



Programa de
Pós-graduação em



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Teoria de Conjuntos e Funções —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Conjuntos —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

NOTAÇÃO

Letras maiúsculas são, em geral, usadas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

NOTAÇÃO

$a \in A$ o elemento “a” pertence ao conjunto “A”

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

NOTAÇÃO

$a \in A$ o elemento “a” pertence ao conjunto “A”

$a \notin A$ o elemento “a” não pertence ao conjunto “A”

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

NOTAÇÃO

$$A = \{\text{melão, laranja, morango}\}$$

Definição de conjuntos

CONJUNTO

Coleção “bem-definida” (e não-ordenada) de objetos.

ELEMENTO

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

NOTAÇÃO

$$A = \{\text{melão, laranja, morango}\}$$

$$\text{melão} \in A$$

$$\text{uva} \notin A$$

Exemplos de Conjuntos

Finito

Conjunto dos livros da biblioteca

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$

dígitos $Y = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$

dígitos $Y = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

Infinito *Conjunto dos números naturais*

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$

dígitos $Y = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

Infinito *Conjunto dos números naturais*

Conjunto vazio *Conjunto dos dinossauros vivos ($\{\}$ ou \emptyset)*

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$\{ovo, carne, macarrão\}$ $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ $\{lua, \pi, 1\}$

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarr\~ao\} \quad \{1, 2, 3, \dots, 50\} \quad \{lua, \pi, 1\}$$

SOBRE A REPRESENTAÇÃO DOS CONJUNTOS

- A ordem em que os elementos são listados é irrelevante
- A repetição dos elementos é irrelevante

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \quad \{1, 2, 3, \dots, 50\} \quad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade *Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como $S = \{x \mid P(x)\}$*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Formas para definir conjuntos

Chaves Listar os elementos do conjunto entre chaves

$$\{ovo, carne, macarrão\} \quad \{1, 2, 3, \dots, 50\} \quad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como $S = \{x \mid P(x)\}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Recursão Especificar um conjunto por meio de uma função recursiva

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \text{se } x \in A \text{ e } x + 3 < 11, \text{ então } x + 3 \in A. \end{cases}$$

Formas para definir conjuntos

Chaves Listar os elementos do conjunto entre chaves

$$\{ovo, carne, macarrão\} \quad \{1, 2, 3, \dots, 50\} \quad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como $S = \{x \mid P(x)\}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Recursão Especificar um conjunto por meio de uma função recursiva

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \text{se } x \in A \text{ e } x + 3 < 11, \text{ então } x + 3 \in A. \end{cases}$$

Característica Especificar por meio de uma função característica

$$A = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, 2, 4, 6, 8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos de conjuntos importantes

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos

\mathbb{R} é o conjunto dos números reais

\mathbb{R}^+ é o conjunto dos números reais positivos

\mathbb{C} é o conjunto dos números complexos

Igualdade de conjuntos

$$A = B$$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Igualdade de conjuntos

$$A = B$$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Formalmente, $A = B$ significa

$$(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

ou

$$A = B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Igualdade de conjuntos

$$A = B$$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Formalmente, $A = B$ significa

$$(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

ou

$$A = B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

A DEFINIÇÃO DE IGUALDADE DE CONJUNTO IMPLICA EM

$$\{a, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}$$

$$\{a, a, a, a, b, b, b, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}$$

Subconjuntos

$$A \subseteq B$$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B .

Subconjuntos

$$A \subseteq B$$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B .

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Subconjuntos

$$A \subseteq B$$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B .

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B$$

A é um **subconjunto próprio** de B sse cada elemento de A estiver em B e pelo menos um elemento de B não está em A .

Formalmente, $A \subset B$ significa

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x : (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \end{aligned}$$

Subconjuntos

$$A \subseteq B$$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B .

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

A **está contido** em B e B **contêm** A são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

- ▶ O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros
- ▶ O conjunto dos seres humanos contêm um subconjunto de pessoas do sexo masculino
- ▶ O subconjunto de pessoas do sexo feminino está contido no conjunto dos seres humanos.

