Inteligência Artificial
Quinta Lista de Exercícios – Gabarito

Prof. Norton Trevisan Roman

9 de maio de 2019

1. (a) Levando em conta a ordem (ou seja, [1,A,Q] $\neq$ [Q,1,A]), teríamos $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$ possibilidades. Contudo, a ordem não importa no poker. Para 5 cartas, há 5! ordens diferentes, o que significa que cada arranjo foi contado 5!. Assim, o total de eventos é

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 2.598.960$$

(para quem reconheceu, isto é uma combinação de m elementos tomados p a p,

$$C(m, p) = \frac{m!}{(m-p)!p!}$$

(b)

$$\frac{1}{2.598.960} \approx 3,85 \times 10^{-7}$$

(c) Há 13 quadras nas 52 cartas ($52 \div 4$). A escolha da quinta carta é feita aleatoriamente dentre as $52 - 4 = 48$ restantes. Então temos $13 \times 48 = 624$ possíveis mãos com quadras, e

$$p = \frac{624}{2.598.960} \approx 2.40 \times 10^{-4}$$

Há 4 royal straight flush no baralho (1 para cada naipe), assim

$$p = \frac{4}{2.598.960} \approx 1,54 \times 10^{-6}$$

2. (a) Somamos a probabilidade de dor junto com qualquer outra variável: $0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064 = 0,20$

(b) Somamos a probabilidade de cárie junto com qualquer outra variável: $0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 = 0,20$

(c) Somamos a probabilidade de cárie e não dor acontecerem juntamente com as demais variáveis: $0,072 + 0,008 = 0,008$

(d) basta inspecionar a célula para essa condição: $0,144$

(e) lembre que $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$, assim

$$\begin{aligned} P(\neg cárie \wedge \neg dor \vee prende) &= P(\neg cárie \wedge \neg dor) + P(prende) - P(\neg cárie \wedge \neg dor \wedge prende) \\ &= (0,144 + 0,576) + (0,108 + 0,016 + 0,072 + 0,144) - 0,144 \\ &= 0,916 \end{aligned}$$

(f)

$$P(dor|cárie) = \frac{P(dor \wedge cárie)}{P(cárie)} = \frac{0,108 + 0,012}{0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008} = \frac{0,12}{0,2} = 0,6$$

(g)

$$\begin{aligned}
P(\textit{cárie}|\textit{dor} \lor \textit{prende}) &= \frac{P(\textit{cárie} \land (\textit{dor} \lor \textit{prende}))}{P(\textit{dor} \lor \textit{prende})} \\
&= \frac{P(\textit{cárie} \land \textit{dor} \lor \textit{cárie} \land \textit{prende})}{P(\textit{dor} \lor \textit{prende})} \\
&= \frac{P(\textit{cárie} \land \textit{dor}) + P(\textit{cárie} \land \textit{prende}) - P(\textit{cárie} \land \textit{dor} \land \textit{prende})}{P(\textit{dor} \lor \textit{prende})} \\
&= \frac{P(\textit{cárie} \land \textit{dor}) + P(\textit{cárie} \land \textit{prende}) - P(\textit{cárie} \land \textit{dor} \land \textit{prende})}{P(\textit{dor}) + P(\textit{prende}) - P(\textit{dor} \land \textit{prende})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(0,108 + 0,012) + (0,108 + 0,072) - (0,108)}{(0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064) + (0,108 + 0,016 + 0,072 + 0,144) - (0,108 + 0,016)}$$

$$P(\textit{cárie}|\textit{dor} \lor \textit{prende}) = \frac{0,192}{0,416} \approx 0,462$$

uma inspeção na tabela pode dar isso mais rapidamente. Por exemplo, observe os valores para $P(\textit{dor} \lor \textit{prende})$, correspondem aos quadros da dor + os quadros do prende (sem contar novamente os da dor), ou seja, $P(\textit{dor} \lor \textit{prende}) = 0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064 + 0,072 + 0,144 = 0,416$. E quanto à $P(\textit{cárie} \land (\textit{dor} \lor \textit{prende}))$? Basta selecionar, de todas as células que compõem $P(\textit{dor} \lor \textit{prende})$, aquelas em que há cárie, e $P(\textit{cárie} \land (\textit{dor} \lor \textit{prende})) = 0,108 + 0,012 + 0,072 = 0,192$. A conta final fica

$$P(\textit{cárie}|\textit{dor} \lor \textit{prende}) = \frac{0,192}{0,416} \approx 0,462$$

