Autômatos Finitos e Gramática Regular

1. Introdução

Segundo a Hierarquia de Chomsky, a Linguagem Regular trata-se de uma linguagem mais simples, sendo possível desenvolver algoritmos de reconhecimento ou de geração de pouca complexidade, grande eficiência e de fácil implementação.

O estudo das Linguagens Regulares ou tipo 3 (Hierarquia de Chomsky) será visto através de vários formalismos:

- Operacional ou reconhecedor – uso dos autômatos finitos (determinístico, não determinístico)
- Axiomático ou gerador – gramática regular
- Denotacional – expressão regular

2. Autômato Finito Determinístico (AFD)

Um autômato é um modelo abstrato de um computador digital composto por uma fita de entrada (que conterá a cadeia de entrada), uma fita de saída (para mostrar a cadeia resultante), memória auxiliar (que armazena temporariamente símbolos do alfabeto) e unidade de controle. A cadeia a ser tratada fica armazenada na fita de entrada de onde a unidade de controle lê um símbolo por vez, pode mudar de estado dependendo das funções de transições definidas e escreve na memória e na fita de saída.

O autômato finito é um reconhecedor de linguagens simples que não possui memória auxiliar, não altera a fita (ela serve apenas para a leitura de símbolos), a unidade de controle anda na fita somente em um sentido (da esquerda para a direita) e a fita tem comprimento limitado, do tamanho da cadeia a ser analisada.

O autômato finito pode ser determinístico (AFD) e não determinístico (AFN). No AFD cada movimento é determinado de uma única forma, enquanto que no AFN existem várias possibilidades de transição para um mesmo símbolo.

Definição 1

Um **autômato finito determinístico** é definido pela quíntupla:

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Onde: Q – conjunto finito de estados

Σ – alfabeto de entrada (ou conjunto finito de símbolos)

δ – função de transição (ou função programa) definida por δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$

q_0 – estado inicial ($q_0 \in Q$)

F – conjunto de estados finais ($F \in Q$)

Exemplo 01
Dado o Autômato abaixo, especifique sua quíntupla.

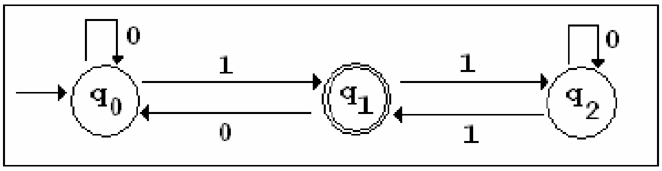


Figura 01. Autômato – exemplo 01

$Q = \{ q_0, q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{ 0, 1 \}$
estado inicial = q_0
estado final = q_1
as funções de transições:

$\delta(q_0, 0) = q_0$ $\quad$ $\delta(q_1, 0) = q_0$ $\quad$ $\delta(q_2, 0) = q_2$
$\delta(q_0, 1) = q_1$ $\quad$ $\delta(q_1, 1) = q_2$ $\quad$ $\delta(q_2, 1) = q_1$

Portanto $M = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, \{q_1\})$

Exemplo 02
Desenhe o autômato sabendo que $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{ w \mid w$ possui aa ou bb como subcadeia $\}$ e o autômato é dado por $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{ a, b \}, \delta, q_0, \{q_f\})$, onde o δ está representado na tabela abaixo.

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_f	q_2
q_2	q_1	q_f
q_f	q_f	q_f

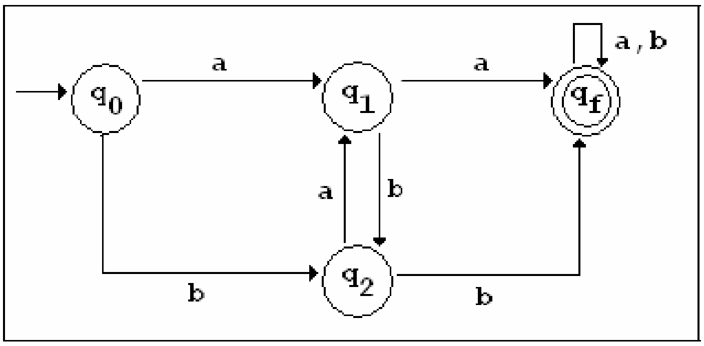


Figura 02. Autômato – exemplo 02

Note que um autômato finito sempre pára ao processar uma cadeia, já que a entrada é finita e o conjunto de estado também. Ele pode parar em duas ocasiões: ao aceitar uma cadeia ou ao rejeitá-la. Quando ele termina de ler a cadeia e assume um estado final – a cadeia é aceita. Caso contrário, a cadeia é rejeitada.

<u>Definição 2:</u>

A **linguagem associada a um autômato** é o conjunto de todas as cadeias aceitas pelo autômato:

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \in F)$$

<u>Definição 3:</u>

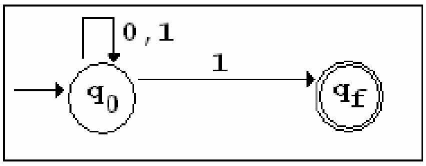
Dois Autômatos Finitos M_1 e M_2 são ditos **equivalentes** se, e somente se:

$$L(M_1) = L(M_2)$$

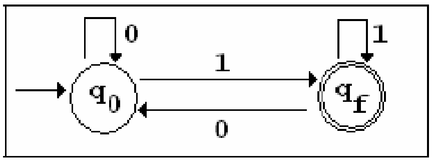
Ou seja, reconhecem a mesma linguagem

Exemplo 03:

Construa autômatos para reconhecer a linguagem $L = \{w1 : w \in \{0,1\}^*\}$



$M = (\{q_0, q_f\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_f\}),$
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = \{ q_0 , q_f \}$



$M = (\{q_0, q_f\}, \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, \{q_f\}),$
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_f$
$\delta(q_f, 0) = q_0$
$\delta(q_f, 1) = q_f$

<u>Definição 4:</u>

A função de transição (ou programa) **estendida** é denotada por:

$$\delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

Exemplo 04:

Sabendo que $M = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, \{q_2\})$ e

$\delta(q_0, 0) = q_0$	$\delta(q_1, 0) = q_0$	$\delta(q_2, 0) = q_2$
$\delta(q_0, 1) = q_1$	$\delta(q_1, 1) = q_2$	$\delta(q_2, 1) = q_1$

Portanto, $\delta^*(q_0, 011) = q_2$

Já que $\delta(q_0, 0) = q_0,$ $\delta(q_0, 1) = q_1$ e $\delta(q_1, 1) = q_2$

$\delta(q_0, 011) = \delta(q_0, 11) = \delta(q_1, 1) = q_2$

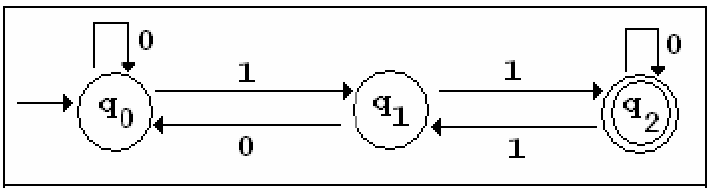


Figura 03. Autômato – exemplo 04

Definição 5:
Uma linguagem L é dita **regular** se, e somente se existe um autômato finito determinístico M, tal que: $L = L(M)$.

Exemplo 05:
a) Considere a linguagem: L = { w | w possui um número par de a e b}
$Ma = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$

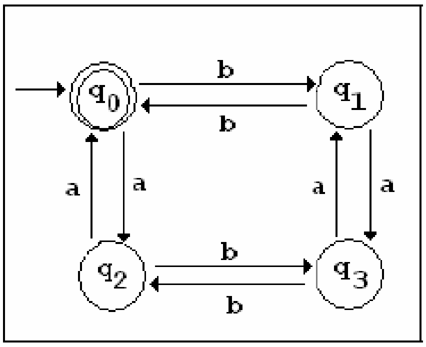


Figura 04. Autômato – exemplo 05(a)

b) Considere a linguagem: L = { w | w possui um número ímpar de a e b}
$Mb = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_f\})$

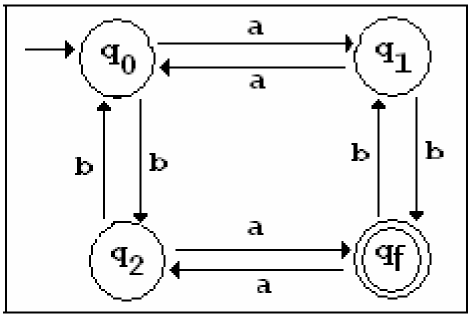


Figura 05. Autômato – exemplo 05(b)

3. Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição 6:

Um **autômato finito não determinístico** é definido pela quíntupla:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Onde: Q – conjunto finito de estados

Σ – alfabeto de entrada, conjunto finito de símbolos

δ – função de transição ou função programa definido por δ: $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

q_0 – estado inicial ($q_0 \in Q$)

F – conjunto de estados finais ($F \in Q$)

Obs: 2^Q representa os subconjuntos de Q.

