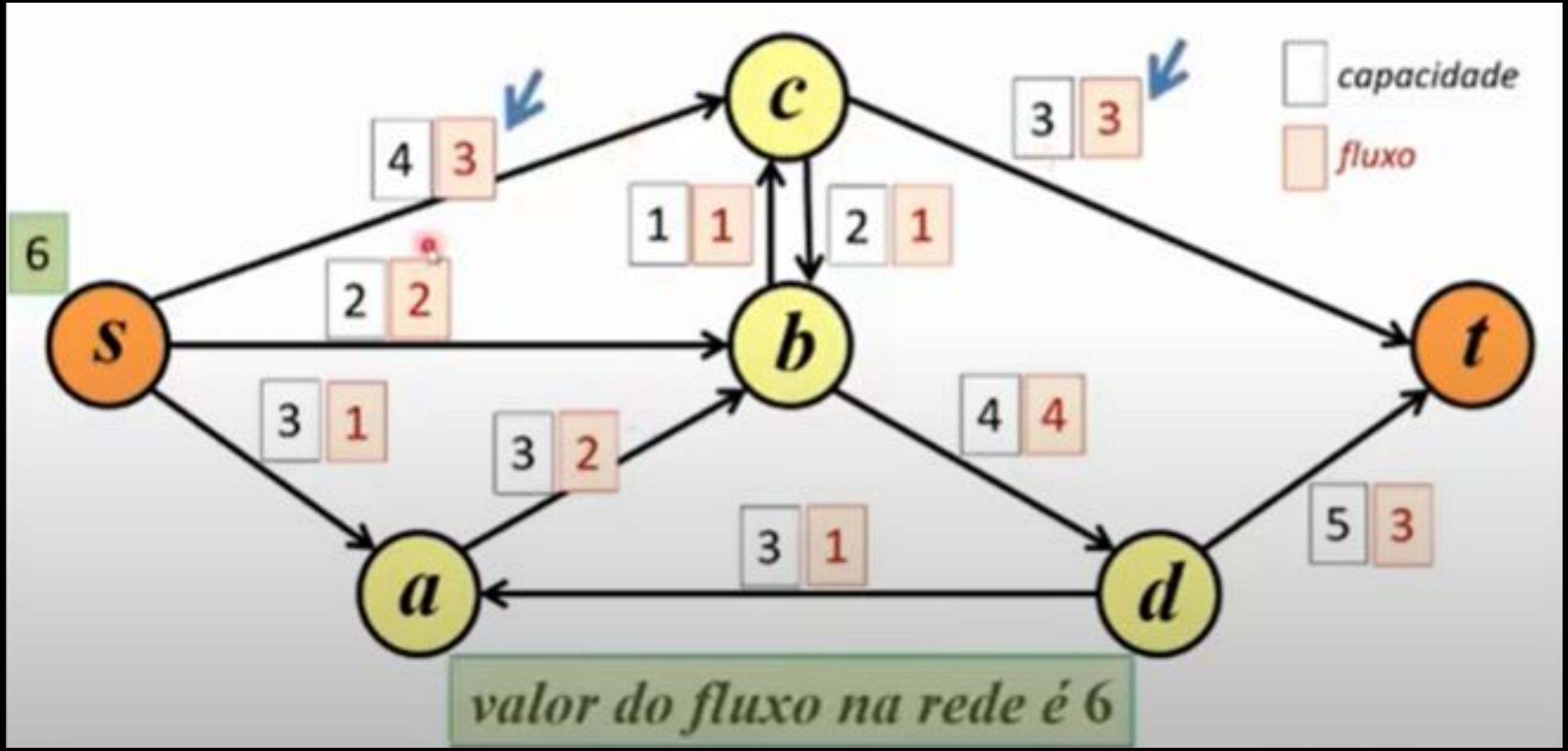
O valor do fluxo na rede é definido como o valor do fluxo em s, isto é, $\sum_z f(s,z)$.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Valor do fluxo

O valor do fluxo na rede é definido como o valor do fluxo em s, isto é, $\sum_z$ f(s,z).

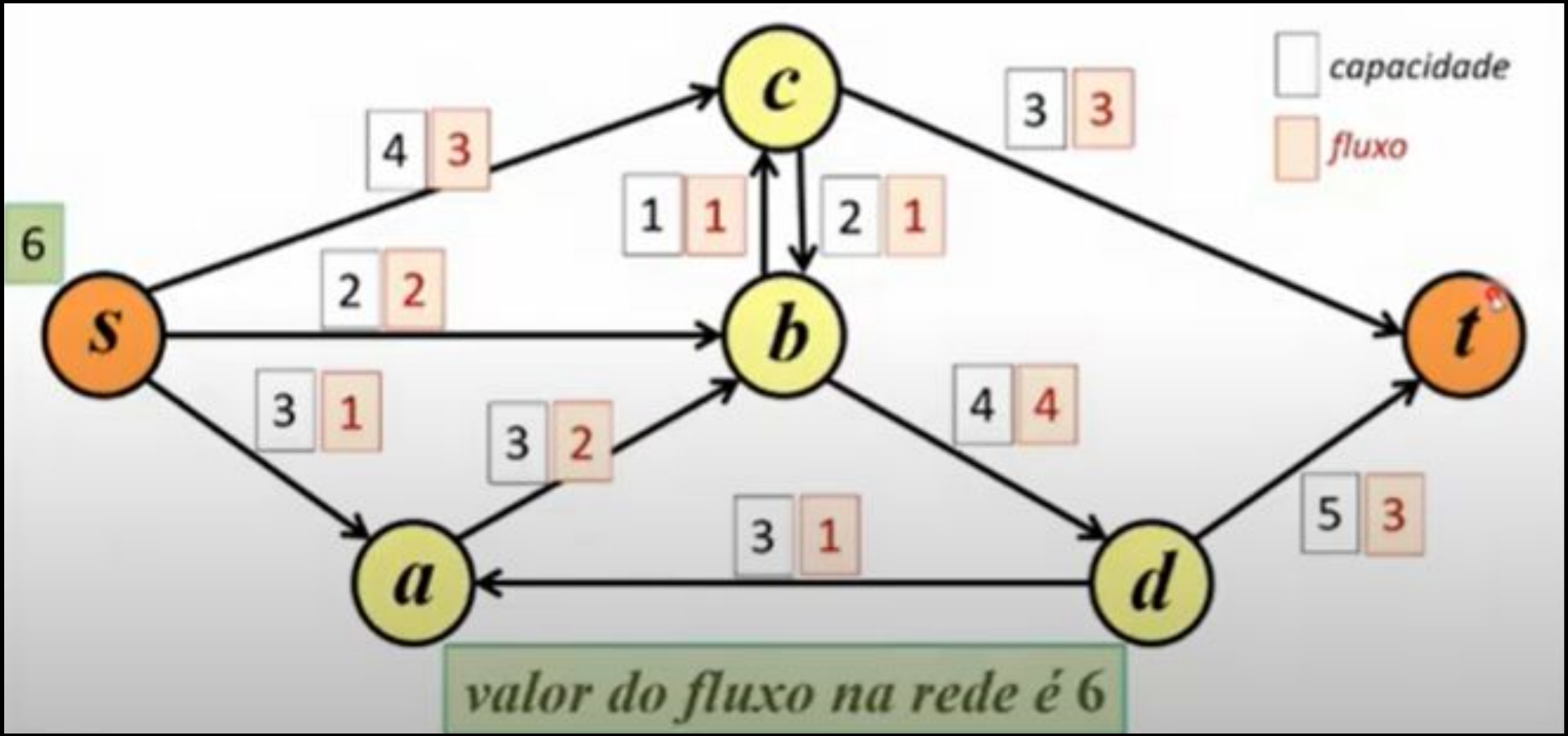


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

O problema de fluxo máximo

O problema de fluxo máximo

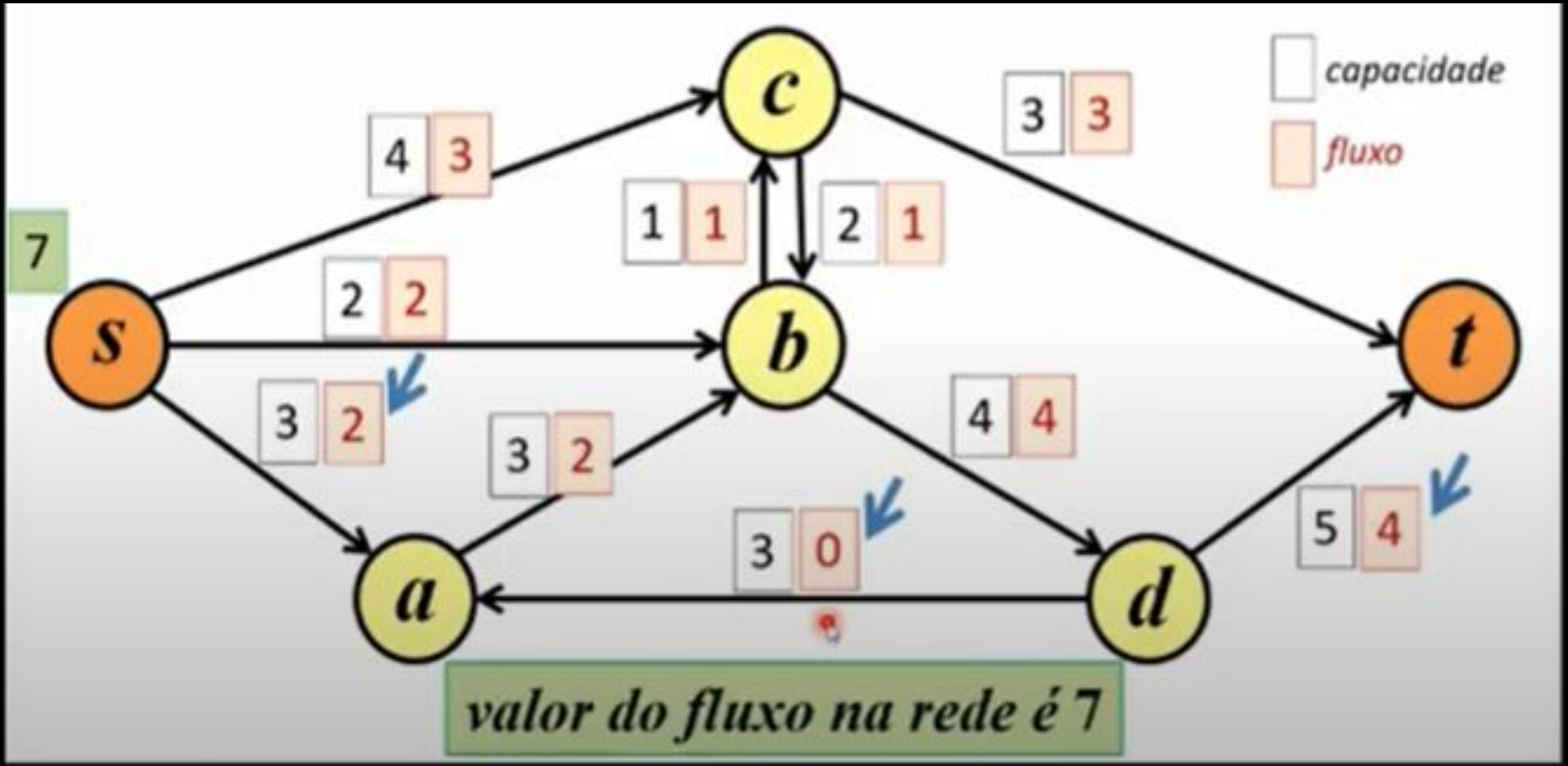
Dada uma rede, encontrar um fluxo f de valor máximo.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