(h)

$$P(\textit{cárie}|\textit{dor} \land \textit{prende}) = \frac{P(\textit{cárie} \land \textit{dor} \land \textit{prende})}{P(\textit{dor} \land \textit{prende})} = \frac{0,108}{0,108 + 0,016} \approx 0,871$$

consideravelmente maior que a $P(\textit{cárie}|\textit{dor} \lor \textit{prende})$

3. (a) Lembre que

$$P(\textit{doença}|+) = \frac{P(+|\textit{doença})P(\textit{doença})}{P(+)}$$

Assim, quanto mais rara a doença, menor $P(\textit{doença})$, e menor será a chance de você tê-la, mesmo o exame sendo positivo.

(b) Vejamos os dados:

- o teste é 99% preciso, o que significa que $P(+|\textit{doença}) = 0,99$ e $P(-|\neg\textit{doença}) = 0,99$
- Apenas uma a cada 10.000 pessoas tem a doença, ou seja, $P(\textit{doença}) = 1 \times 10^{-4}$

O que nos iteressa é a probabilidade de termos a doença realmente, dado que o exame deu positivo, ou seja, $P(\textit{doença}|+)$. Então:

$$P(\textit{doença}|+) = \frac{P(+|\textit{doença})P(\textit{doença})}{P(+)} = \frac{0,99 \times 0,0001}{P(+)}$$

Para calcular $P(+)$, lembre que a probabilidade de um valor para uma variável é a soma da ocorrência desse valor em conjunção com todas as combinações de valores para as demais variáveis. Nesse caso, a probabilidade de um +, independentemente do sujeito ter ou não a doença, é a soma de dar + e ele ter a doença com dar + e ele não tê-la. Assim:

$$\begin{aligned}
P(+) &= P(+, \textit{doença}) + P(+, \neg\textit{doença}) \\
&= P(+|\textit{doença})P(\textit{doença}) + P(+|\neg\textit{doença})P(\neg\textit{doença})
\end{aligned}$$

Como $P(\neg\textit{doença}) = 1 - P(\textit{doença})$ e $P(+|\neg\textit{doença}) = 1 - P(-|\neg\textit{doença})$, teremos

$$P(+) = P(+|\textit{doença})P(\textit{doença}) + [1 - P(-|\neg\textit{doença})][1 - P(\textit{doença})]$$

e

$$\begin{aligned}
P(\textit{doença}|+) &= \frac{P(+|\textit{doença})P(\textit{doença})}{P(+|\textit{doença})P(\textit{doença}) + [1 - P(-|\neg\textit{doença})][1 - P(\textit{doença})]} \\
&= \frac{0,99 \cdot 0,0001}{0,99 \cdot 0,0001 + (1 - 0,99) \cdot (1 - 0,0001)} \approx 9,80 \times 10^{-3} \to 0,98\%
\end{aligned}$$

4. Vamos, antes de mais nada, definir os seguintes valores
   - v: a moeda é verdadeira
   - f: a moeda é falsa
   - c: a moeda deu cara
   - o: a moeda deu coroa

   (a)
   $$\begin{aligned} P(f|c) &= \frac{P(c|f)P(f)}{P(c)} \\ &= \frac{P(c|f)P(f)}{P(c,f)+P(c,v)} \\ &= \frac{P(c|f)P(f)}{P(c|f)P(f)+P(c|v)P(v)} \end{aligned}$$

   Do enunciado do problema temos que:
   - Há somente 1 moeda falsa em n: $P(f) = 1/n$, e $P(v) = 1 - P(f) = (n-1)/n$
   - A moeda falsa tem 2 caras, ou seja, $P(c|f) = 1$
   - A moeda verdadeira tem 1 cara, ou seja, $P(c|v) = 1/2$

   Assim
   $$P(f|c) = \frac{P(c|f)P(f)}{P(c|f)P(f)+P(c|v)P(v)} = \frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}} = \frac{2}{n+1}$$

