Prop1	Prop2	Conjunção	Disjunção	Negação	Implicação	Equivalência
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	
V	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	F	
F	V	F	V	V	V	
F	F	F	F	V	V	

Aula02: Lógica Proposicional

Uniube

Disciplina: Matemática Discreta
Profa. Kênia Arruda
kenia.costa@uniube.br

- A lógica é o estudo sobre a natureza do raciocínio e do conhecimento. Ela é usada para formalizar e justificar os elementos do raciocínio empregados nas demonstrações / provas de teoremas.
- A lógica clássica se baseia em um mundo bivalente ou binário (visão restrita do mundo real), onde os conhecimentos são representados por sentenças que só podem assumir dois valores verdade (verdadeiro ou falso).

Lógica proposicional

- A lógica proposicional é a forma mais simples de lógica. Nela os fatos do mundo real são representados por sentenças sem argumentos, chamadas de proposições.

MUNDO REAL	*PROPOSIÇÃO LÓGICA*
Hoje está chovendo	P
A rua está molhada	Q
Se está chovendo, então a rua está molhada.	$P \rightarrow Q$

Proposição

- Uma proposição é uma sentença, de qualquer natureza, que pode ser qualificada de verdadeiro ou falso.
  - Ex: $1 + 1 = 2$ é uma proposição verdadeira da aritmética.
  - $0 > 1$ é uma proposição falsa da aritmética.
- Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, esta não é uma proposição. Alguns exemplos deste tipo de sentença são apresentados abaixo:
  - Frases Interrogativas (ex: Qual o seu nome?).
  - Frases Imperativas (ex: Preste atenção!).
  - Paradoxos Lógicos (ex: Esta frase é falsa).

- Na computação, a lógica pode ser utilizada, entre outras coisas, para:
  - Conceber circuitos lógicos (o raciocínio do computador é um raciocínio lógico);
  - Representar conhecimento (programação lógica);
  - Validar algoritmos e corrigir programas (testes lógicos das especificações em engenharia de software).

Linguagem e Alfabeto

- O conjunto de fórmulas da lógica proposicional é denominado LØ (lógica de ordem Ø). Cada fórmula deste conjunto é uma proposição gerada pela concatenação de símbolos pertencentes ao alfabeto da lógica proposicional, definido inicialmente.
- Este alfabeto é infinito, constituído por:
  - Símbolos verdade: true e false;
  - Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P1, P2, P3, etc;
  - Conectivos proposicionais: ¬ (não), v (ou inclusivo), ∧ (e), → (implica ou "se, então") e ↔ (equivalência, bi-implicação ou "se e somente se"); e
  - Símbolos de pontuação: (e).

Fórmulas propositais

- São construídas, a partir do alfabeto proposicional, de acordo com as seguintes regras:
    - 1. Todo símbolo verdade é uma fórmula;
    - 2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
    - 3. Se P é uma fórmula, então a sua negação ($\neg P$) também é uma fórmula;
    - 4. Se P e Q são fórmulas, então:
        - 4.1. A disjunção de P e Q ($P \vee Q$) também é uma fórmula;
        - 4.2. A conjunção de P e Q ($P \wedge Q$) também é uma fórmula;
        - 4.3. A implicação de P em Q ($P \rightarrow Q$) também é uma fórmula;
        - 4.4. A bi-implicação de P e Q ($P \leftrightarrow Q$) também é uma fórmula;

Fórmulas propositais

- 4. Se P e Q são fórmulas, então:
  - 4.1. A disjunção de P e Q ($P \vee Q$) também é uma fórmula;
  - 4.2. A conjunção de P e Q ($P \wedge Q$) também é uma fórmula;
  - 4.3. A implicação de P em Q ($P \rightarrow Q$) também é uma fórmula;
  - 4.4. A bi-implicação de P e Q ($P \leftrightarrow Q$) também é uma fórmula;

Nesta definição, as fórmulas mais elementares são os símbolos verdade e proposicionais. A partir destes e utilizando as regras 3 e 4, recursivamente, é possível obter um conjunto infinito de fórmulas.
Note que o conectivo $\neg$ é unário (aplicado sobre uma única fórmula) e fica na ordem pré-fixa, enquanto que os demais conectivos são binários (aplicado sobre duas fórmulas) e fica na ordem infixa.

Exemplos

Exemplos de Fórmulas Válidas

$(P \vee Q)$ $((\neg R) \rightarrow X)$ $((P \leftrightarrow (\neg Y)) \vee (Q \rightarrow (R \wedge V)))$

As construções acima são fórmulas proposicionais, pois podem ser derivadas a partir da aplicação das regras de construção descritas.