O problema de fluxo máximo

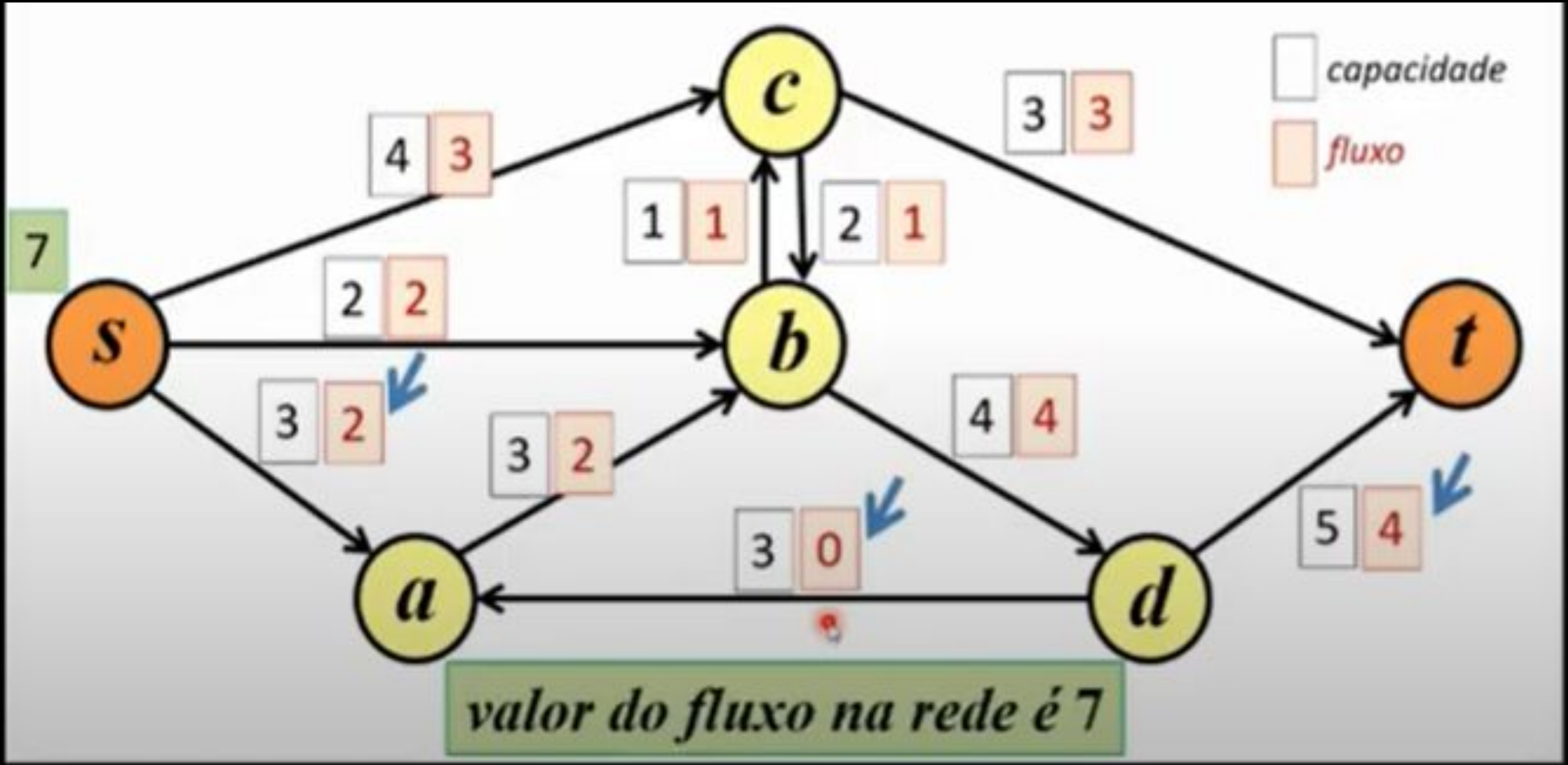
Dada uma rede, encontrar um fluxo f de valor máximo.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

O problema de fluxo máximo

Dada uma rede, encontrar um fluxo f de valor máximo.

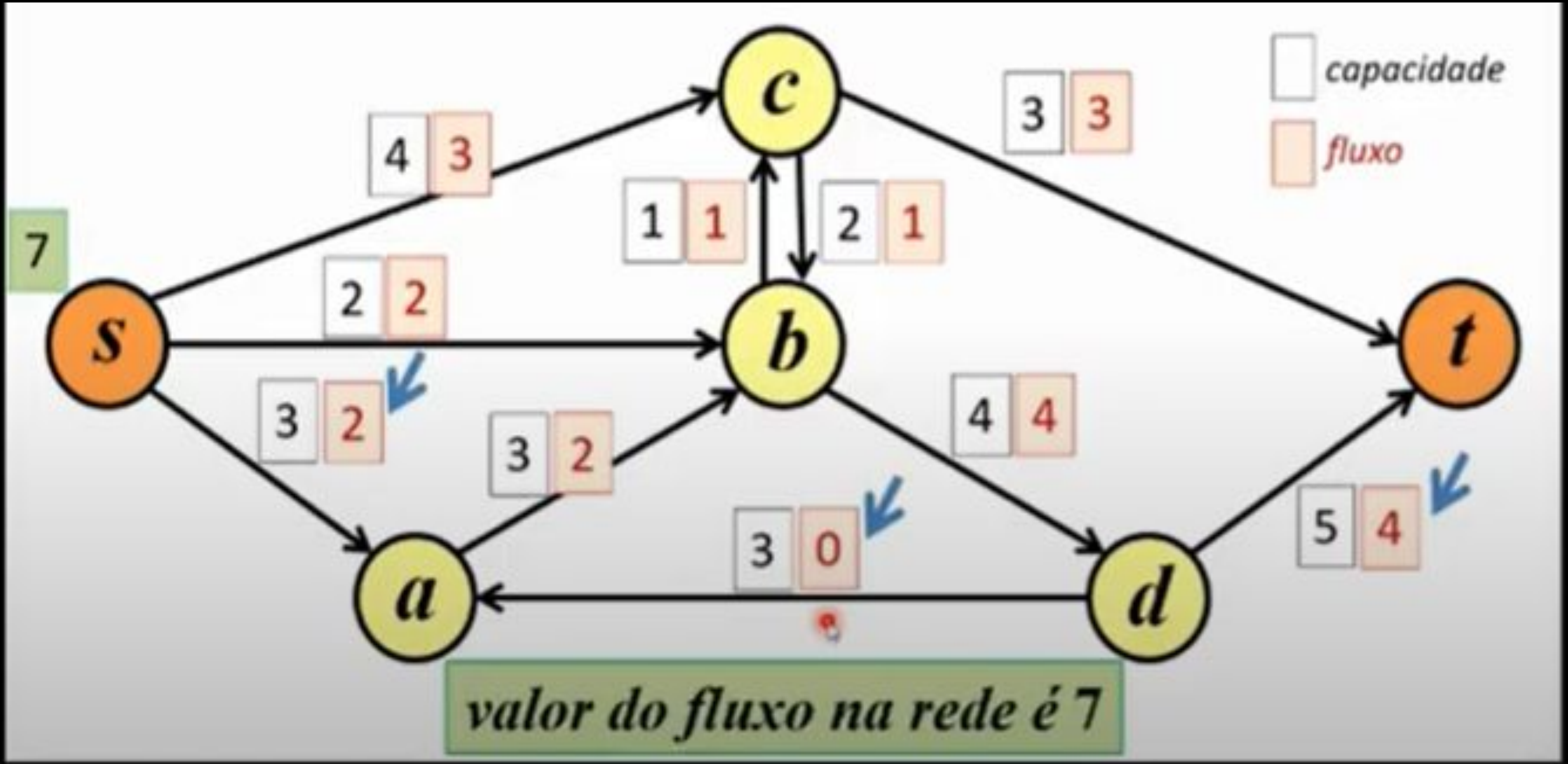


Esse é o fluxo de valor máximo.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

O problema de fluxo máximo

Dada uma rede, encontrar um fluxo f de valor máximo.



Uma aresta está saturada quando f(u,v)=c(u,v)

Ex: a aresta (b,d) está saturada.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Aplicações do problema de fluxo máximo

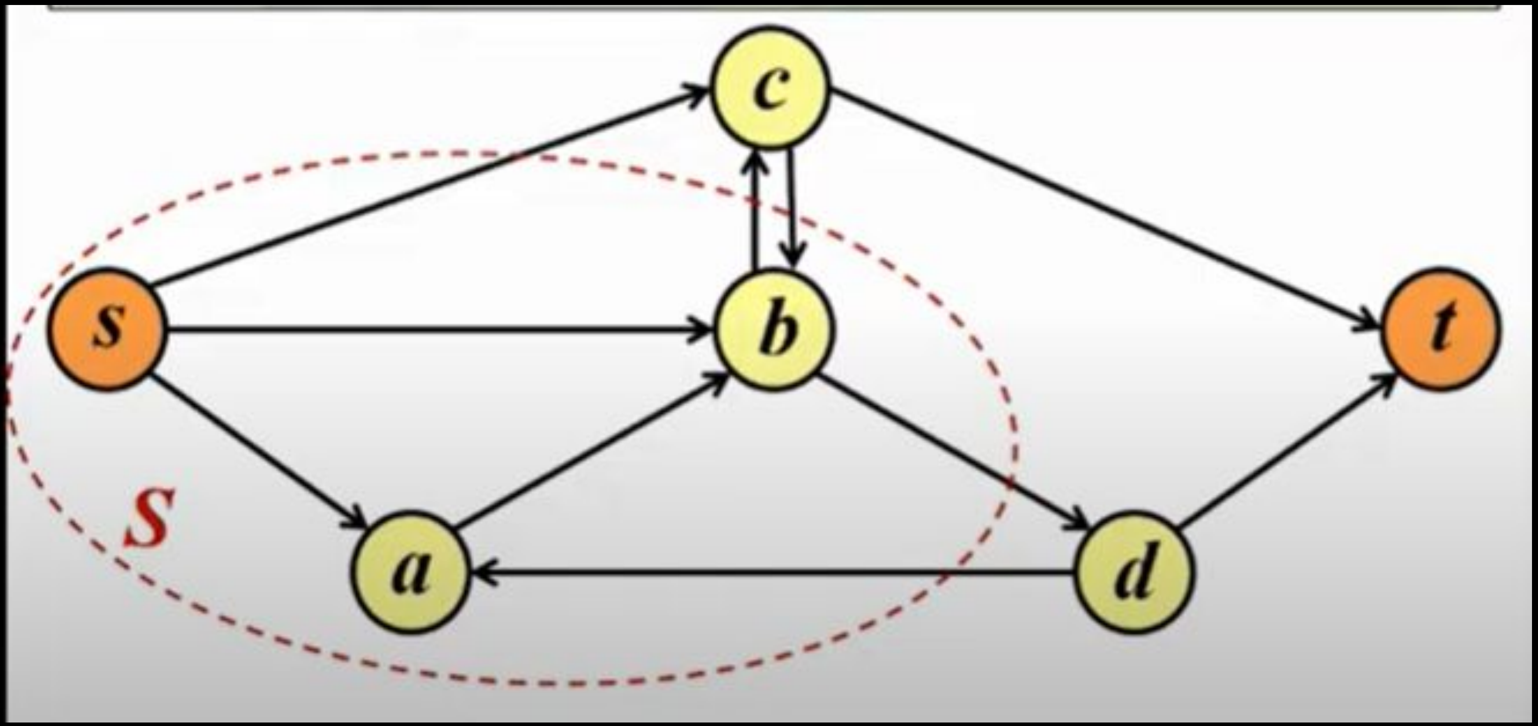
- Maximizar o fluxo de uma rede de distribuição a partir das fábricas para seus clientes
- Maximizar o fluxo de água através de um sistema de aquedutos
- Maximizar o fluxo de veículos em uma rede de transporte

O problema do corte mínimo

Corte

Seja S $\subseteq$ V tal que s $\in$ S e t $\notin$ S. Seja S'= V-S.

Um corte (S, S') é o conjunto de arestas com um extremo em S e o outro em S'.

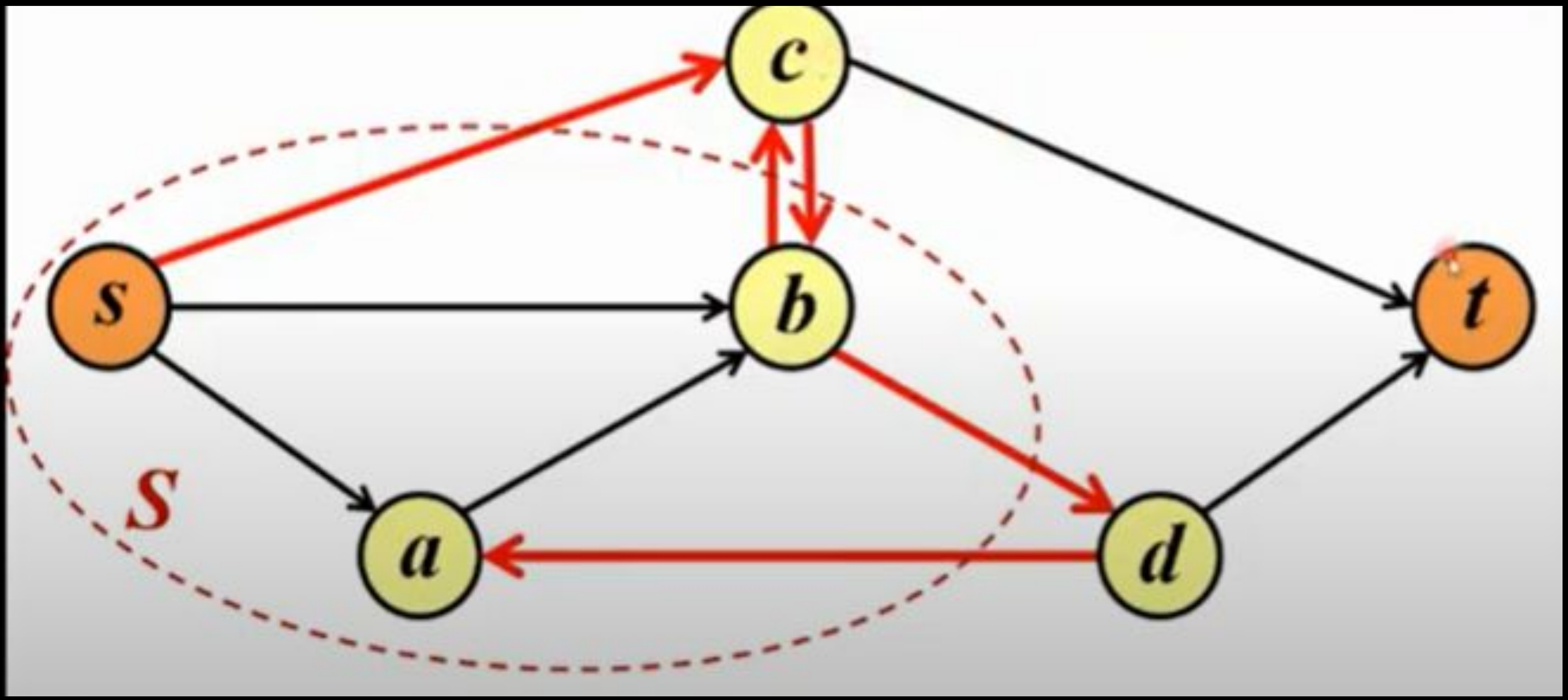


Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

Seja S ⊆ V tal que s ∈ S e t ∉ S. Seja S'= V-S.