   (b) Vejamos a probabilidade de, obtendo cara k vezes, ainda assim a moeda ser falsa:
   $$P(f|\{c,\ldots,c\}_k) = \frac{P(\{c,\ldots,c\}_k|f)P(f)}{P(\{c,\ldots,c\}_k)}$$

   como os eventos são independentes (o fato de eu ter terando uma cara não influencia o fato de eu ter tirado outra, com a mesma moeda), podemos assumir que
   $$P(\{c,\ldots,c\}_k|f) = \prod_1^k P(c|f) = P(c|f)^k$$
   e
   $$P(\{c,\ldots,c\}_k|v) = \prod_1^k P(c|v) = P(c|v)^k$$

   Assim,
   $$P(\{c,\ldots,c\}_k) = P(\{c,\ldots,c\}_k|f)P(f) + P(P(\{c,\ldots,c\}_k|v)P(v) = P(c|f)^k P(f) + P(c|v)^k P(v)$$

   E nossa equação fica
   $$P(f|\{c,\ldots,c\}_k) = \frac{P(c|f)^k P(f)}{P(c|f)^k P(f)+P(c|v)^k P(v)} = \frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2^k}\cdot\frac{n-1}{n}} = \frac{2^k}{2^k+n-1}$$

5. Considere:
   VA = você viu o taxi como azul (VV para verde)
   SA = o taxi é de fato azul (SV para verde)

   (a) Gostaríamos de calcular $P(SA|VA)$ (ou alternativamente $P(SV|VA)$). Como
   $$P(SA|VA) = \frac{P(VA|SA)P(SA)}{P(VA)}$$
   nos falta, pelo menos, $P(SA)$ para podermos efetivar o cálculo.

(b) Teremso então os seguintes dados:
$P(SA) = \frac{9}{10} = 0,9$
$P(VA|SA) = 0,75$
$P(VV|SV) = 0,75$
Assim,

$$\begin{aligned} P(SA|VA) &= \frac{P(VA|SA)P(SA)}{P(VA)} \\ &= \frac{P(VA|SA)P(SA)}{P(VA,SA) + P(VA,SV)} \\ &= \frac{P(VA|SA)P(SA)}{P(VA|SA)P(SA) + P(VA|SV)P(SV)} \end{aligned}$$

Como $P(SV) = 1 - P(SA)$ e $P(VA|SV) = 1 - P(VV|SV)$, temos

$$\begin{aligned} P(SA|VA) &= \frac{P(VA|SA)P(SA)}{P(VA|SA)P(SA) + [1 - P(VV|SV)][1 - P(SA)]} \\ &= \frac{0,75 \cdot 0,9}{0,75 \cdot 0,9 + (1 - 0,75)(1 - 0,9)} \\ &\approx 0,964 \end{aligned}$$

Ou seja, 96,4%.

6. Vamos usar as seguintes variáveis:
E = o prisioneiro será executado, com valores a, b, c
M = o guarda deu a mensagem de perdão a um prisioneiro, com valores a, b, c
Queremos saber $P(E = a|M = b)$, ou seja, a probabilidade de a ser executado dado que o guareu a mensagem a b, e

$$P(E = a|M = b) = \frac{P(M = b|E = a)P(E = a)}{P(M = b)}$$

$P(E = a)$, ou seja, a probabilidade prévia (na ausência de qualquer outra informação), de que o executado será a, supondo uma escolha aleatória dos prisioneiros, será $P(E = a) = \frac{1}{3}$. Da mesma forma, $P(E = b) = P(E = c) = \frac{1}{3}$.
Supondo que o executado seja a, o guarda teria apenas duas escolhas para entregar a mensagem. Ele então escolheria aleatoriamente entre b e c, e $P(M = b|E = a) = P(M = c|E = a) = \frac{1}{2}$.
Assim, voltando a $P(E = a|M = b)$,

$$P(E = a|M = b) = \frac{P(M = b|E = a)P(E = a)}{P(M = b)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(M = b|E = a)P(E = a)}{P(M = b, E = a) + P(M = b, E = b) + P(M = b, E = c)} \\ &= \frac{P(M = b|E = a)P(E = a)}{P(M = b|E = a)P(E = a) + P(M = b|E = b)P(E = b) + P(M = b|E = c)P(E = c)} \end{aligned}$$

