Introdução à Lógica Matemática

O que é lógica?

As palavras "lógica" e "lógico" nos são familiares. Falamos freqüentemente de comportamento lógico", de explicação lógica" em contraste com comportamento ilógico", de explicação ilógica". Nestes casos, a palavra lógica é usada no mesmo sentido de "razoável". Uma pessoa com "espírito lógico" é uma pessoa "razoável". Esses usos podem ser considerados como derivativos de um sentido mais técnico do termo "lógico" para caracterizar os argumentos racionais.

O estudo de lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto.

Isto não significa que só se tem raciocínio lógico quem estuda lógica. Mas uma pessoa que estuda lógica tem maior probabilidade de raciocinar corretamente.

A lógica matemática é conhecida também por Lógica Proposicional ou Lógica Simbólica Clássica. Seu objetivo é a formulação de critérios que permitam a análise da legitimidade dos argumentos usados na demonstração de determinadas afirmações. Assim, usando argumentos "legítimos", se conseguirmos mostrar que uma afirmação segue de afirmações anteriores já estabelecidas, passamos a considerar essa afirmação como estabelecida também. Isso dá o modelo geral de uma teoria matemática acerca de determinado assunto, onde tomamos como verdadeiras certo número de afirmações iniciais (axiomas ou postulados) e a partir daí, usando argumentos logicamente válidos, começamos a deduzir outras afirmações construindo a teoria. (Isso fica bem claro na construção da geometria euclidiana, da teoria dos conjuntos, etc.).

Uma parte do estudo da lógica consiste no exame e na análise dos métodos incorretos do raciocínio, ou seja as **falácias**. O estudo de lógica não só dá uma visão mais profunda dos princípios do raciocínio em geral, como o conhecimento desses ardis auxilia também a evitá-los.

Além disso, o estudo de lógica proporciona, através da aplicação de algumas técnicas, determinar a correção ou incorreção de todos os raciocínios.

Exemplos:

Ou você é a favor do presidente ou você é contra a reeleição.
Você é contra a reeleição.
Você não é a favor do presidente.

Criança que tem brinquedo estrela é feliz.
A criança é feliz.
A criança tem brinquedo estrela.

O primeiro argumento tem um erro de falsa dicotomia e o segundo induz a pensar que o antecedente segue do conseqüente, ou o contrário.

Inferência e Argumento

Ao lógico interessa a correção do processo do raciocínio, uma vez completado. Sua interrogação é sempre essa: **a conclusão a que se chegou deriva das premissas usadas ou pressupostas?** Se as premissas fornecem base ou boas provas para a conclusão, se a afirmação da verdade das premissas garante a afirmação de que a conclusão também é verdadeira, então o raciocínio é correto. No caso contrário, é incorreto. A distinção entre o raciocínio correto e o incorreto é o problema central de que se incube a lógica.

Chamamos de **inferência** ao processo pelo qual chegamos a uma conclusão. Divagação, associações de idéias, imaginação são recursos válidos para o pensamento, cujos resultados podem ser desde crença e opiniões até sentenças científicas. Para a lógica interessa o argumento que corresponde à inferência. Ou seja, após o processo de descoberta, qualquer que tenha sido o caminho percorrido, cabe ao lógico examinar a forma da inferência a fim de verificar se é justificável chegar a determinada conclusão.

Argumento é uma seqüência de *proposições*, na qual um das *proposições* é a **conclusão** e as demais, chamadas **premissas**, formam as provas ou evidências para a conclusão.

Exemplos:

Argumento 1: *Como todo brasileiro é sul-americano e todo paulista é brasileiro, então todo paulista é sul-americano.*

Neste caso, "Todo brasileiro é sul-americano" e "Todo paulista é brasileiro" são as premissas e "Todo paulista é sul-americano" é a conclusão desse argumento.

Argumento 2: *Como todo matemático é louco e eu sou matemático, então eu sou louco.*

Neste caso, a argumentação é válida embora as premissas sejam falsas.

Dedução e Indução

Os argumentos podem ser classificados em **argumentos dedutivos** ou **indutivos.**

Exemplos:

(a) **Dedutivo** *Todo mamífero tem coração*
Todos os cavalos são mamíferos
Portanto, todos os cavalos tem um coração

(b) **Indutivo** *Todos os cavalos até hoje observados tinham coração*
Portanto, todos os cavalos tem coração.

Argumento dedutivo é um argumento cuja conclusão é inferida necessariamente de suas premissas. No argumento dedutivo, existe uma ligação entre as premissas e a conclusão tal que a conclusão se torna necessária, ou seja, tem que ser esta e não outra.

Além disso, o enunciado da conclusão não excede o conteúdo das premissas, isto é, não se diz mais na conclusão do que foi dito nas premissas.

Argumento indutivo é um argumento cuja conclusão não é derivada necessariamente de suas premissas. A indução é uma argumentação na qual, a partir de dados singulares suficientemente enumerados, inferimos uma verdade universal.

Exemplos:

(a) Esta porção de água ferve a 100 graus e esta outra, e esta outra... logo, a água ferve a 100 graus.

(b) O cobre é condutor de eletricidade e o ouro, e o ferro, e o zinco e a prata também. Logo, o metal é condutor de eletricidade.

(c) Ontem, havia nuvens no céu. Depois Choveu.
Hoje, também há nuvens no céu. Então, hoje choverá.

Diferentemente do argumento **dedutivo**, em um argumento indutivo, o conteúdo da conclusão excede o das premissas. A conclusão da **indução** tem apenas <u>probabilidade</u> de ser correta.

Esta forma de argumento é responsável pela fundamentação de grande parte de nossos conhecimentos na vida diária e de grande valia nas ciências experimentais. Além disso, todas as previsões que fazemos para o futuro tem base na indução.

Validade de um argumento

Um *argumento dedutivo* é ***válido*** quando suas premissas, <u>se verdadeiras</u>, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando as premissas e a conclusão estão de tal modo relacionadas que é absolutamente impossível as premissas serem verdadeiras se a conclusão tampouco for verdadeira.

A validade de um argumento depende exclusivamente de sua forma, e não do seu conteúdo ou da verdade ou falsidade dos enunciados que nele ocorrem.

Todo raciocínio (ou argumento) dedutivo é **válido** ou **inválido**.

Todos os baianos gostam de carnaval *Ora, eu gosto de carnaval* *Logo, eu sou baiano*	*Todos os homens são xenófobos* *Ora, eu sou homem,* *Logo, eu sou xenófobo*
Toda baleia é mamífero *Nenhum mamífero é peixe.,* *Logo, a baleia não é peixe*	*A água provoca câncer pois todas as pessoas que morreram de câncer bebiam água.*

Nos exemplos acima, o primeiro e o último argumento não são válidos.

Verdade e Validade

Verdade(V) e ***falsidade(F)*** podem ser predicados das proposições, nunca dos argumentos, assim como propriedades de ***validade*** ou ***invalidade*** só podem pertencer a *argumentos dedutivos*, mas nunca a proposições.