Em alguns livros cita-se que um AFN pode ter movimentos vazios. Um movimento vazio é uma transição sem leitura de símbolo algum. Aí a função transição é dada por: δ: $Q \times \{\Sigma \cup \lambda\} \rightarrow 2^Q$

Exemplo 06:

Considere a linguagem: L = {w | w possui aa ou bb como subcadeia }

O autômato finito não determinístico pode ser dado por:

$$M = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{ q_f \}\}$$

Onde

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $\quad$ $\delta(q_1, a) = \{q_f\}$ $\quad$ $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$

$\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$ $\quad$ $\delta(q_2, b) = \{q_f\}$ $\quad$ $\delta(q_f, b) = \{q_f\}$

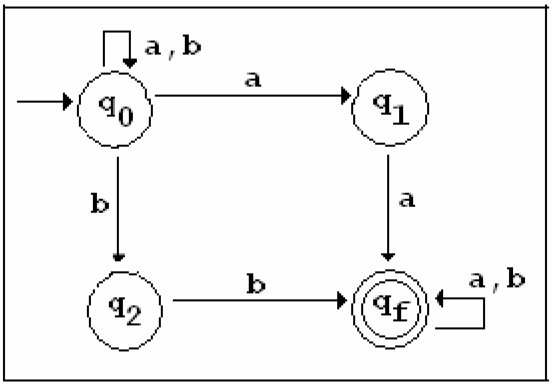


Figura 06. Autômato – exemplo 06

Exemplo 07:
Considere a linguagem: L = {w | w possui aaa como sufixo }
O autômato finito não determinístico pode ser dado por:

$M = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{ q_f \}\}$

Onde

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$
$\delta(q_0, b) = \{q_0\}$ $\delta(q_2, a) = \{q_f\}$

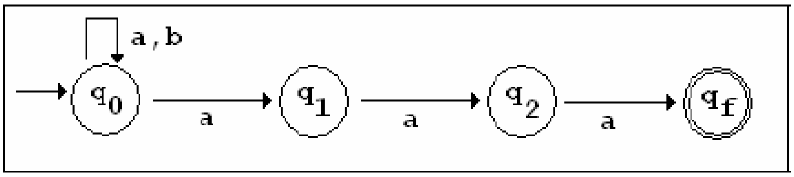


Figura 07. Autômato – exemplo 07

4. Equivalência entre os autômatos AFD e AFN

Sabe-se que um autômato M_1 é equivalente a um autômato M_2 se , e somente se, $L(M_1) = L(M_2)$ pela Definição 2. Então se pode transformar um AFN em AFD para que a linguagem lida pelo AFN seja do tipo regular.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN qualquer. Seja $M' = (Q', \Sigma, \delta', <q_0>, F')$ um AFD construído a partir de M como segue:

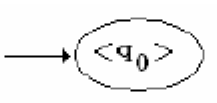
- Q' é o conjunto de todas as combinações, sem repetições, de estado de Q as quais são denotados por $<q_1q_2...q_n>$, onde q_j pertence a Q para j em {1, 2, ..., n}. Note-se que a ordem dos elementos não distingue mais combinações. Por exemplo, $<q_1q_2> = <q_2q_1>$;
- δ' tal que $\delta'(<q_1...q_n>, a) = <p_1...p_m>$ se e somente se, $\delta(\{q_1,...q_n\},a) = \{p_1, ..., p_m\}$. Ou seja, um estado de M' representa uma imagem dos estados de todos os caminhos alternativos de M;
- $<q_0>$ estado inicial;
- F' conjunto de todos os estados $<q_1q_2...q_n>$ pertencentes a Q' tal que alguma componente q_j

Algoritmo

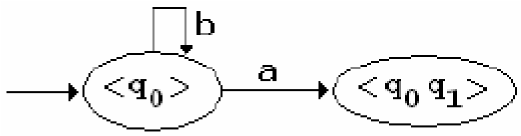
1. Crie um grafo G_d com um vértice rotulado por $<q_0>$. Identifique-o como sendo o estado inicial.
2. Repita os seguintes passos até que não faltem mais arestas:
   a. Tome um vértice $<q_{n1}, q_{n2}, ..., q_{nk}>$ de G_d que ainda não tenha aresta rotulada por $a \in \Sigma$.
   b. Compute as funções transições estendidas: $\delta^*(q_{n1},a), \delta^*(q_{n2},a), ..., \delta^*(q_{nk},a)$
   c. Produza $<q_{m1}, q_{m2}, ..., q_{ml}>$ como sendo a união das funções transições estendidas calculadas no passo anterior
   d. Crie um vértice no Gd rotulado por $<q_{m1}, q_{m2}, ..., q_{ml}>$, caso esse vértice não tenha sido criado.
   e. Adicione a Gd a aresta de $<q_{n1}, q_{n2}, ..., q_{nk}>$ até $<q_{m1}, q_{m2}, ..., q_{ml}>$ e rotule-a com o símbolo $a \in \Sigma$
3. Todo estado de Gd cujo rótulo contém algum $qf \in F$ (estados finais de AFN) é definido como sendo um estado final do AFD
4. se o AFN aceita a cadeia vazia, faça o estado inicial do AFD ser um estado final.

Exemplo 08:
Considere o exemplo o autômato AFN do exemplo 07.
$M = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{ q_f \}\}$
$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$
$\delta(q_0, b) = \{q_0\}$ $\delta(q_2, a) = \{q_f\}$

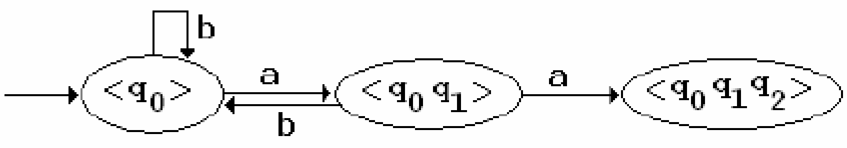
Para construir um AFD tem-se: $M' = \{Q', \{a,b\}, \delta' , <q_0>, F'\}$



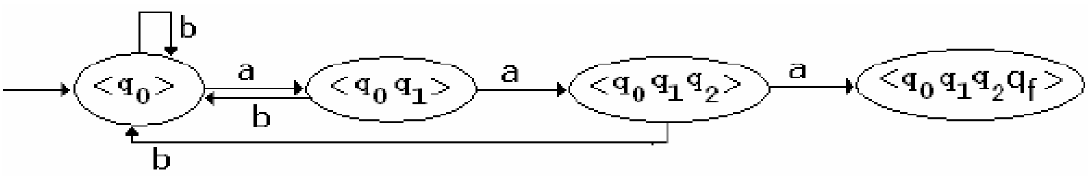
vértice $<q_0>$ e símbolo a
$\delta(<q_0>, a) = <q_0, q_1>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
vértice $<q_0>$ e símbolo b
$\delta(<q_0>, b) = <q_0>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$



vértice $<q_0, q_1>$ e símbolo a
$\delta(<q_0, q_1>, a) = <q_0, q_1, q_2>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ e $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$
vértice $<q_0, q_1>$ e símbolo b
$\delta(<q_0, q_1>, b) = <q_0>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$



vértice $<q_0, q_1, q_2>$ e símbolo a
$\delta(<q_0, q_1, q_2>, a) = <q_0, q_1, q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, a)=\{q_0, q_1\}$, e $\delta(q_1, a)=\{q_2\}$ e $\delta(q_2, a) = \{q_f\}$
vértice $<q_0, q_1, q_2>$ e símbolo b
$\delta(<q_0, q_1, q_2>, b) = <q_0>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$

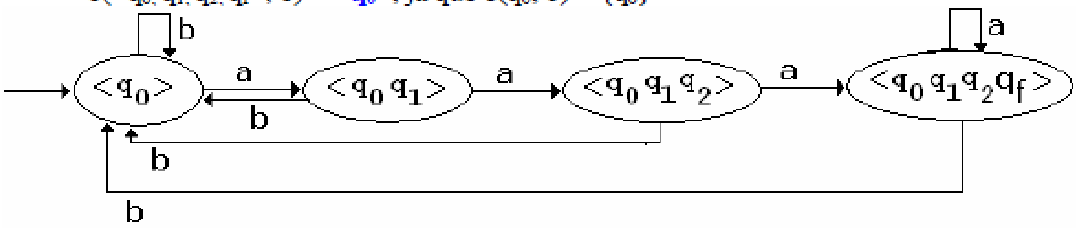


vértice $<q_0, q_1, q_2, q_f>$ e símbolo a

$\delta(<q_0, q_1, q_2, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, a)=\{q_0, q_1\}$, e $\delta(q_1, a)=\{q_2\}$ e $\delta(q_2, a)= \{q_f\}$

vértice $<q_0, q_1, q_2, q_f>$ e símbolo b

$\delta(<q_0, q_1, q_2, q_f>, b) = <q_0>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$



$F' = \{<q_0, q_1, q_2, q_f>\}$

Portanto o AFD, $M' = \{Q', \{a,b\}, \delta', <q_0>, F'\}$, a partir de AFN é:

$M' = \{Q', \{a,b\}, \delta', <q_0>, F'\}$
$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_1, q_2>, <q_0, q_1, q_2, q_f>\}$
$F' = \{<q_0, q_1, q_2, q_f>\}$
$\delta'(<q_0>, a) = <q_0, q_1>$
$\delta'(<q_0, q_1>, a) = <q_0, q_1, q_2>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_2>, a) = <q_0, q_1, q_2, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_2, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_2, q_f>$
$\delta'(<q_0>, b) = <q_0>$
$\delta'(<q_0, q_1>, b) = <q_0>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_2>, b) = <q_0>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_2, q_f>, b) = <q_0>$

O grafo:

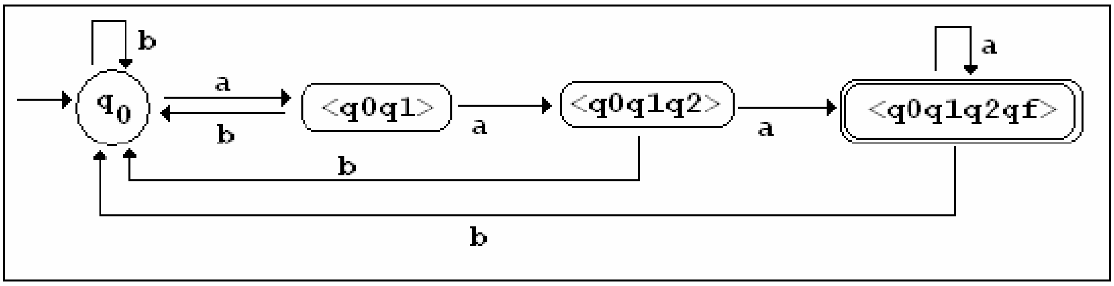


Figura 08. Autômato – exemplo 08

Exemplo 09:
Considere um AFN como segue:
$M = \{\{q_0, q_1, q_f\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_f\}\}$

