



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Isomorphism and some concepts —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Isomorphism —

Silvio Jamil F. Guimarães

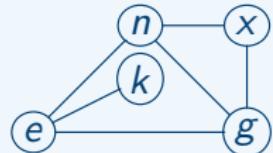
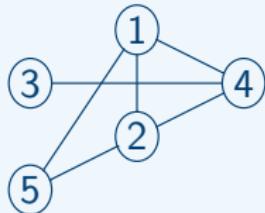
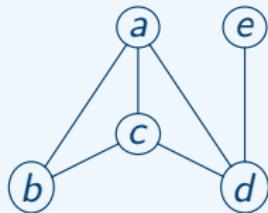
Graduate Program in Informatics – PPGINF
Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Isomorfismo

Dois grafos G e H são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas

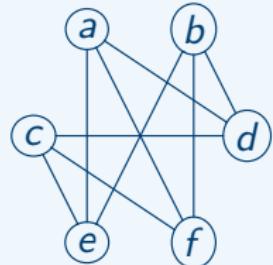
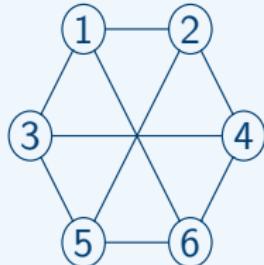
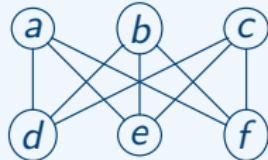
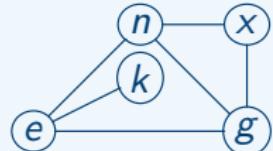
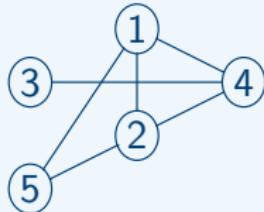
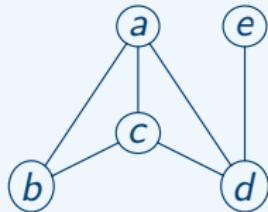
Isomorfismo

Dois grafos G e H são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas



Isomorfismo

Dois grafos G e H são ditos **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas



Isomorfismo

Condições necessárias mas não suficientes para que G e H sejam isomorfos:

- ▶ mesmo número de vértices
- ▶ mesmo número de arestas
- ▶ mesmo número de componentes
- ▶ mesmo número de vértices com o mesmo grau

Isomorfismo

Condições necessárias mas não suficientes para que G e H sejam isomorfos:

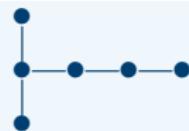
- mesmo número de vértices
- mesmo número de arestas
- mesmo número de componentes
- mesmo número de vértices com o mesmo grau



Isomorfismo

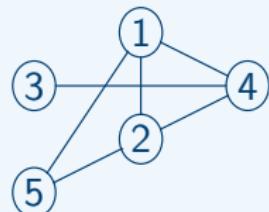
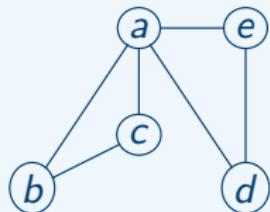
Condições necessárias mas não suficientes para que G e H sejam isomorfos:

- mesmo número de vértices
- mesmo número de arestas
- mesmo número de componentes
- mesmo número de vértices com o mesmo grau



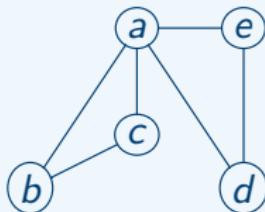
Não existe um algoritmo eficiente para determinar se dois grafos são isomorfos

Some examples

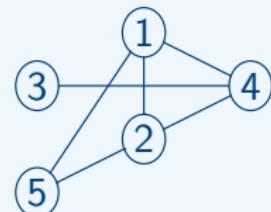


Are these two graphs Isomorphic?