Um corte (S, S') é o conjunto de arestas com um extremo em S e o outro em S'.



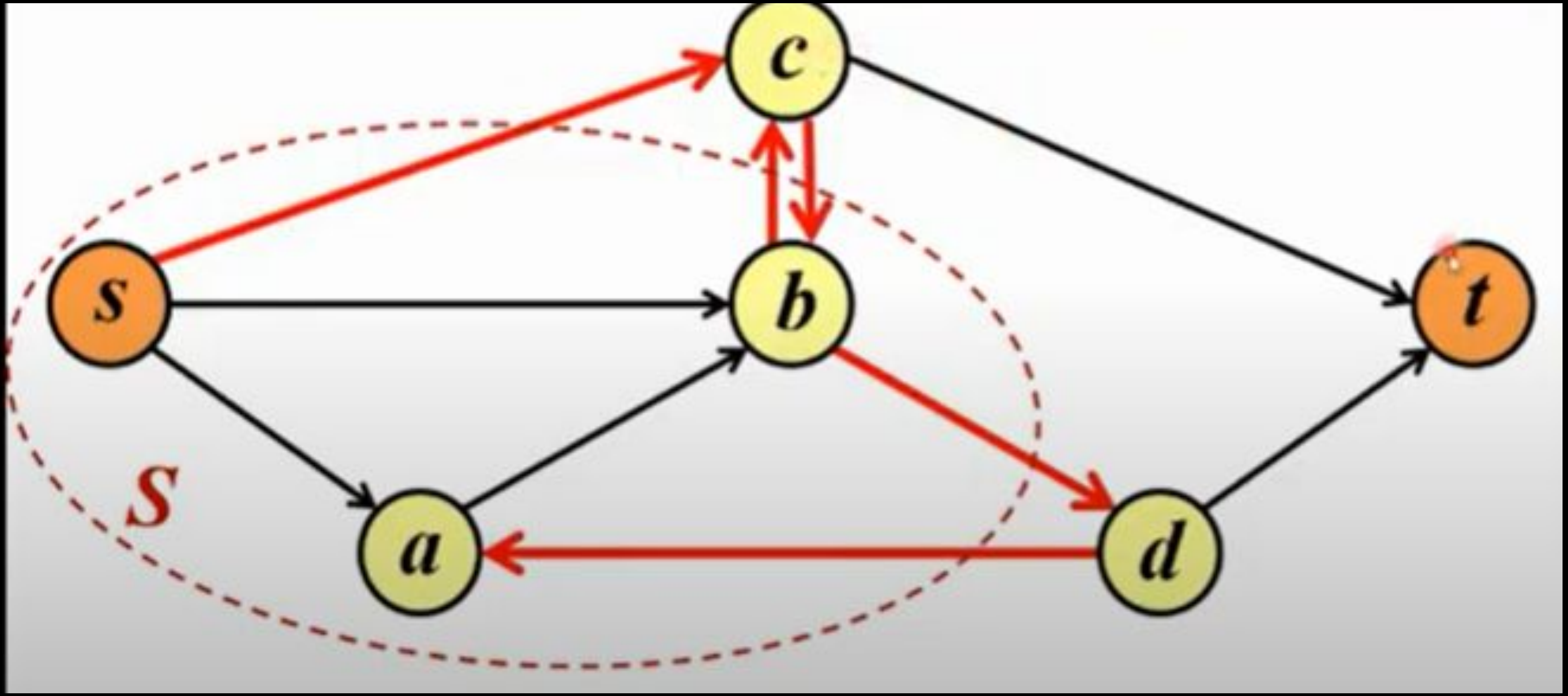
Todo caminho de s a t tem que passar por alguma aresta de corte.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

Seja S ⊆ V tal que s ∈ S e t ∉ S. Seja S'= V-S.

Um corte (S, S') é o conjunto de arestas com um extremo em S e o outro em S'.



S={s,a,b}

S'={t,c,d}

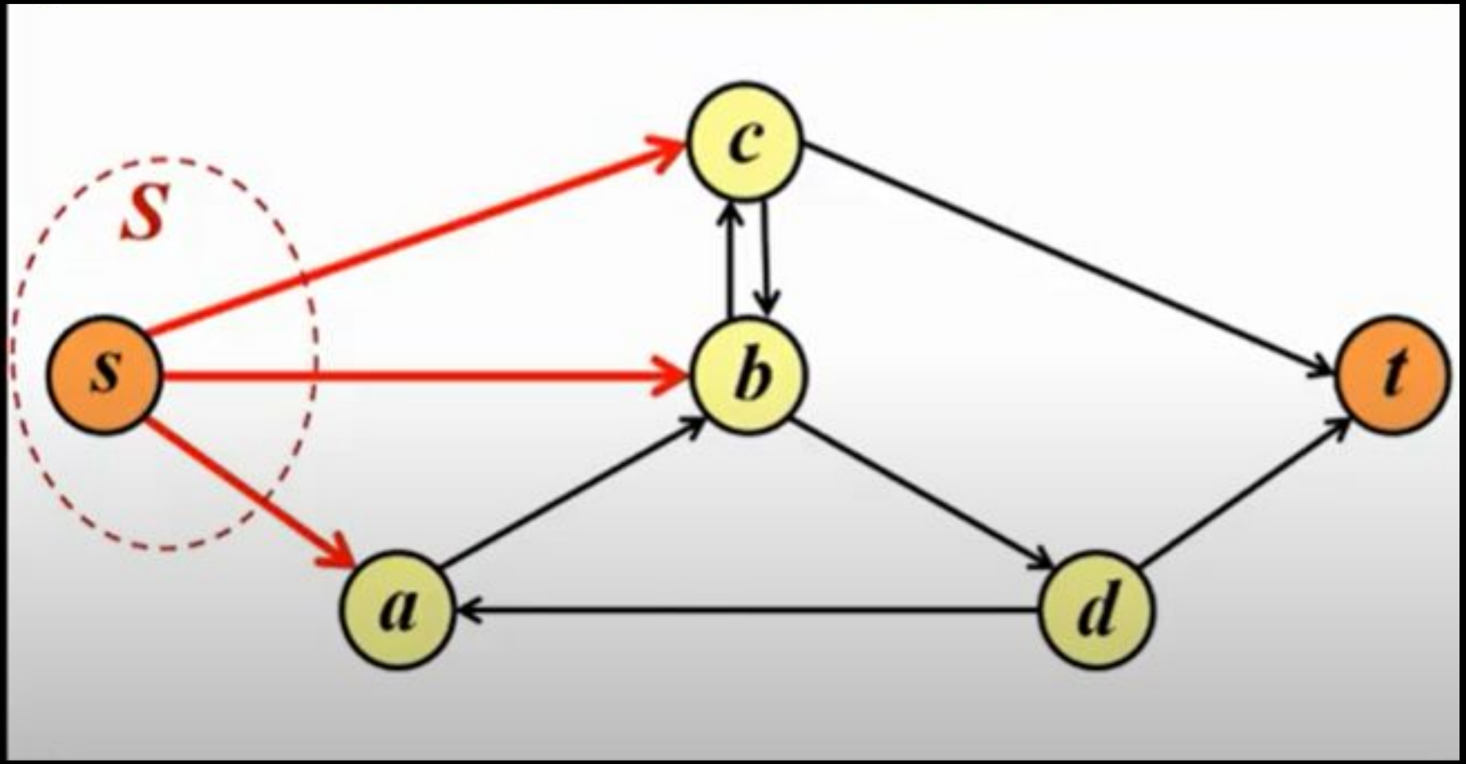
(S,S')={(s,c), (b,c), (c,b), (b,d), (d,a)}

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

Seja S ⊆ V tal que s ∈ S e t ∉ S. Seja S'= V-S.

Um corte (S, S') é o conjunto de arestas com um extremo em S e o outro em S'.



S={s}

S'={t,a,b,c,d}

(S,S')={(s,c), (s,b), (s,a)}

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

$(S, S')^+$ é o conjunto de arestas que vão de S a S'

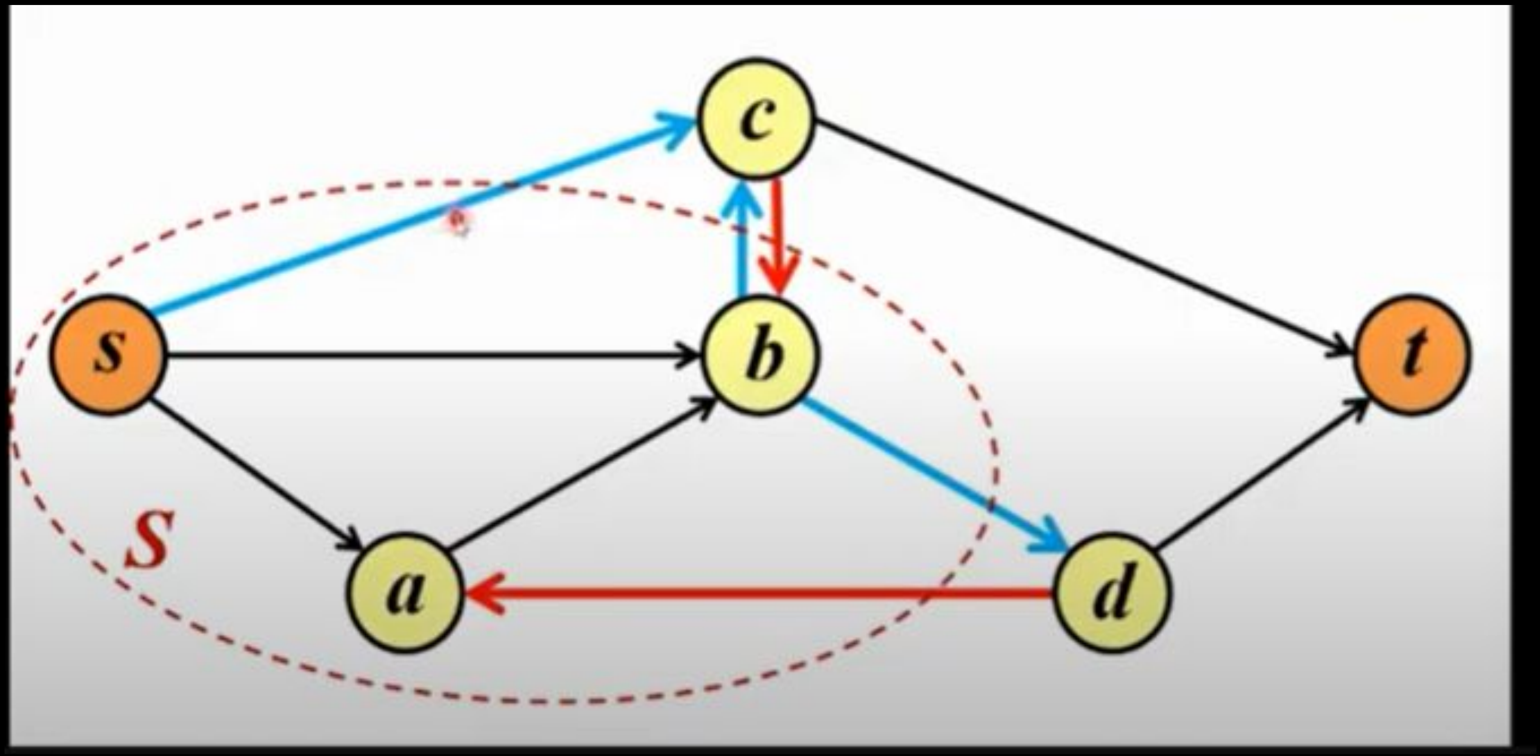
$(S, S')^-$ é o conjunto de arestas que vão de S' a S

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

$(S, S')^+$ é o conjunto de arestas que vão de S a S'