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_f\}$ $\delta(q_f, 0) = \{q_1\}$ $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$

$\delta(q_0, 1) = \{q_f\}$ $\delta(q_f, 1) = \{q_1\}$

Para construir um AFD tem-se: $M' = \{Q', \{0,1\}, \delta', <q_0>, F'\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle\}$

vértice $\langle q_0 \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_0\rangle, 0) = \langle q_0, q_f\rangle$, já que $\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_f\}$

vértice $\langle q_0 \rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle q_0\rangle, 1) = \langle q_f\rangle$, já que $\delta(q_0, 1) = \{q_f$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle\}$

vértice $\langle q_0, q_f \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_0, q_f\rangle, 0) = \langle q_0, q_1, q_f\rangle$, já que $\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_f\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{q_1\}$

vértice $\langle q_0, q_f\rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle q_0, q_f\rangle, 1) = \langle q_1, q_f\rangle$, já que $\delta(q_0, 1) = \{q_f\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{q_1\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle\}$

vértice $\langle q_f \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_f\rangle, 0) = \langle q_1\rangle$, já que $\delta(q_f, 0) = \{q_1\}$

vértice $\langle q_f \rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle q_f\rangle, 1) = \langle q_1\rangle$, já que $\delta(q_f, 1) = \{q_1\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle, \langle q_1\rangle\}$

vértice $\langle q_0, q_1, q_f \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_0, q_1, q_f\rangle, 0) = \langle q_0, q_1, q_f \rangle$, já que $\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_f\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{q_1\}$

vértice $\langle q_0, q_1, q_f\rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle q_0, q_1, q_f\rangle, 1) = \langle q_1, q_f\rangle$, já que $\delta(q_0, 1) = \{q_f\}$, $\delta(q_f, 1) = \{q_1\}$ e $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle, \langle q_1\rangle\}$

vértice $\langle q_1, q_f \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_1, q_f\rangle, 0) = \langle q_1\rangle$, já que $\delta(q_1, 0) = \{\lambda\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{q_1\}$

vértice $\langle q_1, q_f\rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle q_1, q_f\rangle, 1) = \langle q_1\rangle$, já que $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{q_1\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle, \langle q_1\rangle\}$

vértice $\langle q_1 \rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle q_1\rangle, 0) = \langle \lambda\rangle$, já que $\delta(q_1, 0) = \{\lambda\}$

vértice $\langle q_1\rangle$ e símbolo 1

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle, \langle q_1\rangle, \langle \lambda\rangle\}$

vértice $\langle \lambda\rangle$ e símbolo 0

$\delta'(\langle \lambda\rangle, 0) = \langle \lambda\rangle$, já que $\delta(\lambda, 0) = \{\lambda\}$

vértice $\langle \lambda\rangle$ e símbolo 1

$\delta'(\langle \lambda\rangle, 1) = \langle \lambda\rangle$, já que $\delta(\lambda, 1) = \{\lambda\}$

Portanto, $M' = \{Q', \{0,1\}, \delta', \langle q_0\rangle, F'\}$

$Q' = \{\langle q_0\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle, \langle q_1, q_f\rangle, \langle q_1\rangle, \langle \lambda\rangle\}$

$F' = \{\langle q_f\rangle, \langle q_0, q_f\rangle, \langle q_0, q_1, q_f\rangle\}$

$\delta'(\langle q_0\rangle, 0) = \langle q_0, q_f\rangle$

$\delta'(\langle q_0\rangle, 1) = \langle q_f\rangle$

$\delta'(<q_0, q_f>, 0) = <q_0, q_1, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_f>, 1) = <q_1, q_f>$
$\delta'(<q_f>, 0) = <q_1>$
$\delta'(<q_f>, 1) = <q_1>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, 0) = <q_0, q_1, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, 1) = <q_1, q_f>$
$\delta'(<q_1, q_f>, 0) = <q_1>$
$\delta'(<q_1, q_f>, 1) = <q_1>$
$\delta'(<q_1>, 0) = <\lambda>$
$\delta'(<q_1>, 1) = <q_1>$
$\delta'(<\lambda>, 0) = <\lambda>$
$\delta'(<\lambda>, 1) = <\lambda>$

Exemplo 10:
Considere um AFN como segue:
$M = \{\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{0,1\}, \delta , q_0, \{ q_f \}\}$

$\delta(q_0, 0) = \{q_1\}$	$\delta(q_1, 0) = \{q_0\}$	$\delta(q_2, 0) = \{q_3\}$	$\delta(q_3, 0) = \{q_2\}$
$\delta(q_0, 1) = \{q_2, q_f\}$	$\delta(q_1, 1) = \{q_3, q_f\}$	$\delta(q_2, 1) = \{q_0, q_f\}$	$\delta(q_3, 1) = \{q_1, q_f\}$

Para construir um AFD tem-se: $M' = \{Q', \{0,1\}, \delta' , <q_0>, F'\}$

$Q' = \{<q_0>\}$
vértice $<q_0>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_0>, 0) = <q_1>$, já que $\delta(q_0, 0) = \{q_1\}$
vértice $<q_0>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_0>, 1) = <q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, 1) = \{q_2, q_f\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>\}$
vértice $<q_1>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_1>, 0) = <q_0>$, já que $\delta(q_1, 0) = \{q_0\}$
vértice $<q_1>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_1>, 1) = <q_3, q_f>$, já que $\delta(q_1, 1) = \{q_3, q_f\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>\}$
vértice $<q_2, q_f>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_2, q_f>, 0) = <q_3>$, já que $\delta(q_2, 0) = \{q_3\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{\lambda\}$
vértice $<q_2, q_f>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_2, q_f>, 1) = <q_0, q_f>$, já que $\delta(q_2, 1) = \{q_0, q_f\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{\lambda\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>\}$
vértice $<q_3, q_f>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_3, q_f>, 0) = <q_2>$, já que $\delta(q_3, 0) = \{q_2\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{\lambda\}$
vértice $<q_3, q_f>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_3, q_f>, 1) = <q_1, q_f>$, já que $\delta(q_3, 1) = \{q_1, q_f\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{\lambda\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>, <q_2>, <q_1, q_f>\}$
vértice $<q_3>$ e símbolo 0

$\delta'(<q_3>, 0) = <q_2>$, já que $\delta(q_3, 0) = \{q_2\}$
vértice $<q_3>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_3>, 1) = <q_3, q_f>$, já que $\delta(q_3, 1) = \{q_1, q_f\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>, <q_2>, <q_1, q_f>\}$
vértice $<q_0, q_f>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_0, q_f>, 0) = <q_1>$, já que $\delta(q_0, 0) = \{q_1\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{\lambda\}$
vértice $<q_0, q_f>$ e símbolo
$\delta'(<q_0, q_f>, 1) = <q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, 1) = \{q_2, q_f\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{\lambda\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>, <q_2>, <q_1, q_f>\}$
vértice $<q_2>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_2>, 0) = <q_3>$, já que $\delta(q_2, 0) = \{q_3\}$
vértice $<q_2>$ e símbolo 1
$\delta'(<q_2>, 1) = <q_0, q_f>$, já que $\delta(q_2, 1) = \{q_0, q_f\}$
$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>, <q_2>, <q_1, q_f>\}$
vértice $<q_1, q_f>$ e símbolo 0
$\delta'(<q_1, q_f>, 0) = <q_0>$, já que $\delta(q_1, 0) = \{q_0\}$ e $\delta(q_f, 0) = \{\lambda\}$
vértice $<q_1, q_f>$ e símbolo
$\delta'(<q_1, q_f>, 1) = <q_3, q_f>$, já que $\delta(q_1, 1) = \{q_3, q_f\}$ e $\delta(q_f, 1) = \{\lambda\}$

Portanto,
$M' = \{Q', \{0,1\}, \delta', <q_0>, F'\}$
$Q' = \{<q_0>, <q_1>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>, <q_3>, <q_0, q_f>, <q_2>, <q_1, q_f>\}$
$F' = \{<q_0, q_f>, <q_1, q_f>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>\}$
$\delta'(<q_0>, 0) = <q_1>$
$\delta'(<q_0>, 1) = <q_2, q_f>$
$\delta'(<q_1>, 0) = <q_0>$
$\delta'(<q_1>, 1) = <q_3, q_f>$
$\delta'(<q_2>, 0) = <q_2>$
$\delta'(<q_2>, 1) = <q_0, q_f>$
$\delta'(<q_3>, 0) = <q_2>$
$\delta'(<q_3>, 1) = <q_3, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_f>, 0) = <q_1>$
$\delta'(<q_0, q_f>, 1) = <q_2, q_f>$
$\delta'(<q_1, q_f>, 0) = <q_0>$
$\delta'(<q_1, q_f>, 1) = <q_3, q_f>$
$\delta'(<q_2, q_f>, 0) = <q_3>$
$\delta'(<q_2, q_f>, 1) = <q_0, q_f>$
$\delta'(<q_3, q_f>, 0) = <q_2>$
$\delta'(<q_3, q_f>, 1) = <q_1, q_f>$

Exemplo 11:
Considere um AFN como segue:
$M = \{\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_f\}\}$
$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $\delta(q_1, a) = \{q_f\}$ $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$

$\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$ $\delta(q_2, b) = \{q_f\}$ $\delta(q_f, b) = \{q_f\}$
Para construir um AFD tem-se: $M' = \{Q', \{a,b\}, \delta', <q_0>, F'\}$

