Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Lógica de Predicados —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Predicados e Quantificadores —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Predicados e quantificadores

Servem para declarações da forma

- $x > 3$
- $x = y + 3$
- $x + y = z$

Observações

- Não são V nem F enquanto os valores das variáveis não forem especificados.
- Produção de proposições a partir destas declarações.

Predicados

- A declaração x é maior do que 3 tem duas partes:
  - a variável x (= "sujeito")
  - é maior do que 3 (= "predicado")
- O predicado é uma propriedade que o sujeito da declaração pode ter.
- Podemos denotar x é maior do que 3 por $P(x)$:
  - P é o predicado
  - x é a variável

Diz-se também que $P(x)$ é o valor da função proposicional P em x. Uma vez que um valor tenha sido atribuído a x, $P(x)$ se torna uma proposição e tem um valor verdade.

Predicados

Exemplo 1

seja $P(x)$ a declaração $x > 3$. Quais são os valores verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

- $P(4)$, que é "$4 > 3$", é V
- $P(2)$, que é "$2 > 3$", é F

Exemplo 2

$x = y + 3$.

- Pode ser denotado por $Q(x, y)$
- Quando se atribui valores para x e para y, $Q(x, y)$ passa a ter um valor verdade

Exemplo 3

Seja $Q(x, y)$ a declaração "$x = y + 3$". Quais são os valores verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Similarmente, $R(x, y, z)$ pode ser "$x + y = z$".

Exemplo 4

quais os valores verdade de $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

Predicados

Exemplo 3

Seja $Q(x, y)$ a declaração "$x = y + 3$". Quais são os valores verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Similarmente, $R(x, y, z)$ pode ser "$x + y = z$".

Exemplo 4

quais os valores verdade de $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

Em geral, uma declaração envolvendo as n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser denotada por: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- que é o valor da função P para a tupla: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- P também é chamado de predicado

Quantificadores

- Quando se atribui valores a todas as variáveis em uma função proposicional, a declaração resultante se torna uma proposição com um valor verdade determinado.
- Outra forma de criar uma proposição a partir de uma função proposicional: a quantificação
- Dois tipos principais de quantificadores: quantificação universal e quantificação existencial.

Quantificador Universal

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F para todos os valores de uma variável em um domínio em particular

Quantificador Universal

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F para todos os valores de uma variável em um domínio em particular

ou seja, em um **universo de discurso** ou **domínio**

Quantificador Universal

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F para todos os valores de uma variável em um domínio em particular

ou seja, em um **universo de discurso** ou **domínio**

- Tal declaração é expressa com um quantificador universal:
  - estabelece que $P(x)$ é V para todos os valores de x no universo de discurso
  - é o universo de discurso que especifica os possíveis valores da variável x.

Quantificador Universal

A **quantificação universal** de $P(x)$ é a proposição:

$P(x)$ é V para todos os valores de x no universo de discurso.

Denotada por: $\forall x\ P(x)$

- $\forall$ é o quantificador universal
- "para todo x, $P(x)$"
- "para todos os x, $P(x)$"

Quantificador Universal

A **quantificação universal** de $P(x)$ é a proposição:

$P(x)$ é V para todos os valores de x no universo de discurso.

Denotada por: $\forall x\ P(x)$

- $\forall$ é o quantificador universal
- "para todo x, $P(x)$"
- "para todos os x, $P(x)$"

Exemplo 5

Seja $P(x)$ dado por "$x + 1 > x$".

- Qual o valor verdade da quantificação $\forall x\ P(x)$, sendo que o universo de discurso consiste de todos os números reais?

como $P(x)$ é V para todos os reais x, a quantificação $\forall x\ P(x)$ é V

Exemplo 6

Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$".

- Qual o valor verdade da quantificação $\forall x \; Q(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

Exemplo 6

Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$".

