

Aula 07

Mapas de Karnaugh de 2, 3 e 4 variáveis

Revisão 3, de 20/03/2025

Prof. João Paulo Seno
joao.seno@uniube.br

Expressões booleanas diferentes podem produzir o mesmo resultado. Assim, circuitos lógicos diferentes acabam sendo equivalentes. Em geral, devemos ter em mente que ao implementar uma função lógica é desejável que tanto o número de portas lógicas quanto o número de literais sejam mínimos. As expressões booleanas com menor número de operadores lógicos requerem um menor número de portas e um menor número de entradas por porta. Isso nos permite, portanto, projetar circuitos lógicos com menor custo.

Mapa de Karnaugh

Também conhecido como *K map*

- É uma representação gráfica bidimensional de uma tabela verdade, e pode ser encarado como um método sistemático de simplificação de expressões booleanas, ou circuitos lógicos, mais simples que a simplificação pela álgebra booleana, pois esta última depende do conhecimento de suas leis, regras e teoremas, além de exigir habilidade em aplicá-las.
- Além disso, é possível garantir, se o método for utilizado corretamente, que as expressões obtidas sejam as mais simples possíveis, por isso são chamadas de expressões mínimas.
- Há outras técnicas de simplificação, como o método Quine-McCluskey e o algoritmo Espresso, que são mais adequados a grande quantidade de variáveis e mais adequados para implementação computacional. Porém estas técnicas não serão discutidas aqui.

Mapa de Karnaugh

- O Mapa de Karnaugh é similar à tabela verdade no sentido de que apresenta todos os possíveis valores de entrada as para as variáveis e o valor das saídas correspondentes.
- No entanto, ao invés de estar organizado em linhas e colunas, como a tabela verdade, o Mapa de Karnaugh é uma matriz de células, onde cada célula está associada a um valor binário para as variáveis de entrada.
- A simplificação é feita através do conveniente agrupamento destas células.
- O Mapa de Karnaugh pode ser utilizado para expressões com duas, três, quatro ou até cinco variáveis.
- O número de células de um Mapa de Karnaugh é igual ao número total de combinações possíveis para as variáveis de entrada (assim como o número de linhas na tabela verdade), ou seja, é 2^n , onde n é o número de variáveis.

Mapa de Karnaugh para 3 variáveis

- O Mapa de Karnaugh para 3 variáveis é uma matriz de 8 células. No exemplo abaixo, as variáveis são A, B e C. Observe onde são anotados os valores para cada variável. A figura “b” mostra os termos-produto padrão representados por cada célula. A sequência de valores nas células é crítica. A próxima célula deve ter apenas um bit diferente em relação à célula anterior.

		C	
		0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

(a)

		C	
		0	1
AB	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
	01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
	11	$AB\bar{C}$	ABC
	10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

(b)

Mapa de Karnaugh para 4 variáveis

- O Mapa de Karnaugh para 4 variáveis é uma matriz de 16 células. No exemplo abaixo, as variáveis são A, B, C e D. Observe onde são anotados os valores para cada variável. A figura “b” mostra os termos-produto padrão representados por cada célula. Observe a variação de valores de uma célula para a próxima.

AB \ CD				
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

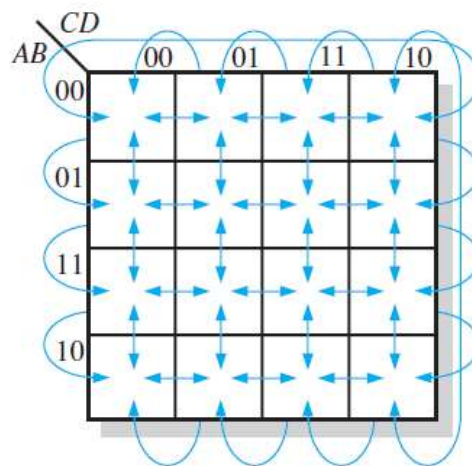
(a)

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}CD$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABC\bar{D}$	$ABCD$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$A\bar{B}CD$

(b)

A definição de célula adjacente

- A adjacência é definida pela variação de uma única variável.
- Por exemplo, no mapa de 3 variáveis, a célula 010 é adjacente às células 000, 011 e 110. Mas não é adjacente às células 001, 111, 100 e 101.
- Fisicamente, no mapa, cada célula é adjacente àquelas que estão imediatamente próxima em um de seus 4 lados. Uma célula não é adjacente a outra que está em sua diagonal. Também, as células que estão na linha superior são adjacentes às suas correspondentes na linha inferior da matriz. Ainda, as células da borda esquerda da matriz são adjacentes às células correspondentes na borda direita da matriz.



