Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Lógica Proposicional —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Princípios da Lógica Proposicional —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Princípios da Lógica Proposicional

Lógica *Ramo da Filosofia, Matemática e Ciência da Computação que trata das* ***inferências válidas****.*

Princípios da Lógica Proposicional

Lógica *Ramo da Filosofia, Matemática e Ciência da Computação que trata das* *inferências válidas*.

A lógica estuda a preservação da verdade durante uma argumentação.

Hipóteses verdadeiras → Conclusões verdadeiras

Princípios da Lógica Proposicional

Lógica *Ramo da Filosofia, Matemática e Ciência da Computação que trata das* ***inferências válidas****.*

A lógica estuda a preservação da verdade durante uma **argumentação**.

Hipóteses verdadeiras → Conclusões verdadeiras

As regras da lógicas são essenciais na construção de provas matemáticas, pois dão **significados** às afirmações matemáticas.

Proposições Lógicas

Asserção *uma declaração (afirmação, sentença declarativa).*

Proposição *uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.*

Valor verdade *resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).*

Proposições Lógicas

Asserção *uma declaração (afirmação, sentença declarativa).*

Proposição *uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.*

Valor verdade *resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).*

- $2 + 3 = 5$
- 3 não é um número impar
- A Terra é arredondada
- $x > 5$
- Esta declaração é falsa
- Você fala francês?
- Paris é a cidade mais linda?

Proposições Lógicas

Asserção *uma declaração (afirmação, sentença declarativa).*

▷	$2 + 3 = 5$	(asserção)
▷	3 não é um número impar	(asserção)
▷	A Terra é arredondada	(asserção)
▷	$x > 5$	(asserção)
▷	Esta declaração é falsa	(asserção)

Proposições Lógicas

Proposição *uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.*

▷	$2 + 3 = 5$	(proposição)
▷	3 não é um número impar	(proposição)
▷	A Terra é arredondada	(proposição)

Proposições Lógicas

Valor verdade *resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).*

- ▷ $2 + 3 = 5$ (V)
- ▷ 3 não é um número impar (F)
- ▷ A Terra é arredondada (V)

Proposições Lógicas

Asserção *uma declaração (afirmação, sentença declarativa).*

Proposição *uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.*

Valor verdade *resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).*

▷ $2 + 3 = 5$	(asserção, proposição, V)
▷ 3 não é um número impar	(asserção, proposição, F)
▷ A Terra é arredondada	(asserção, proposição, V)
▷ $x > 5$	(asserção, mas não é proposição)
▷ Esta declaração é falsa	(asserção, mas não é proposição)
▷ Você fala francês?	(nem asserção, nem proposição)
▷ Paris é a cidade mais linda?	(nem asserção, nem proposição)

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$ (proposição falsa)

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$ (proposição falsa)

Sentenças – não são proposições

- Que horas são?

Proposição

Uma **proposição** é uma **sentença declarativa** (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$ (proposição falsa)

Sentenças – não são proposições

- Que horas são? (não é uma sentença declarativa)

Proposição

Uma **proposição** é uma **sentença declarativa** (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$ (proposição falsa)

Sentenças – não são proposições

- Que horas são? (não é uma sentença declarativa)
- $x + 1 = 4$

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa (uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Sentenças declarativas – proposições

- Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais (proposição verdadeira)
- Roma é a capital da França (proposição falsa)
- $1 + 1 = 2$ (proposição verdadeira)
- $1 + 1 = 3$ (proposição falsa)

Sentenças – não são proposições

- Que horas são? (não é uma sentença declarativa)
- $x + 1 = 4$ (não é verdadeiro nem falso)

Variáveis Proposicionais

Variáveis proposicionais *Em Lógica, as proposições podem ser denotadas por símbolos, tais como* $p, q, r, \ldots$, *os quais são chamados de* ***variáveis proposicionais***.

Exemplos

- p: o Sol está brilhando hoje.
- q: $2 + 3 = 5$
- t: Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais
- u: São Paulo é a capital do Brasil

Proposições Compostas

Novas proposições podem ser construídas a partir de proposições existentes

Obtenção de
proposições compostas

Proposições Compostas

Novas proposições podem ser construídas a partir de proposições existentes

Operadores lógicos

Obtenção de
proposições compostas

Tabela Verdade

Negação *A sentença: "Não é verdade que p"*

- *é uma outra proposição*
- *chamada de a negação de p.*
- *Notação:* $\neg p$, $\sim p$, *not p*

Tabela Verdade

Negação *A sentença: "Não é verdade que p"*

- *é uma outra proposição*
- *chamada de a negação de p.*
- *Notação:* $\neg p$, $\sim p$, *not p*

