

# Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Isomorphism and some concepts —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

# Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Isomorphism —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

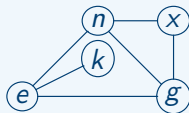
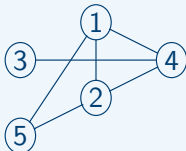
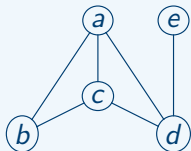
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas

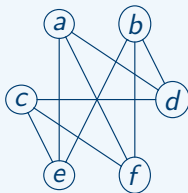
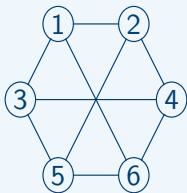
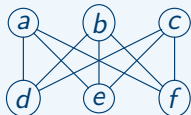
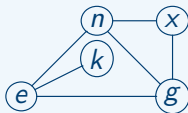
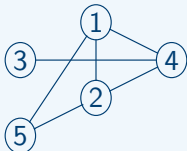
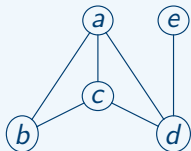
# Isomorfismo

Dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas



# Isomorfismo

Dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas



Condições necessárias mas não suficientes para que  $G$  e  $H$  sejam isomorfos:

- ▶ mesmo número de vértices
- ▶ mesmo número de arestas
- ▶ mesmo número de componentes
- ▶ mesmo número de vértices com o mesmo grau

# Isomorfismo

Condições necessárias mas não suficientes para que  $G$  e  $H$  sejam isomorfos:

- ▶ mesmo número de vértices
- ▶ mesmo número de arestas
- ▶ mesmo número de componentes
- ▶ mesmo número de vértices com o mesmo grau



# Isomorfismo

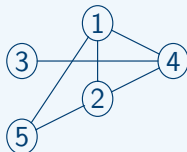
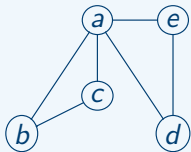
Condições necessárias mas não suficientes para que  $G$  e  $H$  sejam isomorfos:

- ▶ mesmo número de vértices
- ▶ mesmo número de arestas
- ▶ mesmo número de componentes
- ▶ mesmo número de vértices com o mesmo grau



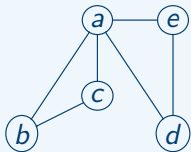
Não existe um algoritmo eficiente para determinar se dois grafos são isomorfos

# Some examples

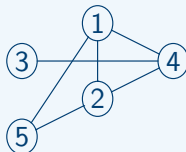


Are these two graphs Isomorphic?

# Some examples

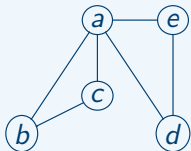


► vertices  $\Rightarrow 5$

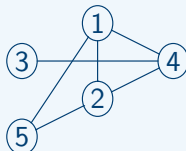


► vertices  $\Rightarrow 5$

# Some examples

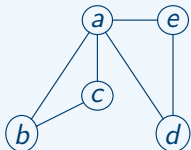


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$

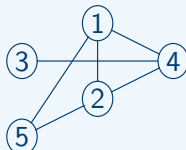


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$

# Some examples

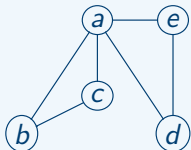


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

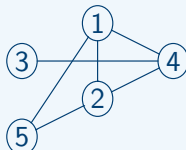


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

# Some examples

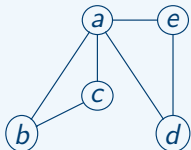


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6
- ▶ components  $\Rightarrow$  1
- ▶ degrees  $\Rightarrow$  2 2 2 3 4

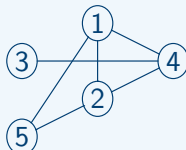


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6
- ▶ components  $\Rightarrow$  1
- ▶ degrees  $\Rightarrow$  1 2 3 3 3

# Some examples



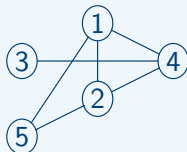
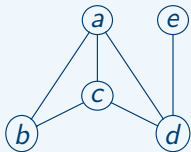
- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 2\ 2\ 2\ 3\ 4$



- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 3$

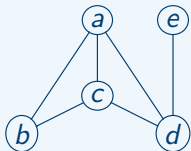
These two graphs are NOT Isomorphic

# Some examples

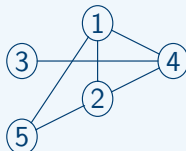


Are these two graphs Isomorphic?