Some examples

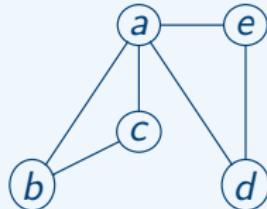


► vertices \Rightarrow 5

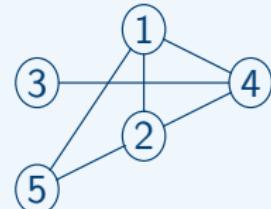


► vertices \Rightarrow 5

Some examples

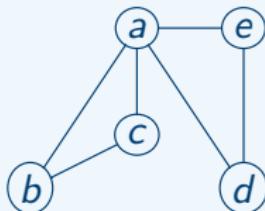


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$

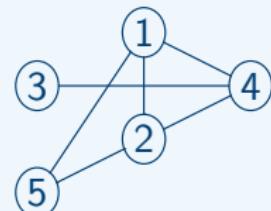


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$

Some examples

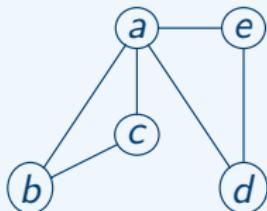


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

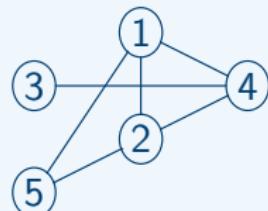


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

Some examples

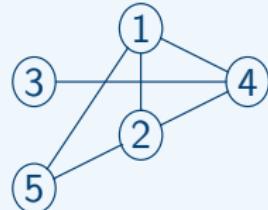
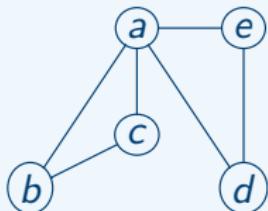


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4$



- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3$

Some examples

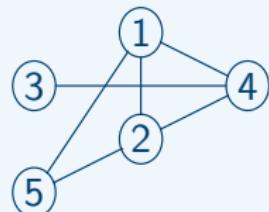
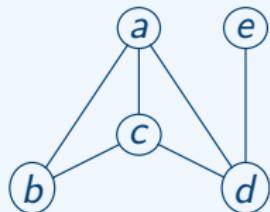


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4$

- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3$

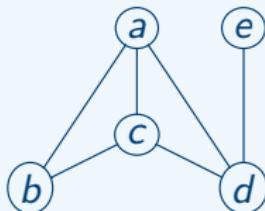
These two graphs are NOT Isomorphic

Some examples

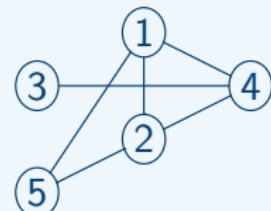


Are these two graphs Isomorphic?

Some examples

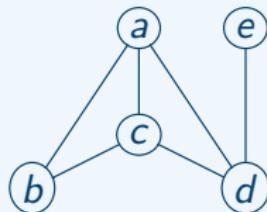


► vertices $\Rightarrow 5$

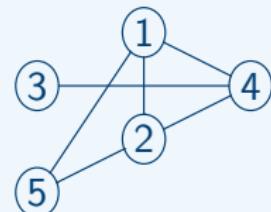


► vertices $\Rightarrow 5$

Some examples

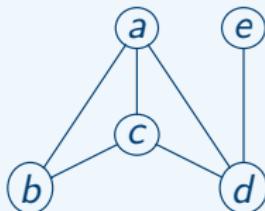


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$

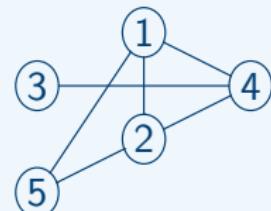


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$

Some examples

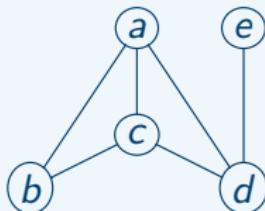


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

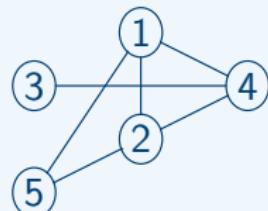


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

Some examples

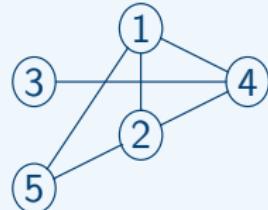
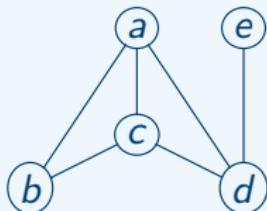