$(S, S')^-$ é o conjunto de arestas que vão de S' a S



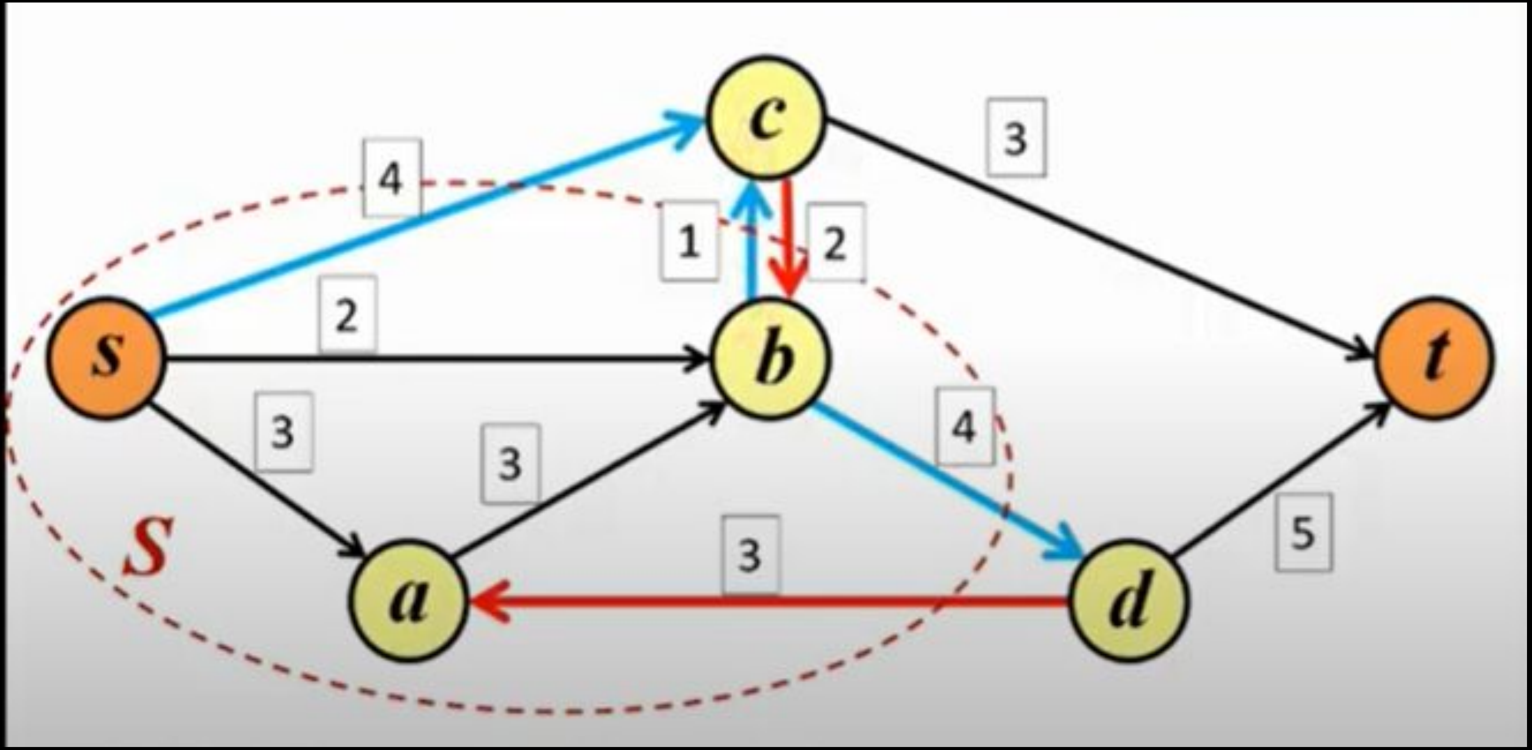
$(S, S')^+$

$(S, S')^-$

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

A **capacidade de um corte** (S, S'), c(S, S'), é a soma das capacidades das arestas de (S, S')$^+$

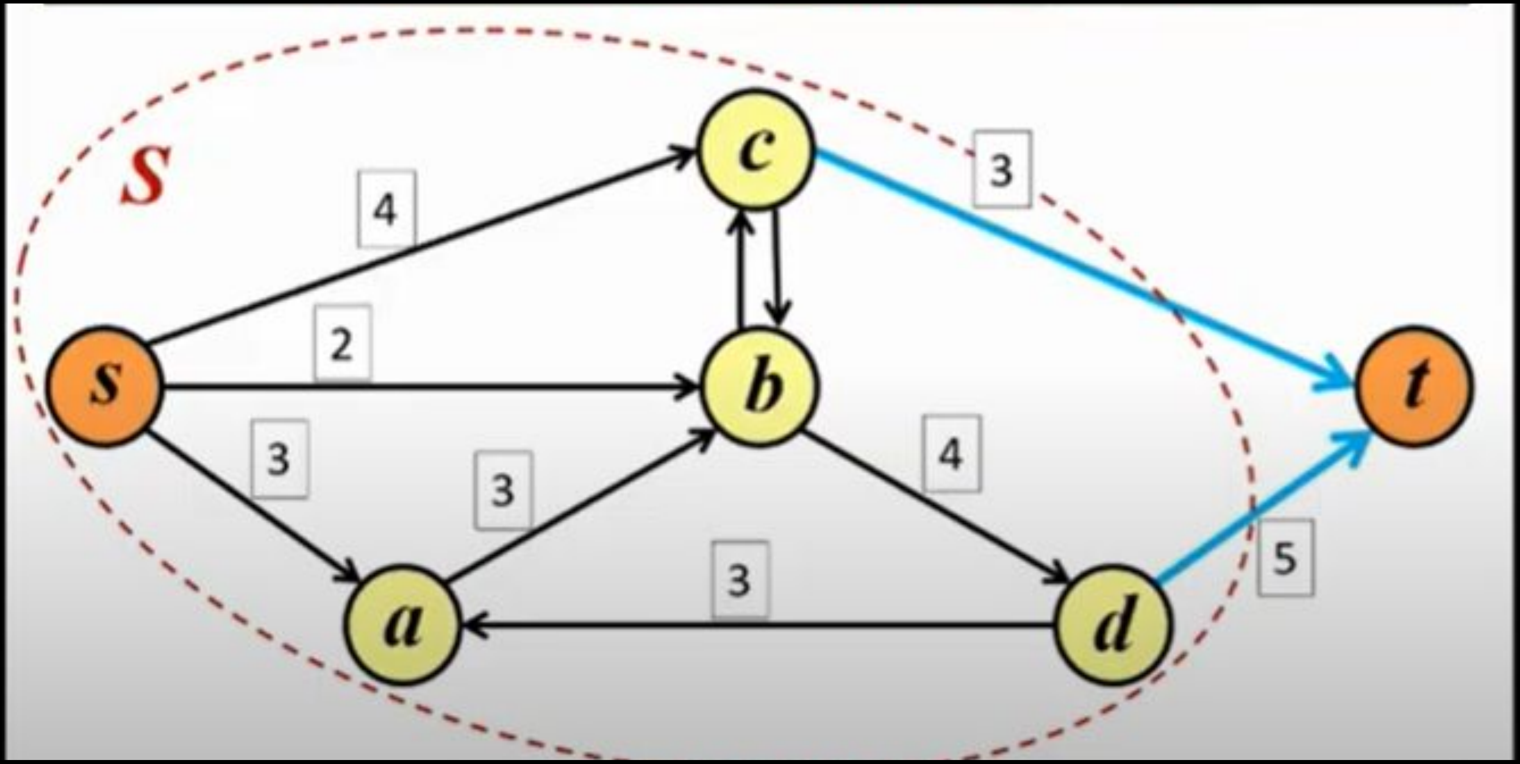


c(S, S')=4+1+4=9

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

A **capacidade de um corte** (S, S'), c(S, S'), é a soma das capacidades das arestas de (S, S')$^+$

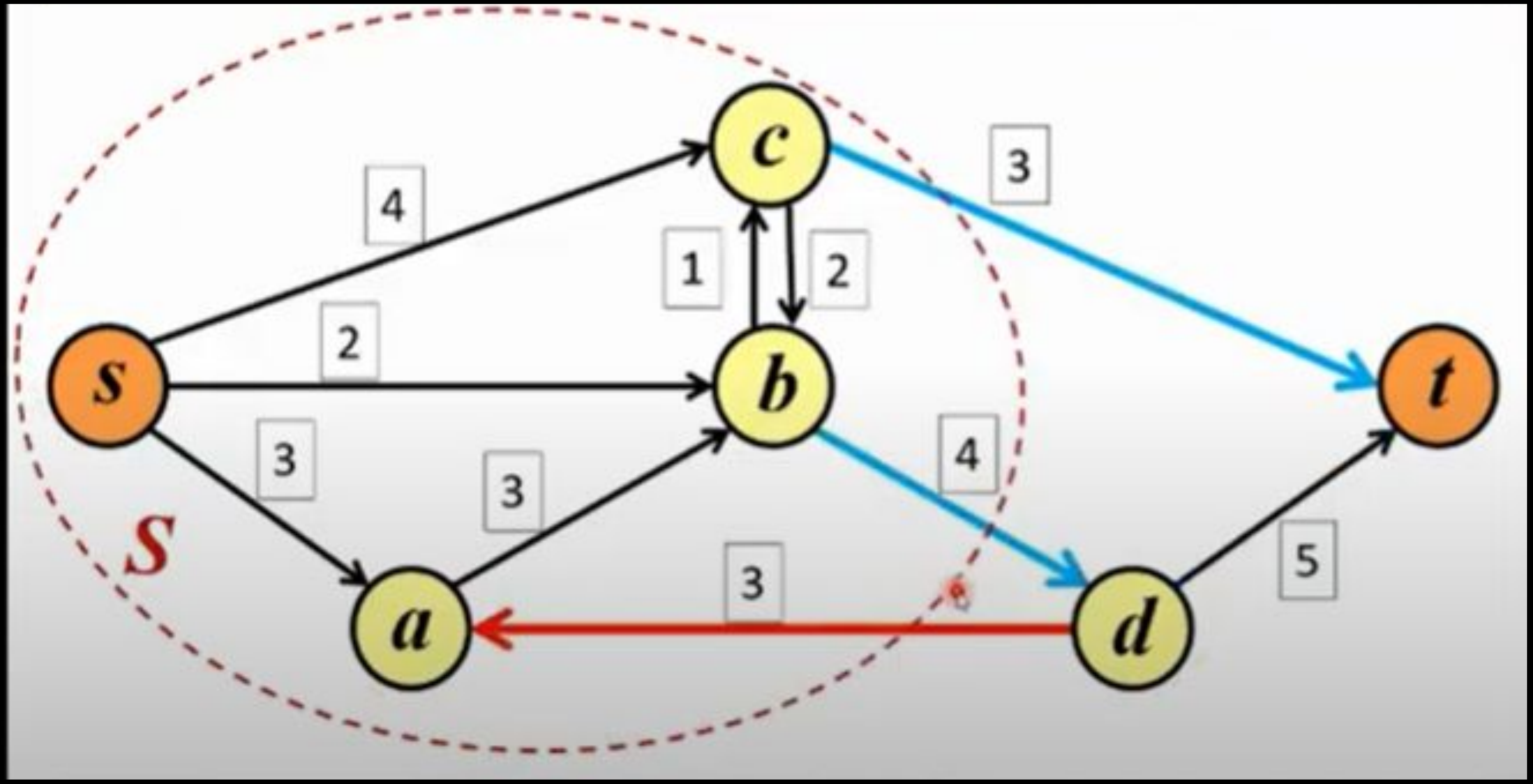


c(S, S')=3+5=8

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Corte

A **capacidade de um corte** (S, S'), c(S, S'), é a soma das capacidades das arestas de (S, S')$^+$

