Prop1	Prop2	Conjunção	Disjunção	Negação	Implicação	Equivalência
p	q	p∧q	p∨q	~ p	p⟶q	
V	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	F	
F	V	F	V	V	V	
F	F	F	F	V	V	

Aula06: Logica de Predicados

Uniube

Disciplina: Matemática Discreta
Profa. Kênia Arruda
kenia.costa@uniube.br

O que não é possível expressar em Lógica Proposicional?

- Todo tricolor é um campeão. Roberto é tricolor. Logo Roberto é um campeão.
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par.
- Acesso a esse recinto é permitido somente para as pessoas autorizadas ou conhecidas de pessoas autorizadas.

Por quê?

Lógica Proposicional

- Fbf's proposicionais têm uma possibilidade limitada de expressão.

  Ex: Sócrates é homem.
  Todo homem é mortal.
  Logo, Sócrates é mortal.

- ✓ Intuitivamente, podemos ver que esse argumento é válido.
- ✓ A formalização desse arqumento resulta em $p \wedge q \rightarrow r$
- ✓ E como mostrar que a conclusão r é uma consequência lógica das premissas p e q.
- ✓ A validade do argumento depende do significado da palavra todo, que não pode ser expresso na lógica proposicional.

Lógica de Predicados ou lógica de 1ª ordem

Lógica Proposicional

- Quando temos uma proposição, ela pode ser V ou F.
  - O dia é bonito é uma proposição p.

- Na lógica de predicado ou de 1ª ordem
  - O dia é bonito = b_d

Sujeito

Predicado

Lógica de Predicado

- A linguagem formal da lógica de predicados é mais expressiva que aquela da lógica proposicional.
- Esta maior expressividade decorre do fato de as fórmulas da lógica de predicados serem compostas pelos seguintes elementos básicos:
  - Objetos (constantes)
  - predicados
  - conectivos
  - variáveis
  - quantificadores

Linguagem formal: sintaxe

Objeto

é qualquer coisa a respeito da qual precisamos dizer algo

Na lógica de predicados, a noção de objeto é usada num sentido bastante amplo. Objetos podem ser:

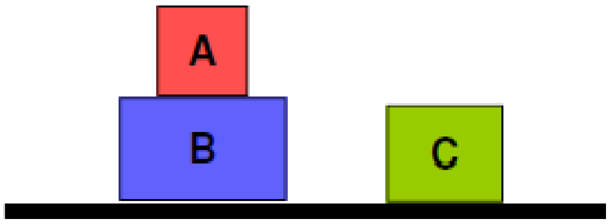
- **concretos**: a bíblia, a lua, ...
- **abstratos**: o conjunto vazio, a paz, ...
- **fictícios**: unicórnio, Saci-Pererê, ...
- **atômicos ou compostos**: um teclado é composto de teclas

Nomes de objetos devem iniciar com letra minúscula!

Linguagem formal: sintaxe

Predicado

denota uma relação entre objetos num determinado contexto



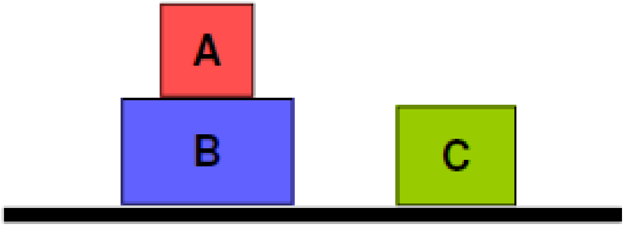
- `sobre(a,b)` : o bloco *A* está sobre o bloco *B*
- `cor(b,azul)`: o bloco *B* tem cor azul
- `maior(a,c)`: o bloco *A* é maior que o bloco *C*

proposições atômicas!

Nomes de predicados também devem iniciar com letra minúscula!