Sabemos que $P(M = b|E = a) = \frac{1}{2}$, $P(E = a) = P(E = b) = P(E = c) = \frac{1}{3}$.
Como o guarda, sabendo que o executado será b, jamais daria a mensagem a ele, temos que $P(M = b|E = b) = 0$.
Se, contudo, o executado for c, o guarda não pode dar a mensagem nem a ele, nem a a (lembre que a pediu para a mensagem ir a um dos outros dois). Então, só resta c, e $P(M = b|E = c) = 1$.
Assim,

$$P(E = a|M = b) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

7. Note que essa questão é idêntica à anterior, fazendo-se $ferrari = execução$ e $bode = mensagem$. Então, usando as variáveis F para indicar que uma determinada porta contém a ferrari e B para indicar a porta aberta pelo apresentador, e supondo que você escolheu a porta a e que o apresentador

abriu a b (qualquer outra combinação levará ao mesmo resultado, vc inclusive pode ser até mais geral, não dando nome às portas), teremos:

$$P(F=a|B=b)=\frac{P(B=b|F=a)P(F=a)}{P(B=b)}$$

Dessa vez, contudo, em vez de nos perguntarmos qual a chance de termos pego a ferrari, talvez fique mais clara a resposta a "qual a chance da ferrari estar na outra porta (a c)?". Assim, queremos

$$P(F=c|B=b)=\frac{P(B=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b)}$$

Sabendo que a ferrari está na porta c, não resta outra escolha ao apresentador que não abrir a porta b, e $P(B=b|F=c)=1$.
Além disso, na ausência de qualquer outra informação (seu caso inicial), você diria que a ferrari pode estar em qualquer uma das 3 portas, aleatoriamente, e $P(F=a)=P(F=b)=P(F=c)=\frac{1}{3}$. Assim,

$$P(F=c|B=b)=\frac{P(B=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b)}$$

$$=\frac{P(B=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b,F=a)+P(B=b,F=b)+P(B=b,F=c)}$$
$$=\frac{P(B=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b|F=a)P(F=a)+P(B=b|F=b)P(F=b)+P(B=b|F=c)P(F=c)}$$

Uma vez que o apresentador jamais abrirá a porta com a ferrari, $P(B=b|F=b)=0$. Além disso, sabendo que você escolheu a porta com a ferrari, o apresentador escolhe aleatoriamente uma das outras duas para abrir, e $P(B=b|F=a)=P(B=c|F=a)=\frac{1}{2}$. Assim,

$$P(F=c|B=b)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\approx 0,67$$

Ou seja, após tudo isso, tua porta teria apenas 33% de chance de estar com a ferrari (pode calcular!), enquanto que a outra porta teria 67% de chance de contê-la. E aí? Você troca?

8. Nessa questão, veremos como o detalhe do apresentador saber a porta em que está a ferrari influi no resultado. Para tal, repare que, agora, vamos precisar de outra variável – O – indicando o conteúdo da porta aberta pelo apresentador, com os valores f(errari) ou b(ode). Note que essa variável era implícita antes, dado que o conteúdo era sempre o bode. Agora, contudo, ele não sabe o que tem atrás, e pode abrir a porta da ferrari.
Supondo que você escolheu a porta a e que o apresentador abrir a b, temos duas possibilidades:

   - A porta aberta contém uma ferrari e, nesse caso, $P(F=c|B=b,O=f)=0$
   - A porta aberta contém um bode, e:

   $$P(F=c|B=b,O=b)=\frac{P(B=b,O=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b,O=b)}$$

   Como o fato do apresentador abrir uma porta não depende do que há atrás dela, $P(B=b,O=b)=P(B=b)P(O=b)$, e $P(B=b,O=b|F=c)=P(B=b|F=c)P(O=b|F=c)$. E a equação fica

   $$P(F=c|B=b,O=b)=\frac{P(B=b|F=c)P(O=b|F=c)P(F=c)}{P(B=b)P(O=b)}$$

   Da mesma forma, o apresentador abrir uma porta independe de onde a ferrari está, então