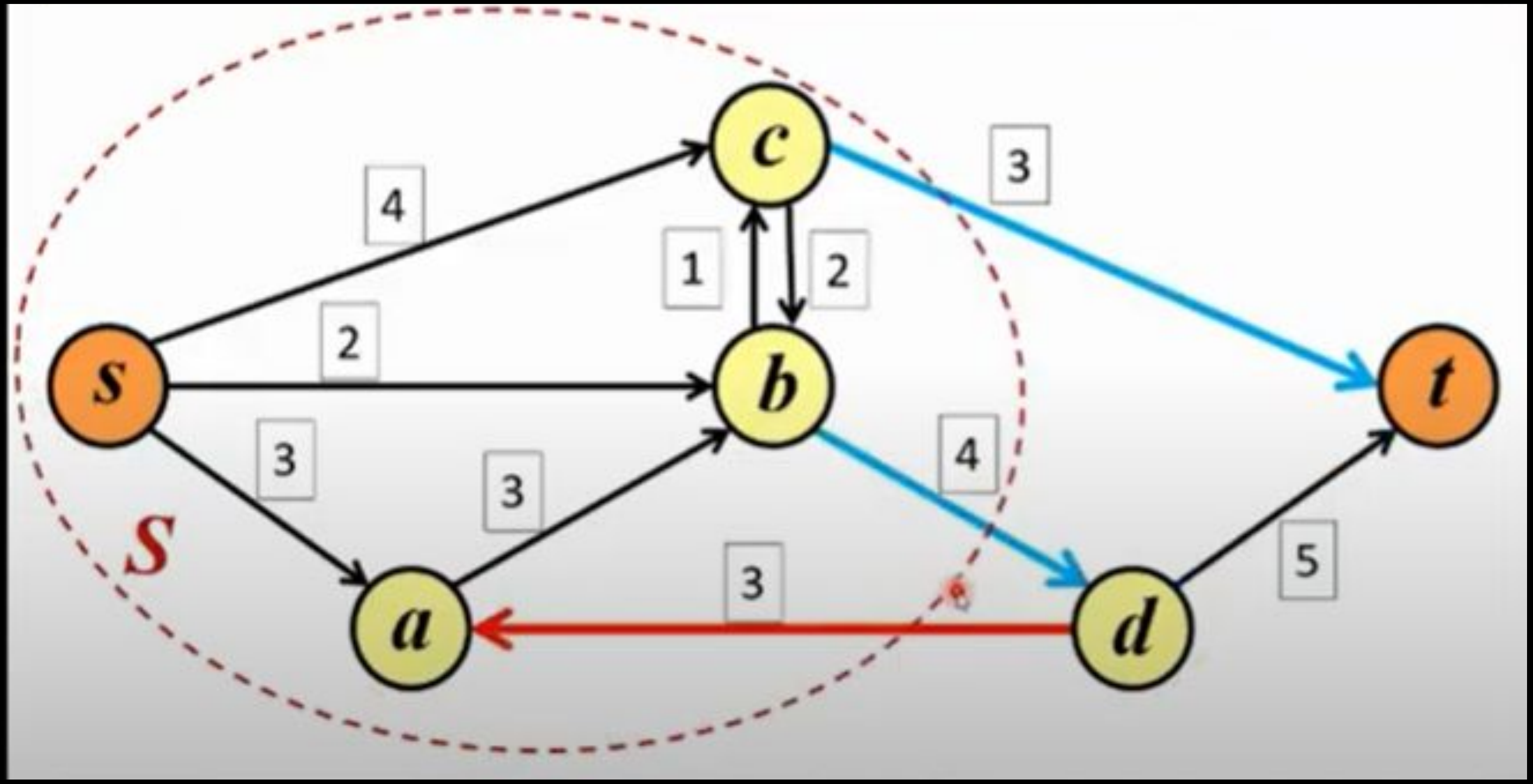


c(S, S')=3+4=7

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Problema do corte mínimo

Dada uma rede, encontrar um corte (S, S’) com a menor capacidade possível

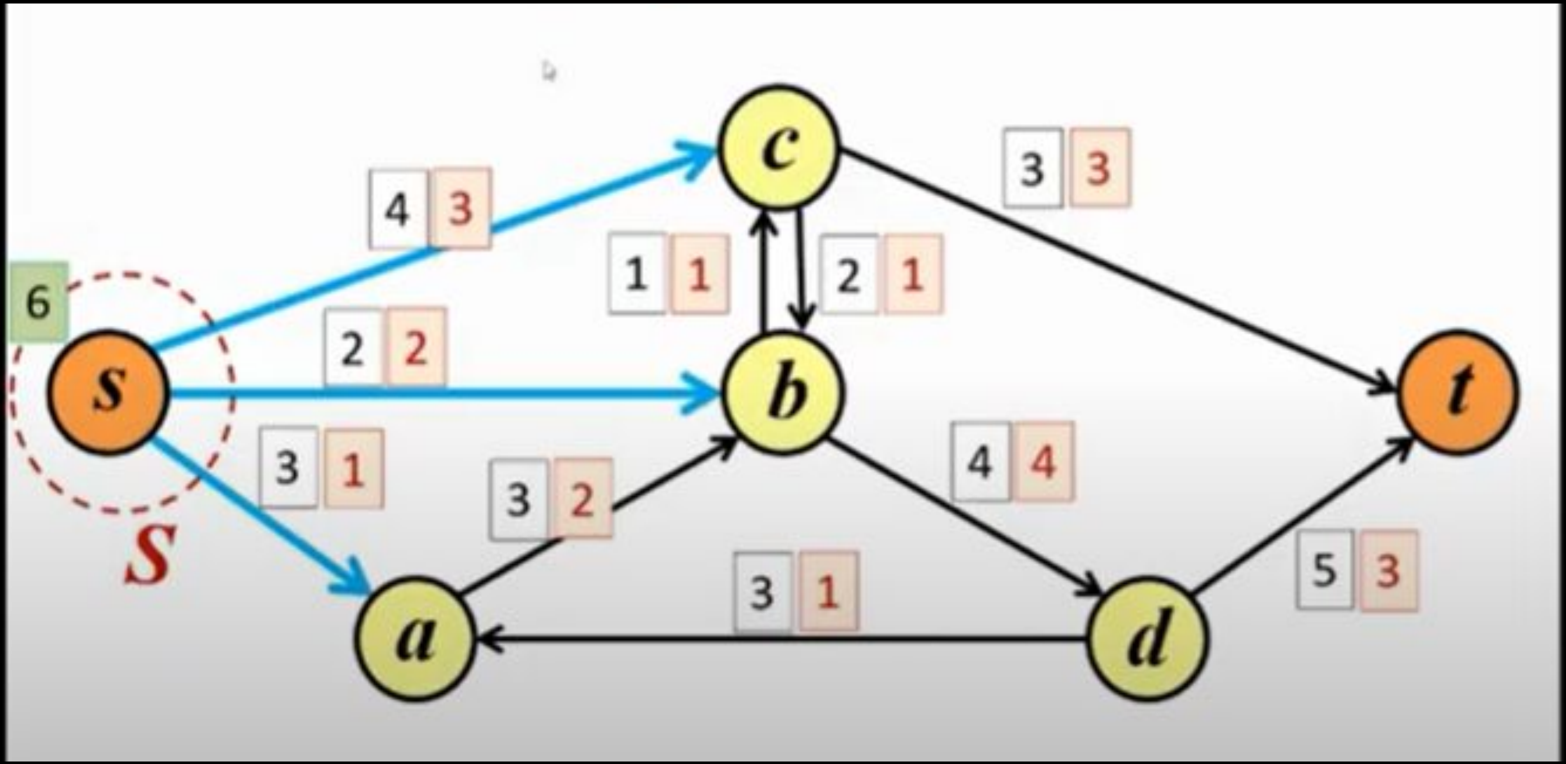


c(S, S’)=3+4=7

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo e corte

Teorema: Seja f um fluxo qualquer em uma rede e (S, S’) um corte qualquer, então f<=c(S,S’).



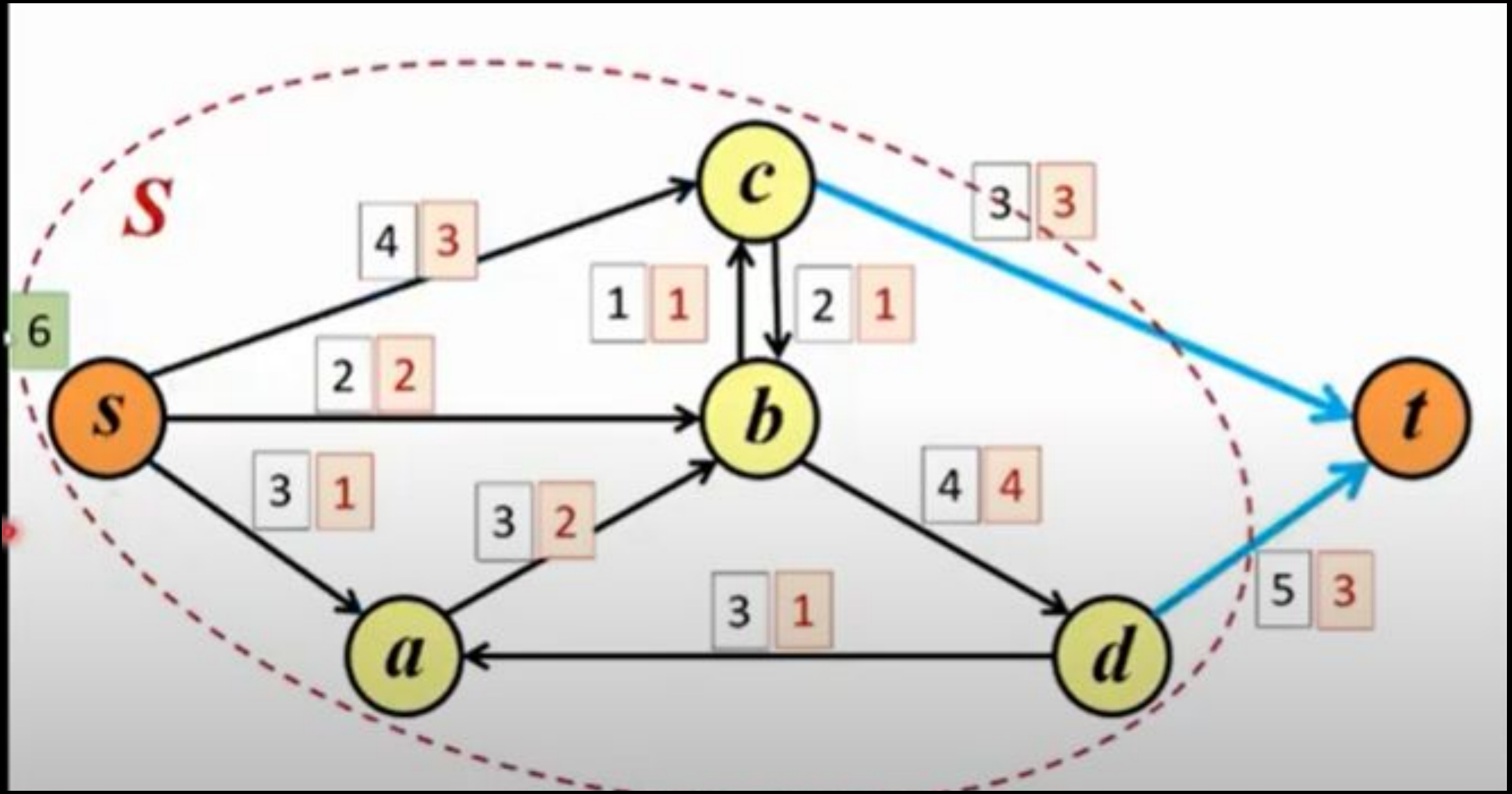
f=6

c(S, S’)=4+2+3=9

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo e corte

Teorema: Seja f um fluxo qualquer em uma rede e (S, S’) um corte qualquer, então f<=c(S,S’).



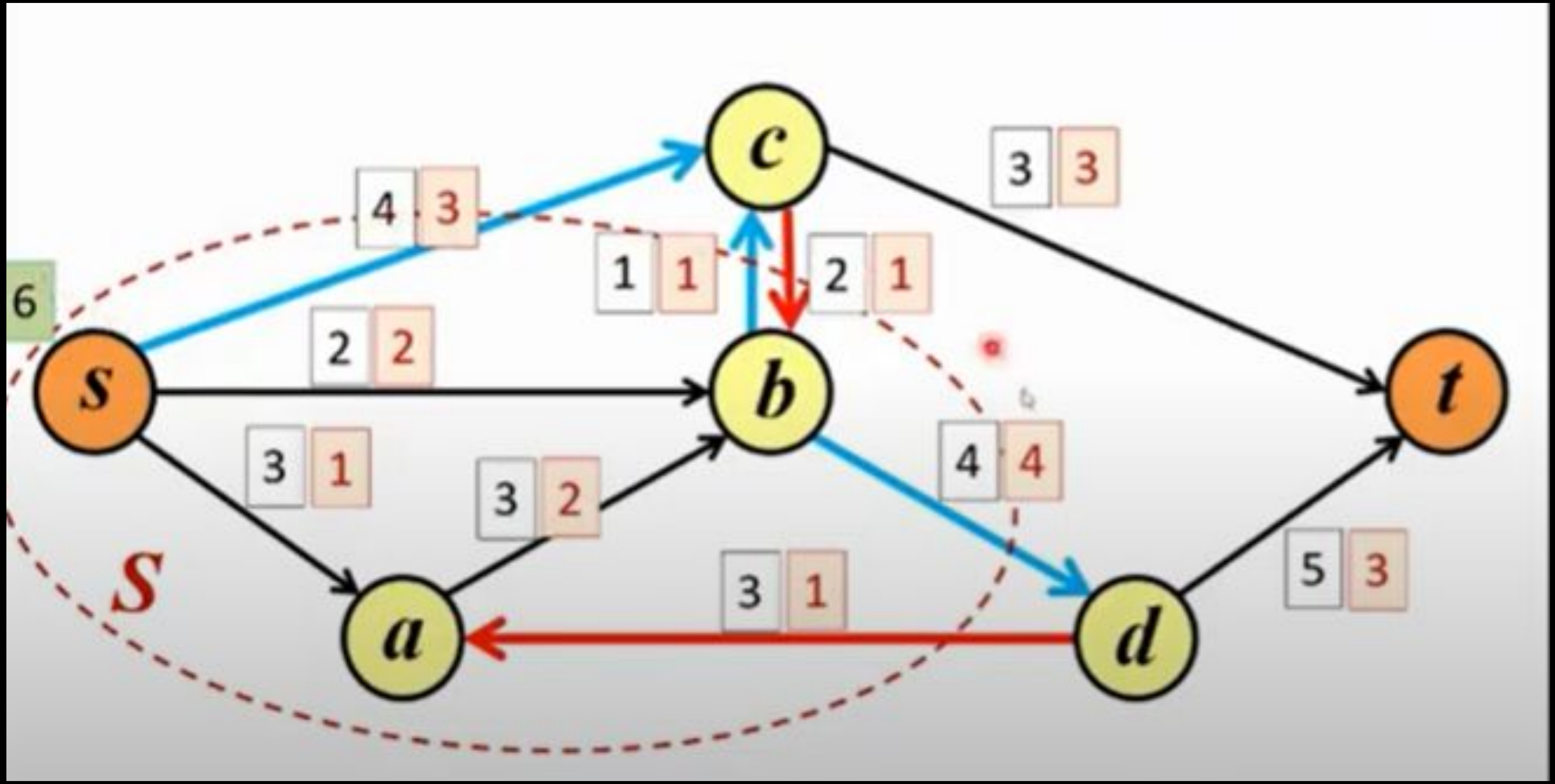
f=6

c(S, S’)=3+5=8

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo e corte

Teorema: Seja f um fluxo qualquer em uma rede e (S, S’) um corte qualquer, então f<=c(S,S’).