Exemplos de Fórmulas Inválidas

PQR (R True $\rightarrow$) (False $\vee\wedge$ ($\leftrightarrow$ Q P))

As construções acima não constituem fórmulas proposicionais, pois não é possível derivá-las a partir das regras descritas.

Precedência

- Os símbolos de pontuação (parênteses), assim como na aritmética, são empregados para priorizar um "cálculo proposicional". Esses símbolos podem ser omitidos quando isto não altera o significado da fórmula proposicional.
    - Ex: $((\neg(\neg P)) \vee Q) \equiv \wedge \neg\neg P \;\; Q$
    - OBS: A fórmula $\neg(X \wedge Y)$ na pode ser escrita sem parênteses: $\neg(X \wedge Y) \neq \neg X \wedge \; Y$.

Precedência

- Se em uma fórmula, os parênteses não são usados, o cálculo proposicional deve seguir a seguinte ordem de prioridade:
  - $\neg$ (maior precedência)
  - $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$ (precedência intermediária)
  - $\vee$ e $\wedge$ (menor precedência)
    - Ex: $P \vee Q \rightarrow R \equiv P \vee (Q \rightarrow R)$
    - $\neg P \vee Q \leftrightarrow R \equiv (\neg P) \wedge (Q \leftrightarrow R)$

Precedência

- Além da precedência, também existem as regras de associatividade, que definem a prioridade no cálculo para conectivos de mesma precedência. São elas:
  - $\vee$ e $\wedge$ (conectivos associativos à esquerda)
  - $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (conectivos associativos à direita)
    - Ex: $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge R$
    - $\vee \rightarrow Q \leftrightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$

Conjunção $\wedge$ (e)

- p: 2 é maior 1; q: 3 é um número par
- $p \wedge q$ = 2 é maior 1 e 3 é um número par

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Disjunção $\vee$ (ou)

- p: 2 é maior 1; q: 3 é um número par
- $p \vee q$ = 2 é maior 1 ou 3 é um número par

p	**q**	**$p \vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional → (então / implica)

- p: 2 é maior 1; q: 3 é um número par
- p → q = 2 é maior 1 implica que 3 é um número par

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uniube

Bidirecional / equivalência ↔ (se e somente se)

- p: 2 é maior 1; q: 3 é um número par
- p ↔ q = 2 é maior 1 se e somente se 3 é um número par

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Uniube

Conclusões

- $p \wedge q$ será verdadeiro quando os dois são verdadeiros, caso contrário, falso.
- $p \vee q$ será falso quando os dois são falsos, caso contrário verdadeiro.
- $p \rightarrow q$ será falso quando a 1ª proposição for verdadeira e a 2ª for falsa, caso contrário será verdadeiro.
- $p \leftrightarrow q$ será verdadeiro quando as proposições tiverem o mesmo valor lógico, caso contrário será falso.

Tautologia x contradição x contingência

- Tautologia
  - Toda proposição composta que encerra na última coluna de sua tabela apenas valor lógico V independente dos valores lógicos das proposições que a compõe.

p	q	p∧q	p∨q	(p∧q) → (p∨q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Uniube

Tautologia x contradição x contingência

- Contradição
  - Toda proposição composta que encerra na última coluna de sua tabela de verdade apenas valor lógico F independe dos valores lógicos das proposições que a compõe.

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Tautologia x contradição x contingência

- Contingência
  - Toda proposição composta que encerra na última coluna de sua tabela de verdade pelo menos duas interpretações I_1 e I_2 , tal que I_1 = V e I_2 = F.

p	q	P → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fórmulas Bem Formadas (WFF) e Interpretação

- As proposições, bem como as proposições atômicas, são chamadas de fórmulas bem formadas (wff — well-formed formulas), desde que satisfaçam:
  - Os símbolos de verdade (isto é, verdade e falso como especificados na Definição;
  - Um átomo é uma wff.

Regras para a formação de wffs

wff	lida como	wff chamada de
$(\neg\alpha)$	não α	negação
$(\alpha \wedge \beta)$	α e β	conjunção
$(\alpha \vee \beta)$	α ou β	disjunção
$(\alpha \rightarrow \beta)$	se α então β	condicional
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	α se e somente se β	bicondicional

Exemplos de fórmulas

- WFF
  - $(((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge (\neg s))) \leftrightarrow (\neg p))$
- Não WFF
  - $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee))$
  - $((p \rightarrow \rightarrow q) \vee s)$
  - $((p \rightarrow \wedge q) s)$
  - $((p \vee (\neg(p \rightarrow q)) \wedge \vee q))$

Métodos de Validação de Fórmulas

- Tabela-Verdade
  - A tabela-verdade é um método de validação baseada na força bruta. Isso ocorre, porque devemos mapear todas as possíveis combinações dos símbolos/variáveis proposicionais.