Alguns argumentos válidos contém apenas proposições verdadeiras, por exemplo:

Todas as baleias são mamíferos
Todos os mamíferos têm pulmão
Portanto, todas as baleias têm pulmão

Mas um argumento pode conter exclusivamente proposições falsas e, mesmo assim, ser válido. Por exemplo:

Todas as aranhas tem seis pernas
Todos os seres de seis pernas tem asas
Portanto, todas as aranhas têm asas

Esse argumento é **válido** porque, se suas premissas fossem verdadeiras, sua conclusão também seria verdadeira, mesmo no caso em que, de fato, fossem todas falsas,.

Se eu possuísse todo o ouro de Serra Pelada,eu seria muito rico.
Não possuo o ouro de Serra Pelada.
Portanto, não sou muito rico.

Embora as premissas sejam verdadeiras, o raciocínio não é válido.

Assim, pode-se observar que existem argumentos válidos com conclusões falsas, bem como argumentos inválidos com conclusões verdadeiras. Logo, a verdade ou falsidade da sua conclusão não determinam a **validade** ou **não validade** de um argumento. Há raciocínios perfeitamente válidos que tem conclusão falsa mas, para que isso ocorra, devem ter pelo menos uma premissa falsa.
Os argumentos não válidos ou aqueles válidos ou não que contenham pelo menos uma premissa falsa são chamados **falácia** ou **sofisma**.

Como reconhecer argumentos?

Para se reconhecer se um argumento é **válido** ou **inválido**, deve-se em primeiro lugar saber reconhecer os argumentos, quando eles ocorrem e identificar as suas premissas se conclusões. A conclusão de um enunciado não tem que ser enunciada necessariamente no seu final ou começo.

Por exemplo: Como a moral tem influência nas ações e afeições, segue-se que ela não poder ser derivada da razão; e isso porque a razão, por si só, como já provamos, jamais pode ter tal influência.(David Hume)

Podemos escrever esse argumento válido na seguinte forma:

A moral tem influência nas ações e afeições
A razão não pode, isoladamente, influenciar as ações e afeições
Logo, a moral não pode ser derivada da razão.

Observação: nenhuma proposição é isoladamente uma premissa ou conclusão. Só é premissa quando ocorre como pressuposição num argumento ou raciocínio. Só é conclusão quando ocorre num argumento em que se afirma decorrer das proposições pressupostas nesse argumento.

Exemplos:

Tudo que é predeterminado é necessário. *Todo evento é predeterminado* Logo, todo evento é necessário	*Todo evento causado por outros eventos é predeterminado* *Todo evento é causado por outros eventos* *Logo, todo evento é predeterminado*

No primeiro argumento a *proposição* “todo evento é predeterminado” é uma premissa enquanto no segundo argumento ela é a conclusão

Além disso, nem tudo que é dito no decorrer de um argumento é premissa ou conclusão desse argumento. Um trecho que contém um argumento pode também conter outro material que tanto pode ser irrelevante quanto fornecer importantes informações sobre os antecedentes do argumento. Por exemplo:

Se o código penal proíbe o suicídio, esta proibição é ridícula; pois que penalidade pode assustar um homem que não teme a própria morte?

A *proposição* “o *código penal proíbe o suicídio”* não é premissa nem conclusão do argumento mas auxilia a se ter conhecimento de que proibição se refere o texto.

Podemos escrever esse argumento na forma:

Como nenhuma penalidade pode assustar um homem que não teme a própria morte
A proibição suicídio do código penal é ridícula.

Demonstrações

A matemática usa predominantemente processos **dedutivos** de raciocínio. A proposição matemática é demonstrada quando a deduzimos de proposições já admitidas como verdadeiras.

Uma demonstração é a determinação de uma verdade e é construída através de uma seqüência ordenada de raciocínios lógicos, com início e fim determinados. Cada raciocínio, individualmente, deve ter sua veracidade garantida e justificada. A base para a construção de demonstrações deve, necessariamente, ser um conjunto de axiomas, ou seja, um conjunto de afirmações que representam fatos, retirados do mundo real e para os quais não é necessária justificação.

Há diversas formas de se realizar demonstrações. Por exemplo:

- Demonstração por implicação direta;
- Demonstração por contraposição;
- Demonstração por contradição (ou redução ao absurdo);

Os detalhes e as diferenças de cada forma serão abordados oportunamente. Por hora, o fundamental é compreender que uma afirmação somente pode ser considerada válida se for acompanhada de uma demonstração, formal, de sua veracidade.

Enunciados categóricos

Além dos argumentos falaciosos, existe ainda o problema das frases ambíguas. Consideremos a declaração: *Políticos são Corruptos*

Do ponto de vista lógico, esta declaração é imprecisa. Surge então a questão: como podemos eliminar esta imprecisão? Segundo o filósofo grego Aristóteles (séc. IV a.C) isso somente é possível se enunciarmos as sentenças na forma categórica.

Acrescentando as expressões "todos", "alguns", "nenhum" à afirmação acima, obtemos enunciados categóricos, ou seja, enunciados precisos, no sentido de que podemos atribuir-lhes um e somente um valor lógico.

A declaração: "Políticos são corruptos" adquire as seguintes formas enunciativas, quando acrescidas de uma das expressões: "todo", "nenhum" e "alguns":

A - "Todos os políticos são corruptos."

E - "Nenhum político é corrupto."

I - "Alguns políticos são corruptos." ou "Existem políticos corruptos."

O- "Alguns políticos não são corruptos." ou "Existem políticos que não são corruptos."

As sentenças assim formuladas foram chamadas de proposições categóricas. Segundo a classificação de Aristóteles elas podem ser de quatro tipos:

Tipos de enunciados categóricos:	**Formas lógicas:**
A - afirmação universal	Todo S é P
E - negação universal	Nenhum S é P
I - afirmação particular	Algum S é P
O - negação particular	Algum S é não P

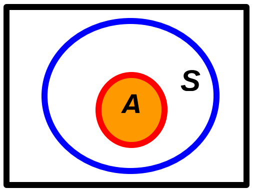
Representação dos enunciados categóricos por diagramas

No séc. XVIII, o matemático Leonard Euler utilizou-se de diagramas para explicar a uma princesa alemã o significado dos quatro enunciados categóricos. Para isso ele utilizou desenhos que se revelaram muito eficientes e ficaram conhecidos como **diagramas de Euler**. Esses diagramas são bastante utilizados no estudo de conjuntos.

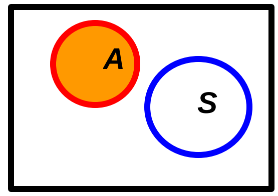
Um **conjunto** é uma coleção de elementos que têm uma característica, uma propriedade que os distingue. Quando falamos no conjunto A dos políticos, estamos reunindo em uma só coleção todos os elementos que apresentam a característica: ser político. Assim, podemos representar o conjunto A por uma região limitada do plano. Os pontos do seu interior representam os elementos de A, isto é, os políticos. Os pontos externos a essa região formam o conjunto ~A, ou seja, o dos não-políticos.