$Q' = \{<q_0>\}$
vértice $<q_0>$ e símbolo a
$\delta'(<q_0>, a) = <q_0, q_1>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
vértice $<q_0>$ e símbolo b
$\delta'(<q_0>, b) = <q_0, q_2>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_2>\}$
vértice $<q_0, q_1>$ e símbolo a
$\delta'(<q_0, q_1>, a) = <q_0, q_1, q_f>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ e $\delta(q_1, a) = \{q_f\}$
vértice $<q_0, q_1>$ e símbolo b
$\delta'(<q_0, q_1>, b) = <q_0, q_2>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$ e $\delta(q_1, b) = \{\lambda\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_2>, <q_0, q_1, q_f>\}$
vértice $<q_0, q_2>$ e símbolo a
$\delta'(<q_0, q_2>, a) = <q_0, q_1>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ e $\delta(q_2, a) = \{\lambda\}$
vértice $<q_0, q_2>$ e símbolo b
$\delta'(<q_0, q_2>, b) = <q_0, q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$ e $\delta(q_2, b) = \{q_f\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_2>, <q_0, q_1, q_f>, <q_0, q_2, q_f>\}$
vértice $<q_0, q_1, q_f>$ e símbolo a
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_f>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_f\}$ e $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$
vértice $<q_0, q_1, q_f>$ e símbolo b
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, b) = <q_0, q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(q_1, b) = \{\lambda\}$ e $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$

$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_2>, <q_0, q_1, q_f>, <q_0, q_2, q_f>\}$
vértice $<q_0, q_2, q_f>$ e símbolo a
$\delta'(<q_0, q_2, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_f>$, já que $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_2, a) = \{\lambda\}$ e $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$
vértice $<q_0, q_1, q_f>$ e símbolo b
$\delta'(<q_0, q_2, q_f>, b) = <q_0, q_2, q_f>$, já que $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(q_2, b) = \{q_f\}$ e $\delta(q_f, a) = \{q_f\}$

Portanto,
$M' = \{Q', \{a,b\}, \delta', <q_0>, F'\}$
$Q' = \{<q_0>, <q_0, q_1>, <q_0, q_2>, <q_0, q_1, q_f>, <q_0, q_2, q_f>\}$
$F' = \{<q_0, q_f>, <q_1, q_f>, <q_2, q_f>, <q_3, q_f>\}$
$\delta'(<q_0>, a) = <q_0, q_1>$
$\delta'(<q_0>, b) = <q_0, q_2>$
$\delta'(<q_0, q_1>, a) = <q_0, q_1, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_1>, b) = <q_0, q_2>$
$\delta'(<q_0, q_2>, a) = <q_0, q_1>$
$\delta'(<q_0, q_2>, b) = <q_0, q_2, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_1, q_f>, b) = <q_0, q_2, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_2, q_f>, a) = <q_0, q_1, q_f>$
$\delta'(<q_0, q_2, q_f>, b) = <q_0, q_2, q_f>$

5. Redução de estados de um autômato finito

<u>Definição 07:</u>

Um autômato mínimo de uma Linguagem Regular L é um Autômato Finito Determinístico $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = L(M)$ e que, para qualquer outro Autômato Finito Determinístico $M' = (Q', \Sigma', \delta', q_{0'}, F')$ tal que $L = L(M')$, tem-se que $\#Q' >= \#Q$.

Um autômato Finito a ser minimizado deve satisfazer aos seguintes pré-requisitos:

1. Deve ser Determinístico (AFD)
2. Não pode ter estados inacessíveis (não atingíveis a partir do estado inicial)
3. A função programa deve ser total (a partir de qualquer estado são previstas transições para todos os símbolos do alfabeto)

Caso o autômato não satisfaça algum dos pré-requisitos, é necessário gerar um autômato equivalente:

1. gerar um AFD equivalente
2. eliminar os estados inacessíveis e suas correspondentes transições
3. para transformar a função transição em total, é suficiente introduzir um novo estado não-final d e incluir as transições não previstas, tendo d como estado destino. Por fim, incluir um ciclo em d para todos os símbolos do alfabeto.

Algoritmo de minimização

Suponha um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que satisfaz aos pré-requisitos de minimização. Os passos do algoritmo de minimização são os seguintes:

1. TABELA. Construir uma tabela relacionando os estados distintos, onde cada par de estados ocorre somente uma vez.

2. MARCAÇÃO DOS ESTADOS TRIVIALMENTE NÃO EQUIVALENTES. Marcar todos os pares do tipo {estado final, estado não-final}, pois obviamente, estados finais não são equivalentes a não-finais.

3. MARCAÇÃO DOS ESTADOS NÃO EQUIVALENTES. Para cada par $\{q_u, q_v\}$ não marcado e para símbolo $a \in \Sigma$, suponha que $\delta(q_u, a) = p_u$ e $\delta(q_v, a) = p_v$ e:
   a. Se $p_u = p_v$, então q_u é equivalente a q_v para o símbolo a e não deve ser marcado;
   b. Se $p_u \neq p_v$ e o par $\{p_u, p_v\}$ não estão marcados, então $\{q_u, q_v\}$ é incluído em uma lista a partir de $\{p_u, p_v\}$ para posterior análise;
   c. Se $p_u \neq p_v$ e o par $\{p_u, p_v\}$ estão marcados, então:
      - $\{q_u, q_v\}$ não é equivalente e deve ser marcado
      - se $\{q_u, q_v\}$ encabeça uma lista de pares, então marcar todos pares da lista (recursivamente)

4. UNIFICAÇÃO DOS ESTADOS EQUIVALENTES. Os estados dos pares não marcados são equivalentes e podem ser unificados como segue:
   a. A equivalência de estados é transitiva;
   b. pares de estados não finais equivalentes podem ser unificados como um único estado não final;
   c. Pares de estados finais equivalentes podem ser unificados como um único estado final;
   d. Se algum dos estados equivalentes é inicial, então correspondente estado unificado é inicial

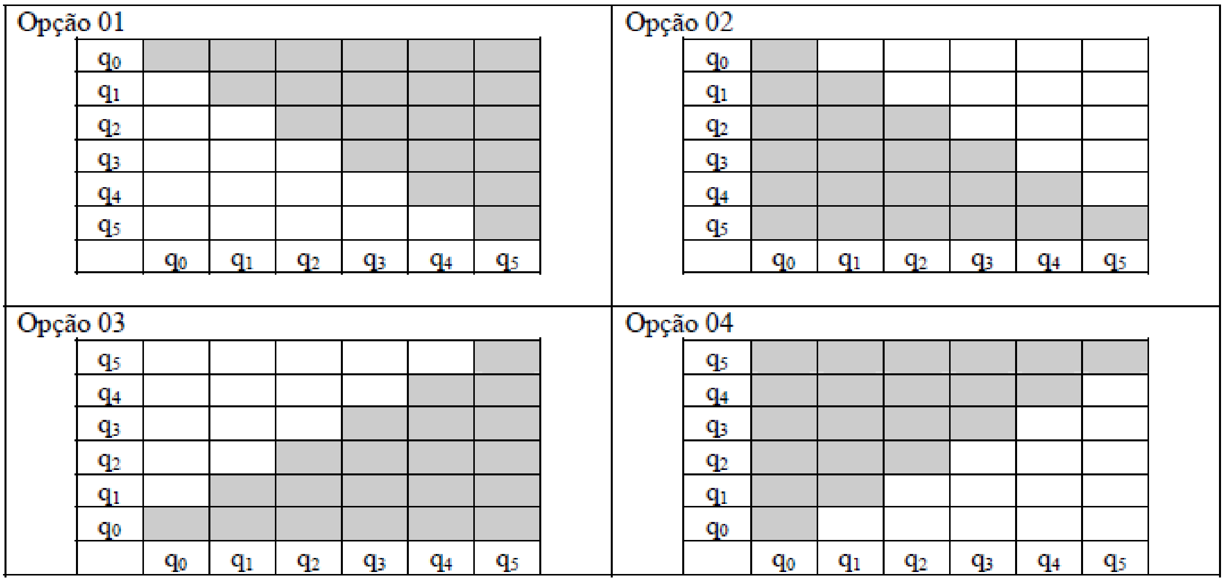
5. EXCLUSÃO DOS ESTADOS INÚTEIS. Por fim, os estados chamados inúteis devem ser excluídos. Um estado q é inútil se é não final e a partir de q não é possível atingir um estão final. Deve-se reparar que o estado d (se incluído) sempre é inútil.

Exemplo 11:
Considere um AFD como segue:
$M = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{q_0, q_4, q_5\}\}$

$\delta(q_0, a) = q_2$	$\delta(q_1, a) = q_1$	$\delta(q_2, a) = q_4$	$\delta(q_3, a) = q_5$
$\delta(q_0, b) = q_1$	$\delta(q_1, b) = q_0$	$\delta(q_2, b) = q_5$	$\delta(q_3, b) = q_4$
$\delta(q_4, a) = q_3$	$\delta(q_4, b) = q_2$	$\delta(q_5, a) = q_2$	$\delta(q_5, b) = q_3$

Percebe-se que os pré-requisitos (1, 2 e 3) são satisfeitos. Então se pode fazer a minimização.
Para construir um AFM tem-se:

PASSO 1. TABELA
Pode-se montar a tabela em qualquer formato, porém deve-se ater ao fato de combinar todos os pares. Veja algumas situações:



Nesta apostila iremos adotar a Opção 01

PASSO 2. MARCAÇÃO DOS ESTADOS TRIVIALMENTE NÃO EQUIVALENTES.

Marcar todos os pares do tipo {estado final, estado não-final}, ou seja,

Estados finais: $\{q_0, q_4, q_5\}$
Estados não finais: $\{q_1, q_2, q_3\}$

Então, devem ser marcados, na tabela, os pares: $\{q_0, q_1\}$, $\{q_0, q_2\}$, $\{q_0, q_3\}$,
$\{q_4, q_1\}$, $\{q_4, q_2\}$, $\{q_4, q_3\}$,
$\{q_5, q_1\}$, $\{q_5, q_2\}$, $\{q_5, q_3\}$

q_0						
q_1	X					
q_2	X					
q_3	X					
q_4		X	X	X		
q_5		X	X	X		
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

PASSO 3. MARCAÇÃO DOS ESTADOS NÃO EQUIVALENTES

Para isso, percorrem-se todos os pares não marcados na tabela, ou seja,

$\{q_0, q_4\}$, $\{q_0, q_5\}$, $\{q_1, q_2\}$, $\{q_1, q_3\}$, $\{q_3, q_2\}$, $\{q_5, q_4\}$

e verifica se são ou não equivalentes.