$P(B = b|F = c) = P(B = b)$, e

$$\begin{aligned}
P(F = c|B = b, O = b) &= \frac{P(B = b|F = c)P(O = b|F = c)P(F = c)}{P(B = b)P(O = b)} \\
&= \frac{P(B = b)P(O = b|F = c)P(F = c)}{P(B = b)P(O = b)} \\
&= \frac{P(O = b|F = c)P(F = c)}{P(O = b)} \\
&= \frac{P(O = b|F = c)P(F = c)}{P(O = b, F = a) + P(O = b, F = b) + P(O = b, F = c)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{P(O = b|F = c)P(F = c)}{P(O = b|F = a)P(F = a) + P(O = b|F = b)P(F = b) + P(O = b|F = c)P(F = c)}$$

Como a ferrari pode, inicialmente, estar em qualquer uma das portas, $P(F = a) = P(F = b) = P(F = c) = \frac{1}{3}$, e

$$P(F = c|B = b, O = b) = \frac{P(O = b|F = c)}{P(O = b|F = a) + P(O = b|F = b) + P(O = b|F = c)}$$

Supondo que a ferrari está em c, na porta b (a aberta) só pode haver um bode, e $P(O = b|F = c) = 1$.
De maneira semelhante, se ela estiver em a, b só pode ter um bode, e $P(O = b|F = a) = 1$.
Já se a ferrari estiver em b, não há como b ter um bode, e $P(O = b|F = b) = 0$. E

$$\begin{aligned}
P(F = c|B = b, O = b) &= \frac{P(O = b|F = c)}{P(O = b|F = a) + P(O = b|F = b) + P(O = b|F = c)} \\
&= \frac{1}{1 + 0 + 1} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%
\end{aligned}$$

Ou seja, de nada adianta trocar, se foi aberto um bode.

9. (a) O erro é não levar em conta a porcentagem natural de bêbados dentre os motoristas. Suponha que 40% dos motorisas sejam bêbados. Então 40% causam 40% dos acidentes, e as chances de haver um acidente são iguais para ambos os grupos (faça o cálculo para $P(ac|bebe)$ e $P(ac|\neg bebe)$ para conferir). Se, contudo, o número de bêbados for menor, então menos motoristas causam uma proporção maior de acidentes. Se, por outro lado, for maior, seu amigo bebum está correto, e mais motoristas (os bêbados) causam menos acidentes.

   (b) Vamos comparar a probabilidade de alguem causar um acidente, estando bêbado, com a de alguém causar um acidente estando sóbrio, ou seja, vamos comparar $P(ac|bebe)$ com $P(ac|\neg bebe)$:

$$P(ac|bebe) = \frac{P(bebe|ac)P(ac)}{P(bebe)}$$

   Não sabemos $P(ac)$, então vamos deixar incógnita. Do enunciado, sabemos que 40% dos acidentes são causados por bêbados, ou seja, $P(bebe|ac) = 0,4$. Da mesma forma, foi dito que a proporção de motoristas bêbados no trânsito é de 17%, ou seja, $P(bebe) = 0,17$. Assim

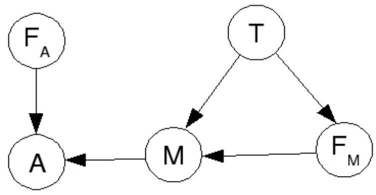
$$P(ac|bebe) = \frac{P(bebe|ac)P(ac)}{P(bebe)} = \frac{0,4 \cdot P(ac)}{0,17} = 2,35 \cdot P(ac)$$

   Agora vamos calcular para quem não bebe:

$$P(ac|\neg bebe) = \frac{P(\neg bebe|ac)P(ac)}{P(\neg bebe)} = \frac{[1 - P(bebe|ac)]P(ac)}{1 - P(bebe)} = \frac{0,6 \cdot P(ac)}{0,83} = 0,72 \cdot P(ac)$$

   Ou seja, se o sujeito beber, tem mais de 3 vezes a chance de se envolver em um acidente, e nosso amigo bebum não poderia estar mais errado!