- Qual o valor verdade da quantificação $\forall x\ Q(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

Solução

- $Q(x)$ não é verdade para todo número real x
- $Q(3)$, por exemplo, é F
- Portanto: $\forall x\ Q(x)$ é F

Quantificador Universal

- Quando todos os elementos do universo de discurso podem ser listados, como

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- Segue que a quantificação universal é o mesmo que a conjunção:

$$P(x_1) \land P(x_2) \land \ldots \land P(x_n)$$

a qual é V sse:

$$P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n) \text{ são todos V}$$

Quantificador Universal

Exemplo 7

qual o valor verdade de $\forall x\ P(x)$, em que:

- $P(x)$ é "$x^2 < 10$"
- o universo de discurso são os inteiros não maiores do que 4?

Exemplo 7

qual o valor verdade de $\forall x\ P(x)$, em que:

- $P(x)$ é "$x^2 < 10$"
- o universo de discurso são os inteiros não maiores do que 4?

como $P(4)$ é F, segue que $\forall x\ P(x)$ é F

Exemplo 7

qual o valor verdade de $\forall x\ P(x)$, em que:

- $P(x)$ é "$x^2 < 10$"
- o universo de discurso são os inteiros não maiores do que 4?

como $P(4)$ é F, segue que $\forall x\ P(x)$ é F

Exemplo 8

o que significa a declaração $\forall x\ T(x)$, se:

- $T(x)$ é "x tem pai e mãe"
- o universo de discurso consiste de todas as pessoas?

Quantificador Universal

Exemplo 7

qual o valor verdade de $\forall x\ P(x)$, em que:

- $P(x)$ é "$x^2 < 10$"
- o universo de discurso são os inteiros não maiores do que 4?

como $P(4)$ é F, segue que $\forall x\ P(x)$ é F

Exemplo 8

o que significa a declaração $\forall x\ T(x)$, se:

- $T(x)$ é "x tem pai e mãe"
- o universo de discurso consiste de todas as pessoas?

a declaração pode ser traduzida para "toda pessoa tem pai e mãe" e por consquência é V

- Especificar o universo de discurso é importante quando se usa quantificadores.
- O valor verdade de uma declaração quantificada frequentemente depende de quais elementos estão neste universo de discurso.

Exemplo 9

Quantificador Universal

- **Especificar o universo de discurso** é importante quando se usa quantificadores.
- O valor verdade de uma declaração quantificada frequentemente depende de quais elementos estão neste universo de discurso.

Exemplo 9

Qual é o valor verdade de $\forall x\ (x^2 \geq x)$ se:

- o universo de discurso consiste de todos os números reais?
- o universo de discurso consiste de todos os números inteiros?

Quantificador Universal

- Especificar o universo de discurso é importante quando se usa quantificadores.
- O valor verdade de uma declaração quantificada frequentemente depende de quais elementos estão neste universo de discurso.

Exemplo 9

Qual é o valor verdade de $\forall x\ (x^2 \geq x)$ se:

- o universo de discurso consiste de todos os números reais?
- o universo de discurso consiste de todos os números inteiros?

Solução

- note que $x^2 \geq x$ sse $x.(x-1) \geq 0$ ou seja: sse $x \leq 0$ ou $x \geq 1$
  - $\forall x\ (x^2 \geq x)$ é F se o universo de discurso consiste dos reais
  - mas é V se o universo de discurso consiste dos inteiros

Quantificador Universal

Note que, para mostrar que uma declaração da forma $\forall x\ P(x)$ é F:

- só é preciso encontrar um valor de x no universo de discurso para o qual $P(x)$ é F
- este valor é chamado de contra-exemplo da declaração $\forall x\ P(x)$

Quantificador Universal

Note que, para mostrar que uma declaração da forma $\forall x \; P(x)$ é F:

- só é preciso encontrar um valor de x no universo de discurso para o qual $P(x)$ é F
- este valor é chamado de contra-exemplo da declaração $\forall x \; P(x)$

Exemplo 10

Seja $P(x)$ dado por $x^2 > 0$.

- Para mostrar que a declaração $\forall x \; P(x)$ é F, onde o universo de discurso consiste dos inteiros, é só mostrar um contra-exemplo.
- Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo, uma vez que $x^2 = 0$ quando $x = 0$.