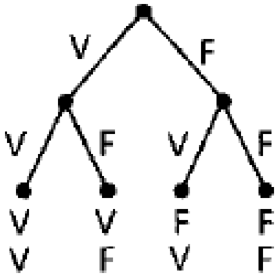
Construa a tabela-verdade da fórmula $P = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$.

Solução:

X	Y	Z	¬X	(X ∧ Y)	(¬X ∧ Z)	P
F	F	F	T	F	F	**F**
F	F	T	T	F	T	**T**
F	T	F	T	F	F	**F**
F	T	T	T	F	T	**T**
T	F	F	F	F	F	**F**
T	F	T	F	F	F	**F**
T	T	F	F	T	F	**T**
T	T	T	F	T	F	**T**

Métodos de Validação de Fórmulas

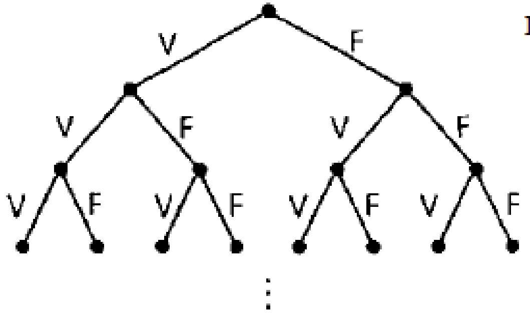
Árvore Semântica



Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós

Quando apresenta 2 átomos(sentenças) q e q, para cada valor lógico de p, temos dois valores lógicos de q. Ou seja, VV, VF, FV, FF => $n = 2 = 2^2 = 4$

Quando apresenta 3 átomos q e q, para cada valor lógico de p, temos dois valores lógicos de q. $n = 3 = 2^3 = 8$

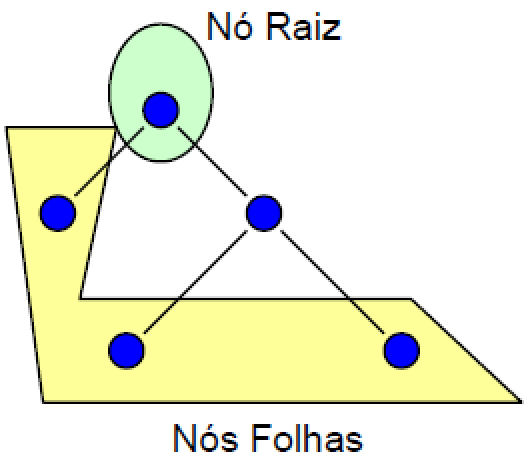


Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós
3	$8 = 2^3$ nós
n	(2^n nós)

Métodos de Validação de Fórmulas

- Árvore Semântica
  - Este método determina a validade de uma fórmula a partir de uma estrutura denominada árvore.
  - Nó raiz é o que inicia.
  - Folha são os nós que dão valor final à fórmula.

Exemplo de Árvore:



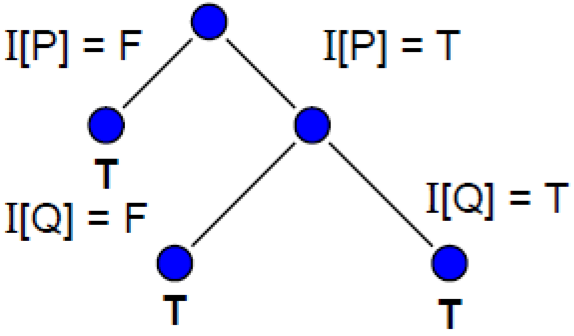
- Árvore Semântica

Demonstre, através de árvores semânticas, a validade de H = $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg P)$.

Solução:

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
F T **T** T TF

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T F F **T** TF T TF



$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T ? ? FT

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T T T **T** FT T FT

Como em todos os nós folhas I[H] = T, então a fórmula **H é válida.** **c.q.d.**

Métodos de Validação de Fórmulas

- Método da Negação ou Absurdo
  - O método da negação ou absurdo é um método geral de demonstração. Ele consiste em negar a afirmação que se deseja provar e, a partir de um conjunto de deduções, concluir um fato contraditório ou absurdo (ex: $I[P] = T$ e $I[P] = F$).
  - A aplicação deste método é recomendada nos casos onde a negação da afirmação nos leva a casos determinísticos, ou seja, com uma única possibilidade de interpretação para a fórmula, pois isto simplifica a demonstração. Tal situação ocorre quando a negação acarreta a falsidade dos conectivos $\rightarrow$ e $\vee$ e a veracidade do conectivo $\wedge$.