10. (a)



(b) Temos apenas dois valores para T, $\{n,a\}$. A probabilidade de dar a temperatura correta pode ser vista como:
$P(M = a|T = a, \neg F_M) = x$, $P(M = n|T = n, \neg F_M) = x$ e
$P(M = a|T = a, F_M) = y$, $P(M = n|T = n, F_M) = y$.
Levando em conta que
$P(M = a|T = n, F_M) = 1 - P(M = n|T = n, F_M) = 1 - y$,
$P(M = a|T = n, \neg F_M) - 1 - P(M = n|T = n, \neg F_M) = 1 - x$,
$P(M = n|T = a, F_M) = 1 - P(M = a|T = a, F_M) = 1 - y$, e
$P(M = n|T = a, \neg F_M) = 1 - P(M = a|T = a, \neg F_M) = 1 - x$, teremos

T	F_M	$P(M = a\|T, F_M)$	$P(M = n\|T, F_M)$
a	v	y	1-y
a	f	x	1-x
n	v	1-y	y
n	f	1-x	x

(c) Note que o alarme não soará se estiver falhando ou a temperatura não for alta, ou seja:

M	F_A	$P(A\|M, F_A)$
a	v	0
n	f	0
n	v	0
a	f	1

(d) Quero a probabilidade da temperatura estar alta, dado que o alarme soou, e que nem o alarme nem o medidor estão falhando, ou seja,

$$P(T = a|A, \neg F_M, \neg F_A) = \frac{P(T = a, A, \neg F_M, \neg F_A)}{P(A, \neg F_M, \neg F_A)}$$

E

$$P(T = a, A, \neg F_M, \neg F_A) = P(T = a, A, \neg F_M, \neg F_A, M = a) + P(T = a, A, \neg F_M, \neg F_A, M = n)$$

$$\begin{aligned} &= P(T = a)P(A|\neg F_A, M = a)P(\neg F_M|T = a)P(\neg F_A)P(M = a|T = a, \neg F_M) + \\ &\quad P(T = a)P(A|\neg F_A, M = n)P(\neg F_M|T = a)P(\neg F_A)P(M = n|T = a, \neg F_M) \end{aligned}$$

(essa será a expressão$_1$).

$$\begin{aligned} P(A, \neg F_M, \neg F_A) &= P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = a, T = a) + P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = n, T = a) + \\ &\quad P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = a, T = n) + P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = n, T = n) \end{aligned}$$

como as duas de cima são identicas à expressão$_1$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} P(A, \neg F_M, \neg F_A) &= \text{expressão}_1 + P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = a, T = n) + \\ &\quad P(A, \neg F_M, \neg F_A, M = n, T = n) \\ &= \text{expressão}_1 + P(A|\neg F_A, M = a)P(\neg F_M|T = n)P(\neg F_A)P(T = n) \\ &\quad P(M = a|T = n, \neg F_M) + P(A|\neg F_A, M = n)P(\neg F_M|T = n)P(\neg F_A) \\ &\quad P(M = n|T = n, \neg F_M)P(T = n) \end{aligned}$$

(essa será a expressão$_2$). Então

$$P(T = a|A, \neg F_M, \neg F_A) = \frac{P(T = a, A, \neg F_M, \neg F_A)}{P(A, \neg F_M, \neg F_A)} = \frac{\text{expressão}_1}{\text{expressão}_2}$$

11. (a) A (iii) é a única em que essas variáveis são independentes (nenhuma é pai de nenhuma outra)
    (b) Na (i) e (ii) acontece a herança. Então essas são consistentes com essa hipótese.
    (c) Como a hipótese não fala nada sobre alguém ser canhoto apenas pelo fato dos pais serem, mas, em vez disso, trata de ser canhoto por causa de um gene que pode ter herdado dos pais, a primeira rede é a melhor descrição (note que nela apenas os genes são herdados).
    (d) Devemos lembrar que pode haver mutação. No caso de pais com genes diferentes, o valor das mutações se cancelam. Por exemplo, suponha que os pais são d 4 c, então o filho terá $0,5+m-m$ de chance de ser destro ($0,5-m$ de herdar do pai (d) e m de ser uma mutação da mãe). Então a tabela fica

G_m	G_p	$P(G_f = c \mid G_m, G_p)$	$P(G_f = d \mid G_m, G_p)$
c	c	1-m	m
c	d	0,5	0,5
d	c	0,5	0,5
d	d	m	1-m

