Prop1	Prop2	Conjunção	Disjunção	Negação	Implicação	Equivalência
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	
V	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	F	
F	V	F	V	V	V	
F	F	F	F	V	V	

Aula05: Forma normal

Disciplina: Matemática Discreta
Profa. Kênia Arruda
kenia.costa@uniube.br

Uniube

Forma Normal

- É possível observar que há várias maneiras de escrever uma mesma fórmula; as fórmulas equivalentes a seguir são duas representações lógicas do mesmo conceito: $(\alpha \rightarrow \beta) \land \gamma \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land \gamma$.
- É conveniente adotar certa padronização na notação a fim de poder expressar as fórmulas de uma maneira única; a padronização (referenciada como forma) facilita tanto a identificação de uma fórmula quanto a comparação entre duas ou mais fórmulas.
- Duas formas são particularmente utilizadas – Forma Normal Conjuntiva (FNC) e Forma Normal Disjuntiva (FND). Dada uma expressão da LP, é sempre possível colocá-la na forma normal conjuntiva, bem como na forma normal disjuntiva; as três representações são expressões equivalentes.

Forma normal

- Uma fórmula da Lógica Proposicional está na forma normal (FN) se e somente se, quando muito, contém os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
- Exemplos:
  - $\neg p \wedge q$
  - $\neg(\neg p \vee \neg q)$
  - $(p \wedge q) \vee (\neg q \vee r)$
- Quando há $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$ tem que se transformar, pode-se utilizar álgebra ou tabela verdade (algoritmo)

Forma normal disjuntiva

- Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva, se é uma disjunção de conjunções de literais.
  - Exemplo:
    - $H = (p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
    - $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
    - $p \vee$ verdade
    - $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee s$
    - $p \vee (q \wedge r \wedge s)$
    - $(p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee (\neg s)$

Forma normal disjuntiva

- Determinar a FND da fórmula: H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ --> transforma →
  - $\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$ --> transforma o $\wedge$
  - $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)$ --> simplifica sempre F
  - $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

  - FND(H) = $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

Demonstrem que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $\equiv$ = $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

Forma normal disjuntiva

Via álgebra

- Determinar a FND da fórmula: H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ --> transforma →
  - $\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$ --> transforma o ∧
  - $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)$ --> simplifica sempre F
  - $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$
  - $H_{fnd} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

Demonstrem que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ H = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv = (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

Forma normal disjuntiva

Via tb verdade

- Determinar a FND da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $H = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  1. Constrói tabela-verdade
  2. Extrais $I(H) = V$.
  3. Para cada uma dessas interpretações Ii ($1 \leq i \leq 2n$) constrói-se uma conjunção da seguinte maneira:
     - se na interpretação Ii o átomo p da fórmula α é avaliado v, toma-se p
     - se for avaliado f, toma-se $\neg p$.
  4. Constrói-se então a FND como a disjunção das conjunções obtidas em cada uma das interpretações Ii.

1)

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	H
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2)

p	q	H
V	V	V
F	F	V

3)

$(p \wedge q)$

$(\neg p \wedge \neg q)$

4)

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$H_{fnd} = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Forma normal disjuntiva

- Determinar a FND da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge r$, utilizando algoritmo.
  1. Constroi tabela-verdade
  2. Extrais I(H) = F.
  3. Para cada uma dessas interpretações Ii ($1 \leq i \leq 2n$) constrói-se uma conjunção da seguinte maneira:
     - se na interpretação Ii o átomo p da fórmula α é avaliado v, toma-se p
     - se for avaliado f, toma-se $\neg p$.
  4. Constrói-se então a FND como a disjunção das conjunções obtidas em cada uma das interpretações Ii.