Células que diferem por apenas uma variável, são adjacentes.

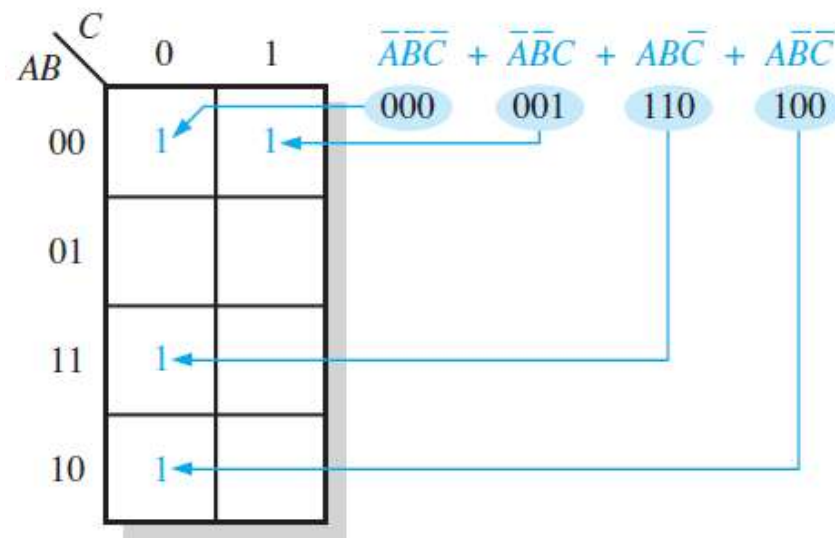
Células cujos valores diferem por mais de uma variável, não são adjacentes.

Simplificação de expressões usando o Mapa de Karnaugh

- É importante que a expressão booleana a ser simplificada esteja na forma padrão para que seja possível montar o mapa de Karnaugh.
- Se expressão não estiver na forma padrão, então, ela deve ser convertida. Logo mais adiante, será mostrada uma técnica chamada de expansão numérica para esta conversão.
- O Mapa de Karnaugh permite simplificar expressões escritas na forma soma-de-produtos padrão ou na forma produto-de-somas padrão.
- Veremos, nesta seção, apenas o procedimento para primeira forma (soma-de-produtos), que é muito mais comum na prática. O procedimento para o produto-de-somas é análogo e não discutiremos aqui.

Mapeamento de uma expressão soma-de-produtos padrão

- O primeiro passo é preencher o mapa. Para uma expressão soma-de-produtos na forma padrão, um “1” é colocado no Mapa de Karnaugh para cada termo-produto da expressão.
- Cada “1” é colocado na sua célula correspondente. Veja o exemplo abaixo:



Exemplo 1

- Construa o Mapa $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$ seguinte expressão booleana, que está na forma padrão:

		C	
		0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

Exemplo 2

- Construa o Mapa de Karnaugh e mapeie a seguinte expressão booleana, que está na forma padrão: $\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + ABCD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11				
	10				

Ajuste para a forma padrão de soma-de-produto usando a expansão numérica

- Vamos apresentar uma técnica chamada expansão numérica para fazer o ajuste de uma expressão não padrão para a forma soma-de-produto padrão.
- Esta técnica é viável no contexto do Mapa de Karnaugh, pois temos que analisar a expressão completa de qualquer forma para preencher o mapa!
- Lembre-se de que num termo-produto não padrão falta uma ou mais variáveis do domínio.
- Por exemplo, considere o termo $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ em uma expressão de soma-de-produtos de quatro variáveis. podemos expandir esse termo numericamente para a forma padrão escrevendo o valor binário das variáveis do termo: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$: 000 , e, em seguida, escrevendo todas as combinações possíveis para as variáveis que não aparecem. Nesse caso, são apenas duas combinações, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$: 0000 e $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$: 0001.

Exemplo de aplicação da expansão numérica

- Monte o Mapa de Karnaugh para a expressão não padrão: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + C\bar{D}$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exercício 1

- Monte e preencha um mapa da Karnaugh para a seguinte expressão de soma-de-produtos não padrão: $A + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B\overline{C}$. Considere um domínio de 3 variáveis.