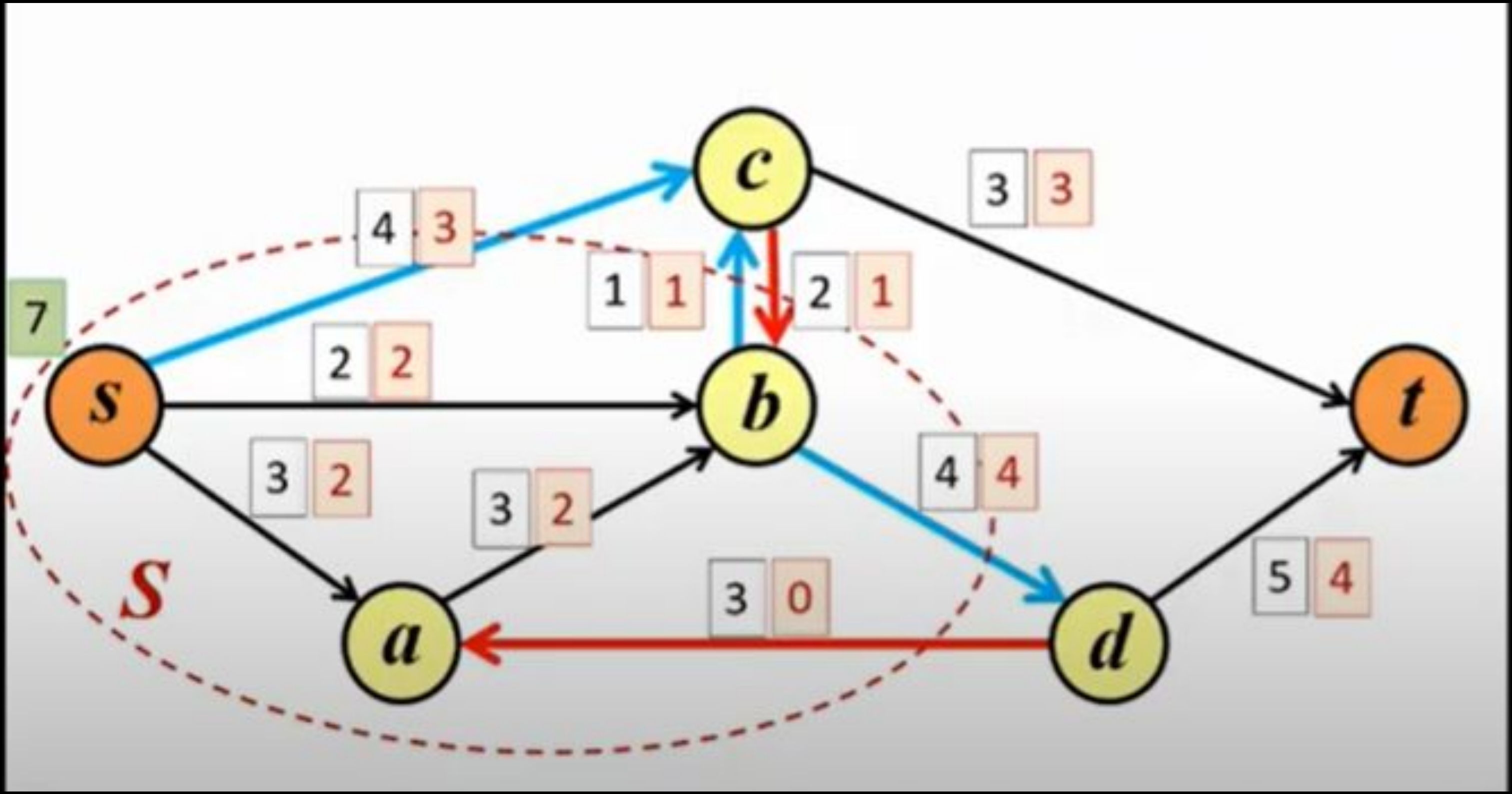
f=6

c(S, S’)=4+1+4=9

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo e corte

Teorema: Seja f um fluxo qualquer em uma rede e (S, S’) um corte qualquer, então f<=c(S,S’).



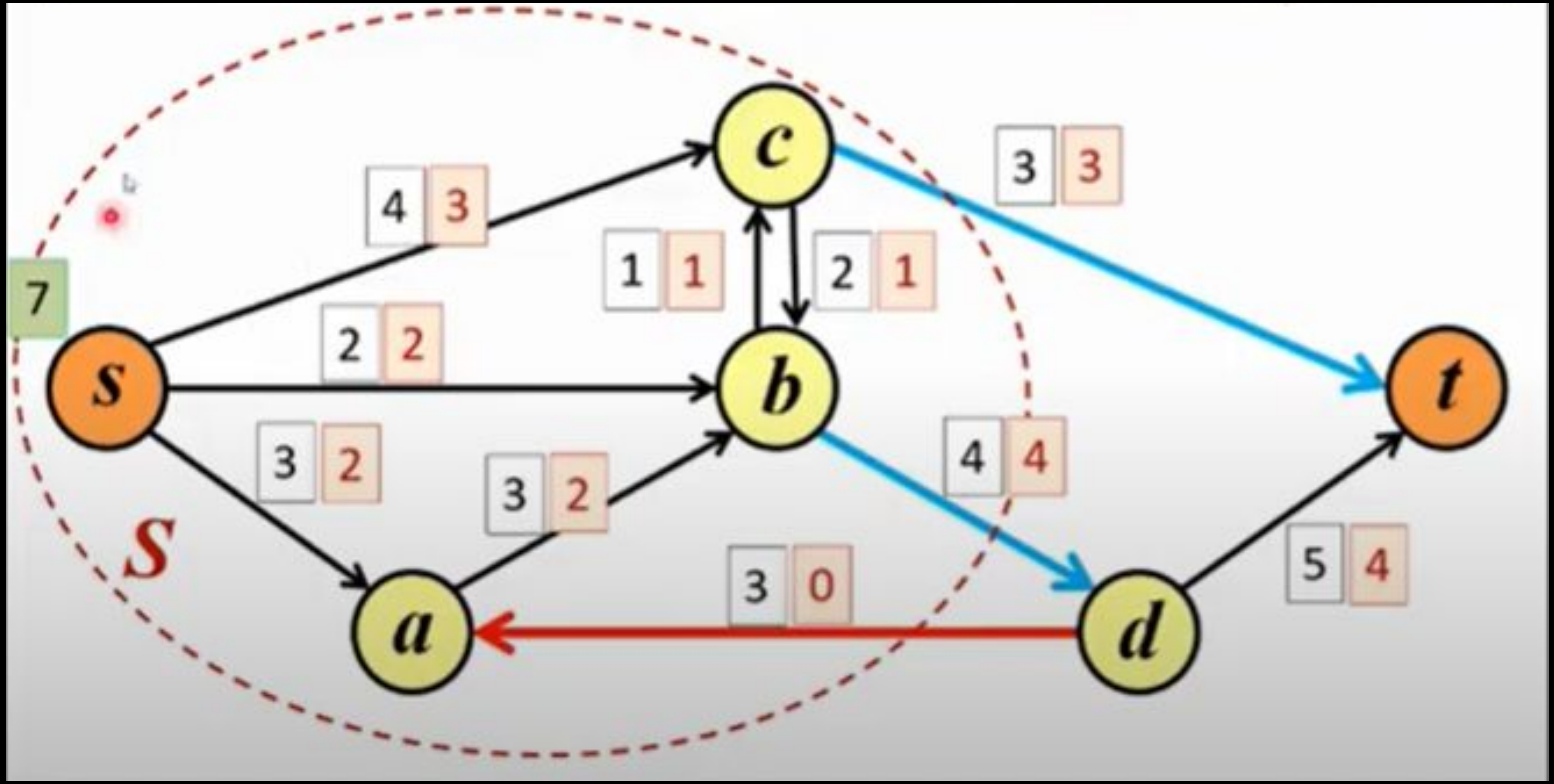
f=7

c(S, S’)=4+1+4=9

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo e corte

Teorema: Seja f um fluxo qualquer em uma rede e (S, S’) um corte qualquer, então f<=c(S,S’).



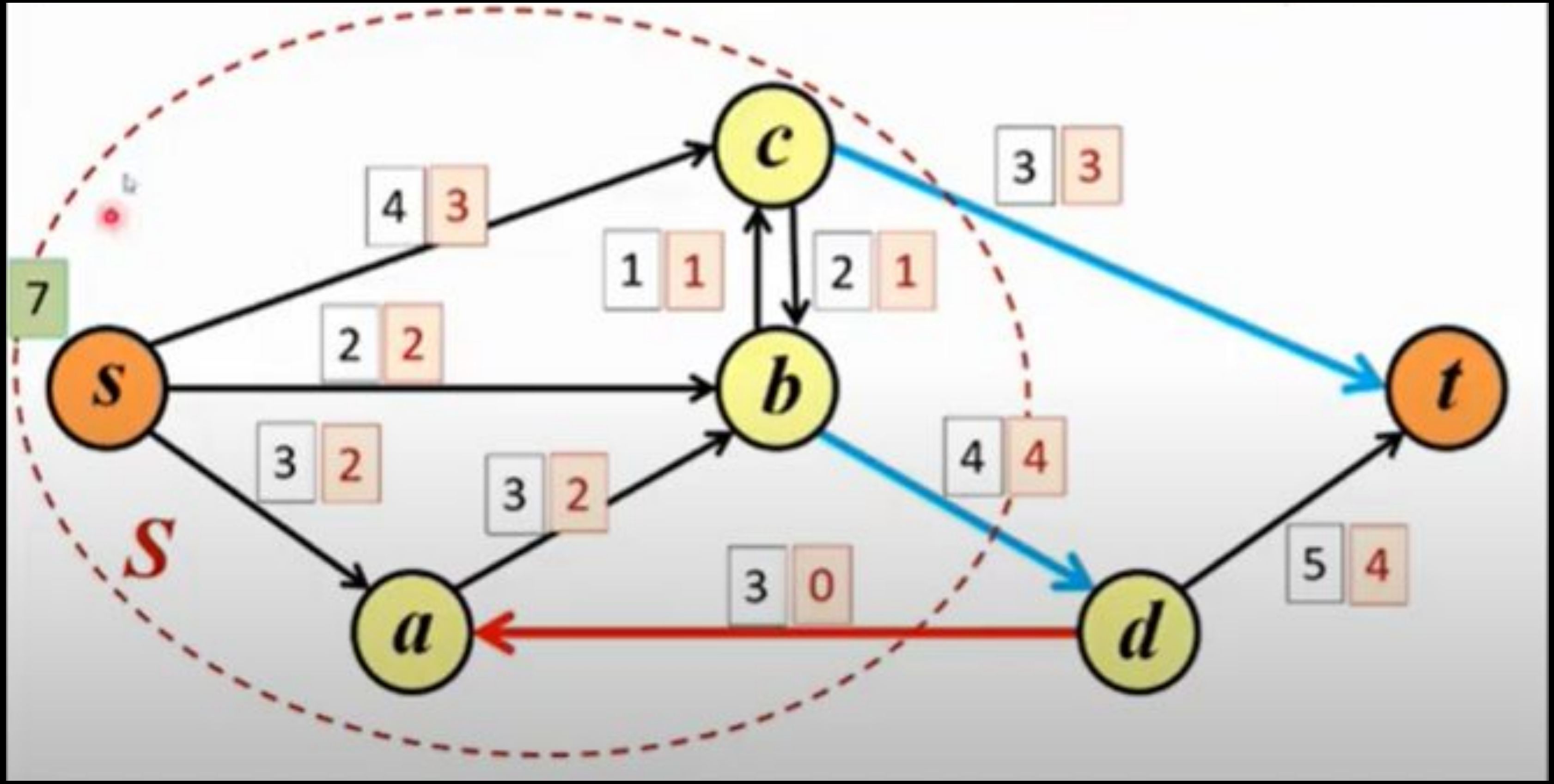
f=7

c(S, S’)=3+4=7

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

Fluxo máximo e corte mínimo

Teorema: Seja f um fluxo máximo de uma rede e (S, S’) um corte mínimo na rede, então f=c(S,S’).



f=7

c(S, S’)=3+4=7

Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=9oFP1CXy6yA

O método de Ford-Fulkerson para resolver o problema de fluxo máximo

Método de Ford-Fulkerson

- É chamado de método pois engloba diversas implementações.
- Baseado em dois conceitos intuitivos:
  - Rede residual
  - Caminhos de aumento