Exemplos

- $p: \; 2+3>1$

  $\neg p$: $2+3$ não é maior do que 1, (ou $2+3 \leq 1$)

- q : "Hoje é quarta-feira"

  $\neg q$: "Não é verdade que hoje é quarta-feira", ou

  $\neg q$: "Hoje não é quarta-feira"

Tabela Verdade

Negação *A sentença: "Não é verdade que p"*

- *é uma outra proposição*
- *chamada de a negação de p.*
- *Notação: $\neg p$, $\sim p$, not p*

A partir da definição

- se p é Verdadeiro, então $\neg p$ é Falso
- se p é Falso, então $\neg p$ é Verdadeiro

Negação *A sentença: "Não é verdade que p"*

- *é uma outra proposição*
- *chamada de a negação de p.*
- *Notação:* $\neg p$, $\sim p$, *not p*

A partir da definição

- se p é Verdadeiro, então $\neg p$ é Falso
- se p é Falso, então $\neg p$ é Verdadeiro

Tabela verdade da negação

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela Verdade

Tabela Verdade

Fornece os valores verdade de uma proposição composta em termos dos valores verdade de suas partes componentes.

determinação dos valores verdade de proposições construídas a partir de sentenças mais simples.

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Conectivos Lógicos —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Conectivos Lógicos

Operador negação *constrói uma nova proposição a partir de uma única proposição existente.*

Conectivos *operadores lógicos usados para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições já existentes.*

Operador negação *constrói uma nova proposição a partir de uma única proposição existente.*

Conectivos *operadores lógicos usados para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições já existentes.*

Conjunção (operação "e"):

- Notação: $p \wedge q$, p e q, p and q
- Definição:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivos Lógicos

Operador negação *constrói uma nova proposição a partir de uma única proposição existente.*

Conectivos *operadores lógicos usados para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições já existentes.*

Conjunção (operação "e"):

- Notação: $p \wedge q$, p e q, p and q
- Definição:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção (operação "ou inclusivo"):

- Notação: $p \vee q$, p ou q, p or q
- Definição:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos de conjunção ($p \wedge q$)

- p: hoje é terça-feira
  q: está chovendo hoje
  $p \wedge q$: hoje é terça-feira e está chovendo hoje
- p: $2 < 3$
  q: $-5 > -8$
  $p \wedge q$: $2 < 3$ e $-5 > -8$

Principais Conectivos Lógicos

EXEMPLOS DE CONJUNÇÃO $(p \wedge q)$

- p: hoje é terça-feira
  q: está chovendo hoje
  $p \wedge q$: hoje é terça-feira e está chovendo hoje
- p: $2 < 3$
  q: $-5 > -8$
  $p \wedge q$: $2 < 3$ e $-5 > -8$

EXEMPLOS DE DISJUNÇÃO $(p \vee q)$

- p: 2 é um inteiro positivo
  q: $\sqrt{2}$ é um número racional
  $p \vee q$: 2 é um inteiro positivo ou $\sqrt{2}$ é um número racional
- p: $2 + 3 \neq 5$
  q: Belo Horizonte é a capital do Rio de Janeiro
  $p \vee q$: $2 + 3 \neq 5$ ou Belo Horizonte é a capital do Rio de Janeiro

Disjunção exclusiva (operação "xor")

- Notação: $p \oplus q$, p xor q, p ou q (mas não ambos)
- Definição:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  - V quando exatamente um dos dois é V

Principais Conectivos Lógicos

CONDICIONAL OU IMPLICAÇÃO (SE p, ENTÃO q)

- Notação: $p \to q$
- Definição:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - V quando:
    - p e q são ambos V
    - p é F (não importando q)

O Condicional

Sejam p e q duas proposições.

A afirmação condicional ou implicação $p \to q$ e a afirmação **se p, então q**

- p é chamada de hipótese, antecedente, ou premissa,
- q é chamada de conclusão ou consequente.

Sejam p e q duas proposições.

A afirmação condicional ou implicação $p \rightarrow q$ e a afirmação

se p, então q

- p é chamada de hipótese, antecedente, ou premissa,
- q é chamada de conclusão ou consequente.

Formas de expressar

- se p, então q
- p é condição suficiente para q
- q é condição necessária para p
- p somente se q
- q é conseqüência lógica de p

O Condicional

Exemplo

"Fogo é uma condição necessária para fumaça"

"Se há fumaça, então há fogo"

- o antecedente (ou hipótese) é: "Há fumaça"
- o conseqüente (ou conclusão) é: "Há fogo"

O Condicional

Indique o antecedente e o conseqüente

- "Se a chuva continuar, o rio vai transbordar".
- "Uma condição suficiente para a falha de uma rede é que a chave geral páre de funcionar".
- "Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios".