		C	
		0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

Exercício 2

- Monte e preencha um mapa da Karnaugh para a seguinte expressão de soma-de-produtos não padrão: $\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$.
- Considere um domínio de 4 variáveis.

$AB \backslash CD$		00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11				
	10				

Depois de preencher mapa, vamos ao processo de simplificação

- Após a expressão de soma-de-produtos ser inserida no mapa, uma expressão de soma-de-produtos mínima é obtida agrupando-se, de acordo com certas regras, os números **1** e determinando a expressão de soma-de-produtos mínima a partir do mapa.
- O objetivo é maximizar o tamanho dos grupos e minimizar a quantidade de grupos. As regras de agrupamento de **1s** em um mapa estão no próximo *slide*. Vamos a elas.

Regras de agrupamento de 1s

1. Um grupo só pode conter uma quantidade de células que seja uma potência inteira de 2, por exemplo: 1, 2, 4, 8 ou 16 células. No caso de um mapa de três variáveis, $2^3 = 8$ é o tamanho do maior grupo possível.
2. Cada célula em um grupo deve ser adjacente a uma ou mais células do mesmo grupo.
3. Sempre inclua o maior número de algarismos 1 em um grupo, respeitando a regra apresentada no item 1.
4. Cada número 1 no mapa tem que ser incluído em pelo menos um grupo. Os números 1 que já fazem parte de um grupo podem ser incluídos num outro grupo, enquanto os grupos sobrepostos incluem números 1 não comuns.

Exemplos de agrupamentos

Volte e reveja as regras para adjacência, se necessário!

		C	
AB		0	1
00		1	
01			1
11		1	1
10			

		C	
AB		0	1
00		1	1
01		1	
11			1
10		1	1

Adjacência cilíndrica

		CD			
AB		00	01	11	10
00		1	1		
01		1	1	1	1
11					
10			1	1	

		CD			
AB		00	01	11	10
00		1			1
01		1	1		1
11		1	1		1
10		1		1	1

Adjacência cilíndrica

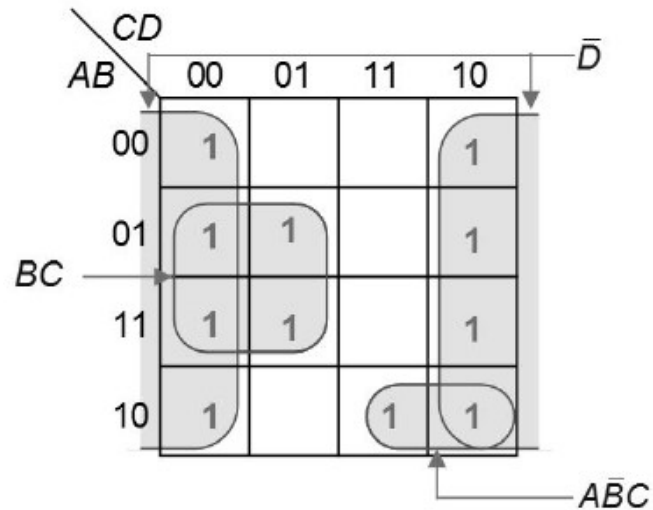
Determinação da expressão de soma-de-produtos mínima equivalente

- Após preencher adequadamente o Mapa de Karnaugh e criar o menor número possível de grupos e que eles englobem o maior número de células possível, podemos determinar a expressão de soma-de-produtos mínima equivalente conforme as seguintes regras:
 1. Cada grupo é equivalente a um termo-produto composto por todas as variáveis que o valor não varia dentro do grupo.
 2. Determine o termo produto mínimo para cada grupo.
 3. Quando se obtém todos os termos-produtos mínimos com o Mapa de Karnaugh, eles são somados formando uma expressão de soma-de-produtos mínima.

Observações acerca do termo-produto mínimo

- Para um mapa de três variáveis:
 - Um grupo de uma célula resulta em um termo produto de três variáveis.
 - Um grupo de duas células resulta em um termo produto de duas variáveis.
 - Um grupo de quatro células resulta em um termo de uma variável.
 - Um grupo de oito células resulta no valor 1 para a expressão.
- Para um mapa de quatro variáveis:
 - Um grupo de uma célula resulta em um termo produto de quatro variáveis.
 - Um grupo de duas células resulta em um termo produto de três variáveis.
 - Um grupo de quatro células resulta em um termo produto de duas variáveis.
 - Um grupo de oito células resulta em um termo de uma variável.
 - Um grupo de 16 células resulta no valor 1 para a expressão.