# Some examples

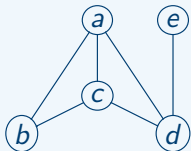


► vertices  $\Rightarrow 5$

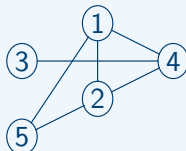


► vertices  $\Rightarrow 5$

# Some examples

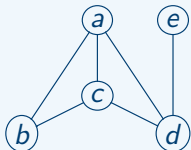


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6

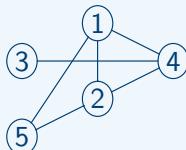


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6

# Some examples

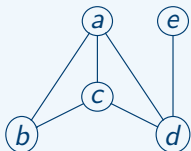


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

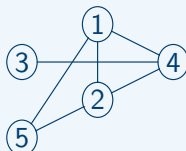


- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

# Some examples

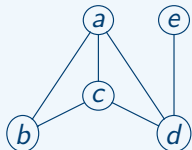


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6
- ▶ components  $\Rightarrow$  1
- ▶ degrees  $\Rightarrow$  1 2 3 3 3

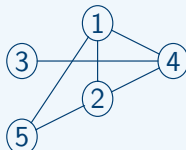


- ▶ vertices  $\Rightarrow$  5
- ▶ edges  $\Rightarrow$  6
- ▶ components  $\Rightarrow$  1
- ▶ degrees  $\Rightarrow$  1 2 3 3 3

# Some examples



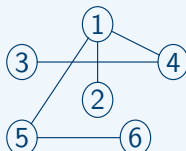
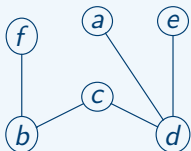
- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 1$



- ▶ vertices  $\Rightarrow 5$
- ▶ edges  $\Rightarrow 6$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 1$

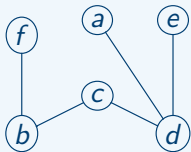
These two graphs are Isomorphic

# Some examples

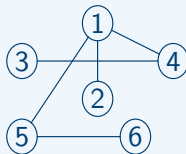


Are these two graphs Isomorphic?

# Some examples

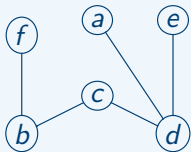


► vertices  $\Rightarrow 6$

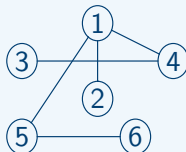


► vertices  $\Rightarrow 6$

# Some examples

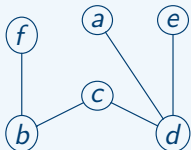


- ▶ vertices  $\implies 6$
- ▶ edges  $\implies 5$

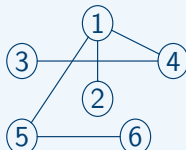


- ▶ vertices  $\implies 6$
- ▶ edges  $\implies 5$

# Some examples

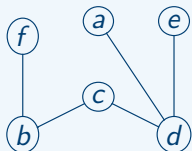


- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

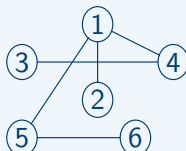


- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$

# Some examples

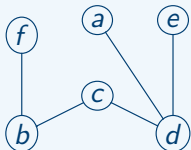


- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

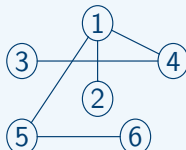


- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

# Some examples



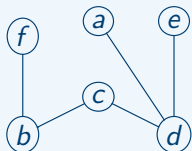
- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$



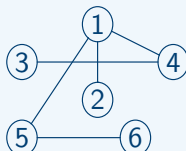
- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

**THESE TWO GRAPHS ARE NOT ISOMORPHIC.**

# Some examples



- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

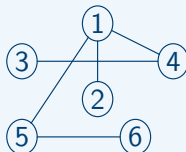
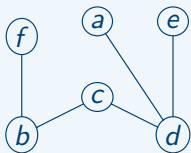


- ▶ vertices  $\Rightarrow 6$
- ▶ edges  $\Rightarrow 5$
- ▶ components  $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees  $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