Subconjuntos

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

$$\begin{array}{ll} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \emptyset \subseteq C \end{array}$$

Subconjuntos

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

$$B \subseteq C$$

$$15 \in C$$

$$B \subseteq A$$

$$\{7, 9\} \subseteq B$$

$$B \subset A$$

$$\{7\} \subset A$$

$$A \not\subset C$$

$$\emptyset \subseteq C$$



Todas são verdadeiras!!!

Subconjuntos

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

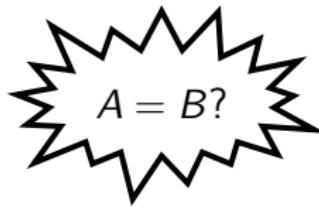
$$\begin{array}{ll} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \emptyset \subseteq C \end{array}$$

O conjunto Vazio é um subconjunto de todo conjunto

Subconjuntos

CONJUNTOS PODEM TER OUTROS CONJUNTOS

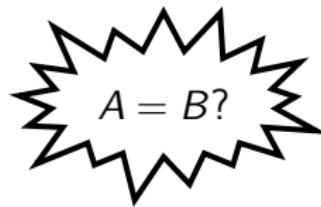
$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$$



Subconjuntos

CONJUNTOS PODEM TER OUTROS CONJUNTOS

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$$

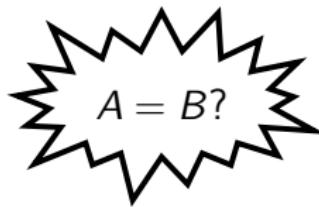


Quais são os subconjuntos de $\{a, b\}$?

Subconjuntos

CONJUNTOS PODEM TER OUTROS CONJUNTOS

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$$



Quais são os subconjuntos de $\{a, b\}$?

$$\emptyset \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{a, b\}$$

Logo, $A=B$ pois todo elemento de A está em B e vice-versa!!!

Subconjuntos

CONJUNTOS PODEM TER OUTROS CONJUNTOS

A é um conjunto

$$B = \{A, \{A\}\}$$



Subconjuntos

CONJUNTOS PODEM TER OUTROS CONJUNTOS

A é um conjunto

$$B = \{A, \{A\}\}$$



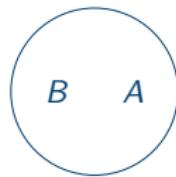
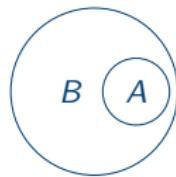
$$\begin{aligned} A \in B &\quad \text{e} \quad \{A\} \in B \\ \{A\} \subseteq B &\quad \text{e} \quad \{\{A\}\} \subseteq B \end{aligned}$$

Como A é um elemento de B , portanto A não é um subconjunto de B . Então não é verdade que $A \subseteq B$!!!

Diagramas de Venn

Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

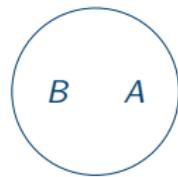
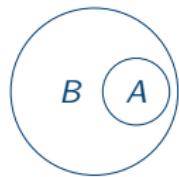
$$A \subseteq B$$



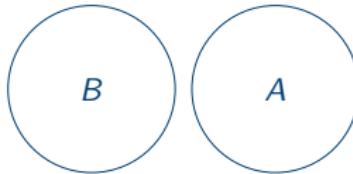
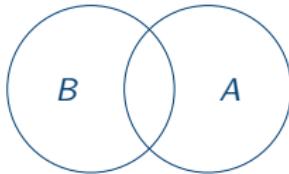
Diagramas de Venn

Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

$$A \subseteq B$$



$$A \not\subseteq B$$



Conjunto potência

Dado um conjunto A , o **conjunto potência** de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A .

Exemplo 2

Seja $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Conjunto potência

Dado um conjunto A , o **conjunto potência** de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A .

Exemplo 2

Seja $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Exemplo 3

Seja A o conjunto vazio \emptyset

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$

Como os conjuntos **não são ordenados**, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.

SEQUÊNCIA

- ▶ Uma **sequência** é uma lista de objetos em ordem.
 - ▶ um “primeiro elemento”, um “segundo elemento”,...
 - ▶ a lista pode ser finita ou não

Sequências

Como os conjuntos **não são ordenados**, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.