Para o par: $\{q_0, q_4\}$

$\delta(q_0, a) = q_2$ $\quad \delta(q_4, a) = q_3$ forma o par $\{q_2, q_3\}$, $q_2 \neq q_3$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_0, b) = q_1$ $\quad \delta(q_4, b) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

Para o par: $\{q_0, q_5\}$

$\delta(q_0, a) = q_2$ $\quad \delta(q_5, a) = q_2$ forma o par $\{q_2, q_2\}$, $q_2 = q_2$ e o par é descartado (3.a)
$\delta(q_0, b) = q_1$ $\quad \delta(q_5, b) = q_3$ forma o par $\{q_1, q_3\}$, $q_1 \neq q_3$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

Para o par: $\{q_1, q_2\}$

$\delta(q_1, a) = q_1$ $\quad \delta(q_2, a) = q_4$ forma o par $\{q_1, q_4\}$, $q_1 \neq q_4$ e o par está marcado (3.a) – marca $\{q_1, q_2\}$
$\delta(q_1, b) = q_0$ $\quad \delta(q_2, b) = q_5$ ....

Como vai marcar $\{q_1, q_2\}$ e o par $\{q_0, q_4\}$ estava esperando que $\{q_1, q_2\}$ fosse marcado, então serão marcados os dois pares: $\{q_1, q_2\}$ e $\{q_0, q_4\}$.

q_0						
q_1	X					
q_2	X	*X*				
q_3	X					
q_4	*X*	X	X	X		
q_5		X	X	X		
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Para o par: $\{q_1, q_3\}$

$\delta(q_1, a) = q_1$ $\quad \delta(q_3, a) = q_5$ forma o par $\{q_1, q_5\}$, $q_1 \neq q_5$ e o par está marcado (3.a) – marca $\{q_1, q_3\}$
$\delta(q_1, b) = q_0$ $\quad \delta(q_3, b) = q_4$ ....

Como vai marcar $\{q_1, q_3\}$ e o par $\{q_0, q_5\}$ estava esperando que $\{q_1, q_3\}$ fosse marcado, então serão marcados os dois pares: $\{q_1, q_3\}$ e $\{q_0, q_5\}$.

q_0						
q_1	X					
q_2	X	X				
q_3	X	*X*				
q_4	X	X	X	X		
q_5	*X*	X	X	X		
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Para o par: $\{q_3, q_2\}$

$\delta(q_2, a) = q_4$ $\delta(q_3, a) = q_5$ forma o par $\{q_4, q_5\}$, $q_4 \neq q_5$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

$\delta(q_2, b) = q_5$ $\delta(q_3, b) = q_4$ forma o par $\{q_5, q_4\}$, $q_5 \neq q_4$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

Para o par: $\{q_5, q_4\}$

$\delta(q_5, a) = q_2$ $\delta(q_4, a) = q_3$ forma o par $\{q_2, q_3\}$, $q_2 \neq q_3$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

$\delta(q_5, b) = q_3$ $\delta(q_4, b) = q_2$ forma o par $\{q_3, q_2\}$, $q_3 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

PASSO 4. UNIFICAÇÃO DOS ESTADOS EQUIVALENTES

Foram verificados todos os pares e os pares $\{q_3, q_2\}$ e $\{q_5, q_4\}$ ficaram ser serem marcados. Portanto:

(1) como $\{q_3, q_2\}$ não foi marcado, então q_3 é equivalente a q_2. Cria-se o estado q_{23} para unificá-los.

(2) como $\{q_5, q_4\}$ não foi marcado, então q_5 é equivalente a q_4. Cria-se o estado q_{45} para unificá-los.

PASSO 5. EXCLUSÃO DOS ESTADOS INÚTEIS

Serão excluídos os estados: q_2 , q_3, q_4, q_5

Então:

$M' = \{\{q_0, q_1, q_{23}, q_{45}\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{q_0, q_{45}\}\}$

$\delta(q_0, a) = q_{23}$ $\delta(q_1, a) = q_1$ $\delta(q_{23}, a) = q_{45}$ $\delta(q_{45}, a) = q_{23}$

$\delta(q_0, b) = q_1$ $\delta(q_1, b) = q_0$ $\delta(q_{23}, b) = q_{45}$ $\delta(q_{45}, b) = q_{23}$

Exemplo 12:

Considere um AFD como segue:

$M = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta , q_0, \{q_4\}\}$

$\delta(q_0, 0) = q_1$ $\delta(q_1, 0) = q_2$ $\delta(q_2, 0) = q_1$

$\delta(q_0, 1) = q_3$ $\delta(q_1, 1) = q_4$ $\delta(q_2, 1) = q_4$

$\delta(q_3, 0) = q_2$ $\delta(q_4, 0) = q_4$

$\delta(q_3, 1) = q_4$ $\delta(q_4, 1) = q_4$

PASSO 1. TABELA

q_0					
q_1					
q_2					
q_3					
q_4					
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

PASSO 2. MARCAÇÃO DOS ESTADOS TRIVIALMENTE NÃO EQUIVALENTES.
Marcar todos os pares do tipo {estado final, estado não-final}, ou seja,

Estados finais: q_4

Estados não finais: $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Então deve marcar na tabela os pares: $\{q_4, q_0\}, \{q_4, q_1\}, \{q_4, q_2\}, \{q_4, q_3\}$

q_0					
q_1					
q_2					
q_3					
q_4	X	X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

PASSO 3. MARCAÇÃO DOS ESTADOS NÃO EQUIVALENTES
Para isso deve percorrer todos os pares não marcados na tabela, ou seja,

$\{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}$

e verificar se são não equivalentes.

O par: $\{q_0, q_1\}$

$\delta(q_0, 0) = q_1$ $\delta(q_1, 0) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista

$\delta(q_0, 1) = q_3$ $\delta(q_1, 1) = q_4$ forma o par $\{q_3, q_4\}$, $q_3 \neq q_4$ e o par está marcado (3.a) – marcar $\{q_0, q_1\}$

q_0					
q_1	*X*				
q_2					
q_3					
q_4	X	X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

O par: $\{q_0, q_2\}$

$\delta(q_0, 0) = q_1$ $\delta(q_2, 0) = q_1$ forma o par $\{q_1, q_1\}$, $q_1 = q_1$ e o par é descartado (3.a)

$\delta(q_0, 1) = q_3$ $\delta(q_2, 1) = q_4$ forma o par $\{q_3, q_4\}$, $q_3 \neq q_4$ e o par está marcado (3.a) – marcar $\{q_0, q_2\}$

q_0					
q_1	X				
q_2	*X*				
q_3					
q_4	X	X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

O par: $\{q_0, q_3\}$
$\delta(q_0, 0) = q_1$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_0, 1) = q_3$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_3, q_4\}$, $q_3 \neq q_4$ e o par está marcado (3.a) – marcar $\{q_0, q_3\}$

q_0					
q_1	X				
q_2	X				
q_3	*X*				
q_4	X	X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

O par: $\{q_1, q_2\}$
$\delta(q_1, 0) = q_2$ $\delta(q_2, 0) = q_1$ forma o par $\{q_2, q_1\}$, $q_2 \neq q_1$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_1, 1) = q_4$ $\delta(q_2, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

O par: $\{q_1, q_3\}$
$\delta(q_1, 0) = q_2$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_2, q_2\}$, $q_2 = q_2$ e o par é descartado (3.a)
$\delta(q_1, 1) = q_4$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

O par: $\{q_2, q_3\}$
$\delta(q_2, 0) = q_1$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_2, 1) = q_4$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

O par: $\{q_0, q_3\}$
$\delta(q_0, 0) = q_1$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_0, 1) = q_3$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_3, q_4\}$, $q_3 \neq q_4$ e o par está marcado (3.a) – marcar $\{q_0, q_3\}$

q_0					
q_1	X				
q_2	X				
q_3	*X*				
q_4	X	X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

O par: $\{q_1, q_2\}$
$\delta(q_1, 0) = q_2$ $\delta(q_2, 0) = q_1$ forma o par $\{q_2, q_1\}$, $q_2 \neq q_1$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_1, 1) = q_4$ $\delta(q_2, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

O par: $\{q_1, q_3\}$
$\delta(q_1, 0) = q_2$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_2, q_2\}$, $q_2 = q_2$ e o par é descartado (3.a)
$\delta(q_1, 1) = q_4$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

O par: $\{q_2, q_3\}$
$\delta(q_2, 0) = q_1$ $\delta(q_3, 0) = q_2$ forma o par $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \neq q_2$ e o par não está marcado(3.b)– aguarde na lista
$\delta(q_2, 1) = q_4$ $\delta(q_3, 1) = q_4$ forma o par $\{q_4, q_4\}$, $q_4 = q_4$ e o par é descartado (3.a)

PASSO 4. UNIFICAÇÃO DOS ESTADOS EQUIVALENTES
Foram verificados todos os pares e os pares $\{q_3, q_2\}$ e $\{q_1, q_2\}$ e $\{q_1, q_3\}$ ficaram ser serem marcados.
Portanto:
(1) como $\{q_3, q_2\}$ não foi marcado, então q_3 é equivalente a q_2.
(2) como $\{q_1, q_2\}$ não foi marcado, então q_1 é equivalente a q_2.
(3) como $\{q_1, q_3\}$ não foi marcado, então q_1 é equivalente a q_3.
Então q_1 é equivalente a q_2 que é equivalente a q_3. Cria-se o estado q_{123} para unificá-los.