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 3$



- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 3$

Some examples

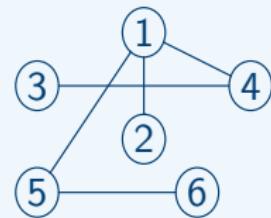
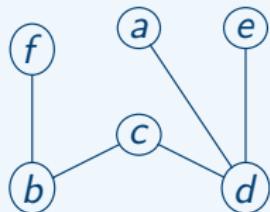


- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 3$

- ▶ vertices $\Rightarrow 5$
- ▶ edges $\Rightarrow 6$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 2\ 3\ 3\ 3$

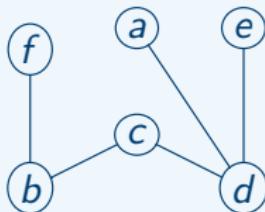
These two graphs are Isomorphic

Some examples

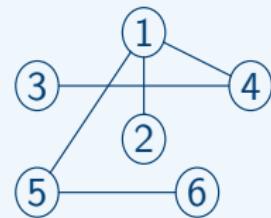


Are these two graphs Isomorphic?

Some examples

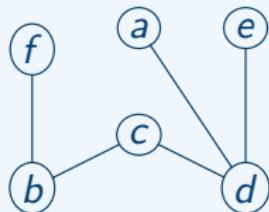


► vertices $\Rightarrow 6$

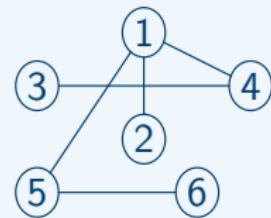


► vertices $\Rightarrow 6$

Some examples

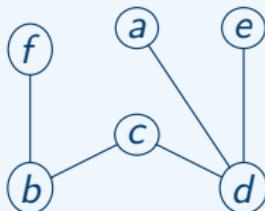


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$

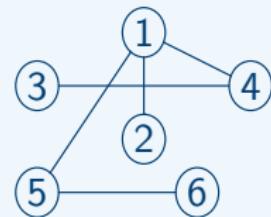


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$

Some examples

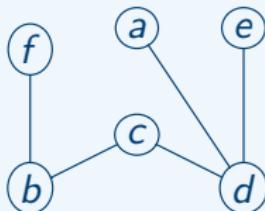


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

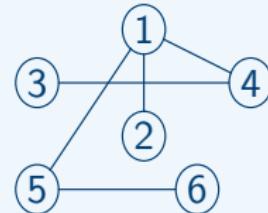


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$

Some examples

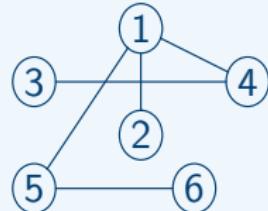
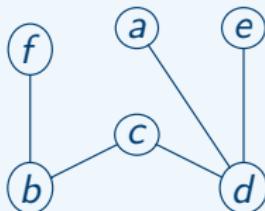


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$



- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

Some examples

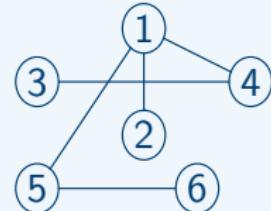
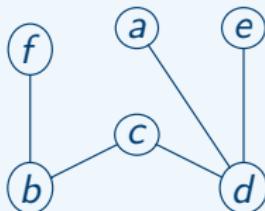


- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

THESE TWO GRAPHS ARE NOT ISOMORPHIC.

Some examples



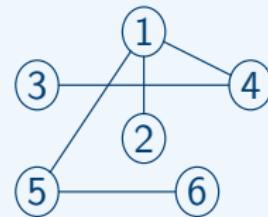
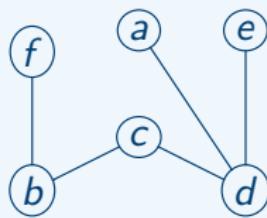
- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

- ▶ vertices $\Rightarrow 6$
- ▶ edges $\Rightarrow 5$
- ▶ components $\Rightarrow 1$
- ▶ degrees $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 2\ 3$

THESE TWO GRAPHS ARE NOT ISOMORPHIC. WHY?