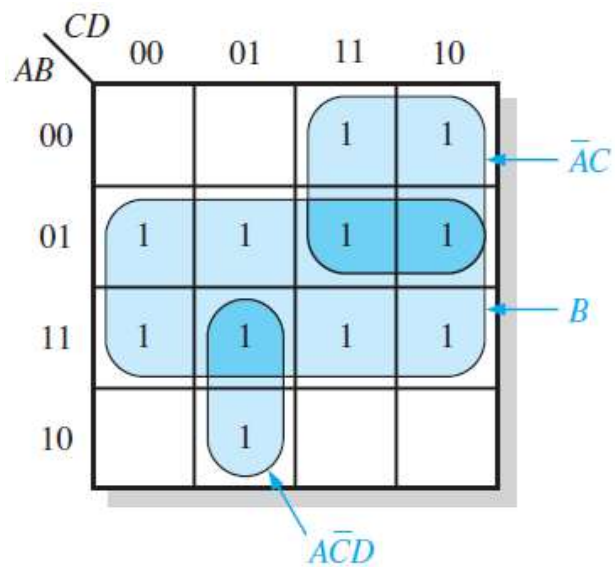
- Determinar a expressão de soma-de-produtos mínima para o mapa abaixo:



Como foi possível criar três grupos, teremos uma expressão com três termos-produto, sendo um termo com três variáveis (devido ao grupo com duas células), um termo de duas variáveis (devido ao grupo com quatro células) e um termo com uma variável (devido ao grupo com oito células). Assim, a expressão em soma-de-produtos mínima resultante é dada por: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + BC + \bar{D}$.

Exercício 3

- Determinar a expressão de soma-de-produtos mínima para o mapa abaixo:



Uma situação que pode acontecer

- Existem alguns casos em que uma determinada combinação de entrada não é permitida. Esses estados podem ser tratados como bits “não importa” (é comum também usar a expressão em inglês, *don't care*) em relação aos seus efeitos na saída.
- Na prática, a existência desses termos permite que os usemos como 0 ou 1, conforme seja conveniente em uma minimização. Observe a figura abaixo:

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01	X	1
	11	1	1
	10		

Diagram illustrating a Karnaugh map for a 3-variable function (A, B, C). The map shows the output for combinations of A and B (rows) and C (columns). The output is 1 for (00,0), (01,1), (11,0), and (11,1). The output is X (don't care) for (01,0). The output is 0 for (00,1), (10,0), and (10,1). The map is grouped to show the minimal expression $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + B$.

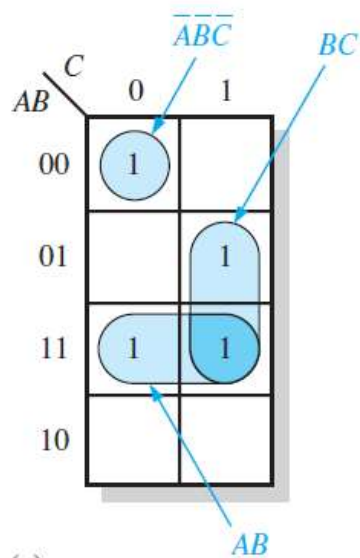
- Existe uma saída “não importa” na posição 010. Se não houvesse a saída “não importa” nessa célula, a expressão mínima resultante desse mapa seria $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB + BC$. No entanto, como podemos considerá-lo como 1 para formar um agrupamento de quatro células, a expressão mínima resultante é $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + B$.