Quantificador Universal

Note que, para mostrar que uma declaração da forma $\forall x\ P(x)$ é F:

- só é preciso encontrar um valor de x no universo de discurso para o qual $P(x)$ é F
- este valor é chamado de contra-exemplo da declaração $\forall x\ P(x)$

Exemplo 10

Seja $P(x)$ dado por $x^2 > 0$.

- Para mostrar que a declaração $\forall x\ P(x)$ é F, onde o universo de discurso consiste dos inteiros, é só mostrar um contra-exemplo.
- Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo, uma vez que $x^2 = 0$ quando $x = 0$.

Buscar contra-exemplos para declarações quantificadas universalmente é uma atividade importante no estudo da matemática.

Quantificador Existencial

- Muitas declarações matemáticas estabelecem que existe um elemento com uma certa propriedade.
- Tais declarações são expressas usando quantificação existencial.

Quantificador Existencial

- Muitas declarações matemáticas estabelecem que existe um elemento com uma certa propriedade.
- Tais declarações são expressas usando quantificação existencial.

Forma-se uma proposição que é V se e somente se $P(x)$ é V para pelo menos um valor de x no universo de discurso (ou domínio).

A quantificação existencial de $P(x)$ é a proposição:

- "existe um elemento x no universo de discurso tal que $P(x)$ é V"
- usa-se a notação: $\exists x \; P(x)$

Quantificador Existencial

A **quantificação existencial** de $P(x)$ é a proposição:

- existe um elemento x no universo de discurso tal que $P(x)$ é V
- usa-se a notação: $\exists x \; P(x)$

Significado

- existe um x tal que $P(x)$
- existe pelo menos um x tal que $P(x)$
- para algum x, $P(x)$

Exemplo 11

Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ P(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

Quantificador Existencial

Exemplo 11

Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ P(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

$x > 3$ para, por exemplo, $x = 4$ logo: $\exists x\ P(x)$ é V

Quantificador Existencial

Exemplo 11

Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ P(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

$x > 3$ para, por exemplo, $x = 4$ logo: $\exists x\ P(x)$ é V

Exemplo 12

Seja $Q(x)$ a declaração "$x = x + 1$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ Q(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

Quantificador Existencial

Exemplo 11

Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ P(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

$x > 3$ para, por exemplo, $x = 4$ logo: $\exists x\ P(x)$ é V

Exemplo 12

Seja $Q(x)$ a declaração "$x = x + 1$".

- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ Q(x)$?
- O universo de discurso consiste de todos os números reais.

uma vez que $Q(x)$ é F para todos os nros reais, a quantificação existencial $\exists x\ Q(x)$ é F

Quantificador Existencial

- Quando todos os elementos do universo de discurso podem ser listados, como

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- segue que a quantificação existencial é o mesmo que a disjunção:

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$

a qual é V sse pelo menos um entre

$$P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n) \text{ for V}$$

Exemplo 13

Qual o valor verdade de $\exists x\ P(x)$, onde:

- $P(x)$ é a declaração "$x^2 > 10$"
- o universo de discurso consiste dos inteiros positivos não maiores do que 4?

Exemplo 13

Qual o valor verdade de $\exists x\ P(x)$, onde:

- $P(x)$ é a declaração "$x^2 > 10$"
- o universo de discurso consiste dos inteiros positivos não maiores do que 4?

Como o universo do discurso é $\{1, 2, 3, 4\}$, a proposição $\exists x\ P(x)$ é o mesmo que a disjunção:

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

Como $P(4)$ é V, segue que $\exists x\ P(x)$ é V

Quantificadores - Resumo

Resumo

Declaração	Quando é V?	Quando é F?
$\forall x\ P(x)$	$P(x)$ é V para todo x	Existe um x para o qual $P(x)$ é F
$\exists x\ P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é V	$P(x)$ é F para todo x

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Ligando variáveis —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Ligando variáveis

Quando:

- um quantificador é usado sobre a variável x
- ou: quando atribuímos um valor a esta variável

dizemos que esta ocorrência da variável está ligada (ou "amarrada").