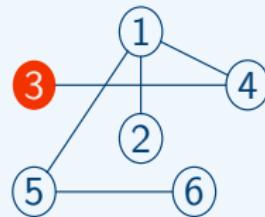
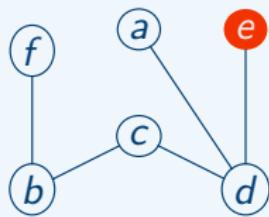
Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



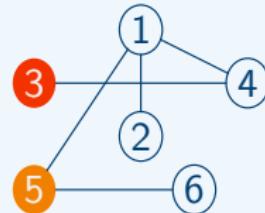
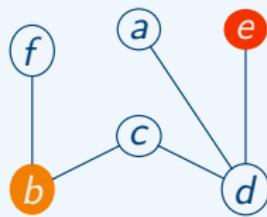
Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



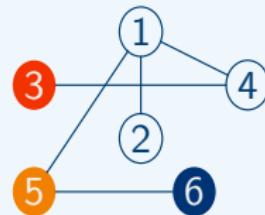
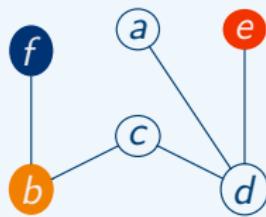
Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



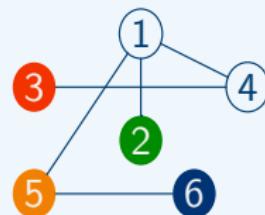
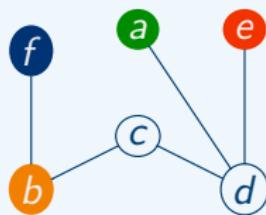
Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



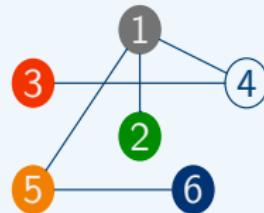
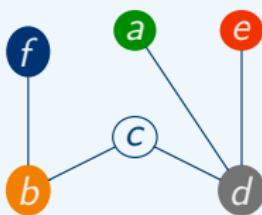
Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



Some examples

THE PROBLEM IS RELATED TO THE RELATIONSHIP
BETWEEN THE VERTICES!!!



The gray vertices (1 and d) are adjacent to vertices with different colors



Programa de
Pós-graduação em

informática



Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Important concepts —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF

Laboratory of Image and Multimedia Data Science – IMScience

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Grafo complementar

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de G , denotado por $C(G)$ ou \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G
- ▶ As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Grafo complementar

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de G , denotado por $C(G)$ ou \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G
- ▶ As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Exemplo 1

- ▶ Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.

Grafo complementar

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O **grafo complementar** de G , denotado por $C(G)$ ou \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G
- ▶ As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Exemplo 1

- ▶ Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.
- ▶ Qual o número de arestas de um grafo que é isomorfo a seu complemento?

Subgrafo

Um grafo $G_1 = (V_1, A_1)$ é dito ser **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ quando $V_1 \subset V$ e $A_1 \subset A$.

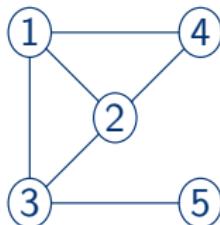
Se $G_2 = (V_2, A_2)$ é um subgrafo de $G_1 = (V_1, A_1)$ e possui toda aresta (v, w) de G_1 tal que ambos, v e w , estejam em V_2 , então G_2 é o **subgrafo induzido** pelo subconjunto de vértices V_2 .

Subgrafo

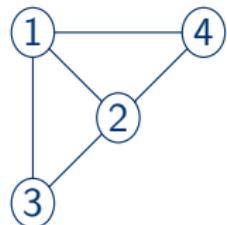
Um grafo $G_1 = (V_1, A_1)$ é dito ser **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ quando $V_1 \subset V$ e $A_1 \subset A$.

Se $G_2 = (V_2, A_2)$ é um subgrafo de $G_1 = (V_1, A_1)$ e possui toda aresta (v, w) de G_1 tal que ambos, v e w , estejam em V_2 , então G_2 é o **subgrafo induzido** pelo subconjunto de vértices V_2 .