    (e) Usando a tabela acima, e sabendo que $P(G_p = c) = P(G_m = c) = x$, temos que

$$\begin{aligned}
P(G_f = c) &= P(G_f = c, G_p = c, G_m = c) + P(G_f = c, G_p = c, G_m = d) + \\
&\quad P(G_f = c, G_p = d, G_m = c) + P(G_f = c, G_p = d, G_m = d) \\
&= P(G_f = c|G_p = c, G_m = c)P(G_p = c)P(G_m = c) + \\
&\quad P(G_f = c|G_p = c, G_m = d)P(G_p = c)P(G_m = d) + \\
&\quad P(G_f = c|G_p = d, G_m = c)P(G_p = d)P(G_m = c) + \\
&\quad P(G_f = c|G_p = d, G_m = d)P(G_p = d)P(G_m = d) + \\
&= (1-m)\cdot x\cdot x + 0,5\cdot x\cdot(1-x) + 0,5\cdot(1-x)\cdot x + m\cdot(1-x)\cdot(1-x) \\
&= x + m - 2mx
\end{aligned}$$

    (f) Se a distribuição dos genes se mantiver equilibrada, podemos esperar uma mesma proporção de canhotos e destros a cada geração. Assim, se para a geração dos pais $P(G_p = c) = P(G_m = c) = x$, essa mesma proporção se manterá, e $P(G_f = c) = x$. Contudo, pelo cálculo anterior, $P(G_f = c) = x + m - 2mx$. Igualando ambas as expressões teremos:

$$\begin{aligned}
x &= x + m - 2mx \\
0 &= m - 2mx \\
m &= 2mx \\
1 &= 2x \\
0,5 &= x
\end{aligned}$$

    Ou seja, cada pessoa teria 50% de chance de ser canhota. Sabemos, contudo, que o número de canhotos é muito inferior ao de destros, o que põe por terra o mecanismo genético descrito na questão.

12. (a)

$$\begin{aligned}
P(b, i, \neg m, g, j) &= P(b)P(i|b, \neg m)P(\neg m)P(g|b, i, \neg m)P(j|g) \\
&= P(b)P(i|b, \neg m)[1 - P(m)]P(g|b, i, \neg m)P(j|g) \\
&= 0,9\cdot 0,5\cdot[1-0,1]\cdot 0,8\cdot 0,9 \\
&= 0,2916
\end{aligned}$$

    (b)

$$P(j|b, i, m) = \frac{P(j, b, i, m)}{b, i, m}$$

$$\begin{aligned}
P(j, b, i, m) &= P(j, b, i, m, g) + P(j, b, i, m, \neg g) \\
&= P(j|g)P(b)P(i|b, m)P(m)P(g|b, i, m) + \\
&\quad P(j|\neg g)P(b)P(i|b, m)P(m)P(\neg g|b, i, m) \\
&= 0,9\cdot 0,9\cdot 0,9\cdot 0,1\cdot 0,9 + 0,0\cdot 0,9\cdot 0,9\cdot 0,1\cdot(1-0,9) \\
&= 0,06561
\end{aligned}$$

$$P(b,i,m) = P(b,i,m,j,g) + P(b,i,m,j,\neg g) + P(b,i,m,\neg j,g) + P(b,i,m,\neg j,\neg g)$$

Note que $P(b,i,m,j,g) + P(b,i,m,j,\neg g) = P(j,b,i,m) = 0,06561$, calculado acima, então temos:

$$\begin{aligned}
P(b,i,m) &= 0,06561 + P(b,i,m,\neg j,g) + P(b,i,m,\neg j,\neg g) \\
&= 0,06561 + P(b)P(i|b,m)P(m)P(\neg j|g)P(g|b,i,m) + \\
&\quad P(b)P(i|b,m)P(m)P(\neg j|\neg g)P(\neg g|b,i,m) \\
&= 0,06561 + 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot (1-0,9) \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot (1-0,0) \cdot (1-0,9) \\
&= 0,06561 + 0,00729 + 0,0081 \\
&= 0,081
\end{aligned}$$

E

$$P(j|b,i,m) = \frac{P(j,b,i,m)}{b,i,m} = \frac{0,06561}{0,081} = 0,81 = 81\%$$