**THESE TWO GRAPHS ARE NOT ISOMORPHIC. WHY?**

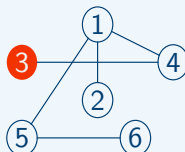
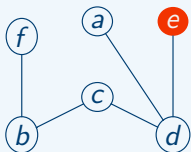
# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



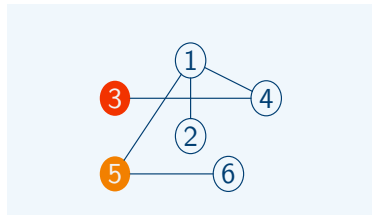
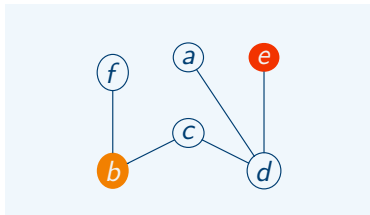
# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



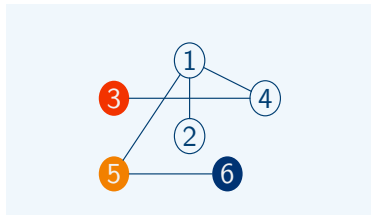
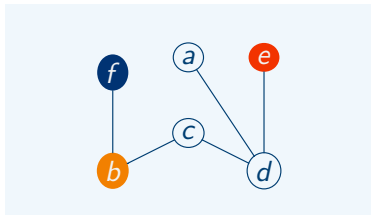
# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



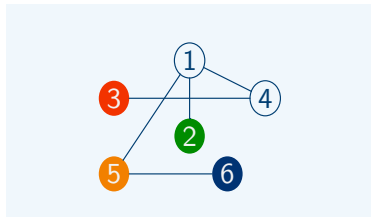
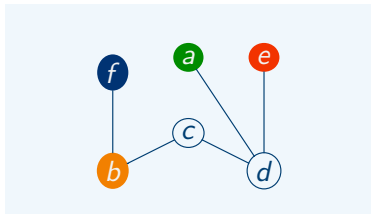
# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



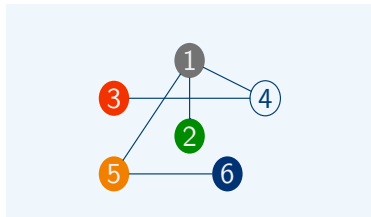
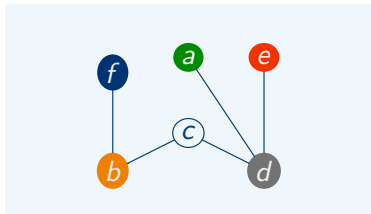
# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



# Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP  
BETWEEN THE VERTICES!!!



The gray vertices (1 and d) are adjacent to vertices with different colors

# Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Important concepts —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

# Grafo complementar

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de  $G$ , denotado por  $C(G)$  ou  $\overline{G}$ , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de  $C(G)$  são todos os vértices de  $G$
- ▶ As arestas de  $C(G)$  são exatamente as arestas que faltam em  $G$  para formarmos um grafo completo

# Grafo complementar

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de  $G$ , denotado por  $C(G)$  ou  $\overline{G}$ , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de  $C(G)$  são todos os vértices de  $G$
- ▶ As arestas de  $C(G)$  são exatamente as arestas que faltam em  $G$  para formarmos um grafo completo

## Exemplo 1

- ▶ Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.

# Grafo complementar

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de  $G$ , denotado por  $C(G)$  ou  $\overline{G}$ , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de  $C(G)$  são todos os vértices de  $G$
- ▶ As arestas de  $C(G)$  são exatamente as arestas que faltam em  $G$  para formarmos um grafo completo

## Exemplo 1

- ▶ Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.
- ▶ Qual o número de arestas de um grafo que é isomorfo a seu complemento?

# Subgrafo

Um grafo  $G_1 = (V_1, A_1)$  é dito ser **subgrafo** de um grafo  $G = (V, A)$  quando  $V_1 \subset V$  e  $A_1 \subset A$ .

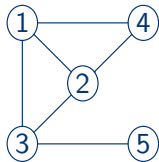
Se  $G_2 = (V_2, A_2)$  é um subgrafo de  $G_1 = (V_1, A_1)$  e possui toda aresta  $(v, w)$  de  $G_1$  tal que ambos,  $v$  e  $w$ , estejam em  $V_2$ , então  $G_2$  é o **subgrafo induzido** pelo subconjunto de vértices  $V_2$ .

