UNIUBE – CAMPUS VIA CENTRO – Uberlândia/MG
Curso de Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação
Disciplina: Sistemas Digitais

Aula 04
Álgebra de Boole (continuação): Propriedades, Teoremas de De Morgan. Identidades auxiliares.

Revisão 2, de 17/02/2025

Prof. João Paulo Seno
joao.seno@uniube.br

1

Leis da álgebra booleana

Lei	Enunciado	Representação
Comutativa da adição	A ordem das variáveis na qual a função OR é aplicada não faz diferença.	$A+B=B+A$
Comutativa da multiplicação	A ordem das variáveis na qual a operação AND é aplicada não faz diferença.	$AB=BA$
Associativa da adição	Quando uma operação OR é aplicada em mais de duas variáveis, o resultado é o mesmo, independentemente da forma de agrupar as variáveis.	$A+(B+C)=(A+B)+C$
Associativa da multiplicação	Quando uma operação AND é aplicada em mais de duas variáveis, o resultado é o mesmo, independente da forma de agrupar as variáveis.	$A(BC)=(AB)C$
Distributiva	Uma operação AND entre uma única variável com o resultado de uma operação OR aplicada a duas ou mais variáveis é equivalente a uma operação OR entre os resultados das operações AND entre uma única variável e cada uma das duas ou mais variáveis.	$A(B+C)=AB+AC$

Uniube

Axiomas

1. **Fechamento**: dado o conjunto de valores binários, $C = \{0,1\}$,

$$A,B \in C \Rightarrow \begin{cases} A + B \in C \\ A \cdot B \in C \end{cases}$$

Ou seja, as operações OR e AND resultam em valores que também são binários.

2. **Identidade**: dado o conjunto $C = \{0,1\}$,

$$A \in C \Rightarrow \begin{cases} A + 0 = A \\ A \cdot 1 = A \end{cases}$$

Esse axioma introduz os elementos neutros das operações OR e AND.

Uniube

Teoremas

1. Indepotência

$$\begin{cases} A + A = A \\ A \cdot A = A \end{cases}$$

2. Aniquilação

$$\begin{cases} A + 1 = 1 \\ A \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

3. Dupla negação

$$\overline{\overline{A}} = A$$

4. DeMorgan

$$\begin{cases} \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \\ \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \end{cases}$$

Uniube

Teorema da associatividade

1.	$A+0=A$	7.	$A \cdot A = A$
2.	$A+1=1$	8.	$A \cdot \bar{A} = 0$
3.	$A \cdot 0 = 0$	9.	$\bar{\bar{A}} = A$
4.	$A \cdot 1 = A$	10.	$A + AB = A$
5.	$A + A = A$	11.	$A + \bar{A}B = A + B$
6.	$A + \bar{A} = 1$	12.	$(A+B)(A+C) = A + BC$

Uniube

Explorando De Morgan

De Morgan foi um matemático que conheceu Boole e propôs dois teoremas que representam uma parte importante na álgebra booleana. Devido à sua importância nos circuitos digitais, vamos estuda-los com mais cuidado.

Uniube

Um pouco mais de De Morgan: seu primeiro teorema!

- O primeiro teorema de De Morgan afirma que:

O complemento de um produto de variáveis é igual à soma dos complementos das variáveis.

- Ou, em termos de operações lógicas:

O complemento de duas ou mais variáveis submetidas a uma operação AND é equivalente a uma operação OR entre os complementos das variáveis individuais.

- Pode-se expressar esse teorema para duas variáveis com a expressão:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Uniube

Um pouco mais de De Morgan: seu segundo teorema!

- O segundo teorema de De Morgan afirma que:

O complemento de uma soma de variáveis é igual ao produto do complemento das variáveis.

- Ou, em termos de operações lógicas:

O complemento de duas ou mais variáveis submetidas a uma operação OR é equivalente a uma operação AND entre os complementos das variáveis individuais.