PASSO 5. EXCLUSÃO DOS ESTADOS INÚTEIS
Serão excluídos os estados: q_1, q_2 , q_3

Portanto:
$M' = \{\{q_0, q_{123}, q_4\}, \{0,1\}, \delta , q_0, \{q_4\}\}$

$\delta(q_0, 0) = q_{123}$	$\delta(q_{123}, 0) = q_{123}$	$\delta(q_4, 0) = q_4$
$\delta(q_0, 1) = q_{123}$	$\delta(q_{123}, 1) = q_4$	$\delta(q_4, 1) = q_4$

6. Expressões Regulares

A expressão regular é uma maneira de descrever os conjuntos regulares. Usa-se a expressão regular em construção de compiladores, editores, sistemas operacionais, protocolos, etc.

Trata-se de um formalismo denotacional, também considerado gerador, pois se pode inferir como construir ("gerar") as palavras de uma linguagem.

Uma expressão regular é definida a partir de conjuntos básicos e operações de concatenação e união.

Definição 08:

Uma **Expressão Regular** (ER) sobre um alfabeto Σ é definida como:

a) Φ (lê-se phi) é uma ER e denota uma linguagem vazia
b) λ é uma ER e denota a linguagem contendo exclusivamente a palavra vazia, ou seja, $\{\lambda\}$
c) x (símbolo do alfabeto Σ) é uma ER e denota a linguagem contendo a palavra $\{x\}$
d) se r e s são ER e denotam as linguagens R e S, respectivamente, então
  - d.1) (r) é uma ER
  - d.2) (r + s) é uma ER e denota a linguagem $R \cup S$
  - d.3) (r . s) é uma ER e denota a linguagem $RS = \{uv \mid u \in R \text{ e } v \in S\}$
  - d.4) r* é uma ER e denota a linguagem R*

OBS:
1. a concatenação sucessiva (*) tem precedência sobre a concatenação (.) e a união (+)
2. a concatenação tem precedência sobre a união.

Se r e s são ER e denotam as linguagens R e S, respectivamente, então

a) $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
b) $L(r . s) = L(r) . L(s)$ ou $L(r\, s) = L(r)\, L(s)$
c) $L((r)) = L(r)$
d) $L(r^*) = (L(r))^*$

Exemplo 13:
Seja $L = \{ a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$, então $L = \{ \lambda, a, b, aa, bb, ab, aab ...\}$
Considere as Linguagens:

$L_1 = \{a\}$
$L_2 = \{b\}$
$L_3 = \{a^k \mid k \geq 0\}$
$L_4 = \{b^l \mid l \geq 0\}$
$L_5 = \{ a^k b^l \mid k \geq 0, l \geq 0\}$

As linguagens L_1 e L_2 são conjuntos sobre o $\Sigma = \{a,b\}$ e por definição (8.c) é uma ER.
As linguagens L_3 e L_4 são obtidas por concatenação sucessiva, ou seja, $L_3 = L_1^*$ e $L_4 = L_2^*$ e portanto são ER (definição 8.d.4).
A linguagem L_5 é uma ER obtida pela concatenação de L_3 e L_4 (definição 8.d.3).
Assim, $L = \{ a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ pode ser denotada pela ER = a*b*

Outros exemplos de ER e suas linguagens:

ER	**Linguagem representada**
aa	Somente a cadeia **aa**
ba*	Cadeias que iniciam com **b**, seguida por zero ou mais **a**
(a+b)*	Todas as cadeias sobre {a,b}
(a+b)*aa(a+b)*	Todas as cadeias contendo aa como subcadeia
a*ba*ba*	Todas as cadeias contendo exatamente dois **b**
(a+b)*(aa+bb)	Todas as cadeias que terminam com aa ou bb
(a+λ)(b+ba)*	Todas as cadeias que não possuem dois a consecutivos

As principais leis algébricas das ER são apresentadas a seguir. Sejam R, S, T três ER quaisquer. Então:
(1) Associatividade:
- da união: (R + S) + T = R + (S + T)
- da concatenação: (R . S) . T = R . (S . T)

(2) Comutatividade:
- da união: R + S = S + R
- da concatenação: não se aplica

(3) Elemento neutro:
- da união: $R + \Phi = \Phi + R = R$
- da concatenação: $\Phi . R = R . \Phi = R$

(4) Distribuição da concatenação sobre a união:
- à esquerda: R . (S + T) = R.S + R.T
- à direita: (R + S) . T = R.T + S.T

<u>Teorema 01:</u>
Se r é uma Expressão Regular (ER), então L(r) é uma Linguagem Regular.

<u>Prova:</u>

Por definição, uma linguagem é Regular se, e somente se, é possível construir uma AF (determinístico ou não), que reconheça a linguagem.

a) **Base da indução**: seja r uma ER com zero operador. Então se tem:

$r = \Phi$ (linguagem vazia)

$r = \lambda$ (linguagem contendo exclusivamente a palavra vazia, ou seja, $\{\lambda\}$)

$r = x \ (x \in \Sigma)$

Com os Autômatos Finitos: $M_1 = \{\{q_0\}, \Phi, \delta_1, q_f, \Phi\}$

$M_2 = \{\{q_f\}, \Phi, \delta_2, q_f, \{q_f\}\}$

$M_3 = \{\{q_0, q_f\}, \{x\}, \delta_3, q_0, \{q_f\}\}$

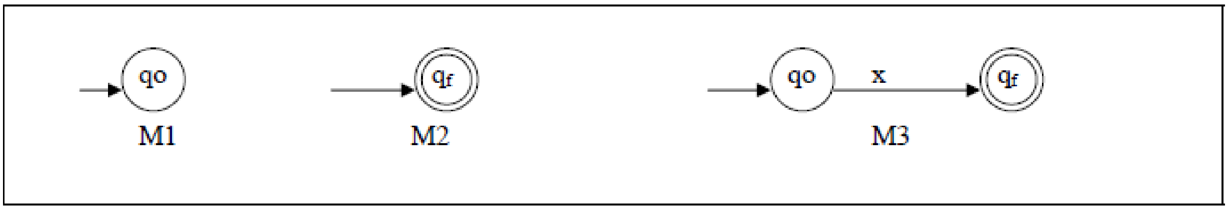


Figura 09. Base de indução

b) **Hipótese de Indução**: Seja r uma ER com até n (n > 0) operadores. Suponha que é possível definir um AF que aceita a linguagem gerada por r;

c) **Passo da Indução**: Seja r uma ER com (n+1) operadores. Então r pode ser representada por um dos seguintes casos, onde r_1 e r_2 possuem conjuntamente no máximo n operadores:

$r = r_1 + r_2$

$r = r_1 r_2$

$r = r_1{}^*$

Portanto por hipótese de indução é possível construir os autômatos:

$M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, \{q_{f1}\}\}$ e $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, \{q_{f2}\}\}$

Tais que $L(M_1) = L(r_1)$ e $L(M_2) = L(r_2)$.

Os AF´s, que aceitam a linguagem L(r), para cada caso, são como segue:

c.1) $r = r_1 + r_2$	$M = \{Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\}\}$	(vide Figura 10)
c.2) $r = r_1 r_2$	$M = \{Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_{01}, \{q_{f2}\}\}$	(vide Figura 11)
c.3) $r = r_1{}^*$	$M = \{Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}\}$	(vide Figura 12)

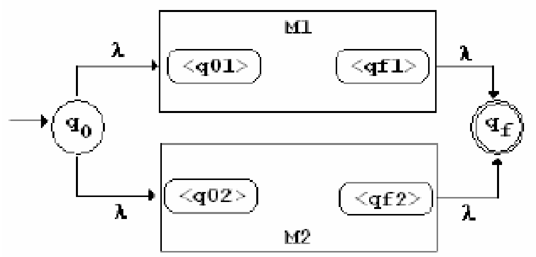


Figura 10. Adição de expressões regulares

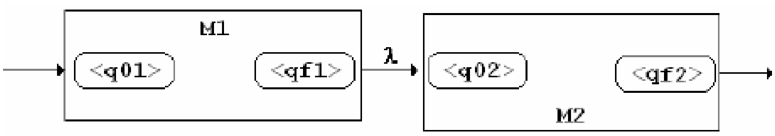


Figura 11. Multiplicação de expressões regulares

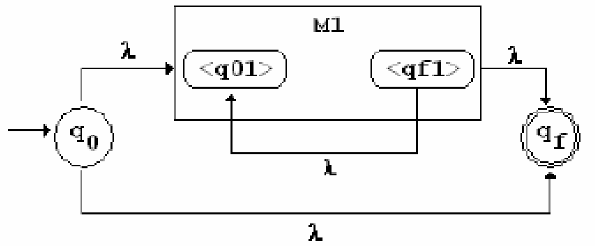


Figura 12. Concatenações sucessivas de expressões regulares

7. Gramática Regular

Definição 09:

Seja G = (V, T, P, S) uma **gramática** e sejam A e B elementos de V e w uma palavra de T*.
Então G é uma:
(a) Gramática Linear à Direita (GLD) se todas as regras de produção são da forma:

$A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$

(b) Gramática Linear à Esquerda (GLE) se todas as regras de produção são da forma:

$A \rightarrow Bw$ ou $A \rightarrow w$

(c) Gramática Linear Unitária à Direita (GLUD) se todas as regras de produção são como na linear à direita e, adicionalmente $|w| <= 1$

(d) Gramática Linear Unitária à Esquerda (GLUE) se todas as regras de produção são como na linear à esquerda e, adicionalmente $|w| <= 1$

Exemplo 14:

(a) G = ({S}, {x, y}, P, S)
P = { $S \rightarrow xyS$, $S \rightarrow x$}
Assim, G é uma GLD

(b) G = ({S_1, S_2, S_3}, {a, b}, P, S_1)
P = { $S_1 \rightarrow S_2ab$, $S_2 \rightarrow S_2ab \mid S_3$, $S_3 \rightarrow a$ }
Assim, G é uma GLE

(c) G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S)
P = { $S \rightarrow A$, $A \rightarrow aB \mid \lambda$, $B \rightarrow Ab$ }
Assim, G não é Linear

Definição 10:

Uma **Gramática Regular** é qualquer Gramática Linear

<u>Teorema 02:</u>

Se L é uma linguagem gerada por uma Gramática Regular, então L é uma **Linguagem Regular**.