# Subgrafo

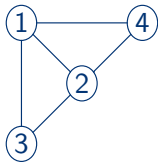
Um grafo  $G_1 = (V_1, A_1)$  é dito ser **subgrafo** de um grafo  $G = (V, A)$  quando  $V_1 \subset V$  e  $A_1 \subset A$ .

Se  $G_2 = (V_2, A_2)$  é um subgrafo de  $G_1 = (V_1, A_1)$  e possui toda aresta  $(v, w)$  de  $G_1$  tal que ambos,  $v$  e  $w$ , estejam em  $V_2$ , então  $G_2$  é o **subgrafo induzido** pelo subconjunto de vértices  $V_2$ .

## Exemplo 2

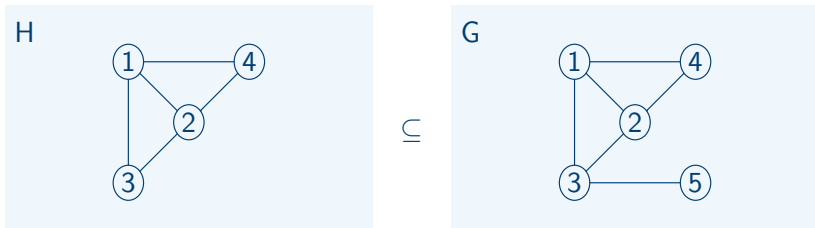


subgrafo  
induzido por  $\{1, 2, 3, 4\}$



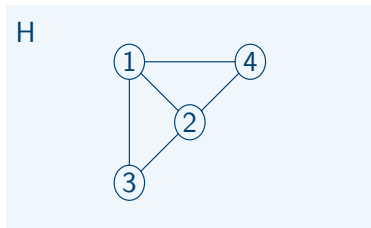
# Subgrafo

- Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $H$  estão em  $G$

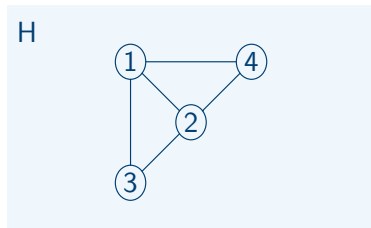


# Subgrafo

- ▶ Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $G$  estão em  $H$ 
  - ▶ todo grafo é subgrafo de si próprio

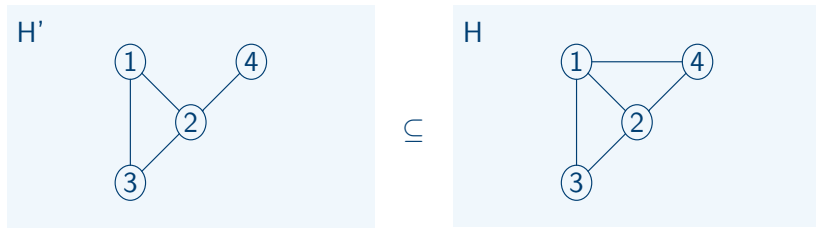


$\subseteq$



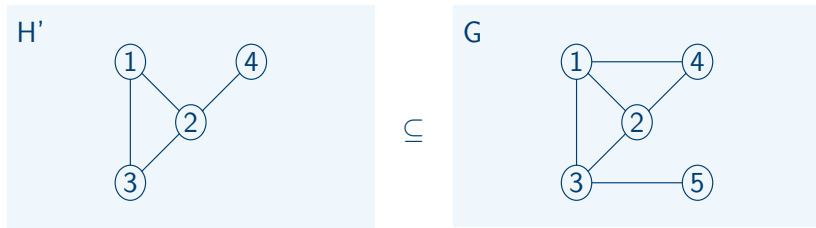
# Subgrafo

- ▶ Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $g$  estão em  $G$ 
  - ▶ todo grafo é subgrafo de si próprio
  - ▶ o subgrafo de um subgrafo de  $G$  é subgrafo de  $G$