Demonstrar, através do método da negação, a validade da Lei de Transitividade do conectivo $\rightarrow$: H = $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Solução: validade = tautologia. Logo, devemos provar que $\forall$ I | I[H] = T.

Supondo que H **NÃO** é tautologia, então $\exists$ I | I[H] = F.

$I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)] = F \Rightarrow I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))] = T$ e $I[(P \rightarrow R)] = F$

Para $I[(P \rightarrow R)] = F \Rightarrow I[P] = T$ e $I[R] = F$

Para $I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))] = T \Rightarrow I[P \rightarrow Q] = T$ e $I[Q \rightarrow R] = T$

Se $I[P \rightarrow Q] = T \Rightarrow I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$, mas como $I[P] = T$, logo: **I[Q] = T**

Se $I[Q \rightarrow R] = T \Rightarrow I[Q] = F$ e/ou $I[R] = T$, mas como $I[R] = F$, logo: **I[Q] = F**

ABSURDO: *Q* **NÃO** pode assumir dois valores (T e F) no mesmo instante.

Portanto, a suposição inicial está errada e **H é tautologia**. **c.q.d.**

Validade e Inconsistência

- O valor-verdade — ou simplesmente valor — de uma wff sempre diz respeito a uma determinada interpretação.
  - 1.Se uma fórmula α tem valor v em certa interpretação I, diz-se que α é verdadeira na interpretação I.
  - 2.Uma fórmula α é satisfatível (ou consistente) se existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[\alpha] = v$.
  - 3.Uma fórmula é chamada de válida quando for verdadeira em todas as interpretações possíveis. Essas fórmulas são conhecidas também como tautologias.
  - 5.Uma fórmula α é inválida se existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[\alpha] = f$.

Validade e Inconsistência

- O valor-verdade — ou simplesmente valor — de uma wff sempre diz respeito a uma determinada interpretação.
    - 6.Uma fórmula α é insatisfatível (ou inconsistente) quando for falsa em todas as interpretações possíveis. Essas fórmulas são conhecidas também como contradições.
    - 7.Na LP, as fórmulas que não são nem tautologias nem contradições são comumente chamadas de contingentes.
    - 8.Dada uma fórmula α e uma interpretação I, então I satisfaz α se e somente se $I[\alpha] = v$.
    - 9.Um conjunto de fórmulas $C = \{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \dots \alpha n\}$ é satisfatível se e somente se existe uma interpretação I, tal que $I[\alpha 1] = I[\alpha 2] = I[\alpha 3] = \dots = I[\alpha n] = v$. Neste caso, I satisfaz o conjunto de fórmulas C.

Dúvidas!

Então vamos praticar

Qualquer coisa....

- não fique com calado... participe...

Você pode até ter entendido a lógica proposicional, mas ainda deve estar se perguntando onde que se usa isso. Para tentar te ajudar a “visualizar” a aplicação desse conteúdo, imagine um jogo de luta (tipo Street Fighter ou Mortal Kombat).

No jogo, são diferentes personagens e animações de ataque. Entretanto, muitos utilizam a mesma combinação de comandos para dar um golpe especial. O programador, em vez de escrever um comando para cada personagem, escreve uma fórmula lógica simbólica padrão. A mesma coisa ocorre com as partidas: são dezenas de combinações possíveis de partida, e não dá pra escrever todas elas. Tendo a fórmula é só aplicar a cada personagem ou partida.

a) Negação: apertar “pulo” pra pular. O padrão do personagem é no chão. Quando você aperta o botão de pulo, você cria uma negação no padrão e ele sai do chão.

b) Conjunção: especial é “A e B” = são necessários os dois botões juntos para o especial, não tem como soltar ele se os dois botões não forem apertados juntos.

c) Disjunção Inclusiva: especial é C (frente) e [A ou B] = além do C, tanto faz A ou B. Qualquer um dos dois vai garantir o especial.

d) Disjunção Exclusiva: Ou você chuta ou Soca (A ou B) = o personagem só dá um golpe por vez, ou chute ou soco. Se apertar os dois ao mesmo tempo, não acontece nada e se não apertar nenhum também não acontece nada. Tem que ser pressionado um botão ou outro.

e) Implicação: se o golpe acerta o oponente, então tira vida dele = A vida diminui se o personagem levar o golpe (mas não exclui outras formas de perder vida, por exemplo defender um super especial).

f) Equivalência: cada partida só acaba se e somente se um personagem ganhar duas rodadas (dois rounds) = O fim da partida depende completamente de alguém ganhar duas rodadas (rounds), enquanto isso não acontecer, não acaba a partida.