Ligando variáveis

Quando:

- um quantificador é usado sobre a variável x
- ou: quando atribuímos um valor a esta variável

dizemos que esta ocorrência da variável está ligada (ou “amarrada”).

Uma ocorrência de variável que não está ligada a um quantificador ou fixa em um valor particular é chamada de variável livre.

Ligando variáveis

Todas as variáveis que ocorrem em uma função proposicional devem estar ligadas, para que ela seja considerada uma proposição.
Isto pode ser feito com uma combinação de:

- quantificadores universais
- quantificadores existenciais
- atribuições de valores

Ligando variáveis

Todas as variáveis que ocorrem em uma função proposicional devem estar ligadas, para que ela seja considerada uma proposição. Isto pode ser feito com uma combinação de:

- quantificadores universais
- quantificadores existenciais
- atribuições de valores

Escopo

- A parte de uma expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é o seu escopo.
- Uma variável é livre se estiver fora do escopo de todos os quantificadores na fórmula que a especifica.

Ligando variáveis

Exemplo 14

na declaração $\exists x \; Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Ligando variáveis

Exemplo 14

na declaração $\exists x \; Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Exemplo 15

na declaração $\exists x \; (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x \; R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$,

Exemplo 14

na declaração $\exists x \; Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Exemplo 15

na declaração $\exists x \; (P(x) \land Q(x)) \lor \forall x \; R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão $P(x) \land Q(x)$

Ligando variáveis

Exemplo 14

na declaração $\exists x\ Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Exemplo 15

na declaração $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\ R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão $P(x) \wedge Q(x)$
- O escopo do quantificador "$\forall x$" é

Ligando variáveis

Exemplo 14

na declaração $\exists x\ Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Exemplo 15

na declaração $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\ R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão $P(x) \wedge Q(x)$
- O escopo do quantificador "$\forall x$" é $R(x)$

Ligando variáveis

Exemplo 14

na declaração $\exists x\ Q(x, y)$:

- a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
- mas a variável y está livre:
  - não está ligada a nenhum quantificador
  - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

Exemplo 15

na declaração $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\ R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão $P(x) \wedge Q(x)$
- O escopo do quantificador "$\forall x$" é $R(x)$

Note que esta expressão pode ser escrita como:
$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \vee\ \forall y\ R(y)$

Ligando variáveis

Observe que é comum usar a mesma letra para representar variáveis ligadas a diferentes quantificadores,

Ligando variáveis

Observe que é comum usar a mesma letra para representar variáveis ligadas a diferentes quantificadores, desde que os seus escopos não se sobreponham.

Ligando variáveis

Observe que é comum usar a mesma letra para representar variáveis ligadas a diferentes quantificadores, desde que os seus escopos não se sobreponham.

$$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\ R(x)$$

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Negações —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Negações

Considere a sentença:

"Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"

Negações

Considere a sentença:

"Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"

Como usar quantificador?

Negações

Considere a sentença:

"Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"

Como usar quantificador?

Trata-se de uma quantificação universal: $\forall x \; P(x)$

em que $P(x)$ é "x já cursou Cálculo"

Negações

Considere a sentença:

"Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"

Como usar quantificador?

Trata-se de uma quantificação universal: $\forall x \ P(x)$

em que $P(x)$ é "x já cursou Cálculo"

A **negação desta sentença** é a declaração:

Não é verdade que todo aluno nesta sala já tenha feito um curso de Cálculo

Existe algum estudante em sala que não cursou Cálculo, ou seja: $\exists x \ \neg P(x)$

Considere a sentença:

"Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"

Como usar quantificador?

Trata-se de uma quantificação universal: $\forall x\ P(x)$

em que $P(x)$ é "x já cursou Cálculo"

A negação desta sentença é a declaração:

Não é verdade que todo aluno nesta sala já tenha feito um curso de Cálculo

Existe algum estudante em sala que não cursou Cálculo, ou seja: $\exists x\ \neg P(x)$

Equivalência: $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

Negações

Agora deseja-se negar:

"Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo"

Negações

Agora deseja-se negar:

"Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo"

Como usar quantificador existencial?