Chamando de S o conjunto de pessoas saudáveis e de A o conjunto de Atletas, os diagramas abaixo representam as quatro proposições categóricas de Aristóteles:

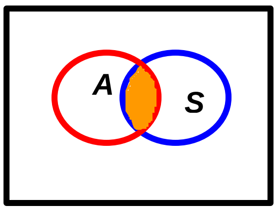
Todos os atletas são saudáveis



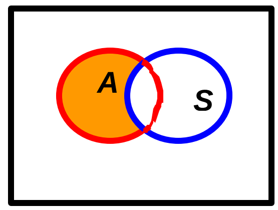
Nenhum atleta é saudável



Alguns atletas são saudáveis



Alguns atletas não são saudáveis



Atividade 1: Seja a proposição: “Todos os produtos importados são caros”.

(1) Represente esta proposição usando o diagrama de Euler.

(2) Localize no diagrama os produtos caros que não são importados.

(3) Localize no diagrama os produtos que não caros.

(4) Localize no diagrama os produtos que não são importados.

(5) Quais são as conclusões que podemos tirar da proposição acima?

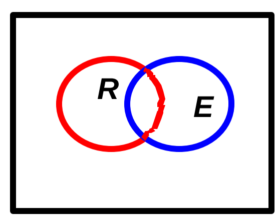
(a) Podem existir produtos importados que não são caros.

(b) Podem existir produtos caros que não são importados.

(c) Se um produto não é caro, então ele não é importado.

(d) Se um produto não é importado, então ele não é caro.

Atividade 2: Chamando de R o conjunto dos países ricos e de E o conjunto dos países exportadores de petróleo, e admitindo válido o diagrama ao lado, procure identificar:



(a) O conjunto dos países que são exportadores de petróleo mas não são ricos.

(b) O conjunto dos países ricos que não são exportadores de petróleo;

(c) O conjunto dos países que não são exportadores de petróleo e nem são ricos;

(d) O conjunto dos países que não são exportadores;

(e) O conjunto dos países que não são ricos.

Cálculo Proposicional

Alguns termos especiais empregados em lógica:

Proposição Simples é uma sentença declarativa. As **proposições** são verdadeiras ou falsas não havendo outra alternativa (**Princípio do Terceiro Excluído**) e nisso diferem das perguntas, ordens e exclamações. **Só as proposições podem ser afirmadas ou negadas**. Além disso, uma proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa (**Princípio da não Contradição**).

Valor lógico das proposições: chama-se de valor lógico de uma proposição a **verdade (V)** se a proposição é verdadeira e **falsidade (F)** se a proposição for falsa. Notação: V(p)

As *proposições* são normalmente representadas por letras minúsculas: p, q, r, s, ...

Exemplos:

(1) p: 3 + 4 = 9

(2) q: Minas Gerais é um estado da região sudeste do Brasil.

(3) r: 7 + 9 (falta predicado)

(4) s: João estuda matemática? (interrogativa)

(5) t: 3x + 2 = 6 (qual o número que multiplicado por 3 e somado com 2 é igual a 6?)

Observação: a linguagem adotada na lógica matemática é muito particular, mas em nada difere de outras linguagens de programação. Consiste de um conjunto de símbolos e expressões com significados predefinidos e que podem ser utilizados desde que respeitadas certas regras. No entanto, é importante notar que cada símbolo tem um significado próprio, ou seja, deve-se conhecer e respeitar o significados dos símbolos utilizados.

Operadores lógicos

No dia-a-dia utilizamos constantemente expressões tais como: **não, e, ou, se...então, se e somente se** ou equivalentes. Estas expressões são imprescindíveis para a comunicação do pensamento. São chamadas **operadores lógicos**, pois npossibilitam formar proposições compostas a partir de proposições simples.

Os **conectivos** são palavras usadas para formar novas proposições. Os conectivos usuais em matemática são: <u>e</u>, <u>ou</u>, <u>se</u> ... <u>então</u> e <u>se e somente se.</u>

As proposições compostas são designadas pelas letras latinas maiúsculas: P, Q, R, S, ...

Exemplos:

P: João estuda música **ou** Paulo estuda química.

Q: João estuda música **e** Paulo estuda química.

R: **Se** João estuda música **então** Paulo estuda química.

T: **Não** estudo música **nem** química.

Valor lógico de uma proposição composta

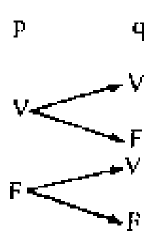
Segundo o **Princípio do Terceiro Excluído**, toda proposição simples p é verdadeira ou falsa, isto é, tem valor lógico V ou F. A determinação do valor lógico de uma **proposição composta** depende do valor lógico das proposições que a compõe.

Dada uma proposição composta P(p, q, r, s, ...), pode-se sempre determinar o seu **valor lógico** quando são conhecidos os valores lógicos das proposições simples que a compõe.

Tabela-verdade

Para se determinar o valor lógico de uma proposição composta, pode-se usar um dispositivo chamado **tabela-verdade** no qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta, correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos à proposições simples que a compõe.

Nos enunciados compostos de duas *proposições* **p** e **q**, temos quatro situações possíveis: **p** e **q** são verdadeiros, **p** é verdadeiro e **q** é falso, **p** é falso e **q** é verdadeiro e ambos são falsos, isto é para cada valor lógico de p, temos dois valores lógicos de q. Estas quatro possibilidades são representadas, respectivamente, pelas quatro linhas horizontais de valores-verdade.

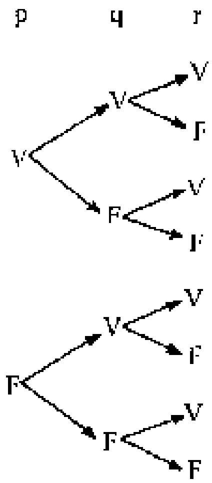


p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

$n = 2 \Rightarrow 2^n = 4$ possibilidades

A coluna sob a forma lógica do enunciado composto assinala o valor-verdade do enunciado em cada linha.

Quando uma proposição composta é formada por três proposições simples p, q e r, para cada valor lógico de p, temos dois valores lógicos de q e para cada valor lógico de q, temos dois de r.



p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

se n = 3 $\Rightarrow$ $2^n = 8$ possibilidades

Então, a tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Assim, para se construir uma tabela verdade com n proposições simples, atribui-se à1ª proposição, $2^n/2$ valores (V) seguidos de , $2^n/2$ valores (F); à2ª proposição, $2^n/4$ valores (V) seguidos de , $2^n/4$ valores (F) e assim sucessivamente.

Cálculo Proposicional

A negação: ~p

A expressão **"não é verdade que"** ou uma equivalente, em geral, antecede um enunciado para formar um novo enunciado, o qual é chamado de **negação** do primeiro. Chama-se então **negação** de uma proposição p a proposição "não p" cujo valor lógico é (V) se p é falsa e (F) se p é verdadeira.