SEQUÊNCIA

- Uma **sequência** é uma lista de objetos em ordem.
 - um “primeiro elemento”, um “segundo elemento”,...
 - a lista pode ser finita ou não

EXEMPLOS

- 1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1
- 1,4,9,16,25,... (“quadrados dos números positivos”) é infinita
- A sequência finita 1,2,4,...,256 pode ser denotada por $(2^n)_{0 \leq n \leq 8}$

Cardinalidade de conjuntos

Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma sequência.

- ▶ Os elementos do conjunto podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- ▶ Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- ▶ Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

Cardinalidade de conjuntos

Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma sequência.

- ▶ Os elementos do conjunto podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- ▶ Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- ▶ Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

Cardinalidade de X *número de elementos em um conjunto X . A cardinalidade de X é denotado por $|X|$*

$$|\{2, 5, 7\}| = 3$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade :

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade :

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \quad \text{e} \quad Y = \{?, !, \#\}$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade:

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \quad \text{e} \quad Y = \{?, !, \#\}$$

$$2 \leftrightarrow ?, \quad 5 \leftrightarrow \#, \quad 7 \leftrightarrow !$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade :

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \quad \text{e} \quad Y = \{?, !, \#\}$$

$$2 \leftrightarrow ?, \quad 5 \leftrightarrow \#, \quad 7 \leftrightarrow !$$

O emparelhamento mostra que ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade .

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B , é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B , é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 5

Qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B , é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 5

Qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Conjunto universo

Conjunto que contêm “todas as coisas”, denominado U , que contêm todos os objetos para os quais a discussão faz sentido

Conjunto universal

Operações sobre conjuntos

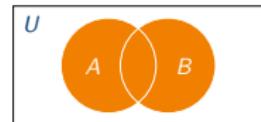
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Notação

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$



Operações sobre conjuntos

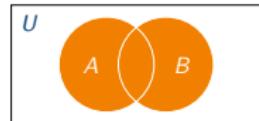
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Notação

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$



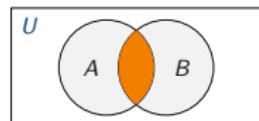
Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Notação

$$\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$



Operações sobre conjuntos

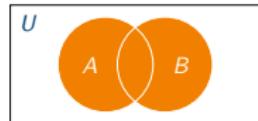
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Notação

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$



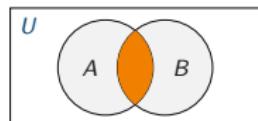
Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Notação

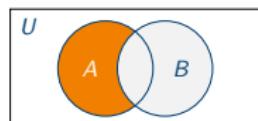
$$\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$



Diferença

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \notin B\}$$

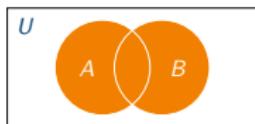
$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



Operações sobre conjuntos

União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

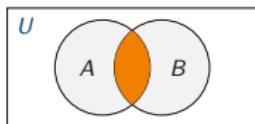


Notação

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

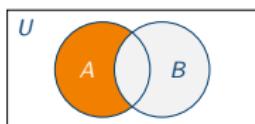


Notação

$$\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Diferença

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



Complemento

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



Identidades de conjuntos

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
União e intersecção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo		$\overline{\overline{A}} = A$
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos		$A - B = A \cap \overline{B}$
União e intersecção com \emptyset	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
União e intersecção com o complemento	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = U$
Complementos de U e \emptyset	$\overline{U} = \emptyset$	$U = \overline{\emptyset}$

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** se e só se eles não têm nenhum elemento em comum

A e B são disjuntos



$$A \cap B = \emptyset$$

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** se e somente se eles não têm nenhum elemento em comum

A e B são disjuntos



$$A \cap B = \emptyset$$

Os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**) se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$.

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum

A e B são disjuntos

\leftrightarrow

$A \cap B = \emptyset$

Os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**) se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$.

PARTIÇÃO

Seja uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é uma **partição** sse

- $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
- A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente disjuntos



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Funções —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Funções: uma introdução

Funções são associações de cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.

$$f(a) = b$$

Sequências são listas ordenadas de elementos.

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Somatórios e produtórios são a soma e o produto, respectivamente, dos termos de uma sequência numérica.