Negações

Agora deseja-se negar:

"Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo"

Como usar quantificador existencial?

Trata-se de uma quantificação existencial: $\exists x\ Q(x)$, em que $Q(x)$ é "x já cursou Cálculo"

A negação desta declaração é:

Não é verdade que exista nesta sala um estudante que já tenha cursado Cálculo

Todo estudante desta sala ainda não cursou Cálculo, ou seja: $\forall x\ \neg Q(x)$

Negações

Agora deseja-se negar:

"Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo"

Como usar quantificador existencial?

Trata-se de uma quantificação existencial: $\exists x\ Q(x)$, em que $Q(x)$ é "x já cursou Cálculo"

A negação desta declaração é:

Não é verdade que exista nesta sala um estudante que já tenha cursado Cálculo

Todo estudante desta sala ainda não cursou Cálculo, ou seja: $\forall x\ \neg Q(x)$

Equivalência: $\neg\exists x\ Q(x) \equiv \forall x\ \neg Q(x)$

Negações - Resumo

Resumo

Negação	Declaração Equivalente	Quando é V?	Quando é F?
$\neg\exists x\ P(x)$	$\forall x\ \neg P(x)$	Para todo x, $P(x)$ é F	Existe um x para o qual $P(x)$ é V
$\neg\forall x\ P(x)$	$\exists x\ \neg P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é F	Para todo x, $P(x)$ é V

Negações

Exemplo 16

Seja $H(x)$: "x é honesto", então esta declaração é:

$$\exists x \ H(x)$$

em que o universo de discurso consiste de todos os políticos

A negação desta declaração é

$$\neg \exists x \ H(x) \equiv \forall x \ \neg H(x)$$

A qual pode ser expressa como:

- "Todos os políticos não são honestos", ou
- "Todos os políticos são desonestos"

Negações

Seja $C(x)$: "x come hambúrguers", então esta declaração é

$$\forall x\ C(x)$$

em que o universo de discurso consiste de todos os americanos

A negação desta declaração é:

$$\neg\forall x\ C(x) \equiv \exists x\ \neg C(x)$$

A qual pode ser expressa como:

- "Alguns americanos não comem hambúrguers", ou
- "Existe pelo menos um americano que não come hambúrguers"

Exemplo 17

A negação de "$\forall x\ (x^2 > x)$"

- é a declaração: $\neg\forall x\ (x^2 > x)$
- que é equivalente a: $\exists x\ \neg(x^2 > x)$
- a qual pode ser reescrita como: $\exists x\ (x^2 \leq x)$

Negações

Exemplo 17

A negação de "$\forall x\ (x^2 > x)$"

- é a declaração: $\neg \forall x\ (x^2 > x)$
- que é equivalente a: $\exists x\ \neg(x^2 > x)$
- a qual pode ser reescrita como: $\exists x\ (x^2 \leq x)$

Note que o valor-verdade desta declaração depende do universo de discurso.

Negações

Exemplo 18

A negação de "$\exists x\ (x^2 = 2)$"

- é a declaração: $\neg\exists x\ (x^2 = 2)$
- que é equivalente a: $\forall x\ \neg(x^2 = 2)$
- a qual pode ser reescrita como: $\forall x\ (x^2 \neq 2)$

Negações

Exemplo 18

A negação de "$\exists x\ (x^2 = 2)$"

- é a declaração: $\neg\exists x\ (x^2 = 2)$
- que é equivalente a: $\forall x\ \neg(x^2 = 2)$
- a qual pode ser reescrita como: $\forall x\ (x^2 \neq 2)$

Note que o valor-verdade desta declaração depende do universo de discurso.

Traduzindo linguagem para lógica

- Tarefa crucial em matemática, programação em lógica, IA, engenharia de software e outros.
- Esta tarefa é mais complexa quando envolve predicados e quantificadores, em que pode haver mais de um modo de traduzir uma dada sentença.
- Não há "receita"sendo o objetivo é produzir expressões simples e úteis.