Exemplo 2



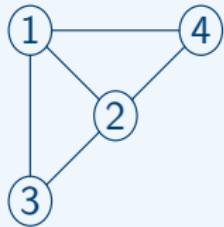
subgrafo
induzido por $\{1, 2, 3, 4\}$



Subgrafo

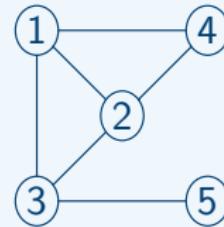
- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de H estão em G

H



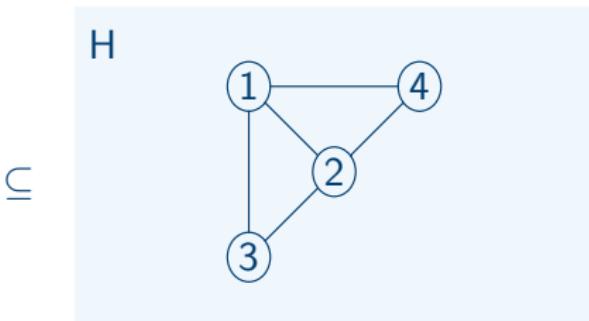
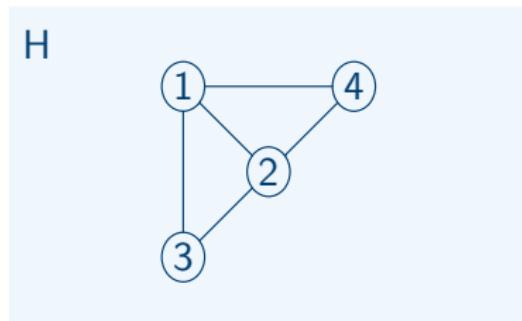
\subseteq

G



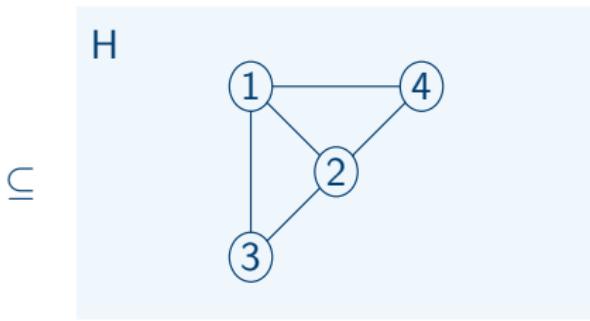
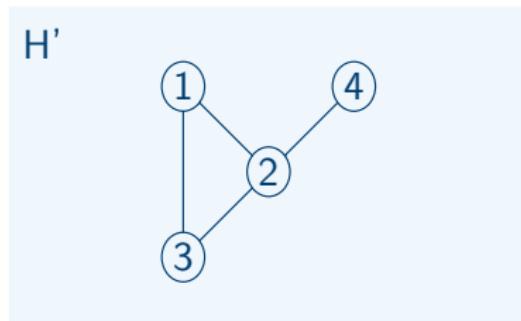
Subgrafo

- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de g estão em G
 - todo grafo é subgrafo de si próprio



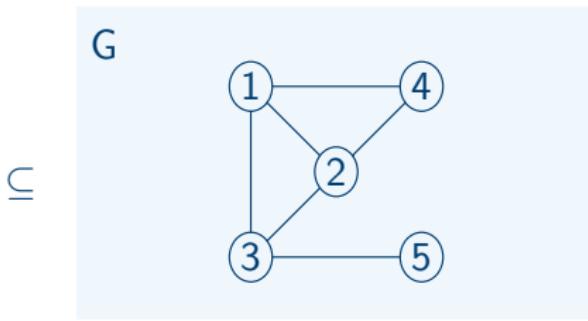
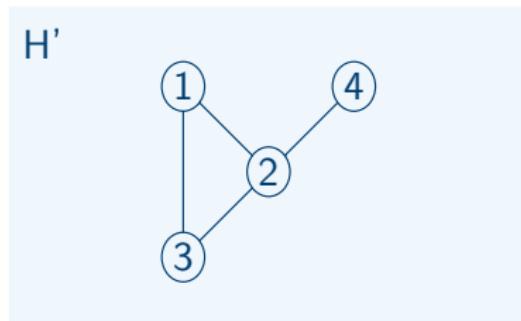
Subgrafo

- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de g estão em G
 - todo grafo é subgrafo de si próprio
 - o subgrafo de um subgrafo de G é subgrafo de G



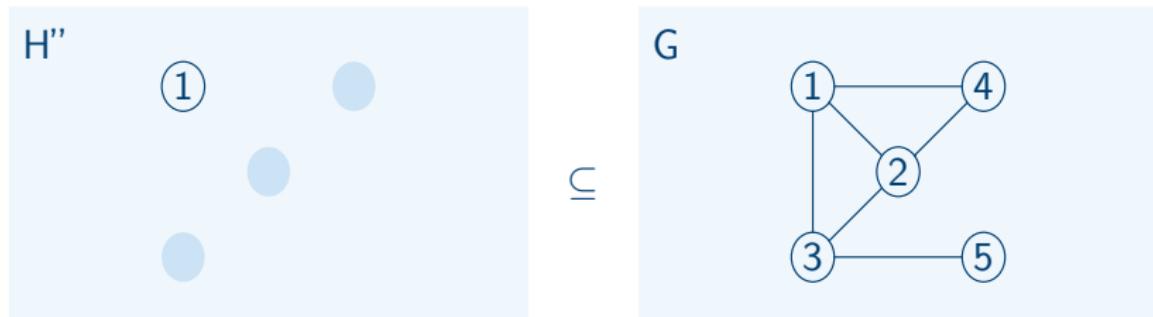
Subgrafo

- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de g estão em G
 - todo grafo é subgrafo de si próprio
 - o subgrafo de um subgrafo de G é subgrafo de G



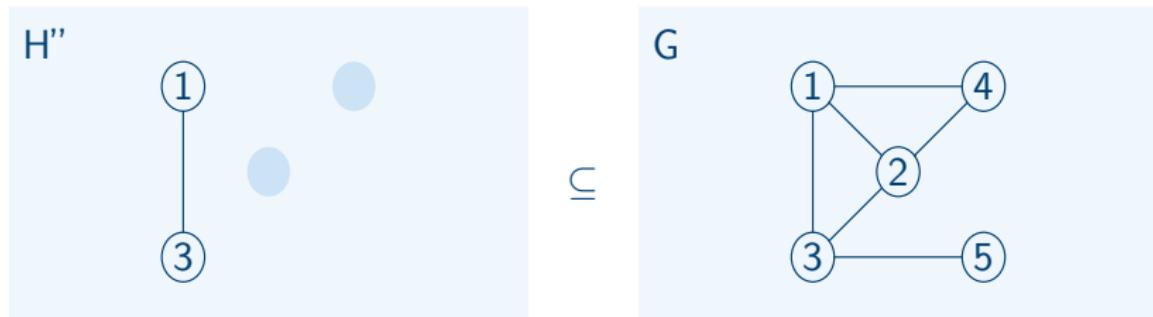
Subgrafo

- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de g estão em G
 - todo grafo é subgrafo de si próprio
 - o subgrafo de um subgrafo de G é subgrafo de G
 - um vértice simples de G é um subgrafo de G



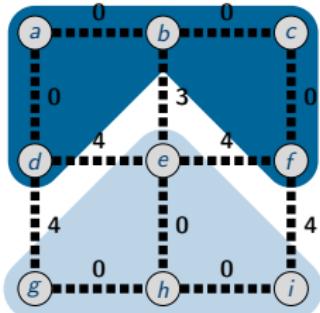
Subgrafo

- Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G ($H \subseteq G$) se **todos os vértices** e todas as **arestas** de g estão em G
 - todo grafo é subgrafo de si próprio
 - o subgrafo de um subgrafo de G é subgrafo de G
 - um vértice simples de G é um subgrafo de G
 - uma aresta simples de G (juntamente com suas extremidades) é subgrafo de G