Proposição condicional

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser entendida como uma promessa:

Se você me garantir p, eu te garanto q.

Quebra da promessa *A promessa só é quebrada quando você me garantir p e eu não te garantir q em troca.*

Mantida *A promessa é mantida quando você me garante p e eu te garanto q, ou quando você não me garante p (e neste caso eu sou livre para te garantir q ou não sem quebrar a promessa).*

Proposição condicional

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser entendida como uma promessa:

Se você me garantir p, eu te garanto q.

Quebra da promessa *A promessa só é quebrada quando você me garantir p e eu não te garantir q em troca.*

Mantida *A promessa é mantida quando você me garante p e eu te garanto q, ou quando você não me garante p (e neste caso eu sou livre para te garantir q ou não sem quebrar a promessa).*

Se eu for eleito, eu vou abaixar os impostos

Falsa *A proposição é falsa se eu for eleito e não abaixar os impostos.*

Verdadeira *Se eu não for eleito, eu posso abaixar os impostos ou não, sem assim quebrar minha promessa. Logo, se eu não for eleito, a proposição condicional é verdadeira independentemente de se eu abaixar os impostos ou não.*

Observação

Linguagem usual *a implicação $p \rightarrow q$ supõe uma relação de* *causa e efeito* *entre p e q.*

"Se fizer sol amanhã, eu vou à praia".

Lógica *$p \rightarrow q$ diz apenas que não teremos p verdadeiro e q falso ao mesmo tempo.*

"Se hoje é domingo, então 2+2=5".

Observação

Linguagem usual *a implicação* $p \to q$ *supõe uma relação de* *causa e efeito* *entre* p *e* q.

"Se fizer sol amanhã, eu vou à praia".

Lógica $p \to q$ *diz apenas que não teremos* p *verdadeiro e* q *falso ao mesmo tempo.*

"Se hoje é domingo, então 2+2=5".

Note que se p é F, então $p \to q$ é V para qualquer q

$$\Downarrow$$

"Uma falsa hipótese implica em qualquer conclusão".

O Condicional

Exemplo 1

“Se 2+2=5, então no Brasil não há corrupção”.

Exemplo 2

Quando é que a implicação “Se hoje é terça-feira, então 2+3=6” é Verdadeira?

O Condicional

- Se $p \rightarrow q$ é uma condicional. então:
  - o **converso** de $p \rightarrow q$ é a implicação $q \rightarrow p$
  - o **inverso** de $p \rightarrow q$ é a implicação $\neg p \rightarrow \neg q$
  - a **contrapositiva** de $p \rightarrow q$ é a implicação $\neg q \rightarrow \neg p$

O Condicional

- Se $p \to q$ é uma condicional. então:
  - o **converso** de $p \to q$ é a implicação $q \to p$
  - o **inverso** de $p \to q$ é a implicação $\neg p \to \neg q$
  - a **contrapositiva** de $p \to q$ é a implicação $\neg q \to \neg p$

Se Murilo é mineiro, então Murilo é brasileiro.

- $p \to q$: p: "Murilo é mineiro"
  q: "Murilo é brasileiro"
- $q \to p$: "Se Murilo é brasileiro, então Murilo é mineiro"
- $\neg p \to \neg q$: "Se Murilo não é mineiro, Murilo não é brasileiro"
- $\neg q \to \neg p$: "Se Murilo não é brasileiro, Murilo não é mineiro"

Bicondicional ou equivalência $(p \to q \;\wedge\; q \to p)$

:

- Notação: $p \leftrightarrow q$
- Definição:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

  - V somente quando:
    - p e q têm o mesmo valor verdade

O Bicondicional

FORMAS DE EXPRESSAR $p \leftrightarrow q$

- p se, e somente se, q
- p é necessário e suficiente para q
- se p então q, e conversamente

Exemplo 3

a equivalência "$3 > 2$ se e somente se $0 < 3-2$" é Verdadeira?

- p : $3 > 2$ (V)
- q : $0 < 3 - 2$ (V)
- logo: $p \leftrightarrow q$ é Verdadeira

Proposições Compostas

Definição de Proposições Compostas

Podem ter muitas partes componentes, cada parte sendo uma sentença representada por alguma variável proposicional. Estas proposições são construídas com o auxílio dos conectivos lógicos.