Sentenças para lógica (um quantificador)

Exemplo 19

Use lógica de predicados para expressar:

"Todo estudante nesta turma já estudou Cálculo".

Exemplo 19

Use lógica de predicados para expressar:

"Todo estudante nesta turma já estudou Cálculo".

Como traduzir para lógica?

Exemplo 19

Use lógica de predicados para expressar:

"Todo estudante nesta turma já estudou Cálculo".

Como traduzir para lógica?

1. reescrever para facilitar identificação dos quantificadores:

   "Para cada estudante nesta turma, este estudante já estudou Cálculo"
2. introduzir uma variável x:

   "Para cada estudante x nesta turma, x já estudou Cálculo"
3. incluir o predicado $C(x)$: "x já estudou Cálculo"
4. assim, assumindo que o universo de discurso consiste dos estudantes na turma:

$$\forall x \; C(x)$$

Sentenças para lógica (um quantificador)

Existem outras abordagens corretas

- pode-se usar universos de discurso diferentes e outros predicados
- a abordagem escolhida vai depender do raciocínio que queremos desenvolver.

Sentenças para lógica (um quantificador)

Exemplo 20

Podemos estar interessados em focar em um grupo de pessoas maior do que a turma. Se o universo de discurso passar a ser "todas as pessoas", teremos:

Para cada pessoa x, se a pessoa x é um estudante desta turma, então x já estudou Cálculo"

Sentenças para lógica (um quantificador)

Exemplo 20

Podemos estar interessados em focar em um grupo de pessoas maior do que a turma. Se o universo de discurso passar a ser “todas as pessoas”, teremos:

> Para cada pessoa x, se a pessoa x é um estudante desta turma, então x já estudou Cálculo”

Então, definindo:

$$E(x): \text{ a pessoa } x \text{ está nesta turma}$$

Esta sentença fica:

$$\forall x \; (E(x) \rightarrow C(x))$$

Neste caso, a sentença **não pode** ser expressa como:

$$\forall x \; (E(x) \wedge C(x))$$

pois isto significaria: “todas as pessoas são estudantes nesta turma e já estudaram Cálculo” (!!)

Exemplo 21

Podemos estar interessados na formação da turma em outros assuntos além do Cálculo.

Neste caso, pode ser mais adequado usar o predicado:

$$Q(x, y) : \text{“o estudante } x \text{ já estudou a matéria } y''$$

Teríamos que substituir $C(x)$ por $Q(x, \text{calculo})$ nas abordagens anteriores:

$$\forall x \; Q(x, \text{calculo})$$

$$\forall x \; (E(x) \rightarrow Q(x, \text{calculo}))$$

Exemplo 22

Use predicados e quantificadores para expressar (1/2)

Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.

- Esta sentença significa:

  Existe um estudante nesta sala com a propriedade de que este estudante já visitou SP.

- Introduzindo uma variável x:

  "Existe um estudante x nesta sala que possui a propriedade 'x já visitou SP'."

Exemplo 22

Use predicados e quantificadores para expressar (2/2)

Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.

Supondo universo de discurso = "estudantes nesta sala", obtemos:

$$\exists x \; S(x)$$

Se o universo de discurso passar para "todas as pessoas", a sentença fica:

Existe uma pessoa x tendo a propriedade de que x é um estudante nesta sala e x já foi a SP.

Sentenças para lógica (um quantificador)

Exemplo 22

Use predicados e quantificadores para expressar (2/2)

Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.

Supondo universo de discurso = "estudantes nesta sala", obtemos:

$$\exists x \; S(x)$$

Se o universo de discurso passar para "todas as pessoas", a sentença fica:

Existe uma pessoa x tendo a propriedade de que x é um estudante nesta sala e x já foi a SP.

- Se $E(x)$ for "x é um estudante nesta sala", então $\exists x \; (E(x) \wedge S(x))$
- Note que não pode ser:

$$\exists x \; (E(x) \rightarrow S(x))$$

pois, para isto ser V, bastaria ter alguém fora da sala. (!!)