Linguagem formal: sintaxe

Conectivo
forma proposições compostas, a partir de proposições atômicas



- **sobre(a,b)** $\wedge$ **sobre(b,m)**: *A* está sobre *B* e *B* está sobre a mesa
- $\neg$ **cor(b,azul)**: a cor de *B* não é azul
- **maior(b,c)** $\vee$ **maior(c,b)**: o bloco *B* é maior que *C* ou *C* é maior que *B*

Linguagem formal: sintaxe

Variável

permite estabelecer fatos sobre objetos, sem nomeá-los explicitamente

- **`bloco(X)`** : *X* é um bloco
- **`mesa(Y)`** : *Y* é uma mesa
- **`sobre(X,Y)`** : *X* está sobre *Y*

não são proposições atômicas!

Note que proposições atômicas são sentenças que podem ter valor verdadeiro ou falso; mas não podemos dizer se **`bloco(X)`** é verdadeiro ou falso até que a variável **`X`** tenha sido **substituída** ou **quantificada**.

Nomes de variáveis devem iniciar com letra maiúscula!

Variável Livre

Ocorrência livre e ligada

Se x é uma variável e E uma fórmula, uma ocorrência de x em E é

> Ligada, se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E
>
> Livre, se não for ligada

$$G=(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z)\rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$$

Linguagem formal: sintaxe

Quantificador

permite estabelecer fatos sobre objetos, sem enumerá-los explicitamente

- Há dois quantificadores:

  Universal....: $\forall X[bloco(X)]$ estabelece que todo objeto *X* é um bloco

  Existencial..: $\exists Y[mesa(Y)]$ estabelece que algum objeto *Y* é uma mesa

- Estes quantificadores podem ser combinados numa mesma fórmula

  Todo bloco está sobre alguma coisa que é um bloco ou uma mesa

  $\forall X[bloco(X) \rightarrow \exists Y[sobre(X,Y) \wedge (bloco(Y) \vee mesa(Y))]]$

Variáveis e Quantificadores

- ✓ O que realmente torna a lógica de predicados mais expressiva que a lógica proposicional é a noção de variáveis e quantificadores:

  - usando <u>variáveis</u>, podemos estabelecer fatos a respeito de objetos de um determinado contexto de discurso, sem ter que nomear explicitamente esses objetos (por convenção, nomes de variáveis são escritos com letra minúscula);
  - usando o <u>quantificador universal</u> ($\forall$), podemos estabelecer fatos a respeito de todos os objetos de um contexto, sem termos que enumerar explicitamente todos eles; e, usando o <u>quantificador existencial</u> ($\exists$) podemos estabelecer a existência de um objeto sem ter que identificar esse objeto explicitamente.

Variáveis e Quantificadores

“Para todo x, x > 0”

$$\forall x\ (x > 0)$$

- ✓ ∀, quantificador universal, que se lê “para todo”, “para cada” ou “para qualquer”;
- ✓ “x > 0”, é o predicado e descreve uma propriedade da variável x, a de ser positiva;

- Podemos representar alguma propriedade ou predicado não-explicitado que a variável x possa ter. Assim, a sentença mais geral é:

$$\forall x\ P(x)$$

Variáveis e Quantificadores

- Qual valor lógico da expressão $\forall x\ (x > 0)$?

  - ✓ Depende do domínio dos objetos sobre os quais estamos nos referindo, isto é, a coleção de objetos entre os quais x pode ser escolhido. Essa coleção de objetos é chamada de conjunto universo.
  - ✓ Se o conjunto universo consistisse de todos os números positivos, qual seria o valor lógico da fbf?

    Verdadeiro

  - ✓ Se o conjunto universo consistisse de todos os números inteiros, qual seria o valor lógico da fbf?

    Falso

Exemplo

$$\forall x\, P(x)$$

- Conjunto universo: todos os livros da biblioteca municipal;
- $P(x)$ é a propriedade de se ter a capa vermelha;
- $\forall x\, P(x)$ diz que todos os livros da biblioteca municipal têm capa vermelha.

Qual o valor lógico?