Forma normal disjuntiva

- Determinar a FND da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge r$, utilizando algoritmo.

p	*q*	*r*	*H*	
V	V	V	V	$(p \wedge q \wedge r)$
F	V	V	V	$(\neg p \wedge q \wedge r)$
F	F	V	V	$(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$$H_{fnd} = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

Forma normal conjuntiva

- Uma formula H está na forma normal conjuntiva (fnc), se é uma conjunção de disjunção de literais.
- Exemplos:
  - $H = (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor q \lor r)$
  - $H = (p \land q)$
  - $H = p \land (\neg q \lor r)$

Forma normal conjuntiva

- Determinar a FNC da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, utilizando um algoritmo.
  - Constrói tabela-verdade
  - Extrais $I(H) = F$.
  - Para cada uma dessas interpretações I_i ($1 \leq i \leq 2n$) constrói-se uma conjunção da seguinte maneira:
    - se na interpretação I_i o átomo p da fórmula α é avaliado F, toma-se p
    - se for avaliado V, toma-se $\neg p$.
  - Constrói-se então a FND como a disjunção das conjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i.

1)

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	H
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2)

p	q	H
V	F	F
F	V	F

3)

$(\neg p \vee q)$

$(p \vee \neg q)$

4)

$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$H_{fnc} = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Forma normal conjuntiva

- Determinar a FNC da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge r$, utilizando algoritmo.

Forma normal conjuntiva

- Determinar a FNC da fórmula: $H = (p \rightarrow q) \wedge r$, utilizando algoritmo.

p	*q*	*r*	*H*
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

$$H_{fnc} = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

Responda

- Determinas uma FNC (Forma Normal Conjuntiva) equivalente $p \rightarrow q$:
  a) $\neg p \vee q$
  b) $p \vee \neg q$
  c) $\neg p \wedge q$
  d) $p \wedge \neg q$
- Determinar uma FNC equivalente a $\neg p \vee \neg q$:
  a) $\neg p \wedge \neg q$
  b) $p \wedge q$
  c) $\neg p \vee \neg q$
  d) $p \vee q$
- Determinar uma forma normal conjuntiva (FNC) $((\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow p)$:
  a) $p \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
  b) $\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
  c) $p \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  d) $\neg p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Responda

- Determinas uma FND (Forma Normal Disjuntiva) equivalente $((p \rightarrow q) \wedge \neg p)$:
  a) $p \wedge (p \vee \neg q)$
  b) $\neg p \wedge (\neg p \vee q)$
  c) $p \vee (p \wedge \neg q)$
  d) $\neg p \vee (\neg p \wedge q)$
- Determinar uma FND equivalente a $((p \rightarrow q) \vee \neg p)$: :
  a) $p \vee \neg q$
  b) $p \vee q$
  c) $\neg p \vee q$
  d) $\neg p \wedge q$
- Determinar as formas normais disjuntiva e conjuntiva associadas as formulas abaixo:
  a) $H = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
  b) $G = (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$

Notação Clausal

- A FNC é de particular interesse no entendimento e uso da linguagem de programação Prolog.
- Uma das vantagens de se ter a FNC de uma dada fórmula α é poder garantir que se a avaliação de α em uma determinada interpretação for v, então cada cláusula separadamente é também interpretada v, uma vez que a FNC é uma conjunção de cláusulas. Este fato torna a fórmula mais facilmente manipulável.

Uniube

Notação Clausal

- Como a FNC de uma fórmula α da Lógica Proposicional é sempre uma conjunção de cláusulas, a ordem em que estas cláusulas são escritas é irrelevante — pela propriedade associativa da conjunção (∧).
- Pode-se dizer que a FNC é uma coleção de cláusulas. Escreve-se, então, a FNC de uma fórmula α como:
    - {C1, C2, ..., Cn}

Uniube

Notação Clausal

- Exemplo: Seja
  - α:$((\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \rightarrow s$
  - e seja β a FNC(α),
  - β:$(p \lor \neg q \lor s) \land (\neg p \lor \neg r \lor s) \land (\neg q \lor \neg r \lor s)$
- Pode-se escrever que:
  - β:$C1 \land C2 \land C3$ tal que
    - C1:$(p \lor \neg q \lor s)$
    - C2:$(\neg p \lor \neg r \lor s)$ e
    - C3:$(\neg q \lor \neg r \lor s)$

Escreva na forma clausal

- Escreva as formulas do exercício antigo na forma clausal.