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Funções: uma introdução

Frequentemente temos que **associar** cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.

Por exemplo, podemos:

1. Associar cada aluno de Grafos a um conceito A, B, C, D, E ou F.
2. Associar cada inteiro ao seu quadrado.
3. Associar cada professor a uma disciplina.

O conceito de função formaliza este tipo de associação.

Funções: uma introdução

Frequentemente temos que **associar** cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.

Por exemplo, podemos:

1. Associar cada aluno de Grafos a um conceito A, B, C, D, E ou F.
2. Associar cada inteiro ao seu quadrado.
3. Associar cada professor a uma disciplina.

O conceito de função formaliza este tipo de associação.

Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função f de A para B é uma associação de exatamente um elemento de B a cada elemento de A .

$$f(a) = b$$

se b for o único elemento de B associado por meio de f ao elemento a de A .

Funções: uma introdução

Se f é uma função de A para B , para denotar o tipo da função, a função pode ser escrita como

$$f : A \mapsto B$$

domínio o conjunto A é chamado de domínio de f .

contra-domínio o conjunto B é chamado de co-domínio ou contra-domínio de f .

imagem a imagem de f é o conjunto de valores que f pode assumir

$$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

imagem inversa a imagem inversa (ou inversa) de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores de $a \in A$ que são mapeados a b via f

$$\text{inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Exemplos de funções

Exemplo 6

Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$
Seja a função $f : A \mapsto B$ definida como:

$$f(x) = 2 \quad f(y) = 4 \quad f(z) = 2$$

domínio $\{x, y, z\}$

inversa de 1 e 3 é \emptyset

contra-domínio $\{1, 2, 3, 4\}$

inversa de 2 é $\{x, z\}$

imagem $\{2, 4\}$

inversa de 4 é $\{y\}$

A função f pode ser representada como o conjunto de pares ordenados :

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$

Exemplos de funções

Exemplo 7

Alguns exemplos

- ▶ Função quadrado $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f : x \mapsto x^2$$

- ▶ Função sucessor $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = x + 1 \text{ ou } f : x \mapsto x + 1$$

- ▶ Função constante $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(r) = 2 \text{ ou } f : r \mapsto 2$$

- ▶ Função pai $f: P \rightarrow P$, em que P é o conjunto de todas as pessoas

$$f : p \mapsto p', \text{ em que } p' \text{ é o pai de } p$$

Igualdade de funções

Duas funções f e g funções são iguais sse elas:

- ▶ têm o mesmo domínio
- ▶ têm o mesmo contra-domínio
- ▶ mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do contra-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \rightarrow B$:

$$f = g \text{ sse } \forall a \in A : f(a) = g(a)$$

Igualdade de funções

Duas funções f e g funções são iguais sse elas:

- ▶ têm o mesmo domínio
- ▶ têm o mesmo contra-domínio
- ▶ mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do contra-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \rightarrow B$:

$$f = g \text{ sse } \forall a \in A : f(a) = g(a)$$

Exemplo 8

Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$. Então, $f = g$ uma vez que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Função injetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função injetora (ou injetiva ou um-para-um) se e somente se para todos $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Uma função é dita injetora se cada elemento do domínio é mapeado para uma elemento diferente do contra-domínio.

Função injetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função injetora (ou injetiva ou um-para-um) se e somente se para todos $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Uma função é dita injetora se **cada elemento** do domínio é mapeado para uma **elemento diferente** do contra-domínio.

Exemplo 9

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$f(x) = x + 1 \quad (\text{injetora})$$

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad (\text{injetora})$$

$$f(x) = x^2 \quad (\text{não é injetora})$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2) \quad (\text{não é injetora})$$

Função sobrejetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se e somente se para todo $b \in B$ há $a \in A$ de forma que $f(a) = b$

Uma função é dita sobrejetora se cada elemento do contra-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

Função sobrejetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se e somente se para todo $b \in B$ há $a \in A$ de forma que $f(a) = b$

Uma função é dita sobrejetora se **cada elemento** do contra-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

Exemplo 10

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$f(x) = x + 1 \quad (\text{sobrejetora})$$

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad (\text{sobrejetora})$$

$$f(x) = x^2 \quad (\text{não é sobrejetora})$$

$$f(x) = 2^x \quad (\text{não é sobrejetora})$$

Função bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora se e somente se ele é sobrejetora e injetora.