Falso

Uniube

Exercício:

Qual o valor lógico da expressão $\forall x\ P(x)$ em cada uma das interpretações a seguir:

- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todos os botões-de-ouro. → **Verdadeiro**
- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores. → **Falso**
- P(x) é a propriedade que x é planta e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores. → **Verdadeiro**
- P(x) é a propriedade que x é um número positivo ou número negativo e o conjunto universo é o conjunto de todos os números inteiros. → **Falso**

Quantificadores e Predicados

"Existe um x tal que $x > 0$"

$\exists x\ (x > 0)$

- ✓ $\exists$, quantificador existencial, que se lê "existe", "há pelo menos um", "existe algum" ou "para algum";

- Qual valor lógico da expressão $\exists x\ (x > 0)$?
  - ✓ Depende do conjunto universo;
  - ✓ Se o conjunto universo contiver um número positivo, qual seria o valor lógico da fbf?

    Verdadeiro
  - ✓ Se o conjunto universo consistir dos números negativos, qual seria o valor lógico da fbf?

    Falso

Escopo de um quantificador

- ✓ "Símbolos de agrupamento", como parênteses ou colchetes, identificam o escopo de um quantificador, a parte da fbf à qual o quantificador se aplica.

Ex: $\forall x\,[\,P(x\,) \wedge Q(x)] \leftrightarrow \forall x\,(\,P(x\,)) \wedge \forall x\,(Q(x))$

$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists x(P(x)))$

$\exists x\,(P(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x))$

Escopo de um quantificador

- O escopo de um quantificador ocorrendo em uma fórmula α é a fórmula à qual o quantificador se aplica.
  - (a)O escopo do quantificador $\forall$ em $(\forall X\ \alpha)$ é α. O escopo do quantificador $\exists$ em $(\exists X\ \alpha)$ é α.
  - (b)O escopo do quantificador $\forall$ em $(\forall X\ (p(X,Y) \rightarrow q(X)))$ é a fórmula $(p(X,Y) \rightarrow q(X))$.
  - (c)O escopo do quantificador $\exists$ em $(\exists X(\forall Y(p(X,Y)) \wedge q(X)))$ é a fórmula $(\forall Y(p(X,Y)) \wedge q(X))$. Nesta mesma fórmula, o escopo do quantificador $\forall$ é a fórmula $(p(X,Y))$.

Exemplo de escopo de um quantificador

$G=(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$

O escopo de $(\forall x)$ é $(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$

O escopo de $(\exists y)$ é $((\forall z)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$

O escopo de $(\forall z)$ é $p(x,y,w,z)$

O escopo de $(\forall y)$ é $q(z,y,x,z1))$

Linguagem formal: semântica

Interpretação

- um conjunto não-vazio $\mathcal{D}$
- um mapeamento que associa cada objeto a um elemento fixo de $\mathcal{D}$
- um mapeamento que associa cada predicado a uma relação sobre $\mathcal{D}$

- **O quantificador universal denota conjunção**

  Por exemplo, para $\mathcal{D}$ = {a, b ,c, m}

  A fórmula ∀X[bloco(X)] equivale a bloco(a) ∧ bloco(b) ∧ bloco(c) ∧ bloco(m)

- **O quantificador existencial denota disjunção**

  Por exemplo, para $\mathcal{D}$ = {a, b ,c, m}

  A fórmula ∃Y[mesa(Y)] equivale a mesa(a) ∨ mesa(b) ∨ mesa(c) ∨ mesa(m)

- **Equivalências**

  $\neg\forall X[\alpha(X)] \equiv \exists X[\neg\alpha(X)]$

  $\neg\exists X[\alpha(X)] \equiv \forall X[\neg\alpha(X)]$

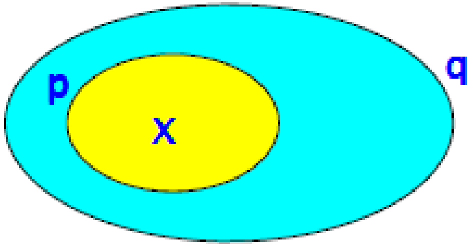
Representação de conhecimento

- Para facilitar a formalização se sentenças na lógica de predicados, destacamos quatro tipos de sentenças de especial interesse, denominadas **enunciados categóricos**:
  - **Universal afirmativo**: *Todos os homens são mortais*.
  - **Universal negativo**: *Nenhum homem é extra-terrestre*.
  - **Particular afirmativo**: *Alguns homens são cultos*.
  - **Particular negativo**: *Alguns homens não são cultos*.