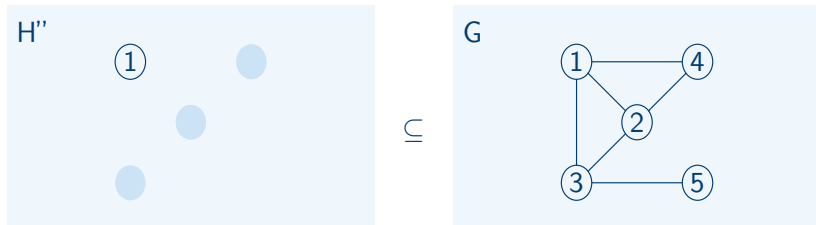
# Subgrafo

- ▶ Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $h$  estão em  $G$ 
  - ▶ todo grafo é subgrafo de si próprio
  - ▶ o subgrafo de um subgrafo de  $G$  é subgrafo de  $G$



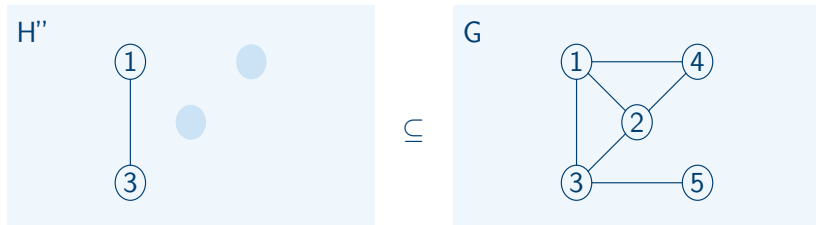
# Subgrafo

- ▶ Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $h$  estão em  $G$ 
  - ▶ todo grafo é subgrafo de si próprio
  - ▶ o subgrafo de um subgrafo de  $G$  é subgrafo de  $G$
  - ▶ um vértice simples de  $G$  é um subgrafo de  $G$

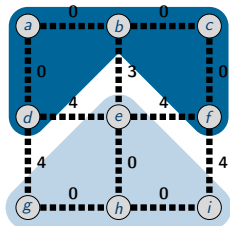


# Subgrafo

- ▶ Um grafo  $H$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se **todos** os **vértices** e todas as **arestas** de  $H$  estão em  $G$ 
  - ▶ todo grafo é subgrafo de si próprio
  - ▶ o subgrafo de um subgrafo de  $G$  é subgrafo de  $G$
  - ▶ um vértice simples de  $G$  é um subgrafo de  $G$
  - ▶ uma aresta simples de  $G$  (juntamente com suas extremidades) é subgrafo de  $G$

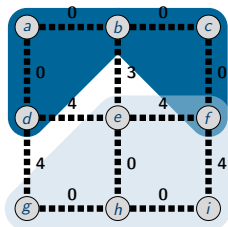
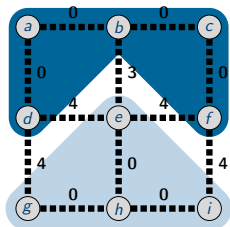


**Subgrafos disjuntos de arestas** *dois (ou mais) subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  de um grafo  $G$  são disjuntos de arestas se  $G_1$  e  $G_2$  não tiverem nenhuma aresta em comum.*



**Subgrafos disjuntos de arestas** dois (ou mais) subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  de um grafo  $G$  são disjuntos de arestas se  $G_1$  e  $G_2$  não tiverem nenhuma aresta em comum.

$\Rightarrow G_1$  e  $G_2$  podem ter vértices em comum?

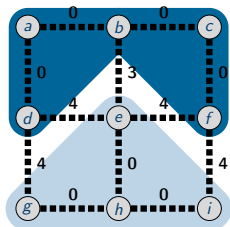


# Subgrafo

**Subgrafos disjuntos de arestas** dois (ou mais) subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  de um grafo  $G$  são disjuntos de arestas se  $G_1$  e  $G_2$  não tiverem nenhuma aresta em comum.

**Subgrafos disjuntos de vértices** dois (ou mais) subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  de um grafo  $G$  são disjuntos de vértices se  $G_1$  e  $G_2$  não tiverem nenhum vértice em comum.

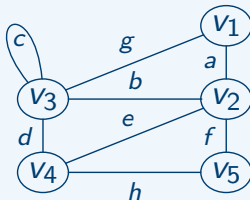
$\Rightarrow G_1$  e  $G_2$  podem ter arestas em comum?



