Sistemas de Controle

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Notação:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

sendo:

$s = j\omega$: operador laplaciano, onde ω é a frequência de análise

A inversa de Laplace é dada por:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}\,dt$$

Transformada de Laplace

Propriedades:

Constante Multiplicativa: $$L[Af(t)] = AL[f(t)]$$

Soma ou Subtração de Funções: $$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]$$

Derivação de Funções: $$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

Transformada de Laplace

Propriedades:

Integração de Funções: $$L\left[\int_0^t f(t)\ dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

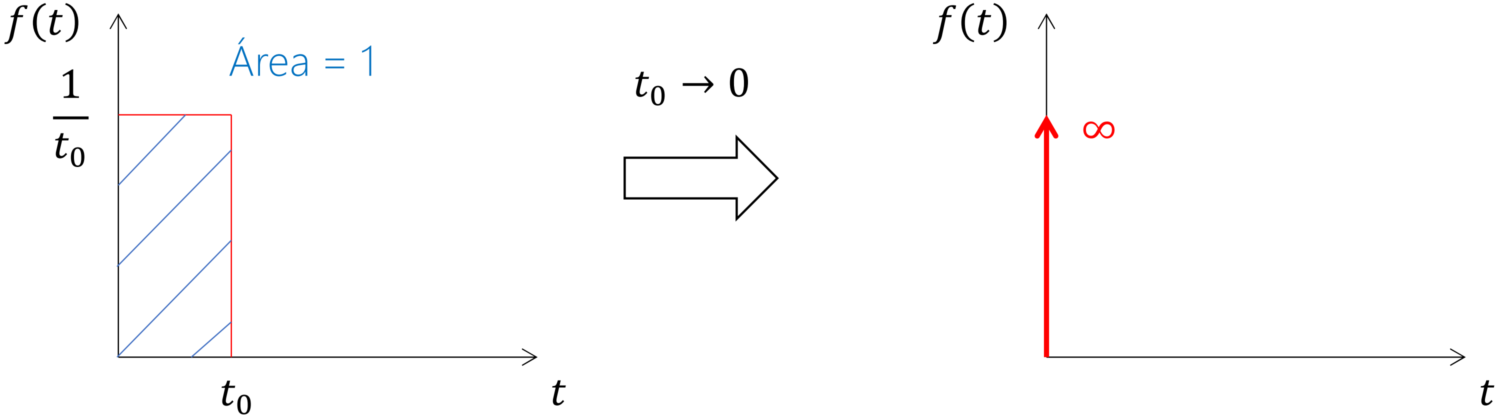
Teorema do Valor Inicial: $$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Teorema do Valor Final: $$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Transformada de Laplace

Funções Típicas:

Impulso Unitário

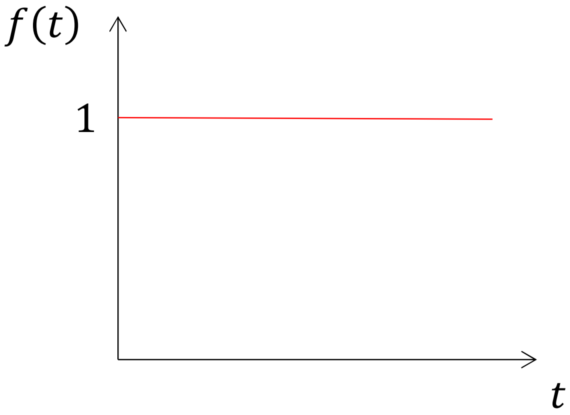


$$\boxed{L[f(t)] = 1}$$

Transformada de Laplace

Funções Típicas:

Degrau Unitário

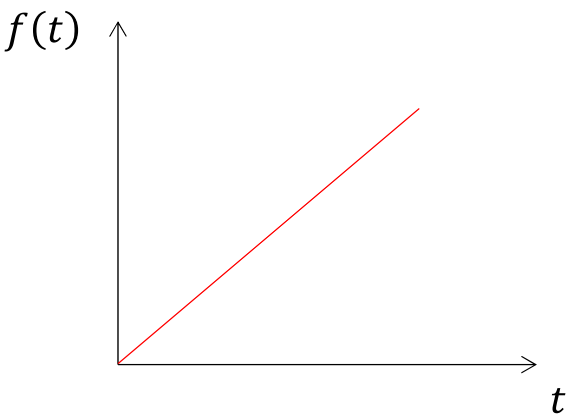


$$\boxed{L[f(t) = 1] = \frac{1}{s}}$$

Transformada de Laplace

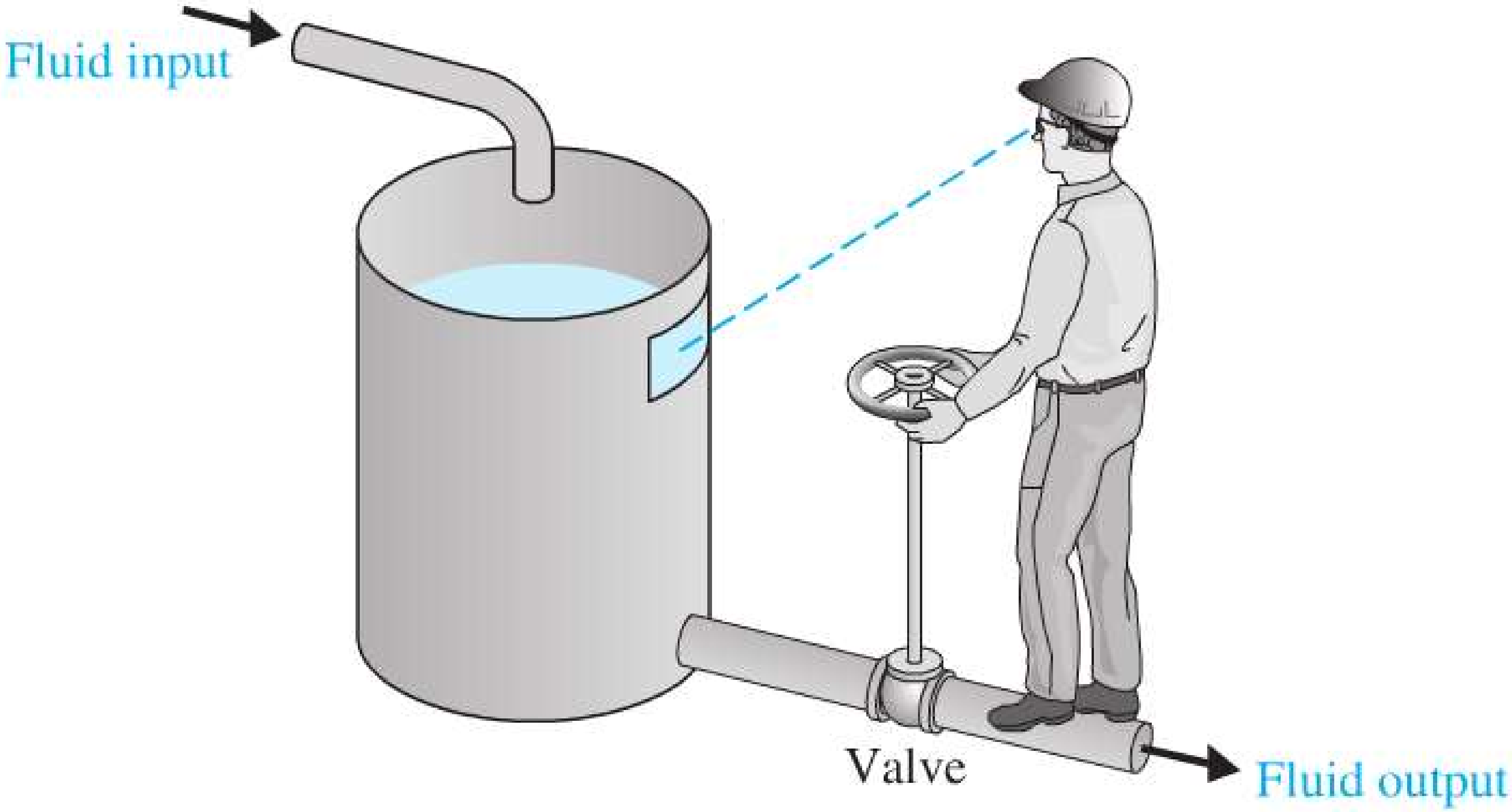
Funções Típicas:

Rampa



$$\boxed{L[f(t) = t] = \frac{1}{s^2}}$$

Sistemas com Fluidos



Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Frações Parciais

Exemplo: Obtenha $h(t)$ para a equação abaixo:

$$\tau \frac{dh}{dt} + h(t) = kq$$

sendo $h(0) = 0$ e q constante.