Representação de conhecimento

Enunciado universal afirmativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$
- estabelece que **p** é um subconjunto de **q**



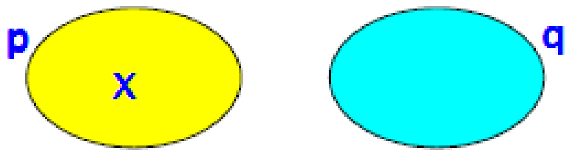
Exemplo:

- **Sentença....:** *Todos os homens são mortais*
- **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow m(X)]$
- **Semântica..:** para todo X, se $X \in$ **h** então $X \in m$

Representação de conhecimento

Enunciado universal negativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow \neg q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** são disjuntos



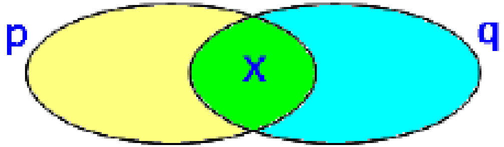
<u>Exemplo</u>:

- **Sentença....:** *Nenhum homem é extra-terrestre*
- **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow \neg e(X)]$
- **Semântica..:** para todo X, se $X \in$ **h** então $X \notin$ **e**

Representação de conhecimento

Enunciado particular afirmativo

- é da forma $\exists X [p(X) \wedge q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** têm intersecção não-vazia



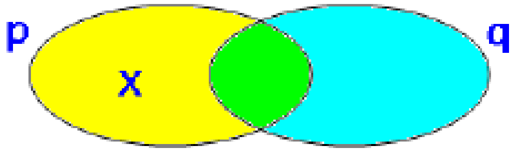
<u>Exemplo</u>:

- **Sentença....:** *Alguns homens são cultos*
- **Sintaxe.......:** $\exists X [h(X) \wedge c(X)]$
- **Semântica..:** existe X tal que $X \in h$ e $X \in c$

Representação de conhecimento

Enunciado particular negativo

- é da forma $\exists X[p(X) \wedge \neg q(X)]$
- estabelece que existem elementos em **p** que não estão em **q**



Exemplo:

- **Sentença....:** *Alguns homens não são cultos*
- **Sintaxe.......:** $\exists X[h(X) \wedge \neg c(X)]$
- **Semântica..:** existe X tal que $X \in h$ e $X \notin c$

Representação de conhecimento

- Toda cobra e venenosa: $\forall X[cobra(X) \rightarrow venenosa(X)]$
- Os remédios são perigosos: $\forall X[remédio(X) \rightarrow perigoso(X)]$
- Nenhuma bruxa é bela: $\forall X[bruxa(X) \rightarrow \neg bela(X)]$
- Não existe bêbado feliz: $\forall X[bêbado(X) \rightarrow \neg feliz(X)]$
- Algumas pedras são preciosas: $\exists X[pedra(X) \wedge preciosa(X)]$
- Existem plantas que são carnívoras: $\exists X[planta(X) \wedge carnívora(X)]$
- Alguns políticos não são honestos: $\exists X[politico(X) \wedge \neg honesto(X)]$
- Há aves que não voam: $\exists X[ave(X) \wedge \neg voa(X)]$

Exercício

- Escreva como fórmula de predicado
  - Tudo que sobe, desce.
  - Nenhum leão é manso.
  - Todo circo tem palhaço.
  - Toda pedra preciosa é cara.
  - Nenhum homem é infalível.
  - Ninguém gosta de impostos.
  - Existem impostos que não são bem empregados.