Exemplos:

(1) p: 3 <5 (V)
~p: 3 $\geq$ 5 (F)

(2) Todo número primo é ímpar (F)
Existe número primo que não é ímpar. (V)

A **tabela-verdade** da negação admite duas situações possíveis: **P** é <u>verdadeiro</u> ou **P** é <u>falso</u>. Estas situações são representadas pelas duas linhas horizontais de valores-verdade. A coluna sob **~P** indica o valor-verdade de **~P** em cada situação.

Tabela I	
P	**~P**
V	**F**
F	**V**

A conjunção: $p \wedge q$

Uma composição formada por dois enunciados, ligados pelo operador lógico **"e"** ou uma expressão equivalente, chama-se **conjunção** cujo valor lógico é (V) quando são ambas verdadeiras e (F) nos demais casos.

Exemplos:

(1) p: 3 <5 (V)

q: 7 > 9 (F)

$p \wedge q$: 3 < 5 e 7 > 9.(F)

(2) p: José estuda física.

q: José joga futebol.

$p \wedge q$: José estuda física e joga futebol.

A disjunção: $p \vee q$

A proposição formada pela união de duas *proposições* simples através do operador lógico **"ou"** chama-se **disjunção,** ou seja, é a afirmação pela qual se declara pelo menos uma das afirmações p e q.

Na linguagem corrente a palavra **"ou"** possui dois significados distintos. O chamado sentido <u>não-exclusivo</u> para o qual ao menos um dos enunciados componentes é verdadeiro ou ambos. E o sentido exclusivo onde um dos enunciados é verdadeiro e o outro é falso. Na lógica matemática a expressão **"ou"** se usa sempre no sentido não-exclusivo.

A disjunção $p \vee q$ tem valor lógico (F) quando são p e q são falsas e (V) nos demais casos.

Exemplos:

1) p:3 < 7 (V)

q: 15 é divisível por 5 (V)

$p \vee q$: 3 < 7 ou 15 é divisível por 5. (V)

2) p: o triângulo ABC é retângulo.

q: o triângulo ABC é isósceles.

$p \vee q$: o triângulo ABC é retângulo ou isósceles.

Abaixo temos a tabela-verdade da conjunção e disjunção:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

A condicional: $p \to q$

A combinação de dois enunciados por meio das palavras **"se...então..."** forma um enunciado composto que recebe o nome de **condicional**. A cláusula à qual se acha prefixada a palavra ***se*** chama-se **antecedente** e a cláusula introduzida pela palavra ***então*** chama-se **conseqüente.**

A proposição **"se p então q"** tem valor lógico (F) somente quando p é verdadeira e q é falsa. Isto é, negar que ocorre **"se p então q"** é dizer que p ocorreu e q não acorreu.

Pode-se ler a condicional $p \to q$ na forma:

- p é condição *suficiente* para q
- q é condição <u>necessária</u> para p

Exemplos

(1) p: 7 < 3 (F)

q: 15 é divisível por 5 (V)

$p \to q$: **Se** 3 < 7 **então** 15 é divisível por 5 (V)

Sejam as proposições:

P: *Se todos os números naturais pertencem a $\mathbb{N}$ e 1999 é um número natural, então 1999 pertence a $\mathbb{N}$.*

Q: *Se 64 é par, então 64 não é impar.*

R: *Se o Cruzeiro perder o jogo, então comerei minha camisa.*

Pode-se observar que as condicionais acima são de tipos bastante diferentes. O conseqüente da proposição P decorre, logicamente, do seu antecedente; o conseqüente da proposição Q, só decorre de seu antecedente em virtude da definição do número par, que significa número não ímpar; a proposição R comunica uma decisão da pessoa. Apesar dessas diferenças, as três proposições têm uma coisa em comum: todas afirmam algum tipo de implicação.

Uma condicional $p \to q$ **não afirma** que o conseqüente q é **conseqüência** do antecedente p. O que uma condicional afirma é unicamente uma **<u>relação</u>** entre os valores lógicos do antecedente e do conseqüente.

Atividade 3

A professora de Álgebra fez a seguinte afirmação em sala de aula: "Se eu ganhar na loteria eu compro uma motocicleta Harley-Davison."

(1) Em que circunstâncias ela teria mentido:

(a) Ganhou na loteria e não comprou a moto.

(b) Não ganhou na loteria e não comprou a moto.

(c) Não ganhou na loteria e comprou a moto.

(d) Ganhou na loteria e comprou a moto.

(2) Quais seriam as frases equivalentes ao que ela disse:

(a) Se eu não comprar uma motocicleta Harley-Davidson então, eu não ganhei na loteria.

(b) Se eu não ganhar na loteria eu não compro uma motocicleta Harley-Davidson.

(c) Se eu comprar uma motocicleta Harley-Davidson é porque ganhei na loteria.

A bicondicional: $P \leftrightarrow Q$

Um enunciado formado pela expressão **"se e somente se"** chama-se **bicondicional** e pode ser considerado como a conjunção de dois enunciados condicionais na forma $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Logo a proposição bicondicional "p se e somente se q" tem valor lógico (V) se p e q tiverem o mesmo valor lógico e (F) nos demais casos. Notação: $p \leftrightarrow q$.

Exemplos:

(1) p: $3 < 7$

q: 15 é divisível por 5

$p \rightarrow q$: $3 < 7$ **se e somente se** 15 é divisível por 5.

(2) p: o triângulo ABC é retângulo.

q: o triângulo ABC é isósceles.

$p \rightarrow q$: o triângulo ABC é retângulo **se e somente se** ele for isósceles.

Observação: Pode-se ler a bicondicional $p \leftrightarrow q$ na forma:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p.

Abaixo temos a tabela-verdade da condicional e da bicondicional:

P	**Q**	**$P \rightarrow Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**
V	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**

Atividade 4

Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O Leão e o unicórnio eram duas estranhas criaturas que freqüentavam a floresta. O Leão mentia às segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O unicórnio mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

Problema 1: Um dia Alice encontrou o Leão e o Unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

A partir dessas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Problema 2: Em outra ocasião, Alice encontrou o Leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

1) Eu menti ontem.
2) Eu mentirei daqui a três dias.

Qual era o dia da semana?

Problema 3: Em qual dia da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

1) Eu menti ontem.
2) Eu mentirei amanhã.

Problema 4: Em que dias da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

1) Eu menti ontem e mentirei amanhã.
2) Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.
3) Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.
4) Menti ontem se e somente se mentirei amanhã.

Atividade 5: Leia as seguintes afirmações:

1) Se um político tem muito dinheiro, então ele pode ganhar as eleições.
2) Se um político não tem muito dinheiro, então ele não pode ganhar as eleições.
3) Se um político pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.
4) Se um político não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.
5) Um político não pode ganhar as eleições, se ele não tem muito dinheiro.

Responda:

(a) Assumindo que (1) é verdadeiro, quais das outras afirmações são verdadeiras.

(b) Mesmas perguntas para (5).