<u>Prova:</u>

Para mostrar que uma linguagem é regular, é suficiente construir um AF que a reconheça.

Suponha G = (V, T, P, S) uma GLUD. Então o AF M = {Q, Σ , δ , q_0, F} com:

$Q = V \cup \{ q_f \}$

$\Sigma = T$

$q_0 = S$

$F = \{ q_f \}$

δ, como na tabela abaixo:

Tipo de Produção	Transição Gerada
$A \to \lambda$	$\delta(A, \lambda) = q_f$
$A \to a$	$\delta(A, a) = q_f$
$A \to B$	$\delta(A, \lambda) = B$
$A \to aB$	$\delta(A, a) = B$

Simula as derivações de G, ou seja, L(G) = L(M).

A demonstração que L(G) = L(M) é verdade de fato, está no número de derivações.

Seja α elemento de $(T \cup V)^*$ e w elemento de T^*, então:

(a) base de indução. Suponha $S \Rightarrow^1 \alpha$, então, se:

(a .1.) $\alpha = \lambda$, existe uma regra $S \to \lambda$ e assim para o AFM, $\delta(S, \lambda) = q_f$

(a .2.) $\alpha = a$, existe uma regra $S \to a$ e assim para o AFM, $\delta(S, a) = q_f$

(a .3.) $\alpha = A$, existe uma regra $S \to A$ e assim para o AFM, $\delta(S, \lambda) = A$

(a .4.) $\alpha = aA$, existe uma regra $S \to aA$ e assim para o AFM, $\delta(S, a) = A$

(b) hipótese de indução. Suponha que $S \Rightarrow^n \alpha$, n > 1, tal que, se:

(b.1.) $\alpha = w$, então $\delta^*(S, w) = q_f$

(b.2.) $\alpha = wA$, então $\delta^*(S, w) = A$

(c) passo da indução. Suponha que $S \Rightarrow^{n+1} \alpha$. Então ocorre a hipótese (b.2.) e $S \Rightarrow^n wA \Rightarrow^1 \alpha$

(c.1.) $\alpha = w\lambda$, existe uma regra $A \to \lambda$ e assim

$$\delta^*(S, w\lambda) = \delta(\delta^*(S, w),\lambda) = \delta(A, \lambda) = q_f$$

(c.2.) $\alpha = wb$, existe uma regra $A \to b$ e assim

$$\delta^* (S, wb) = \delta(\delta^* (S, w),b) = \delta(A, b) = q_f$$

(c.3.) $\alpha = wB$, existe uma regra $A \to B$ e assim

$$\delta^* (S, w\lambda) = \delta(\delta^* (S, w),\lambda) = \delta(A, \lambda) = B$$

(c.4.) $\alpha = wbB$, existe uma regra $A \to bB$ e assim

$$\delta^* (S, wb) = \delta(\delta^* (S, w),b) = \delta(A, b) = B$$

Exemplo 15:

Considere a GLUD, G = ({S, A, B}, {a,b}, P, S), onde P é:

$S \rightarrow aA$
$A \rightarrow bB|\lambda$
$B \rightarrow aA$

O AF M que reconhece a linguagem gerada por G é: M = ({S,A,B, q_f }, {a,b}, δ , S, {q_f }), tal que δ é dada na tabela abaixo:

Produção	Transição Gerada
$S \rightarrow aA$	$\delta(S, a) = A$
$A \rightarrow bB$	$\delta(A, b) = B$
$A \rightarrow \lambda$	$\delta(A, \lambda) = q_f$
$B \rightarrow aA$	$\delta(B, a) = A$

Teorema 03:

Se L é uma linguagem Regular, então existe uma Gramática Regular que gera L.

Prova:

Se L é uma Linguagem Regular, então existe um AFN M = {Q, Σ , δ , q_0, F} tal que L(M) = L. A idéia central da demonstração é construir uma GLD G a partir de M tal que L(G) = L(M).

Então G = (V, T, P, S) tal que: $V = Q \cup \{S\}$ e $T = \Sigma$

P é construído como segue:

Transição	Tipo de Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \lambda$
$\delta(q_i, a) = q_k$	$q_i \rightarrow a\, q_k$

Suponha w elemento de Σ*

a) base de indução: seja w tal que seu comprimento seja zero (|w|=0). Então a cadeia vazia pertence à linguagem L(M), logo q_0 é um estado final e assim $q_0 \rightarrow \lambda$

$$S \Rightarrow q_0 \Rightarrow \lambda$$

b) hipótese de indução. Seja w tal que |w| = n (n ≥ 1) e $\delta^*(q_0 , w) = q$. Então
   b.1) q não é estado final, então $S \Rightarrow wq$
   b.2) q é estado final, então $S \Rightarrow wq \Rightarrow w$

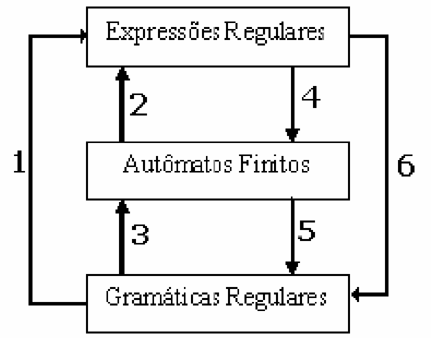
c) Passo de indução. Seja w tal que |wa| = n+1 e $\delta^*(q_0 , wa) = p$. Então $\delta(\delta^*(q_0 , w),a) = p$. Portanto ocorre somente a hipótese b.1 acima e se:
   c.1) p não é estado final, então $S \Rightarrow^n wq \Rightarrow^1 wap$
   c.2) p é estado final, então $S \Rightarrow^n wq \Rightarrow^1 wap \Rightarrow^1 wa$

Exemplo 16:
Seja M = ({q_0, q_1, q_2}, {a,b,c}, δ , q_0, {q_0, q_1, q_2})
Então G = ({q_0, q_1, q_2, S}, {a,b,c}, S, P), onde P é como a tabela abaixo:

Transição	Tipo de Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$Q_0 \rightarrow \lambda$
-	$Q_1 \rightarrow \lambda$
-	$Q_2 \rightarrow \lambda$
$\delta(q_0, a) = q_0$	$Q_0 \rightarrow a\ q_0$
$\delta(q_0, b) = q_1$	$Q_0 \rightarrow b\ q_1$
$\delta(q_1, b) = q_1$	$Q_1 \rightarrow b\ q_1$
$\delta(q_1, c) = q_2$	$Q_1 \rightarrow c\ q_2$
$\delta(q_2, c) = q_2$	$Q_2 \rightarrow c\ q_2$

8. Linguagens Regulares

Têm-se vários caminhos para descrever linguagens regulares: AFD, AFN, ER e gramáticas regulares. Algumas conexões entre esses conceitos foram definidas nesta apostila através de teoremas. Foram vistas as transformações de ER em Autômatos Finitos (4), Autômatos Finitos em Gramáticas Regulares (5), Gramáticas em Autômatos Finitos (3). As outras transformações podem ser encontradas nos livros de Referência.



Existem algumas questões sobre linguagens regulares que necessitam análise:
(1) Como determinar se uma linguagem é regular?
(2) Como verificar se uma linguagem regular é infinita ou finita (ou até mesmo vazia)?
(3) É possível analisar duas linguagens regulares e concluir se são iguais ou diferentes?
(4) A classe das linguagens regulares é fechada para operações de união, concatenação e intersecção?

Lema do bombeamento

Se L é uma Linguagem regular, então existe uma constante n tal que para qualquer palavra w de L onde $| w | \geq n$, w pode ser definida como $w = uvz$ onde $| uv | \leq n$, $| v | \geq 1$ e para todo $i \geq 0$, uv^iz é palavra de L.

8.1. Linguagens regulares e não regulares

Para mostrar que uma linguagem é regular é suficiente representá-la usando um dos formalismos apresentados (AF, ER, GR), já a prova de que ela não é regular necessita análise caso a caso. Uma forma é usar o lema do Bombeamento.

Exemplo 17:
Seja a linguagem L, não regular, sobre {a,b} sendo que
L = { w | w possui o mesmo número de símbolos a e b}

A prova que L não é regular é usando o lema do bombeamento e por absurdo.

Suponha L regular, então existe um AFD M com n estados que aceita L.
Seja $w = a^nb^n$
Pelo lema do bombeamento, w pode ser escrita como $w = uvz$, só que é um absurdo, já que como $|uv| \leq n$, uv é composta exclusivamente por símbolos a . Neste caso, por exemplo, uv^2z não pertence a L, pois não possui o mesmo número de símbolos a e b.

Para n = 4, w = aabb
1º caso: u = a, v = a, z = bb, $|uv| = |aa| = 2 \leq 4$, mas aa^2bb não pertence a L
2º caso: u = aa, v = b, z = b, $|uv| = |aab| = 3 \leq 4$, mas aab^2b não pertence a L

8.2. Linguagem regular vazia, finita ou infinita

Teorema 04:
Se L é uma linguagem Regular aceita por um AF M com n estados, então L é:
a.) vazia se, e somente se, M não aceita qualquer palavra w tal que $| w | < n$
b.) finita se, e somente se, M não aceita uma palavra w tal que $n \leq | w | < 2n$
c.) infinita se, e somente se, M aceita uma palavra w tal que $n \leq | w | < 2n$

Exemplo 18:
Considere o autômato $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{q_2\})$ com as funções de transições definidas abaixo:
$\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_2, b) = q_0$.
A linguagem reconhecida pelo autômato M é infinita, já que o autômato aceita uma palavra w tal que $n \leq | w | < 2n$, ou seja $3 \leq | w | < 6$ com w = aabaa com comprimento 5.

8.3. Igualdade de linguagens

<u>Teorema 05:</u>
Se M_1 e M_2 são autômatos finitos, então existe um algoritmo para determinar se $L(M_1) = L(M_2)$.