Função bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora se e somente se ele é sobrejetora e injetora.

Exemplo 11

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$f(x) = x + 1$$

(bijetora)

$$f(x) = \frac{x}{10}$$

(bijetora)

$$f(x) = 2^x$$

(não é bijetora)

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

(não é bijetora)

Função inversa

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora. A função inversa de f , denotada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Função inversa

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora. A função inversa de f , denotada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Exemplo 12

A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é inversível porque ela é bijetora. Sua inversa

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

Função inversa

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora. A **função inversa** de f , denotada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Exemplo 12

A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é inversível porque ela é bijetora. Sua inversa

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

Exemplo 13

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é inversível porque ela não é bijetora: $f(1) = f(-1) = 1$, logo f^{-1} não é definido.

Composição de funções

Sejam $g : A \rightarrow B'$ e $f : B \rightarrow C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f ($B' \subseteq B$).

A função composta de f com g , denotada por $f \circ g : A \rightarrow C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

A função $f \circ g$ é chamada de composição de f e g .

Composição de funções

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

Composição de funções

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1$$

no entanto,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$$

Portanto,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Composição de funções

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1$$

no entanto,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$$

Portanto,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

A composição não é comutativa

Composição de funções

Dado um domínio A, a função identidade $I_A : A \rightarrow A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Composição de funções

Dado um domínio A, a função identidade $I_A : A \rightarrow A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Teorema Se f é uma função de X para Y . Sejam I_X uma função identidade de X e I_Y uma função identidade de Y .

$$f \circ I_X = f$$

$$I_Y \circ f = f$$

Composição de funções

Dado um domínio A , a função identidade $I_A : A \rightarrow A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Teorema Se f é uma função de X para Y . Sejam I_X uma função identidade de X e I_Y uma função identidade de Y .

$$\begin{aligned} f \circ I_X &= f \\ I_Y \circ f &= f \end{aligned}$$

Teorema Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função bijetora com função inversa definida por $f^{-1} : Y \rightarrow X$, então

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= I_X \\ f \circ f^{-1} &= I_Y \end{aligned}$$

Teorema Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções injetoras, então

$g \circ f$ é injetora

Propriedades

Teorema Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções injetoras, então

$g \circ f$ é injetora

Teorema Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções sobrejetoras, então

$g \circ f$ é sobrejetora

Funções piso e teto

A função **piso** (em inglês, *floor*) associa um número real x ao maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$

A função **teto** (em inglês, *ceiling*) associa um número real x ao menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$

Ambas as funções (piso e teto) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Funções piso e teto

A função **piso** (em inglês, *floor*) associa um número real x ao maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$

A função **teto** (em inglês, *ceiling*) associa um número real x ao menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$

Ambas as funções (piso e teto) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Exemplo 15

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lceil \pi \rceil = 4$
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lceil 3 \rceil = 3$

Algumas propriedades

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Algumas propriedades

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Algumas observações

1. $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$, para algum $0 \leq \epsilon < 1$
2. $x = \lceil x \rceil - \epsilon$, para algum $0 \leq \epsilon < 1$

Exemplo 16

Demonstre a propriedade $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Funções piso e teto

Exemplo 16

Demonstre a propriedade $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Solução Seja o número x representado por $n + \epsilon$, em que $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \epsilon < 1$. Há dois casos a se considerar ($\epsilon = 0$ ou não)

Caso 1 $\epsilon = 0$, assim $x = n$ e $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$

Caso 2 $0 < \epsilon < 1$. Assim

$$\begin{aligned}\lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \epsilon) \rfloor \\ &= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\ &= -(n + 1)\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}-\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil \\ &= -(n + 1)\end{aligned}$$

Portanto, $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Funções parciais

Uma função parcial f de um conjunto A para um conjunto B é uma associação a cada elemento a em um subconjunto de A, chamado de domínio de definição de f , a um único elemento b de B.

Os conjuntos A e B são chamados de domínio e contra-domínio de f , respectivamente.