Construção de tabela-verdade de proposições compostas

Exemplo 1: Construir a tabela verdade da proposição $P(p, q) = \sim(p \wedge \sim q)$.

Primeiro forma-se o par de colunas correspondentes às duas proposições simples, em seguida forma-se a coluna para $\sim q$, depois para $p \wedge \sim q$ e, por último, para $\sim(p \wedge \sim q)$.

p	**q**	**~q**	**p ∧ ~q**	**~(p ∧ ~q)**
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Exemplo 2: Construir a tabela verdade da proposição $P(p, q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$.

p	**q**	**p ∧ q**	**q ↔ p**	**~(p ∧ q)**	**~(q ↔ p)**	**~(p ∧ q) ∨ ~(q ↔ p)**
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Exemplo 3: Construir a tabela verdade da proposição $P(p, q, r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$.

p	**q**	**r**	**~r**	**p ∨ ~r**	**q ∧ ~r**	**p ∨ ~r → q ∧ ~r**
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Tautologia e Contradição

Chama-se **tautologia** a proposição composta que é sempre verdadeira independente dos valores lógicos das proposições que a compõe. Por exemplo, as proposições $p \vee \sim p$ e $\sim(p \wedge \sim p)$ são exemplos de tautologias.

Na tabela-verdade de uma tautologia, a última coluna tem apenas o valor lógico V.

Exemplo 4: construir a tabela verdade da proposição $P(p, q, r) = p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$

p	**q**	**r**	**~q**	**p ∧ r**	**~q ∨ r**	**p ∧ r → ~q ∨ r**
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Chama-se **contradição** a proposição composta que é sempre **falsa** independente dos valores lógicos das proposições que a compõe. Por exemplo, as proposições $p \wedge \sim p$ e $\sim(p \vee \sim p)$ são exemplos de contradições.

Na tabela-verdade de uma contradição, sua última coluna tem apenas valor lógico (F).

Como uma **tautologia** é sempre verdadeira, a negação de uma tautologia é sempre falsa, ou seja, é uma **contradição** e vice-versa.

Exemplo 5: A proposição $\sim((p \leftrightarrow q \wedge p) \rightarrow q)$ é uma **contradição**

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**	**$(p \leftrightarrow q) \wedge p$**	**$(p \leftrightarrow q \wedge p) \rightarrow q$**	**$\sim((p \leftrightarrow q \wedge p) \rightarrow q)$**
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Exemplo 6: A proposição **$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$** é uma **tautologia**

p	**q**	**$\sim q$**	**$q \wedge \sim q$**	**$p \vee (q \wedge \sim q)$**	**$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$**
V	V		F	V	V
V	F		F	V	V
F	V		F	F	V
F	F		F	F	V

Exemplo 7: A proposição **$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$** é uma **tautologia**

p	**q**	**r**	**$q \vee r$**	**$p \wedge (q \vee r)$**	**$p \wedge q$**	**$p \wedge r$**	**$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**	**$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Parênteses & Precedência de Operadores Lógicos

Na Lógica Matemática é convencionada a seguinte ordem de precedência entre os operadores: (1) ~ (2) $\wedge$, $\vee$ (3) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Duas regras importantes devem ser observadas:

1. A ordem de prioridade de uma operação lógica somente pode ser alterada através do uso de parênteses.
2. Operadores diferentes e de mesma prioridade necessariamente devem ter sua ordem indicada pelo uso de parênteses.

Exemplos:

(1) As seguintes proposições estão escritas **corretamente**:

(a). $p \vee q \vee r \leftrightarrow \sim p$

(b). $p \vee q \vee (r \leftrightarrow \sim p)$

(c). $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

(d). $(p \wedge q) \vee r \rightarrow p$

(e). $(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

(f). $p \vee q \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

(2) As seguintes sentenças estão **incorretamente** escritas (não tem significado definido!!!):

Sentença	Erro
(a). $p \wedge q \vee r$	Os operadores $\wedge$ e $\vee$ são diferentes e têm mesma prioridade. O resultado é ambíguo.
(b). $p \rightarrow q \leftrightarrow p$	Os operadores $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são diferentes e têm mesma prioridade. O resultado é ambíguo.
(c). $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge) \sim q$	Falta uma proposição entre o $\wedge$ e o parênteses. Falta um operador entre o parênteses e a proposição $\neg$ q.

(3) A colocação de parênteses pode alterar o valor lógico (e o sentido) de uma proposição:

(i). $V \vee F \rightarrow F \quad \Leftrightarrow V \rightarrow F \quad \Leftrightarrow F$

(ii). $V \vee (F \rightarrow F) \quad \Leftrightarrow V \vee V \quad \Leftrightarrow V$

Escrita Correta de Proposições

Uma fonte muito comum de erros em Matemática é a conversão de frases da linguagem cotidiana para expressões e proposições. Observe os exemplos a seguir:

Sentença	Errado	Certo
Se $x^2 = 1$ então x é igual a 1 ou a –1.	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \vee -1$ 💣	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \vee x = -1$ ☺
Se $x^2 = 1$ então as soluções são 1 e –1.	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \wedge -1$ 💣	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \vee x = -1$ ☺
Se $x^2 = 1$ então as soluções são 1 e –1.	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \wedge x = -1$ 💣	$x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \vee x = -1$ ☺

Atividade 4: Assumindo que Sherlock Holmes acerte todos os raciocínios que faz, indique quais das frases abaixo poderiam ser ditas por ele:

(a). Se sei que se p ocorre então q ocorre e sei que p ocorreu então é elementar, meu caro Watson, que q ocorreu, está ocorrendo ou ocorrerá.

(b). Se sei que se p ocorre então q ocorre e sei que p não ocorreu então é elementar, meu caro Watson, que q não ocorreu.

(c). Se sei que se p ocorre então q ocorre e sei que q não ocorreu então é elementar, meu caro Watson, que p não ocorreu.

(d). Se sei que se p ocorre então q ocorre e sei que q ocorreu então é elementar, meu caro Watson, que p ocorreu.

Implicações e Equivalências

Relação de Implicação

Diz-se que uma proposição P(p, q, r,..) implica uma proposição Q(p, q, r...), $P \Rightarrow Q$, se para valor verdadeiro da primeira então a segunda é verdadeira. Da definição segue que $P \Rightarrow Q$ somente se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

Exemplo: Sendo P: $p \wedge q$ e Q: $p \vee q$, verificar que $P \Rightarrow Q$, isto é, que $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Atenção! os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são diferentes pois o primeiro é de operação lógica (aplicado às proposições p e q dá uma nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que o condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia)

Uma **relação** entre proposições se distingue de **operação** entre proposições porque a primeira não cria uma nova proposição e a segunda sim.

Observação:

Todo teorema é uma implicação da forma **HIPÓTESE** $\Rightarrow$ **TESE**. Logo, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso da hipótese ser verdadeira e a tese falsa, isto é, a verdade da hipótese é **suficiente** para **garantir** a verdade da tese**.**

Relação de Equivalência

Diz-se que uma proposição P(p, q, r,..) é **equivalente** a uma proposição Q(p, q, r...), se elas implicarem uma na outra e representa-se por $P \Leftrightarrow Q$. Assim, **$P \Leftrightarrow Q$** se a **biconditional** **$P \leftrightarrow Q$** é uma **tautologia**.