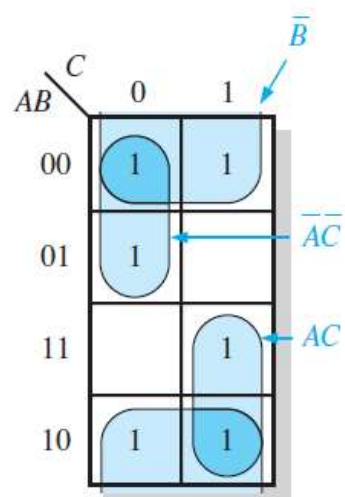
Uniube

Exercício 4

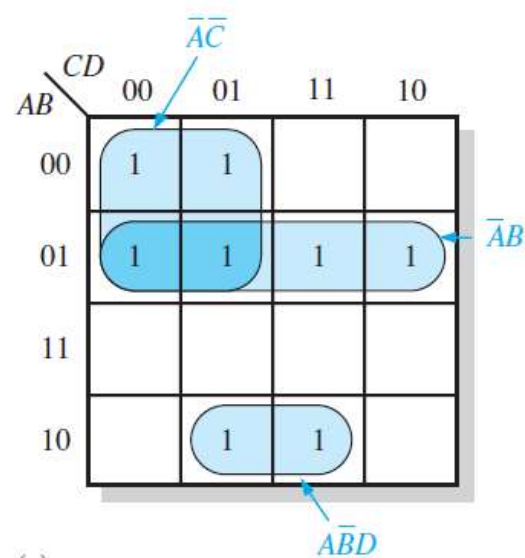
- Determinar a expressão de soma-de-produtos mínima para cada um dos mapas abaixo:



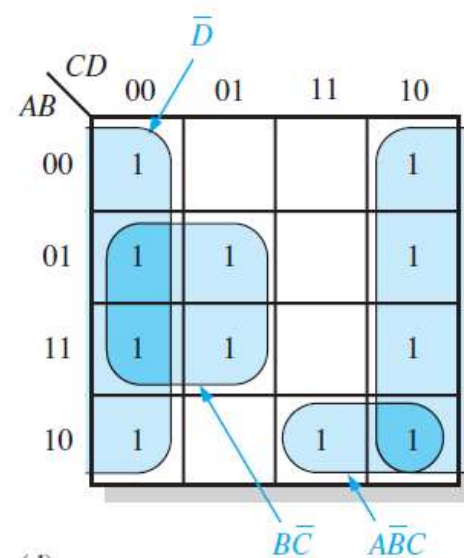
(a)



(b)



(c)



(d)

Exercício 5

- Use o Mapa de Karnaugh para minimizar a seguinte expressão soma-de-produtos padrão: $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$

AB \ C	C	
	0	1
00		
01		
11		
10		

Exercício 6

- Use o Mapa de Karnaugh para minimizar a seguinte expressão soma-de-produtos padrão: $\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11				
	10				

Exercícios

1. O mapa de Karnaugh pode ser usado para simplificar expressões booleanas, obtendo sua forma mínima.

Uma etapa importante para o processo de minimização através do mapa de Karnaugh é o seu preenchimento correto. Assinale a alternativa que contém o mapa equivalente à expressão $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$:

a)

		C	
		0	1
AB	00		1
	01	1	
	11	1	1
	10	1	

b)

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01		1
	11	1	1
	10		1

c)

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01	1	1
	11	1	
	10		1

d)

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01	1	1
	11	1	
	10		1

e)

		C	
		0	1
AB	00		1
	01	1	1
	11	1	
	10		1

2. Ao preencher um mapa de Karnaugh, é importante que a expressão booleana esteja na forma padrão. Caso isso não ocorra, ela deve ser convertida para a forma padrão ou o mapa deve ser preenchido através de uma **expansão numérica**.

Marque a alternativa que apresenta o mapa de Karnaugh para a expressão $AB + C$ em um domínio de três variáveis:

a)

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	
	11	1	
	10	1	

b)

		C	
		0	1
AB	00		1
	01		
	11	1	1
	10	1	1

c)

		C	
		0	1
AB	00		1
	01		1
	11		1
	10	1	1

d)

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01	1	
	11	1	1
	10	1	

e)

		C	
		0	1
AB	00		1
	01		1
	11	1	1
	10		1

3. Uma expressão de soma-de-produtos minimizada contém a menor quantidade possível de termos com a menor quantidade possível de variáveis por termos e, geralmente, uma **soma-de-produtos mínima** pode ser implementada com menos portas lógicas que uma expressão padrão. Assinale a alternativa que contém a expressão em **soma-de-produtos mínima** para o seguinte mapa de Karnaugh:

		C	
		0	1
AB	00	1	
	01		1
	11	1	1
	10		1

- a) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$.
- b) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB + BC + AC$.
- c) $ABC + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$.
- d) $ABC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$.
- e) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB + \bar{A}BC + A\bar{B}C$.

Fim