Dizemos que f é indefinida para elementos de A que não estão no domínio de definição de f . Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A, dizemos que f é uma função total.

Funções parciais

Uma função parcial f de um conjunto A para um conjunto B é uma associação a cada elemento a em um subconjunto de A , chamado de domínio de definição de f , a um único elemento b de B .

Os conjuntos A e B são chamados de domínio e contra-domínio de f , respectivamente.

Dizemos que f é indefinida para elementos de A que não estão no domínio de definição de f . Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A , dizemos que f é uma função total.

Exemplo 17

A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de \mathbb{Z} para \mathbb{R} em que o domínio de definição é o conjunto dos inteiros não-negativos. A função f é indefinida para os inteiros negativos.



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Sequências —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Sequências: uma introdução

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmética
2. progressão geométrica
3. strings

Sequências: uma introdução

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmétrica
2. progressão geométrica
3. strings

Formalmente, uma sequência é uma função definida do conjunto dos naturais (a partir de um valor específico, normalmente 0 ou 1) para um conjunto arbitrário S .

Usamos a_n , chamado de termo da sequência, para denotar a imagem do inteiro n , e a sequência inteira é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

Sequências: uma introdução

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmétrica
2. progressão geométrica
3. strings

Formalmente, uma sequência é uma função definida do conjunto dos naturais (a partir de um valor específico, normalmente 0 ou 1) para um conjunto arbitrário S .

Usamos a_n , chamado de termo da sequência, para denotar a imagem do inteiro n , e a sequência inteira é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

Exemplo 18

1. Sequência dos n primeiros naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
2. Sequência dos n números primos: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Sequências

Sequências importantes são as progressões aritméticas

progressão aritmética sequência da forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + nd$$

em que o termo inicial a e a diferença comum d são números reais.

Sequências

Sequências importantes são as progressões aritméticas e geométricas.

progressão aritmética sequência da forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + nd$$

em que o termo inicial a e a diferença comum d são números reais.

progressão geométrica sequência da forma

$$a, ar, ar^2; ar^3; \dots, ar^n$$

em que o termo inicial a e a razão r são números reais.

Fórmulas explícitas para sequências

Uma **fórmula explícita** define como obter o k -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k .

Fórmulas explícitas para sequências

Uma **fórmula explícita** define como obter o k -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k .

Exemplo 19

A sequência

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 2 \mapsto \frac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Fórmulas explícitas para sequências

Uma **fórmula explícita** define como obter o k -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k .

Exemplo 19

A mesma sequência pode ser definida como uma função dos inteiros positivos para os reais:

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 2 \mapsto \frac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Igualdade de sequências

Duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são iguais se para todo n

$$a_n = b_n$$

Igualdade de sequências

Duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são iguais se para todo n

$$a_n = b_n$$

Exemplo 20

Sejam as sequências (a_1, a_2, a_3, \dots) e (b_2, b_3, b_4, \dots) definidas pelas fórmulas explícitas

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{i}{i+1} && \text{para inteiros } i \geq 1 \\ b_i &= \frac{j-1}{j} && \text{para inteiros } j \geq 2 \end{aligned}$$

As sequências são idênticas. Note

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} & b_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} & b_2 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} \\ a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} & b_2 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Definindo uma sequência

Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.

Maneiras típicas para definir uma sequência

1. Fórmula explícita para cada termo da sequência.
2. Algoritmo que gere a sequência.
3. Fórmula recursiva para cada termo da sequência.

Definindo uma sequência

Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.

Maneiras típicas para definir uma sequência

1. Fórmula explícita para cada termo da sequência.
2. Algoritmo que gere a sequência.
3. Fórmula recursiva para cada termo da sequência.

OBSERVAÇÃO

Dado um número limitado de termos a_1, a_2, \dots, a_i de uma sequência, é possível achar uma regra mas é garantida apenas para os i termos apresentados.

