Prop1	Prop2	Conjunção	Disjunção	Negação	Implicação	Equivalência
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	
V	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	F	
F	V	F	V	V	V	
F	F	F	F	V	V	

Aula04: Álgebra da Lógica Proposicional

Uniube

Disciplina: Matemática Discreta

Profa. Kênia Arruda
kenia.costa@uniube.br

Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilizada para a simplificação e a manipulação de expressões lógicas com vistas à prova da validade de argumentos.
- Existem várias leis:
  - $\alpha \land \neg\alpha \equiv$ falso → Lei da contradição
  - $\alpha \lor \neg\alpha \equiv$ verdade → Lei do meio excluído
  - $\alpha \land$ verdade $\equiv \alpha$ → Leis da identidade
  - $\alpha \lor$ falso $\equiv \alpha$ → Leis da identidade
  - $\alpha \land$ falso $\equiv$ falso → Leis da dominação
  - $\alpha \lor$ verdade $\equiv$ verdade → Leis da dominação

Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilizada para a simplificação e a manipulação de expressões lógicas com vistas à prova da validade de argumentos.
- Existem várias leis:
  - $\alpha \land \alpha \equiv \alpha \rightarrow$ Leis idempotentes
  - $\alpha \lor \alpha \equiv \alpha \rightarrow$ Leis idempotentes
  - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha \rightarrow$ Lei da dupla negação
  - $\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha \rightarrow$ Leis comutativas
  - $\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha \rightarrow$ Leis comutativas
  - $(\alpha \land \beta) \land \gamma \equiv \alpha \land (\beta \land \gamma) \rightarrow$ Leis associativas
  - $(\alpha \lor \beta) \lor \gamma \equiv \alpha \lor (\beta \lor \gamma) \rightarrow$ Leis associativas

Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilizada para a simplificação e a manipulação de expressões lógicas com vistas à prova da validade de argumentos.
- Existem várias leis:
  - $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ → Leis distributivas
  - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ → Leis distributivas
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ → Leis de De Morgan
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ → Leis de De Morgan

Idempotente (tanto para conjunção como disjunção)

- Uma proposição composta pela mesma proposição simples é equivalente à proposição simples
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$
  - $p \wedge p \Leftrightarrow p$

p	p v p
V	V
F	F

p	p ^ p
V	V
F	F

Comutativa (tanto para conjunção como disjunção)

- A ordem das proposições não altera a tabela verdade
  - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

p	q	p ^ q	q ^ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

p	q	p v q	q v p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Associativa (tanto para conjunção como disjunção)

- Usando um mesmo conectivo a ordem da resolução não altera a tabela verdade
  - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
  - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

p	q	r	(q v r)	p v (q v r)	(p v q)	(p v q) v r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

p	q	r	(q ^ r)	p ^ (q ^ r)	(p ^ q)	(p ^ q) ^ r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Distributiva (tanto para conjunção como disjunção)

- Ao usar o conectivo E e OU podemos distribuir o conectivo fora do parênteses para dentro:
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

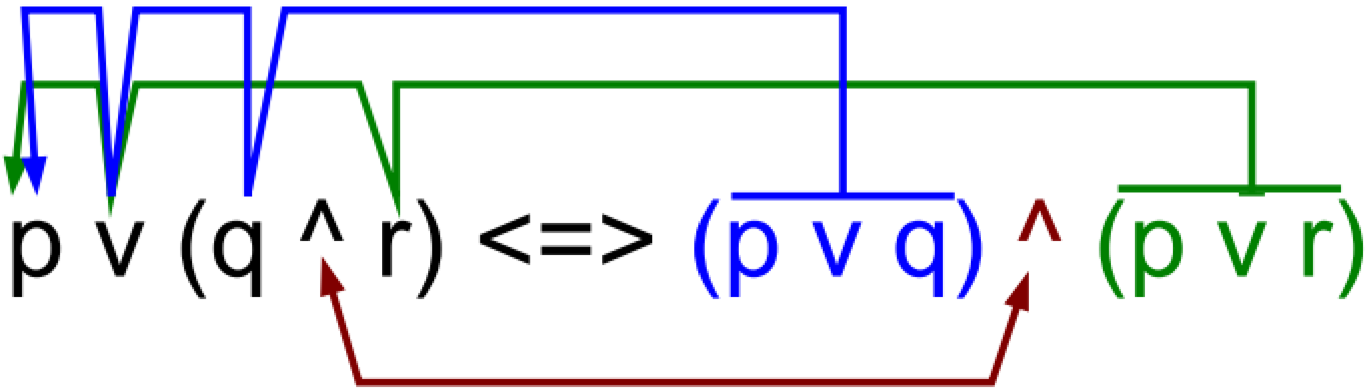
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Distributiva (tanto para conjunção como disjunção)

- Ao usar o conectivo E e OU podemos distribuir o conectivo fora do parênteses para dentro:
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$



Resolva

- Transforme nas equivalentes as seguintes proposições
  - $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $(p \vee q) \vee r$
  - $p \vee p \wedge (p \vee r)$
  - $q \vee q \vee q \vee q \wedge r$

Identidade

- A identidade apresenta um elemento neutro da operação
- Qual seria o elemento neutro do E?
  - $p \wedge V \Leftrightarrow p$ (V é o elemento neutro, o resultado depende de p)
  - $p \wedge F \Leftrightarrow p$ (p é o elemento neutro, o resultado depende de F)

- Qual seria o elemento neutro do OU?
  - $p \vee F \Leftrightarrow p$ (F é o elemento neutro, o resultado depende de p)
  - $p \vee V \Leftrightarrow p$ (p é o elemento neutro, o resultado depende de V)

Absorção

- Estabelece a seguinte equivalência:
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ → o p é que define
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ → o p é que define

Leis De Morgan

- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
  - "A negação de uma conjunção é a disjunção das negações"
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
  - "A negação de uma disjunção é a conjunção das negações"

  - Será, montem a tabela verdade.