- Pode-se expressar esse teorema para duas variáveis com a expressão:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Uniube

Representação dos dois teoremas de De Morgan em termos de portas lógicas

Equivalência entre portas lógicas (a) NAND e OR negativa; (b) NOR e AND negativa

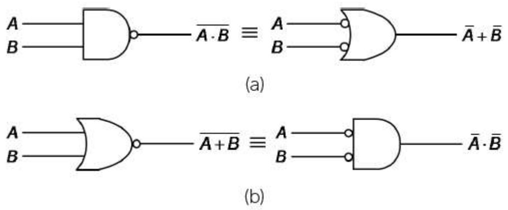


Tabela verdade (a) NAND e OR negativa; (b) NOR e AND negativa

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\bar{A} + \bar{B}$	A	B	$\overline{A + B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0

(a) (b)

Uniube

Ôpa! Vale observar que:

- Os teoremas de De Morgan também se aplicam a expressões nas quais existem mais do que duas variáveis, por exemplo:

$$\overline{ABC} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

e

$$\overline{A + B + C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

- Outro aspecto importante é que cada variável nos teoremas de De Morgan podem representar uma combinação de outras variáveis. Veja o exemplo no próximo slide.

Uniube

Aplicações dos Teoremas de De Morgan

Exercícios

- Simplificar a expressão:

$$\overline{\overline{A + B\overline{C}} + D(\overline{E + \overline{F}})}$$

Uniube

Exercícios – Aplicar De Morgan

a) $\overline{(A + B + C)D}$

b) $\overline{ABC + DEF}$

c) $\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$

Uniube

Exercício

- Use a álgebra booleana para simplificar a expressão abaixo e compare os circuitos lógicos antes e depois:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Uniube

Fica a dica

Endereço de um site que simplifica expressões booleanas!

https://www.boolean-algebra.com/

Uniube

DeMorgan propôs dois teoremas que representam uma parte importante na álgebra booleana que, em termos práticos, provêm uma verificação de equivalências entre as portas NAND e OR negativa e as equivalências entre as portas NOR e AND negativa.
Aplique o teorema de DeMorgan na expressão $\overline{ABC + DEF}$. Depois, assinale a alternativa que contém a expressão equivalente:

a) $\left(\overline{A+B+C}\right)\left(\overline{D+E+F}\right)$.
b) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F}$.
c) $\overline{ABC} + \overline{DEF}$.
d) $\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)+\left(\overline{D}+\overline{E}+\overline{F}\right)$.
e) $\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)\left(\overline{D}+\overline{E}+\overline{F}\right)$.

Uniube

Uma porta XOR de duas entradas realiza uma operação lógica que resulta em 1 se, e somente se, uma das entradas for 1. A expressão booleana para uma porta XOR é $A\overline{B} + \overline{A}B$.
Assinale a alternativa que apresenta a expressão booleana para uma porta **XNOR**:

a) $\overline{A}\,\overline{B} + AB$.
b) $\overline{A} + \overline{B}$.
c) $\overline{A}B + A\overline{B}$.
d) $\overline{A}A + \overline{B}B$.
e) $\overline{A} + B$.

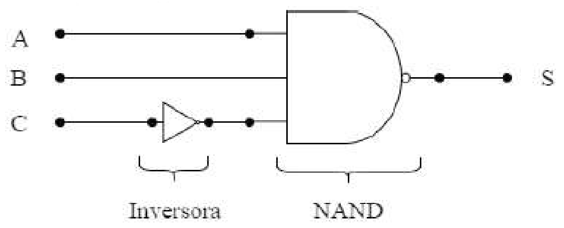
Uniube

Os teoremas de Augustus De Morgan são utilizados para realizar a simplificação de expressões booleanas e também para desenvolver circuitos digitais. Eles foram propostos pelo matemático britânico Augustus De Morgan, no século XIX.
Simplifique a expressão $X=\overline{A+\overline{B}C}$ utilizando os dois teoremas de De Morgan. A melhor alternativa é:

a) $X=\overline{A+B+C}$
b) $X=A(B+C)$
c) $X=A(B+C)$
d) $X=\overline{A}+(B\overline{C})$
e) $X=\overline{A}(B+\overline{C})$

Uniube

Como cada circuito digital que construímos corresponde a uma expressão, se você simplificar as expressões significa que você irá diminuir o tamanho do circuito. Isso gera economias tanto na quantidade de circuitos quanto na energia consumida por eles.
Considere a lógica a seguir:



Encontre a expressão lógica para a saída do circuito acima e **simplifique-a** utilizando os teoremas de De Morgan.

a) $S=A+B+C$
b) $S=A\overline{B}C$
c) $S=\overline{ABC}$
d) $S=\overline{ABC}$
e) $S=\overline{A}+\overline{B}+C$

Uniube

Fim