Nada garante a regra valha para a_{i+1}

Definindo uma sequência

Exemplo 21

Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são 1, 2, 3, 4, 5. A fórmula

$$a_n = n, \text{ para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que $a_6 = 6$

O algoritmo

Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 e 5

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que $a_6 = 11$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução

Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução

Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Exemplo 23

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução

Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Exemplo 23

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10$$

Solução

Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Exemplo 25

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 16 primeiros termos:

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Exemplo 25

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 16 primeiros termos:

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$$

Solução Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1

Provendo uma fórmula recursiva

Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Provendo uma fórmula recursiva

Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Uma relação de recorrência para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa $\{a_n\}$ em termos de um ou mais termos prévios na sequência para cada $n \geq n_0$, em que n_0 é inteiro não-negativo.

Provendo uma fórmula recursiva

Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Uma relação de recorrência para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa $\{a_n\}$ em termos de um ou mais termos prévios na sequência para cada $n \geq n_0$, em que n_0 é inteiro não-negativo.

Exemplo 26

A sequência

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880$$

pode ser definida por fórmula explícita $a_n = n!$, $n \geq 0$; ou pela fórmula recursiva

$$a_n = \begin{cases} a_0 = 1 & \text{se } n = 0 \\ a_n = n \times a_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Somatórios e produtórios —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Somatórios

Seja uma sequência $\{a_n\}$. O somatório dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

O somatório é representado por \sum

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

Somatórios

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k$$

Somatórios

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

Somatórios

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

Exemplo 28

$$\sum_{\{0, 3, 7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58$$

Variáveis ligadas e livres

A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

Variáveis ligadas e livres

A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de variáveis livres.

Exemplo 29

$$\sum_{i=1}^n (i - 1)$$

i é a variável ligada e *n* é a variável livre.

Variáveis ligadas e livres

A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

Exemplo 29

$$\sum_{i=1}^n (i - 1)$$

i é a variável ligada e *n* é a variável livre.

Exemplo 30

$$\sum_{i=m}^n (i - 1)$$

i é a variável ligada e *m* e *n* são variáveis livres.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$$

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$$

Trocar a variável livre altera o valor do somatório.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$$

Trocar a variável livre altera o valor do somatório.

Exemplo 32

Os somatórios são distintos pois $m \neq n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i} \neq \sum_{i=1}^m \frac{i+1}{i}$$

Mudança de variável

Dois somatórios são idênticos se e só se eles possuirem termos idênticos

Exemplo 33

Os somatórios são distintos pois $m \neq n$

$$\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 = \sum_{i=1}^3 i^2$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 &= (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 \\ &= (1)^2 + (2)^2 + (3)^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^3 (i)^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2$$

Exemplo 34

Substitua $k + 1$ por j

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1}$$

Exemplo 34

Substitua $k + 1$ por j

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

1. Calcular novos limites

$$k = 0 \Rightarrow j = 0 + 1 = 1$$

$$k = 6 \Rightarrow j = 6 + 1 = 7$$

Mudança de variável

Exemplo 34

Substitua $k + 1$ por j

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

1. Calcular novos limites

$$k = 0 \Rightarrow j = 0 + 1 = 1$$

$$k = 6 \Rightarrow j = 6 + 1 = 7$$

2. Calcular o termo geral – como $j = k + 1$ então $k = j - 1$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{j-1+1} = \frac{1}{j}$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j}$$

Produtório

Seja uma sequência $\{a_n\}$. O produtório dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \dots \times a_n$$

O produtório é representado por \prod

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \dots \times a_n$$

Somatórios

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^6 a_k$$

Somatórios

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^6 a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Uma notação alternativa para produtório é

$$\prod_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

Somatórios

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^6 a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Uma notação alternativa para produtório é

$$\prod_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

Exemplo 36

$$\prod_{\{1, 3, 7\}} s^2 = 1^2 \times 3^2 \times 7^2 = 1 \times 9 \times 49$$

Algums propriedades

Seja c um número real e sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências

$$\begin{aligned} &a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n \\ &b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n \end{aligned}$$

As seguintes propriedades são válidas

1.

$$\sum_{i=n}^m a_i + \sum_{i=n}^m b_i = \sum_{i=n}^m (a_i + b_i)$$

2.

$$c \times \sum_{i=n}^m a_i = \sum_{i=n}^m (c \times a_i)$$

3.

$$\prod_{i=n}^m a_i \times \prod_{i=n}^m b_i = \prod_{i=n}^m (a_i \times b_i)$$