Em particular, quaisquer duas tautologias ou duas contradições são equivalentes.

Exemplo 1: Sendo P: $p \leftrightarrow q$ e Q: $(p \to q) \wedge (q \to p)$, verificar que $P \Leftrightarrow Q$, isto é, mostrar que $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$ é uma tautologia.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Exemplos 2: Sendo P: $\sim(p \to q)$ e Q: $p \wedge \sim q$, verificar se $P \Leftrightarrow Q$, isto é, $\sim(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$(p \to q)$	$\sim(p \to q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Exemplos 3: Se P: $p \wedge \sim q \to f$ onde f é uma proposição cujo valor lógico é (F) e Q: $p \to q$, então $P \Leftrightarrow Q$, isto é, $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

p	q	$\sim q$	$p \to q$	$p \wedge \sim q$	f	$p \wedge \sim q \to f$	$(p \wedge \sim q \to f) \leftrightarrow (p \to q)$
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V

Observação: Desta equivalência provém o **método de demonstração por absurdo**. As demonstrações por absurdo consistem em anexar à hipótese a negação da tese e mostrar que isso leva a uma proposição falsa. Isto é, provar que a verdade da hipótese é suficiente para a verdade da tese, é o mesmo que afirmando a hipótese e negando a tese se chegar a um absurdo.

Propriedades das operações

Algumas equivalências são bastante úteis nas demonstrações. Indicando por v as tautologias e por f as contradições, temos as propriedades que se seguem.

(I) Propriedade da operação de conjunção

(1) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativa)

(2) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (associativa)

(3) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotente)

(4) $p \wedge v \Leftrightarrow p$

(5) $p \wedge f \Leftrightarrow f$

(II) Propriedade da operação de disjunção

(1) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (comutativa)

(2) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (associativa)

(3) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (idempotente)

(4) $p \vee v \Leftrightarrow v$

(5) $p \vee f \Leftrightarrow p$

(III) Propriedades relativas às duas operações

(1) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributiva da conjunção relativamente à disjunção)

(2) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributiva da disjunção relativamente à conjunção)

(3) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (absorção)

(4) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (absorção)

(IV) Propriedade da operação de negação

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

(V) Propriedades relativas às três operações (leis de De Morgan ou de dualidade)

(1) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(2) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Simplificação de Propriedades Lógicas

Exemplo: sendo p e q proposições, simplifique a proposição $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (q \vee (\sim p \wedge \sim q))$	(distributividade)
$\Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \wedge ((q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q))$	(distributividade)
$\Leftrightarrow (\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)) \wedge ((q \vee \neg\sim p) \wedge v) \Leftrightarrow$	(idempotência)
$\Leftrightarrow \sim p \wedge (q \vee \sim p) \Leftrightarrow$	(absorção)
$\Leftrightarrow \sim p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow$	(comutatividade)
$\Leftrightarrow \sim p$	(absorção)

Afirmação e Negação

Negação da conjunção: como $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ define-se como negação de $p \wedge q$ a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo:

p: $a \neq 0$; q: $b \neq 0$

$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0 \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

Negação da disjunção: como $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$

Exemplo:

p: a = 0; q: b = 0

$p \vee q$: a = 0 e b = 0 $\Leftrightarrow$ $\sim(p \vee q)$: a $\neq$ 0 e b $\neq$ 0

Negação da condicional: como $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplo:

p: $5^2 = (-5)^2$; q: 5 = -5

$p \rightarrow q$: $5^2 = (-5)^2 \rightarrow 5 = -5$ $\Leftrightarrow$ $\sim(p \rightarrow q)$: $5^2 = (-5)^2$ e 5 = -5

Negação da bicondicional: como $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, pode-se verificar que $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

Com isso, define-se como a negação de $p \leftrightarrow q$ a proposição $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

Exemplo:

p: $5^2 = (-5)^2$; q: 5 = -5

$p \leftrightarrow q$: $5^2 = (-5)^2 \leftrightarrow 5 = -5$ $\Leftrightarrow$ $\sim(p \leftrightarrow q)$: $5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$ ou $5^2 \neq (-5)^2$ e $5 \neq -5$

Exemplos:

- A negação da proposição "é inteligente e estuda" é a proposição " não é inteligente ou não estuda".
- A negação da proposição "é médico ou professor" é a proposição " não é médico e não é professor".
- A negação da proposição "se eu ganhar na loteria eu compro uma motocicleta." é ganhei na loteria e não comprei uma motocicleta."

Nos quadros abaixo, vemos a negação e afirmação em vários conjuntos.

x, y $\in \mathbb{R}$		**p, q proposições**		**A, B conjuntos e x elemento**	
afirmação	negação	afirmação	negação	afirmação	negação
$x = y$	$x \neq y$	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	$x \in A \cup B$	$x \notin A \wedge x \notin B$
$x > y$	$x \leq y$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$x \in A \cap B$	$x \notin A \vee x \notin B$
$x < y$	$x \quad y$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$x \in A - B$	$x \notin A \vee x \in B$
		$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.	$x \in \complement_A B$, $(B \subset A)$	$x \notin A \vee x \in B$

Sentenças Abertas

Em lógica e em Matemática, são chamadas proposições somente as sentenças declarativas, à quais se pode associar, um e, somente um, dos valores lógicos, V ou F .
Consideremos as duas sentenças, respectivamente, interrogativa e imperativa:

- "Qual o número que somado a 4 dá nove?"
- Determine o número que somado a 4 dá nove."

Chamando de x o número procurado, as sentenças acima podem ser traduzidas por: $x + 4 = 9$. Esta sentença não pode ser classificada como V ou F pois seria como se estivéssemos atribuindo um valor lógico a uma pergunta.
O número procurado x pode assumir valores em um conjunto numérico, como, por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$. Assim, dizemos que x é uma variável em $\mathbb{N}$.
A sentença $x + 4 = 9$, onde x é uma variável em $\mathbb{N}$,é uma sentença aberta.

Definição: p(x) é uma **sentença aberta** em um dado conjunto, se, e somente se, p(x) torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) sempre que se substitui a variável x por um elemento do conjunto dado.
Logo, dependendo do valor associado a *x*, a sentença aberta pode se tornar uma proposição verdadeira ou falsa. Portanto, p(x): $x + 4 = 9$, é uma sentença aberta.

Uma sentença aberta pode conter uma ou mais variável. Por exemplo, p(x, y): $= x + y = 0$

Pode-se operar sentenças abertas da mesma forma que se opera proposições.