Rede residual

- Capacidade residual da aresta (u,v) é dada por
  $c_R(u,v) = c(u,v)-f(u,v)$
  isto é, quanto resta da capacidade da aresta.
- Rede residual de uma rede G=(V,E) induzida por f é
  $G_R=(V,E_R)$, tal que
  $E_R = \{(u,v) \in VxV: c_R(u,v) > 0\}$
  E_R está formada por arestas em E ou suas reversas, anotadas com suas devidas capacidades residuais

Caminhos de aumento

- **Caminho de aumento** p é um caminho simples desde a fonte s até o sumidouro t na rede residual.
- **Capacidade residual de um caminho** p é:

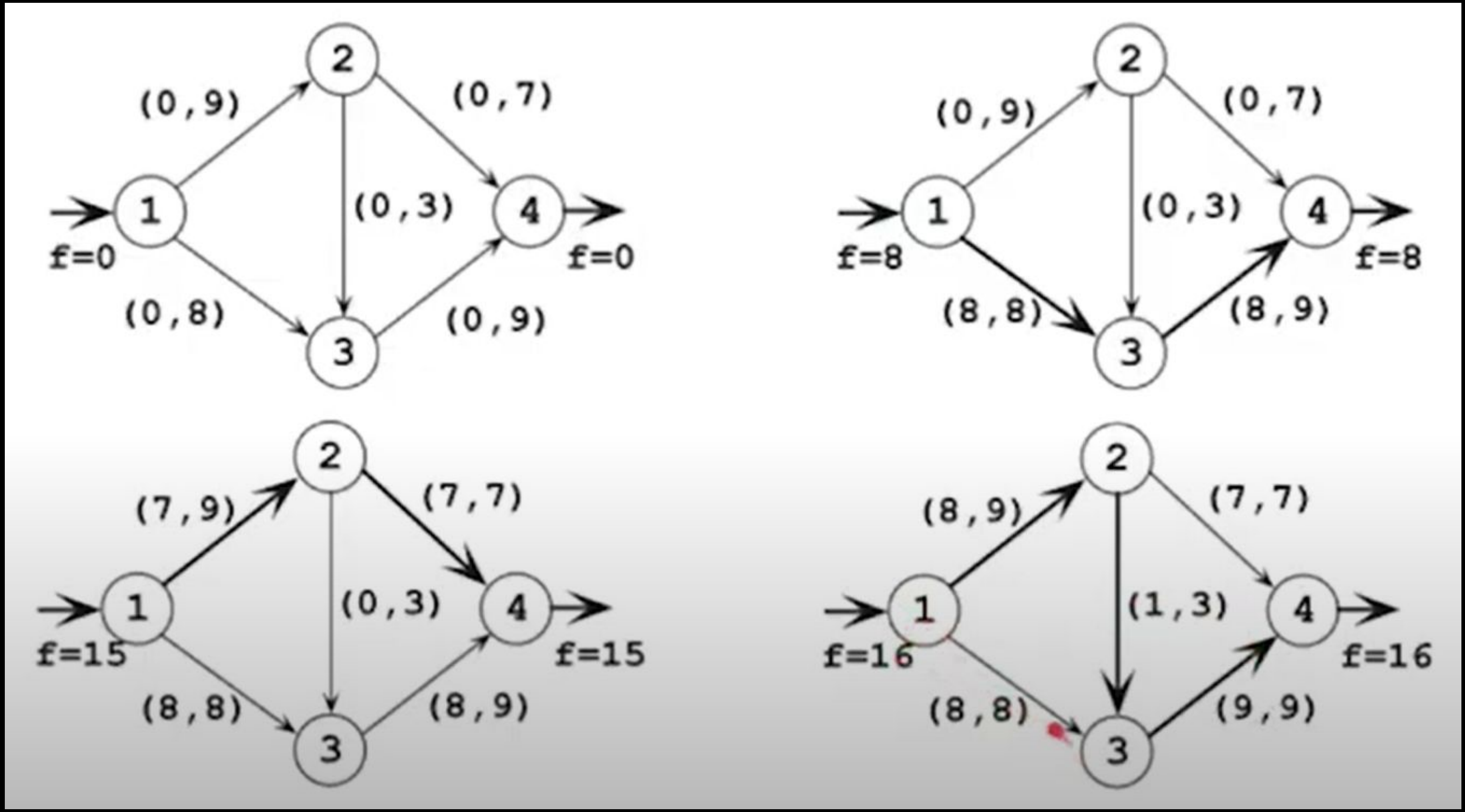
  $c_R(p)=\min\{c_R(u,v): (u,v) \text{ está em } p\}$

  isto é, é o mínimo dos resíduos no caminho e representa a quantidade de fluxo que pode viavelmente ser adicionado ao caminho todo.

Algoritmo base (não ótimo)

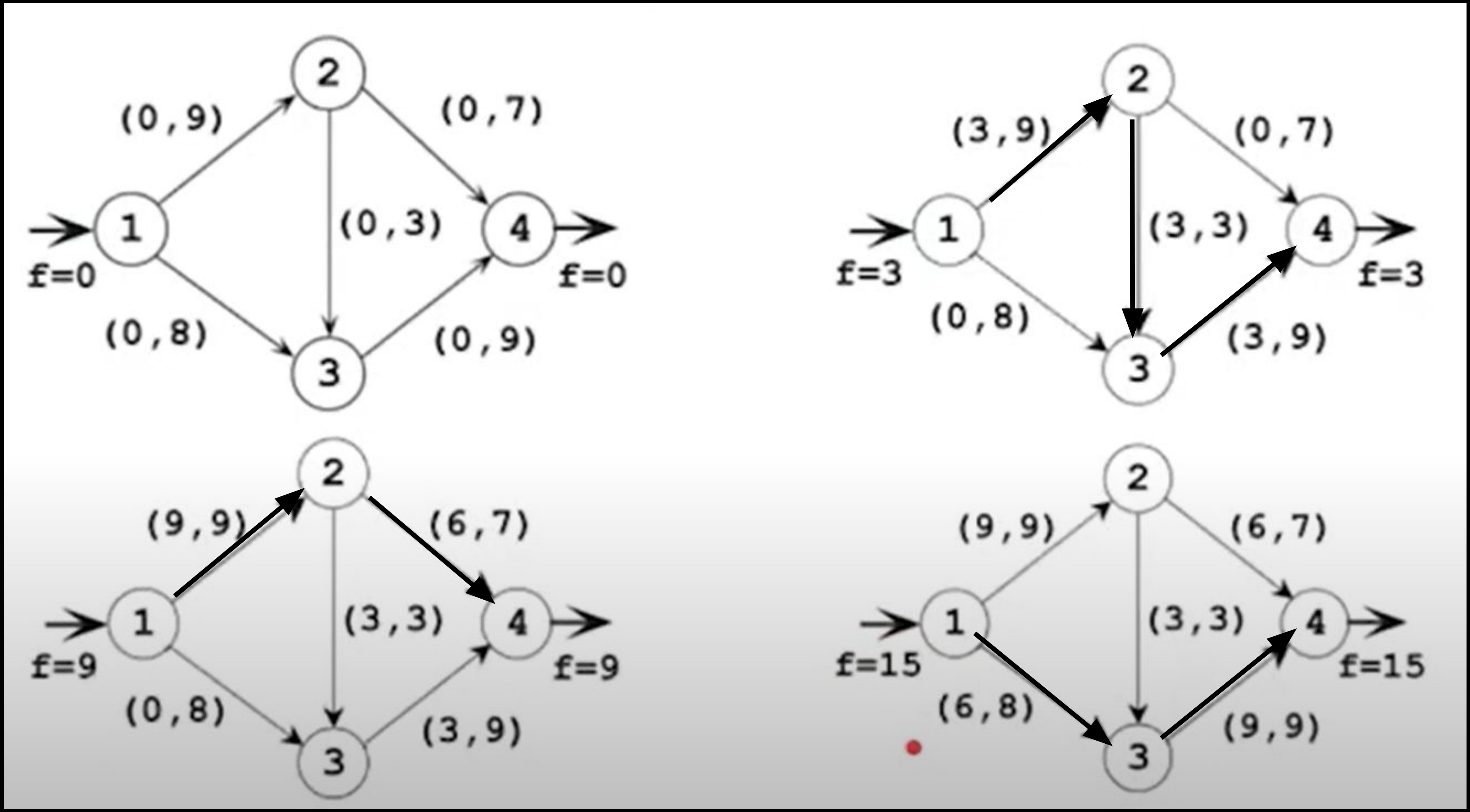
- Injetar um fluxo nulo na fonte
- Calcular a capacidade residual das arestas
- Buscar um caminho de aumento p. Se não existir foi encontrada uma solução.
- Somar ao fluxo de entrada a capacidade residual de aumento do caminho selecionado c_R (p)
- Alterar as capacidades residuais das arestas do caminho selecionado, diminuindo o fluxo injetado
- Voltar ao passo 3

Algoritmo base (não ótimo)



Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=Zx7Qr9WuIs8

Algoritmo base (não ótimo)



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=Zx7Qr9WuIs8

Algoritmo base (não ótimo)

- O algoritmo base não nos leva sempre a uma solução ótima.
- É necessário fazer com que o algoritmo tenha a capacidade de se arrepender, isto é de deixar de enviar uma certa quantidade de fluxo por uma determinada aresta.
- Para isso inserimos arestas reversas com fluxos que atravessam as arestas no sentido contrário a sua orientação.

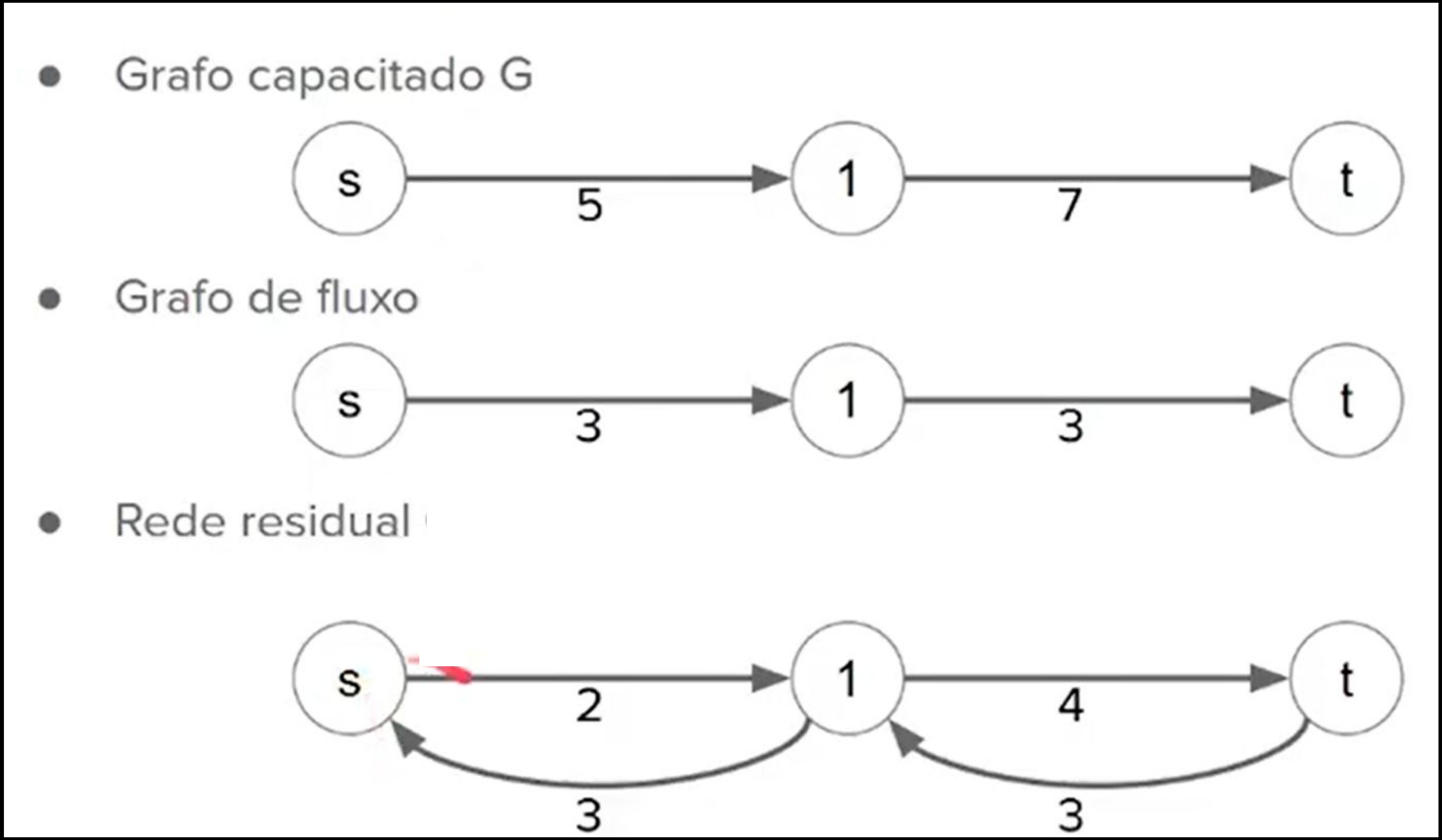
Arestas reversas

- A rede residual G_R irá conter para cada aresta (u,v) de G:
  - (u,v) com capacidade residual

    $$c_R\ (u,v) = c(u,v)-f(u,v)$$
  - (v,u) com capacidade residual

    $$c_R\ (v,u) = f(u,v)$$

Arestas reversas



Fonte:
https://www.youtube.com/watch?v=Zx7Qr9WuIs8

Algoritmo de Ford-Fulkerson

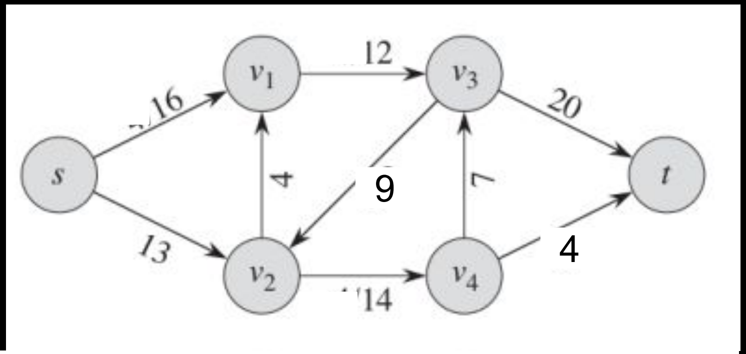
- Injetar um fluxo nulo na fonte
- Calcular a rede residual
- Buscar um caminho de aumento p na rede residual. Se não existir, foi encontrada uma solução.
- Para cada aresta em p:
  - Se a aresta é a original, somar ao fluxo a capacidade residual do caminho de aumento selecionado c_R (p)
  - Se a aresta é reversa, substrair c_R (p) do fluxo
- Recalcular a rede residual
- Voltar ao passo 3