# Caminhos e circuitos

**Seqüência de arestas** *seqüência alternada de vértices e arestas começando e terminando com vértice. Cada aresta é incidente ao vértice que a precede e a antecede*

*Ex.:  $v_1 a v_2 a v_1 g v_3$*



# Caminhos e circuitos

**Seqüência de arestas** *seqüência alternada de vértices e arestas começando e terminando com vértice. Cada aresta é incidente ao vértice que a precede e a antecede*

Ex.:  $v_1 a v_2 a v_1 g v_3$

**Caminho** *seqüência de arestas no qual nenhuma aresta aparece mais de uma vez*

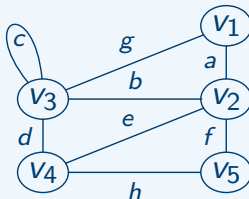
Ex.:  $v_1 a v_2 b v_3 c v_3 d v_4 e v_2 f v_5$

- ▶ *Caminho aberto: vértice inicial é diferente do vértice final*

Ex.:  $v_1 a v_2 b v_3 c v_3$

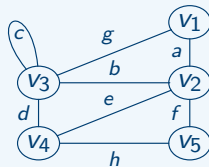
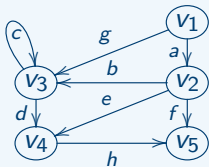
- ▶ *Caminho fechado: caminhos que começam e terminam no mesmo vértice*

Ex.:  $v_1 a v_2 b v_3 c v_3 g v_1$



Seja  $G$  um grafo dirigido e  $G'$  o seu grafo não-dirigido associado. Uma **cadeia** em  $G$  é um caminho em  $G'$ .

Seja  $G$  um grafo dirigido e  $G'$  o seu grafo não-dirigido associado. Uma **cadeia** em  $G$  é um caminho em  $G'$ .



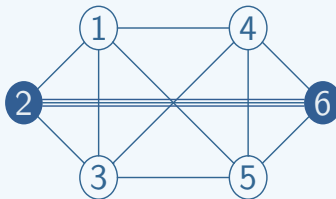
$g-a-f$  é um caminho de  $G'$  e uma cadeia em  $G$

## TEOREMA

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe uma aresta entre esses dois vértices

## TEOREMA

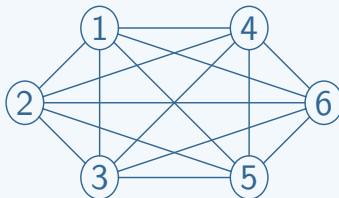
Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe uma aresta entre esses dois vértices



2-6

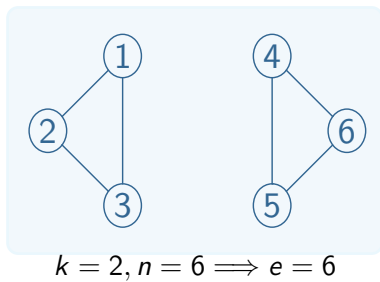
**Teorema** Um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes possui no máximo  $(n - k)(n - k + 1)/2$  arestas

**Teorema** Um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes possui no máximo  $(n - k)(n - k + 1)/2$  arestas

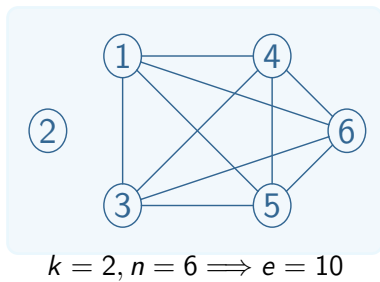


$$k = 1, n = 6 \implies e = 15$$

**Teorema** Um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes possui no máximo  $(n - k)(n - k + 1)/2$  arestas



**Teorema** Um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes possui no máximo  $(n - k)(n - k + 1)/2$  arestas



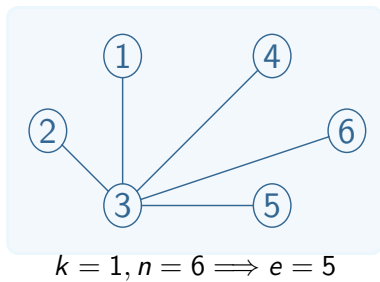
**Teorema** O número mínimo de arestas de um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes é  $n - k$

**Teorema** O número mínimo de arestas de um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes é  $n - k$



$$k = 6, n = 6 \implies e = 0$$

**Teorema** O número mínimo de arestas de um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes é  $n - k$



**Teorema** O número mínimo de arestas de um grafo simples com  $n$  vértices e  $k$  componentes é  $n - k$