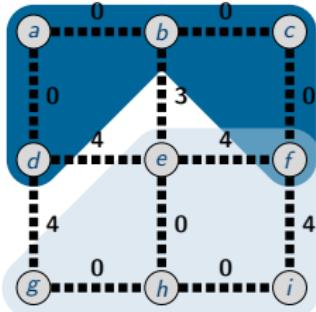
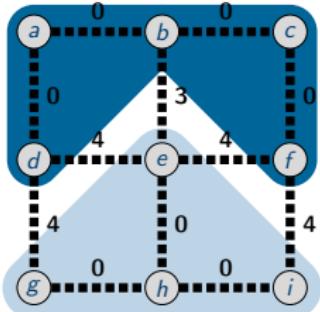
Subgrafo

Subgrafos disjuntos de arestas *dois (ou mais) subgrafos G_1 e G_2 de um grafo G são disjuntos de arestas se G_1 e G_2 não tiverem nenhuma aresta em comum.*



Subgrafo

Subgrafos disjuntos de arestas *dois (ou mais) subgrafos G_1 e G_2 de um grafo G são disjuntos de arestas se G_1 e G_2 não tiverem nenhuma aresta em comum.*
⇒ G_1 e G_2 podem ter vértices em comum?

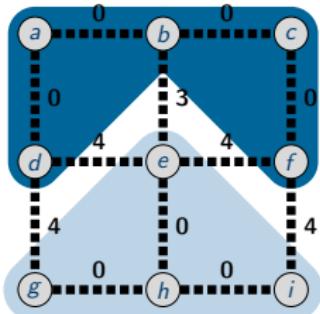


Subgrafo

Subgrafos disjuntos de arestas *dois (ou mais) subgrafos G_1 e G_2 de um grafo G são disjuntos de arestas se G_1 e G_2 não tiverem nenhuma aresta em comum.*

Subgrafos disjuntos de vértices *dois (ou mais) subgrafos G_1 e G_2 de um grafo G são disjuntos de vértices se G_1 e G_2 não tiverem nenhum vértice em comum.*

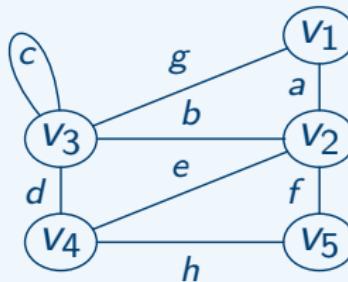
⇒ G_1 e G_2 podem ter arestas em comum?



Caminhos e circuitos

Seqüência de arestas seqüência alternada de vértices e arestas começando e terminando com vértice. Cada aresta é incidente ao vértice que a precede e a antecede

Ex.: v_1 a v_2 a v_1 g v_3



Caminhos e circuitos

Seqüência de arestas seqüência alternada de vértices e arestas começando e terminando com vértice. Cada aresta é incidente ao vértice que a precede e a antecede

Ex.: v_1 a v_2 a v_1 g v_3

Caminho seqüência de arestas no qual nenhuma aresta aparece mais de uma vez

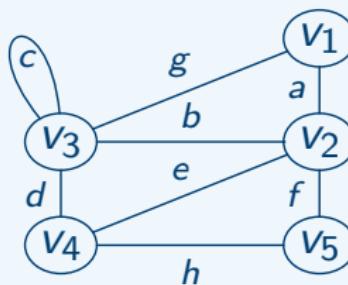
Ex.: v_1 a v_2 b v_3 c v_3 d v_4 e v_2 f v_5

- Caminho aberto: vértice inicial é diferente do vértice final

Ex.: v_1 a v_2 b v_3 c v_3

- Caminho fechado: caminhos que começam e terminam no mesmo vértice

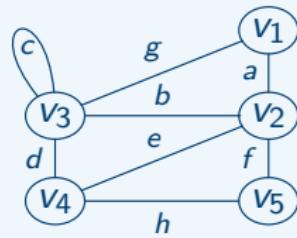
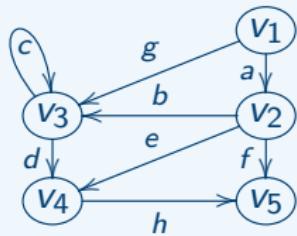
Ex.: v_1 a v_2 b v_3 c v_3 g v_1



Seja G um grafo dirigido e G' o seu grafo não-dirigido associado. Uma cadeia em G é um caminho em G' .