(u,v) com capacidade residual

$c_R(u,v) = c(u,v)-f(u,v)$

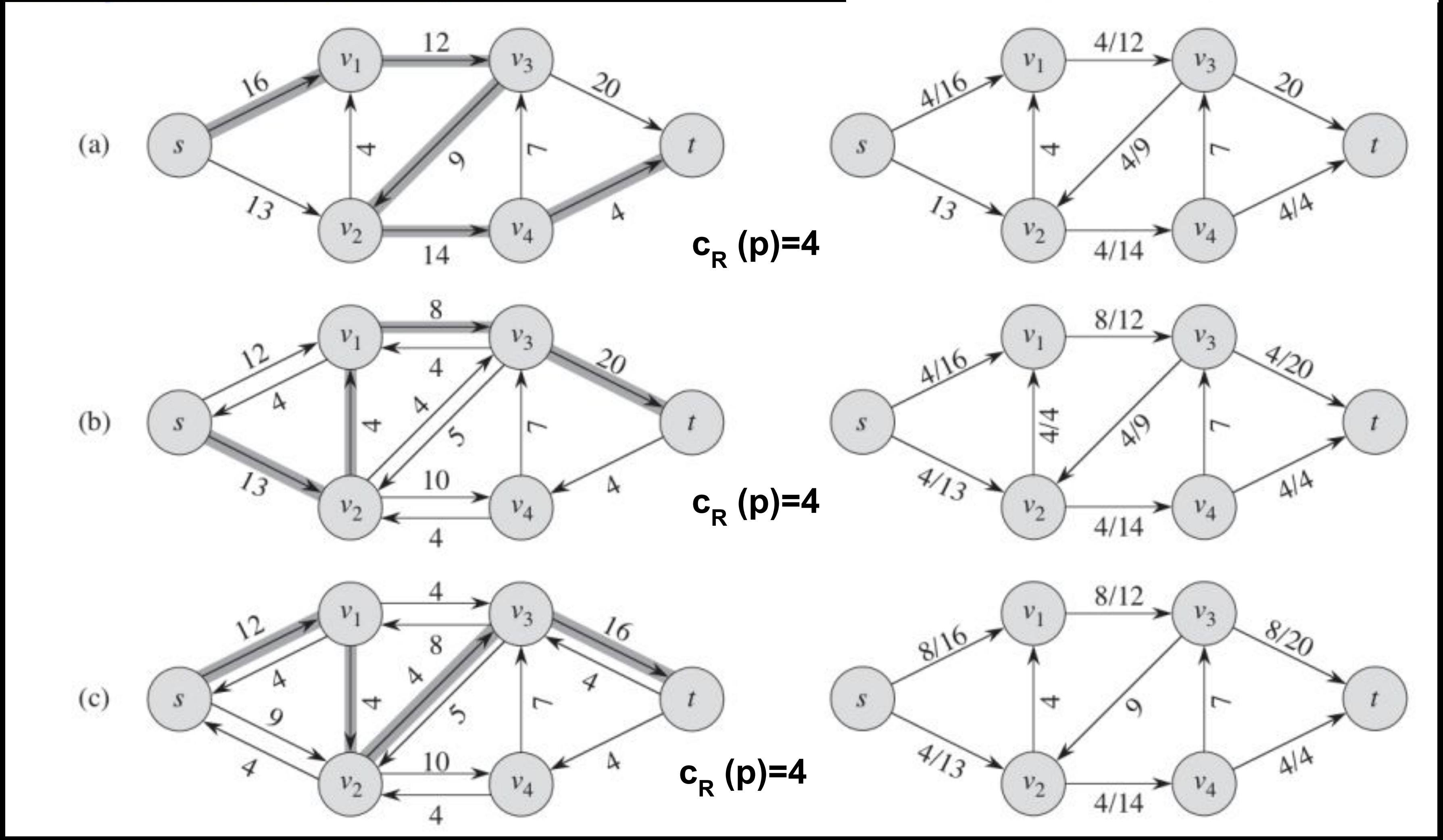
(v,u) com capacidade residual

$c_R(v,u) = f(u,v)$



fluxo/capacidade

Rede residual

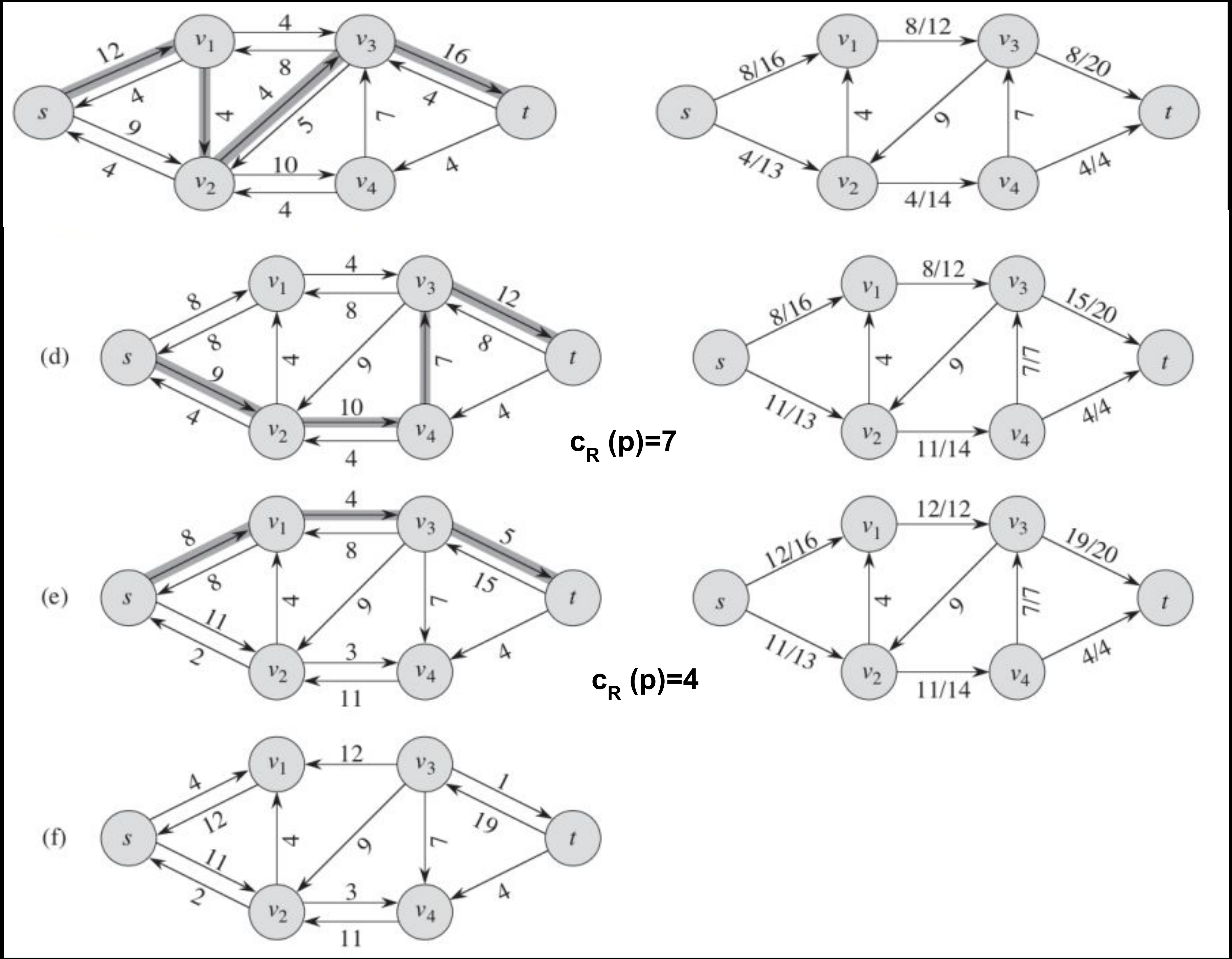


(u,v) com capacidade residual

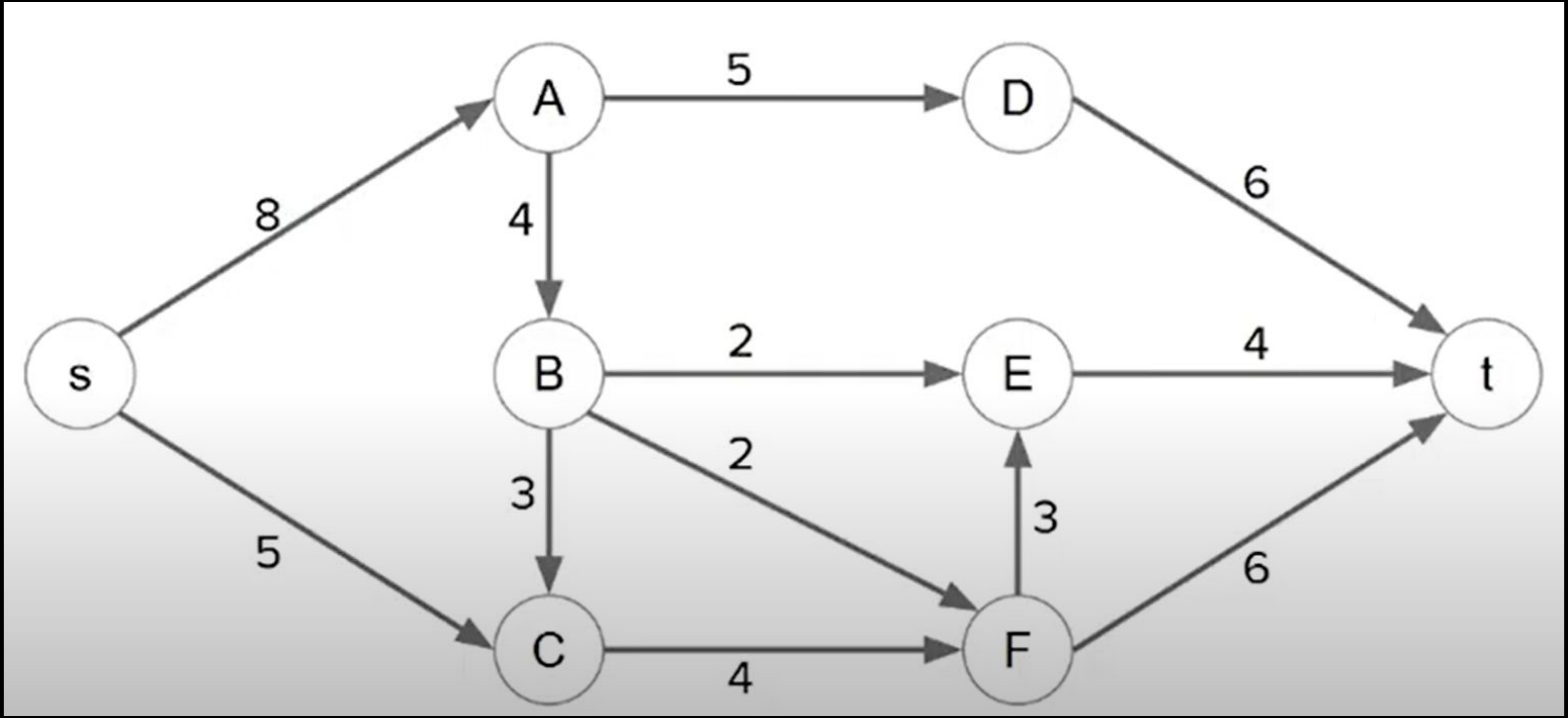
$c_R\ (u,v) = c(u,v)-f(u,v)$

(v,u) com capacidade residual

$c_R\ (v,u) = f(u,v)$



Encontrar o fluxo máximo da seguinte rede:



AULA 6

Fluxos em redes
Karina Valdivia Delgado