Resolução: Aplicando Laplace:

$$\tau s H(s) - \tau \cancelto{0}{h(0)} + H(s) = \frac{kq}{s}$$

Assim:

$$\boxed{H(s) = \frac{kq}{s(\tau s + 1)}}$$

Resolução

Decompondo em frações parciais:

$$H(s) = \frac{kq}{s(\tau s + 1)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{\tau s + 1}$$

ou

$$H(s) = \frac{kq}{s(\tau s + 1)} = \frac{a_1(\tau s + 1) + a_2 s}{s(\tau s + 1)}$$

Desta forma, tem-se:

$$a_1(\tau s + 1) + a_2 s = kq$$

Assim:

$$\begin{cases} a_1 \tau s + a_2 s = 0 \\ a_1 = kq \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_2 = -a_1 \tau = -kq\tau}$$

Resolução

Portanto:

$$H(s) = \frac{kq}{s(\tau s + 1)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{\tau s + 1} = \frac{kq}{s} - \frac{kq\tau}{\tau s + 1}$$

ou

$$H(s) = kq\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right)$$

ou ainda

$$\boxed{H(s) = kq\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right)}$$

Resolução

Sabendo que:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad \text{e} \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

Logo:

$$L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[kq\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right)\right]$$

resultando em:

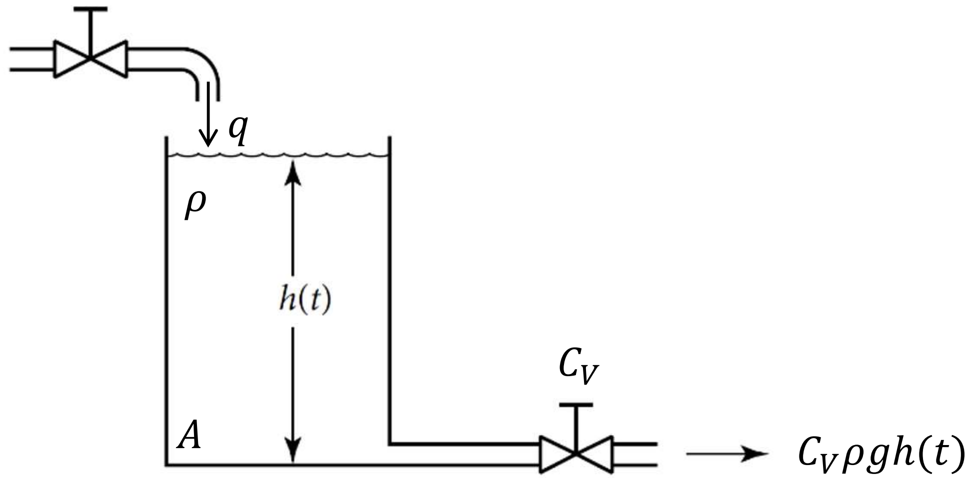
$$\boxed{h(t) = kq\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

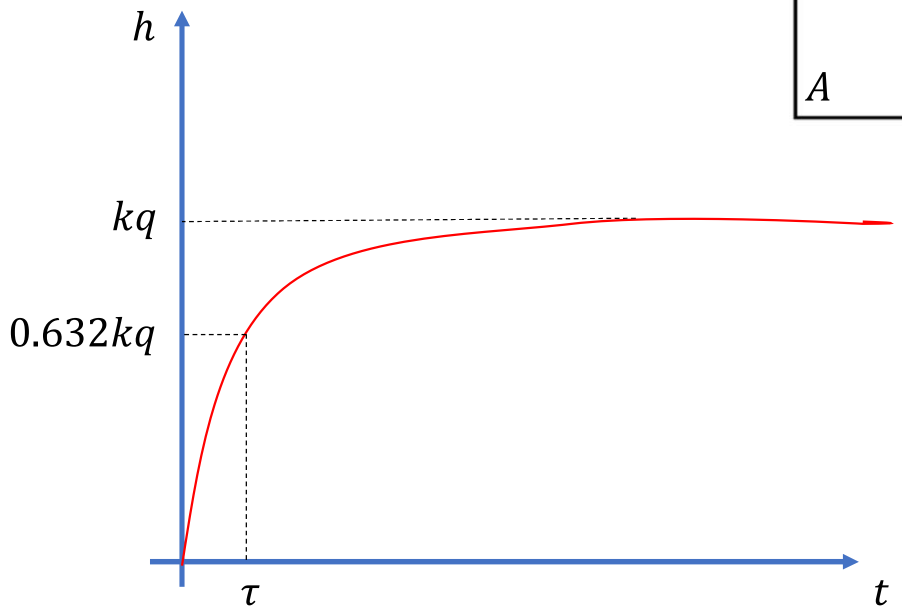
Gráfico de: $h(t) = kq(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, sendo: $k = \frac{1}{C_V \rho g}$ e $\tau = \frac{A}{C_V \rho g}$

$t = 0 \rightarrow h(0) = 0$

$t \rightarrow \infty \rightarrow h(\infty) = kq$

$t = \tau \rightarrow h(\tau) = 0.632kq$





Exercício

Exemplo: Obtenha $h(t)$ e seu gráfico, sabendo que:

$$\tau \frac{dh}{dt} + h(t) = kq$$

sendo $h(0) = h_0$ e q constante.

Dúvidas?

Grupo Whatsapp