# Aula 1
# Classificação das Equações Diferenciais, Equações Lineares de Primeira Ordem e Fatores Integrantes.

## MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

# Introdução

Muitos problemas importantes da engenharia, da física, da biologia e das ciências sociais são formulados por equações que envolvem a derivada de uma função desconhecida.

Uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida é chamada **equação diferencial**.

Em termos gerais, na disciplina MA311 – Cálculo III estudamos as principais técnicas para resolver e avaliar muitas classes de equações diferenciais.

Vamos iniciar o curso estudando como classificar as equações diferenciais.

## Exemplo 1

Seja $P(t)$ a densidade (ou número de indivíduos) da população de uma certa espécie no instante de tempo $t$. Podemos assumir que a taxa de crescimento da população é proporcional a sua densidade. Em termos matemáticos,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P. \tag{1}$$

Aqui, $\lambda$ representa a taxa de crescimento (se $\lambda > 0$) ou decrescimento (se $\lambda < 0$).

A equação (1) é chamada **equação diferencial ordinária de primeira ordem** porque envolve apenas a primeira derivada de uma função $P$ que depende de uma única variável $t$.

## Exemplo 2

A Lei de Newton afirma que $F = ma$. Se $x(t)$ representa a posição de uma partícula no instante $t$, então podemos escrever

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

em que a força resultante pode depender do tempo $t$, da posição $x$ e da velocidade da partícula $\frac{dx}{dt}$.

No Exemplo (2) temos uma equação que envolve a segunda derivada de uma função $x$ em $t$. Dessa forma, ela é chamada **equação diferencial ordinária de segunda ordem.**

# Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais

Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, temos uma **equação diferencial ordinária** (EDO).

As equações dos exemplos anteriores são ambas ordinárias!

Se derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis aparecem na equação, tem-se uma **equação diferencial parcial** (EDP).

**Exemplo 3**

A equação da difusão ou da condução de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

é um exemplo de equação diferencial parcial.

# A Ordem de uma Equação Diferencial

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

De forma mais geral, se $y$ é uma função de $t$, então uma EDO de ordem $n$ pode ser escrita como

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{3}$$

em que $F$ é uma função de $t$, $y$ e suas derivadas $y'$, $y''$,…,$y^{(n)}$.

Na prática, assumiremos que podemos resolver (3) na derivada $y^{(n)}$, isto é, vamos considerar

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{4}$$

como protótipo de EDO de ordem $n$.

# EDOs Lineares e Não-Lineares

Uma EDO é dita linear se a função $F$ em (3) é linear com respeito as variáveis $y$, $y'$, ..., $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$.

Consequentemente, uma EDO pode ser escrita como:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t), \tag{5}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $g$ são funções somente de $t$.

Uma EDO que não é linear é dita não-linear. Em outras palavras, uma EDO não-linear não pode ser escrita como (5).

A EDO (1) é linear.

## Exemplo 4

A EDO de segunda ordem

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0,$$

é linear ou não-linear?

## Exemplo 4

A EDO de segunda ordem

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0,$$

é linear ou não-linear?

**Resposta:** A equação é linear porque pode ser escrita como

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = g(t),$$

com

$$\begin{aligned} a_0(t) &= t^2, \\ a_1(t) &= -3t, \\ a_2(t) &= 4, \\ g(t) &= 0. \end{aligned}$$

## Exemplo 5

A EDO de terceira ordem

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = 0,$$

é linear ou não-linear?

## Exemplo 5

A EDO de terceira ordem

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = 0,$$

é linear ou não-linear?

**Resposta:** A equação não é linear porque envolve o produto de $y$ por $y'$.