Exemplo:

Se p(x): $x > 1$ e q(x): $x^2 < 2$, temos:

$p(x) \wedge q(x)$: $x > 1$ e $x^2 < 2$

$\sim q(x)$: $x^2 \geq 2$

$p(x) \rightarrow q(x)$: se $x > 1$, então, $x^2 < 2$

Conjunto-verdade de uma sentença aberta

O conjunto-verdade, V_p , de uma sentença aberta p(x), onde x é uma variável em A, é o conjunto de todos os valores possíveis de x, que tornam p(x) uma proposição verdadeira.
Isto é, $Vp = \{x / x \in A \wedge p(x) \text{ é } V\}$

Exemplos:

(1) seja a sentença aberta $x + 2 > 5$ em $\mathbb{N}$, então, $Vp = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x + 2 > 5\} = \{4, 5, 6\}$

(2) seja a sentença aberta $x + 2 > 5$ em $\mathbb{R}$, então, $Vp = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x + 2 > 5\} = (4, \infty)$

Implicação entre sentenças abertas

Diz-se que uma sentença aberta p(x) implica outra sentença aberta q(x) quando o conjunto-verdade de p(x), está contida no conjunto-verdade de q(x), isto é, $V_p \subset V_q$.

Exemplo: "$x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$" pois

$V_p = \{3\} \subset V_q = \{-3, 3\}$

Claro que se $V_p \not\subset V_q$ a implicação é falsa

Equivalências entre sentenças abertas

Diz-se que uma sentença aberta p(x) é equivalente a outra sentença aberta q(x) quando o conjunto-verdade de p(x), é igual ao conjunto-verdade de q(x), isto é, $V_p = V_q$

Exemplo: "$2x + 3 = x + 5 \Leftrightarrow 7x -3 = 5x + 1$"

fazendo p(x): $2x + 3 = x + 5$ e q(x): $7x -3 = 5x + 1$, $V_p = \{2\} = V_q = \{2\}$

Quantificadores

Como vimos anteriormente, são chamadas proposições, somente as sentenças declarativas, às quais se pode associar um e, somente um, dos valores lógicos, V ou F.

Há duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

(1) atribuir valor às variáveis

(2) utilizar quantificadores

Quantificador Universal ($\forall$): tem significado "qualquer que seja..", "para todo..".
Por exemplo, $x^2 +1 > 0$ é um sentença aberta e **qualquer** que seja x, x2 +1 > 0 é uma proposição. Simbolicamente, $(\forall x)(x^2 +1 > 0)$.

Quantificador Existencial ($\exists$): tem significado "existe..." Por exemplo, x +1 = 0 é um sentença aberta e "existe x tal que x +1 = 0 é uma proposição".
Notação: $(\exists)(x +1 = 0)$.

Observação: algumas vezes se usa o quantificador ($\exists!$) que tem significado: "existe único", existe um e somente um". Por exemplo: $(\exists! a)(a + 1 = 7)$ que se lê: existe único número a tal que a + 1 = 7

Conjunto-Verdade e Conjunto Universo

Nas proposições abertas, é necessário determinar o conjunto dos possíveis valores de x. Por exemplo, em x + 1 = 0 x pertence aos reais; em x tem 31 dias, x pertence ao conjunto de meses do ano.

O conjunto A dos valores possíveis de x chama-se **conjunto universo** e o conjunto dos elementos que tornem a sentença aberta p(x) uma proposição verdadeira é denominado **conjunto verdade (**V_p**)**

Por exemplo, em x + 1 = 3, o conjunto universo é o conjunto dos números reais e o conjunto verdade só tem o elemento 2. Notação: $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 = 3)$

Para o caso do quantificador universal ($\forall$), a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é:

<u>verdadeira</u> se V_p **=** A e é <u>falsa</u> se $V_p \neq A$

Para o caso do quantificador existencial (**$**), a proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é:

<u>verdadeira</u> se $V_p \neq \varnothing$ e é falsa se $V_p = \varnothing$

Exemplos:

sentença aberta	proposição	valor lógico
$x^2 \geq 0$	$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$	V
$x^2 - 4 = 0$	$(\exists! x \in \mathbb{Z})(x^2 - 4 = 0)$	F
$x + 4 > 1$	$(\exists x \in \mathbb{N})(x + 4 > 1)$	F
$x + 4 > 1$	$(\exists x \in \mathbb{R})(x + 4 > 1)$	V
$x + 4 > 1$	$(\forall x \in \mathbb{R})(x + 4 > 1)$	F

Observações:

1) Em alguns casos, o quantificador universal é omitido. Por exemplo, podemos escrever "sendo x e y números reais, x + y = y + x "quando formalmente deveríamos escrever "sendo x e y números reais, $\forall$ x, $\forall$ y, x + y = y + x.
2) Desde que não haja perigo de confusão, o conjunto universo pode ser omitido.

Operações lógicas sobre sentenças abertas

Pode-se operar sentenças abertas da mesma forma que se opera proposições. Por exemplo, sejam p(x) e q(x) duas sentenças abertas em um conjunto A.

Conjunção: se um elemento a $\in$ A satisfaz são mesmo tempo as sentenças abertas p(x) e q(x) então p(x)$\wedge$ q(x) é verdadeira. Portanto, o conjunto-verdade da sentença p(x)$\wedge$ q(x) é $V_{p \cap q} = V_p \cap V_q$

Exemplo: sejam as sentenças abertas em $\mathbb{Z}$

p(x): $x^2 + x - 6 = 0$

q(x): $x^2 - 9 = 0$

$V_{p \cap q} = V_p \cap V_q$ = {x $\in \mathbb{Z}$ / $x^2 + x - 6 = 0$ } $\cap$ {x $\in \mathbb{Z}$ / $x^2 - 9 = 0$} = {-3, 2} $\cap$ {-3, 3} = {-3}

Disjunção: o conjunto-verdade da sentença p(x) $\vee$ q(x) é $V_{p\cup q} = V_p \cup V_q$

Considerando as sentenças do exemplo acima, $V_{p\cup q} = V_p \cup V_q$ = {-3, 2, 3}

Condicional:

Lembrando que p(x)$\rightarrow$ q(x) $\Leftrightarrow$ ~p(x) $\vee$ q(x), podemos dizer que o conjunto-verdade da sentença aberta p(x)$\rightarrow$ q(x) em A coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta ~p(x) $\vee$ q(x) em A e, portanto: $V_{p\rightarrow q} = V_p \cup V_{\sim q}$ = $\{x \in A / \sim p(x)\} \cup \{x \in A / q(x)\}$

Bicondicional:

Como p(x) $\leftrightarrow$ q(x) $\Leftrightarrow$ (p(x)$\rightarrow$ q(x)) $\wedge$ (q(x)$\rightarrow$ p(x)), segue que o conjunto-verdade da sentença aberta p(x) $\leftrightarrow$ q(x) em A coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta ~(p(x)$\rightarrow$ q(x)) $\wedge$ (q(x)$\rightarrow$ p(x)) em A e, portanto, $V_{p\leftrightarrow q} = V_{p\rightarrow q} \cap V_{q\rightarrow p}$

Negação de proposições quantificadas

Através do conjunto-verdade das proposições p(x) e q(x), podemos definir:

afirmação	negação
$(\forall x)$(p(x))	$(\exists$x)(~p(x))
$(\exists$x)(p(x))	$(\forall x)$(~p(x))
p(x)$\wedge$ q(x)	~p(x) $\vee$ ~q(x)
p(x)$\vee$ q(x)	~p(x) $\wedge$ ~q(x)
p(x)$\rightarrow$ q(x)	p(x) $\wedge$ ~q(x)
p(x)$\leftrightarrow$ q(x)	(p(x) $\wedge$ ~q(x)) $\vee$ (~p(x)$\wedge$ q(x)).