Cadeias

Seja G um grafo dirigido e G' o seu grafo não-dirigido associado. Uma cadeia em G é um caminho em G' .



$g-a-f$ é um caminho de G' e uma cadeia em G

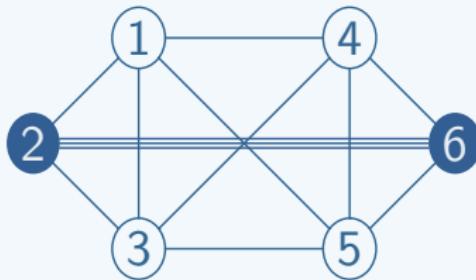
TEOREMA

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe uma aresta entre esses dois vértices

Caminhos e circuitos

TEOREMA

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe uma aresta entre esses dois vértices

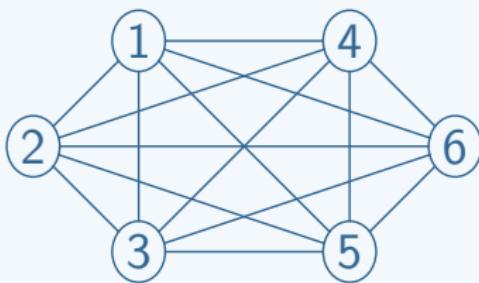


2–6

Teorema Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n - k)(n - k + 1)/2$ arestas

Caminhos e circuitos

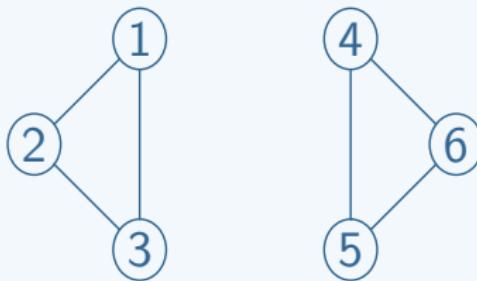
Teorema Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n - k)(n - k + 1)/2$ arestas



$$k = 1, n = 6 \implies e = 15$$

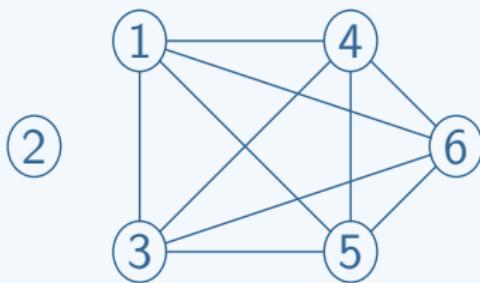
Caminhos e circuitos

Teorema Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n - k)(n - k + 1)/2$ arestas



$$k = 2, n = 6 \implies e = 6$$

Teorema Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n - k)(n - k + 1)/2$ arestas



$$k = 2, n = 6 \implies e = 10$$

Teorema O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$

Caminhos e circuitos

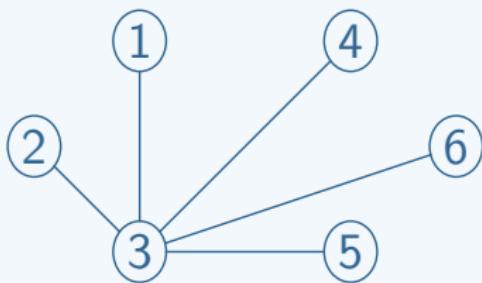
Teorema O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$



$$k = 6, n = 6 \implies e = 0$$

Caminhos e circuitos

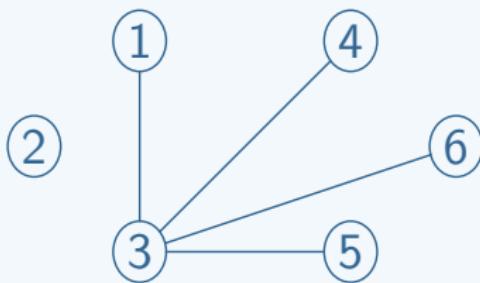
Teorema O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$



$$k = 1, n = 6 \implies e = 5$$

Caminhos e circuitos

Teorema O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$



$$k = 2, n = 6 \implies e = 4$$