Uniube

Leis De Morgan

- Qual a negação da proposição?
  - É inteligente e estuda
  - p(é inteligente) $\wedge$ q (estuda)

  - Não é inteligente ou não estuda
  - $\neg p \vee \neg q$

Leis De Morgan

- Qual a negação da proposição?
  - É médico ou professor
  - p(é médico) $\vee$ q (é professor)

  - Não é médico e não é professor
  - $\neg p \wedge \neg q$

Resolva

- Aplique as propriedades para simplificar as seguintes proposições:
  - $p \vee (p \wedge q)$
  - $p \wedge T \wedge (q \vee p)$
  - $(p \rightarrow q) \wedge \neg p$
  - $\neg(p \vee q)$
  - $(p \vee q) \rightarrow q$

Equivalências da condicional e da bicondicional

- Um procedimento usualmente adotado quando da manipulação de expressões é a substituição (com base no princípio de substituição) de expressões envolvendo o conectivo condicional (→) e o bicondicional (↔) por suas equivalentes expressões lógicas

$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	(1)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	(2)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	(3)

Equivalências da condicional e da bicondicional

- $(\alpha \to \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$

	α	β	$\neg\alpha$	$(\alpha \to \beta)$	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$
I_1	v	v	f	v	v	v
I_2	v	f	f	f	f	v
I_3	f	v	v	v	v	v
I_4	f	f	v	v	v	v

Equivalências da condicional e da bicondicional

- Prove a equivalências
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$

Equivalências da condicional e da bicondicional

- Prove a equivalências
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \alpha)$

	α	β	$\neg\alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$(\neg\alpha \lor \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \lor \beta)$
I_1	v	v	f	v	v	v
I_2	v	f	f	f	f	v
I_3	f	v	v	v	v	v
I_4	f	f	v	v	v	v

Equivalências da condicional e da bicondicional

- Prove a equivalências
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \alpha)$

	α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$(\neg\alpha \lor \beta)$	$(\neg\beta \lor \alpha)$	$(\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \alpha)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \beta)$
I_1	v	v	f	f	v	v	v	v	v
I_2	v	f	f	v	f	f	v	f	v
I_3	f	v	v	f	f	v	f	f	v
I_4	f	f	v	v	v	v	v	v	v

Resumo

- Comutativa
  - p ^ q <=> q ^ p
  - p v q <=> q v p
- Idempotente
  - p ^ p <=> p
  - p v p <=> p
- Associativa
  - (pvq)vr <=> pv(qvr)
- De Morgan
  - ~(pvq) <=> (~p ^ ~q)
- Distributiva
  - p v (q ^ r) <=> (p v q) ^ (p v r)
- Identidade (Elemento Neutro)
  - p v C <=> p
  - p ^ T <=> p
- Absorção
  - p ^ (p v q) <=> p
  - p v (p ^ q) <=> p
- Equivalência da condicional
  - p → q <=> ~p v q

Resolva

- Simplifique as proposições, em cada passo aponte a propriedade que foi usada.
  - $p \vee p$
  - $p \vee (q \wedge r)$
  - $p \wedge \neg p$
  - $p \vee (q \vee r)$
  - $p \vee q \vee p$
  - $p \rightarrow q$
  - $\neg (p \vee q)$
  - $p \vee T$
  - $q \vee (p \vee \sim p)$
  - $r \vee (r \wedge s)$
  - $(p \vee q) \rightarrow r$
  - $(p \vee p) \rightarrow r$

- Comutativa
  - p ^ q <=> q ^ p
  - p v q <=> q v p
- Idempotente
  - p ^ p <=> p
  - p v p <=> p
- Associativa
  - (pvq)vr <=> pv(qvr)
- De Morgan
  - ~(pvq) <=> (~p ^ ~q)
- Distributiva
  - p v (q ^ r) <=> (p v q) ^ (p v r)
- Identidade (Elemento Neutro)
  - p v C <=> p
  - p ^ T <=> p
- Absorção
  - p ^ (p v q) <=> p
  - p v (p ^ q) <=> p
- Equivalência da condicional
  - p → q <=> ~p v q

Uniube

Resolva

- Simplifique as proposições, em cada passo aponte a propriedade que foi usada.
  - $\neg p \wedge (q \rightarrow p)$
  - $\neg (p \rightarrow q)$
  - $p \wedge \neg(p \rightarrow q)$
  - $(q \vee r) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
  - $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
  - $(p \vee p) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)$
  - $q \wedge (q \vee r)$
  - $(q \vee (q \wedge r)) \vee \neg q$
  - $\neg ((p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q))$
  - $((p \vee p) \wedge r \vee (p \vee \neg p)) \rightarrow p \wedge (q \vee p)$

- Comutativa
  - p ^ q <=> q ^ p
  - p v q <=> q v p
- Idempotente
  - p ^ p <=> p
  - p v p <=> p
- Associativa
  - (pvq)vr <=> pv(qvr)
- De Morgan
  - ~(pvq) <=> (~p ^ ~q)
- Distributiva
  - p v (q ^ r) <=> (p v q) ^ (p v r)
- Identidade (Elemento Neutro)
  - p v C <=> p
  - p ^ T <=> p
- Absorção
  - p ^ (p v q) <=> p
  - p v (p ^ q) <=> p
- Equivalência da condicional
  - p → q <=> ~p v q