Pela definição 3 viu-se que se conseguirmos encontrar M_1 e M_2 equivalentes, $L(M_1) = L(M_2)$. Então existe um algoritmo para determinar se $L(M_1) = L(M_2)$ como os de redução de estados, transformação de AFN para AFD.

8.4. Operações fechadas sobre as linguagens regulares

<u>Teorema 06:</u>
A classe das linguagens regulares é fechada para as seguintes operações: união, concatenação, complemento e intersecção.

Diz-se que um conjunto é fechado sobre uma operação se o elemento obtido coma aplicação da operação pertence ao conjunto.

8.4.1. Fechamento para a união

Se L_1 é regular então existe um AFD $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$, tal que $L(M_1)= L_1$
Se L_2 é regular então existe um AFD $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$, tal que $L(M_2)= L_2$

Se for possível construir um AFD M_3, tal que $L(M_3)= (L_1 \cup L_2)$, então $L_1 \cup L_2$ é regular e a prova está feita.

Seja $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{03}, F_3\}$, então:

$Q_3 = \{ (q_i, q_j); q_i \in Q_1 \text{ e } q_j \in Q_2\}$
$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$\delta_3 ((q_i,q_j),a) = (\delta_1(q_i,a), \delta_2(q_j,a))$
$q_{03} = (q_{01},q_{02})$
$F_3 = \{(q_i,q_j); q_i \in F1 \text{ **ou** } q_j \in F2\}$

Exemplo 19:
L1 = {aw: w e {a,b}*}
L2 = {wa: w e {a,b}*}

Então $M_1 = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \delta_1, q_0, \{q_1\}\}$
Com $\delta_1 (q_0, a) = q_1$,
$\delta_1 (q_0, b) = q_2$,
$\delta_1 (q_1, a) = q_1$,
$\delta_1 (q_1, b) = q_1$,
$\delta_1 (q_2, a) = q_2$,
$\delta_1 (q_2, b) = q_2$.

Então $M_2 = \{\{q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta_1, q_3, \{q_4\}\}$
Com $\delta_2 (q_3, a) = q_4$,
$\delta_2 (q_3, b) = q_3$,
$\delta_2 (q_4, a) = q_4$,
$\delta_2 (q_4, b) = q_3$.

Assim o $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{03}, F_3\}$ será
$Q_3 = \{(q_i, q_j); q_i \in Q_1 \text{ e } q_j \in Q_2\} = \{(q_0, q_3), (q_0, q_4), (q_1, q_3), (q_1, q_4), (q_2, q_3), (q_2, q_4)\}$
$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$
$q_{03} = (q_1, q_3)$
$F_3 = \{(q_i, q_j); q_i \in F1 \textbf{ ou } q_j \in F2\} = \{(q_1, q_3) (q_1, q_4), (q_0, q_4), (q_2, q_4)\}$

$\delta_3 ((q_i, q_j), a) = (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a))$, então se tem:
$\delta_3 ((q_0, q_3), a) = (\delta_1 (q_0, a), \delta_2 (q_3, a)) = (q_1, q_4)$
$\delta_3 ((q_0, q_3), b) = (\delta_1 (q_0, b), \delta_2 (q_3, b)) = (q_2, q_3)$
$\delta_3 ((q_0, q_4), a) = (\delta_1 (q_0, a), \delta_2 (q_4, a)) = (q_1, q_4)$
$\delta_3 ((q_0, q_4), b) = (\delta_1 (q_0, b), \delta_2 (q_4, b)) = (q_2, q_3)$
$\delta_3 ((q_1, q_3), a) = (\delta_1 (q_1, a), \delta_2 (q_3, a)) = (q_1, q_4)$
$\delta_3 ((q_1, q_3), b) = (\delta_1 (q_1, b), \delta_2 (q_3, b)) = (q_1, q_3)$
$\delta_3 ((q_1, q_4), a) = (\delta_1 (q_1, a), \delta_2 (q_4, a)) = (q_1, q_4)$
$\delta_3 ((q_1, q_4), b) = (\delta_1 (q_1, b), \delta_2 (q_4, b)) = (q_1, q_3)$
$\delta_3 ((q_2, q_3), a) = (\delta_1 (q_2, a), \delta_2 (q_3, a)) = (q_2, q_4)$
$\delta_3 ((q_2, q_3), b) = (\delta_1 (q_2, b), \delta_2 (q_3, b)) = (q_2, q_3)$
$\delta_3 ((q_2, q_4), a) = (\delta_1 (q_2, a), \delta_2 (q_4, a)) = (q_2, q_4)$
$\delta_3 ((q_2, q_4), b) = (\delta_1 (q_2, b), \delta_2 (q_4, b)) = (q_2, q_3)$

8.4.2. Fechamento para a interseção

Se L_1 é regular então existe um AFD $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$, tal que $L(M_1)= L_1$
Se L_2 é regular então existe um AFD $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$, tal que $L(M_2)= L_2$

Se for possível construir um AFD M_3 , tal que $L(M_3)= (L_1 \cap L_2)$, então $L_1 \cap L_2$ é regular.

Seja $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{03}, F_3\}$, então:

$Q_3 = \{ (q_i, q_j); qi \in Q1 \text{ e } qj \in Q2\}$

$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\delta_3 ((qi,qj),a) = (\delta_1(qi,a), \delta_2(qj,a))$

$q_{03} = (q_{01},q_{02})$

$F_3 = \{(qi,qj); qi \in F1 \text{ e } qj \in F2\}$

Exemplo 20:
L1 = {aw: w e {a,b}*} e L2 = {wa: w e {a,b}*}

Assim o $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{03}, F_3\}$ será
$Q_3 = \{(q_i, q_j); q_i \in Q_1 \text{ e } q_j \in Q_2\} = \{(q_0, q_3), (q_0, q_4), (q_1, q_3), (q_1, q_4), (q_2, q_3), (q_2, q_4)\}$
$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$
$q_{03} = (q_1,q_3)$
$F_3 = \{(q_i,q_j); q_i \in F1 \text{ e } q_j \in F2\} = \{(q_1, q_4)\}$
$\delta_3 ((q_i,q_j),a) = (\delta_1(q_i,a), \delta_2(q_j,a))$, como no exemplo anterior para união.

8.4.3. Fechamento sobre concatenação

Se L_1 é regular então existe um AFD $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$, tal que $L(M_1)= L_1$
Se L_2 é regular então existe um AFD $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$, tal que $L(M_2)= L_2$

Se for possível construir um AFD M_3, tal que $L(M_3)= (L_1 . L_2)$, então $L_1 . L_2$ é regular.

Seja $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{03}, F_3\}$, então:

$Q_3 = Q1 \cup Q2$

$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$q_{03} = q_{01}$

$F_3 = F_2$

$\delta_3 (q_i, a) = \delta_1(q_i,a)$

$\delta_3 (q_j, a) = \delta_2(q_j,a)$

$\delta_3 (q_k, \lambda) = q_{03}$, onde $q_k \in F_1$

Exemplo 21:
Sejam L1 = {aw: w e {a,b}*} e L2 = {wa: w e {a,b}*}

Assim o $M_3 = \{Q_3, \Sigma_3, \delta_3, q_1, \{q_4\}\}$ será
$Q_3 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$

$\delta_3(q_0, a) = q_1$,
$\delta_3(q_0, b) = q_2$,
$\delta_3(q_1, a) = q_1$,
$\delta_3(q_1, b) = q_1$,

$\delta_3(q_2, a) = q_2$,
$\delta_3(q_2, b) = q_2$.
$\delta_3(q_3, a) = q_4$,
$\delta_3(q_3, b) = q_3$,
$\delta_3(q_4, a) = q_4$,
$\delta_3(q_4, b) = q_3$,
$\delta_3(q_1, \lambda) = q_3$

8.4.4. Fechamento sobre complemento

Seja uma linguagem regular sobre Σ^*. Seja $M = \{Q,\Sigma ,\delta ,q_0 ,F\}$, um AFD tal que $L(M) = L$. A idéia do que segue consiste em inverter as condições aceita/rejeita de M para reconhecer L'. Entretanto, como M pode rejeitar por indefinição é necessário modificar o autômato, garantindo que somente irá parar ao terminar de ler todas a entrada. Assim, a inversão das condições aceita/rejeita pode ser obtida transformando os estados finais em não finais e vice-versa.

A construção do AFD $M' = \{Q',\Sigma' ,\delta' ,q_{0'} ,F'\}$ tal que $L(M') = L'$ é como segue
$Q' = Q \cup \{d\}$
$F' = Q' - F$
δ' é como δ, com as seguintes transições adicionais, para todo $a \in \Sigma$:
$\delta'(q,a) = d$ se $\delta(q,a)$ não é definida
$\delta'(d,a) = d$
claramente o AFD M' construído acima é tal que $L(M') = L'$

Exemplo 22:
$L = \{aw: w \in \{a,b\}^*\}$
Então $M = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \delta , q_0, \{q_1\}\}$
Com $\delta(q_0, a) = q_1$,
$\delta(q_0, b) = q_2$,
$\delta(q_1, a) = q_1$,
$\delta(q_1, b) = q_1$,
$\delta(q_2, a) = q_2$,
$\delta(q_2, b) = q_2$.

Então $M' = \{Q',\Sigma' ,\delta' ,q_{0'} ,F'\}$ tal que $L(M') = L'$
$Q' = Q \cup \{d\} = \{q_0, q_1, q_2, d\}$
$F' = Q' - F = \{q_0, q_1, q_2, d\} - \{q_1\} = \{q_0, q_2, d\}$
Com $\delta'(q_0, a) = q_1$,
$\delta'(q_0, b) = q_2$,
$\delta'(q_1, a) = q_1$,
$\delta'(q_1, b) = q_1$,
$\delta'(q_2, a) = q_2$,
$\delta'(q_2, b) = q_2$,
$\delta'(d, a) = d$,
$\delta'(d, b) = d$.