Exemplos:

1) A negação da proposição "para todos os números naturais, n + 2 > 8" é a proposição "existe um número natural tal que n + 2 $\leq$ 8".

Simbolicamente: ~(($\forall x \in \mathbb{N}$)(n + 2 > 8)) $\Leftrightarrow$ ($\exists$x $\in \mathbb{N}$)(n + 2 $\leq$ 8).

2) A negação da proposição "existe um número real x tal que x^2 + 1 $\leq$ 0" é a proposição "para todo x real, x^2 + 1 > 0".

Simbolicamente: ~(($\exists$ x $\in \mathbb{R}$)(x^2 + 1 $\leq$ 0)) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)(x^2 + 1 > 0).

Contra-exemplo

Como ~(($\forall x$)p(x)) $\Leftrightarrow$ ($\exists$x)(~p(x)) então mostrar que uma proposição ($\forall x$)(p(x)) é falsa, é equivalente a mostrar que ($\exists$x)(~p(x)) é verdadeiro, isto é, existe um elemento x_0 tal que p(x_0) é falsa. Tal elemento x_0 é chamado de contra-exemplo da proposição ($\forall x$)(p(x)) e é a forma de se mostrar que tal proposição é falsa.

Atividade 5: Vamos utilizar algumas as propriedades de conjunção e disjunção para provar alguns resultados relativos à Teoria dos Conjuntos.

(1) Provar que $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

$p: x \in A$, $q: x \in B$

$p \wedge q: x \in A \cap B$

$\sim(p \wedge q): x \notin A \cap B$

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim p \vee \sim q$: $x \notin A$ ou $x \notin B$

Logo, $x \notin A$ ou $x \notin B$

(2) Provar que $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B$

$p: x \in A$, $q: x \in B$

$p \vee q: x \in A \cup B$

(3) Provar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$p: x \in A$; $q: x \in B$; $r: x \in C$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$

Proposições associadas a uma condicional

Definição: para cada *proposição* condicional $p \rightarrow q$ correspondem três *proposições*:

(a) $q \rightarrow p$ (**Recíproca**)

(b) $\sim p \rightarrow \sim q$ (**Contrária**)

(c) $\sim q \rightarrow \sim p$ (**Contrapositiva**)

Exemplo 1:

Seja a condicional $p \rightarrow q$: *Se um número inteiro é par, então, seu quadrado é par*.

Recíproca: Se o quadrado de um número inteiro é par, então, o número é par.

Contrária: Se um número inteiro não é par, então, seu quadrado não é par.

Contrapositiva: Se o quadrado de um número inteiro não é par, então o número não é par.

Exemplo 2:

Seja a condicional $p \rightarrow q$: Se T é equilátero, então T é isósceles (V)

recíproca ($q \rightarrow p$): Se T é isósceles, então T é equilátero (F)

contrária, $\sim p \rightarrow \sim q$: Se T não é equilátero, então T não é isósceles. (F)

contrapositiva, $\sim q \rightarrow \sim p$: Se T não é isósceles, então T não é equilátero(V)

Com este exemplo, pode-se observar que a condicional $p \to q$ **não é equivalente** à sua contrária nem à sua recíp roca. A tabela-verdade das quatro proposições mostra facilmente este fato.

p	q	**p→q**	q→p	~p→~q	~q→~p
V	V	**V**	V	V	V
V	F	**F**	V	V	F
F	V	**V**	F	F	V
F	F	**V**	V	V	V

Além disso, duas importantes propriedades da condicional $p \to q$ ficam demonstradas:

(I) A condicional $p \to q$ e sua contrapositiva, $\sim q \to \sim p$, são equivalentes.

(II) A recíproca, $q \to p$, e a contrária, $\sim p \to \sim q$, da condicional $p \to q$ são equivalentes.

Exemplo 3:

Seja a condicional: *Se x é menor que zero então x não é positivo*.

Fazendo p(x): x é menor que zero; q(x) : x é positivo

$p(x) \to \sim q(x)$: Se x é menor que zero então x não é positivo.

recíproca, $\sim q(x) \to p(x)$: Se x não é positivo então x é menor que zero.

contrária, $\sim p(x) \to q(x)$: Se x não é menor que zero então x é positivo.

contrapositiva, $\sim q(x) \to \sim p(x)$: Se x é positivo então x não é menor que zero.

Exemplo 4: A contrapositiva da recíproca de $x = 0 \to x < 1$ é $x \neq 0 \to x \geq 1$

Exemplo 5: A contrapositiva da contrária de $x < 1 \to x < 3$ é $x < 3 \to x < 1$

Validade de um argumento usando tabela-verdade

Usando quantificadores, universal ou existencial, e a letra "x" como variável, podemos reescrever os enunciados categóricos do seguinte modo:

Todo S é P	Qualquer que seja x, se x é S então x é P.
Nenhum S é P	Qualquer que seja x, se x é S então x não é P
Algum S é P	Existe x, x é S e x é P
Algum S é não P	Existe x, x é S e x não é P

Com isso, podemos testar a validade de argumentos categóricos usando tabela-verdade ou equivalências.

Por exemplo, sejam argumentos:

Todo animal é mortal	Todo animal é mortal
O homem é um animal	***O homem é mortal***
Portanto, o homem é mortal	Portanto, o homem é um animal

Podemos reescrever os enunciados acima usando quantificadores:

$\forall$x, se x é animal, então x é mortal.	$\forall$x, se x é animal, então x é mortal.
$\forall$x, se x é humano então x é um animal.	$\forall$x, se x é humano então x é um mortal.
Logo, $\forall$x, se x é humano, então, x é mortal.	Logo, $\forall$x, se x é humano, então, x é animal.

Fazendo,

p: $\forall$x, x é um animal

q: $\forall$x, x é mortal

r: $\forall$x, x é humano

O argumento (1) toma a forma, P(p, q, r): $((p \to q) \wedge (r \to p)) \to (r \to q)$

p	q	r	$p \to q$	$r \to p$	$(p \to q) \wedge (r \to p)$	$r \to q$	$((p \to q) \wedge (r \to p)) \to (r \to q)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	v

argumento (2): $((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (r \to p)$

p	q	r	$p \to q$	$r \to q$	$(p \to q) \wedge (r \to q)$	$r \to p$	$((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (r \to p)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Portanto, o primeiro argumento é <u>válido</u> e o segundo <u>não</u>.