Exemplo 4

$$r: \; p \to [q \land (p \to q)]$$

$$s: \; \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)]$$

$$t: \; [\neg p \land (p \lor q)] \to q$$

Ordem de precedência

Em uma expressão composta, a ordem de aplicação (precedência) dos operadores é:

1. negação: $\neg$
2. conjunção: $\wedge$
3. disjunção: $\vee$
4. implicação: $\rightarrow$
5. implicação dupla: $\leftrightarrow$

Exemplo 5

1. $p \vee \neg q \wedge r$ é equivalante à $p \vee ((\neg q) \wedge r)$
2. $p \rightarrow q \vee r$ é equivalante à $p \rightarrow (q \vee r)$

Tabelas verdade de proposições compostas

A sentença: $s: \; p \to [q \wedge (p \to r)]$

- envolve 3 proposições independentes
- logo, há $2^3 = 8$ situações possíveis:

p	q	r	$p \to [q \wedge (p \to r)]$
V	V	V	?
V	V	F	?
V	F	V	?
V	F	F	?
F	V	V	?
F	V	F	?
F	F	V	?
F	F	F	?

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Tabelas verdade e equivalência lógica —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2025

Construindo tabelas verdade

A **tabela verdade** de uma proposição composta de n variáveis proposicionais é obtida por:

1. as primeiras n colunas da tabela devem ser rotuladas com as variáveis proposicionais
   - outras colunas servirão para combinações intermediárias
2. sob cada uma das primeiras colunas, lista-se os 2^n possíveis conjuntos de valores verdade das variáveis proposicionais
3. para cada linha, computa-se os valores verdade restantes

Exemplo 6

Tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$: (1/3)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Exemplo 6

Tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$: (2/3)

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Exemplo 6

Tabela verdade de $(p \vee q) \to (r \leftrightarrow p)$: (3/3)

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$	$(p \vee q) \to (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Exemplo 7

Tabela verdade de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$: (1/3)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Exemplo 7

Tabela verdade de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$: (2/3)

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Exemplo 7

Tabela verdade de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$: (3/3)

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$\leftrightarrow$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

equivalentes

Classificação de Proposições Compostas

Tautologia *proposição que é **sempre V** (para todas as possíveis situações).*

- *Exemplo:* $p \vee \neg p$ *(verifique!)*

Contradição (ou absurdo) *: proposição que é **sempre F** (em todas as possíveis situações).*

- *Exemplo:* $p \wedge \neg p$ *(verifique!)*

Contingência *proposição que **pode ser V ou F**, dependendo dos valores verdade de suas variáveis proposicionais.*

- *Nem tautologia nem contradição.*

Equivalência lógica

- Se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, as proposições p e q são ditas logicamente equivalentes.
  - Notação: $p \Leftrightarrow q$
- Se $p \Leftrightarrow q$, os dois lados são simplesmente diferentes modos de construir a mesma sentença.
- Um importante recurso usado na argumentação lógica é a substituição de uma proposição por outra que seja equivalente.

Determinação da equivalência por meio de Tabelas Verdade.

Exemplo 8

Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (1/3)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Equivalência lógica

Determinação da equivalência por meio de Tabelas Verdade.

Exemplo 8

Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (2/3)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Determinação da equivalência por meio de **Tabelas Verdade**.

Exemplo 8

Mostre que $r : \neg(p \vee q)$ e $s : \neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (3/3)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$r \leftrightarrow s$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Algumas Equivalências importantes

Equivalência	*Nome das leis*
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotência
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Dupla negação
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Comutatividade
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associatividade
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividade
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

Uso das equivalências

Exemplo 9

- $p \vee q$: "O rio é raso ou poluído."
- $\neg(p \vee q)$: ??
- pelas leis de De Morgan:

  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- logo:

  $\neg(p \vee q)$: "O rio não é raso E não é poluído."

Note que $\neg(p \vee q)$ não é equivalente a

O rio não é raso OU não é poluído.

Aplicações de lógica proposicional

A lógica tem importantes aplicações na Matemática, Ciência da Computação, e diversas outras disciplinas

- tradução de sentenças em linguagem natural, frequentemente ambíuas, para uma linguagem precisa,
- especificação de circuitos lógicos,
- solução de quebra-cabeças (o que é essencial para inteligência artificial),
- automatização do processo de construção de provas matemáticas,

Exemplo 10

Encontrar a proposição que traduz a seguinte sentença:

Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1,20m, a não ser que você tenha mais do que 16 anos'

- Definindo:

  q: "você pode andar de patins"
  r: "você tem menos do que 1,20m"
  s: "você tem mais do que 16 anos"

- a sentença pode ser traduzida por:

  $p: \ (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$

Especificação de sistemas

Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 11

Expresse a especificação como uma proposição composta

A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio'

- Definindo:

  q: "a resposta automática pode ser enviada"
  r: "o sistema de arquivos está cheio"

- a especificação pode ser traduzida por:

$$p: \ r \rightarrow \neg q$$