Matemática Discreta 2

Aula 04

Cristiane Loesch

cristiane.costa@unb.br

Brasília
2025

TEORIA DOS NÚMEROS

→Teoria dos Restos

→ Estudo dos números inteiros e suas propriedades

- relação de equivalência
- grupos

→ Aplicações

- Criptografia;
- Resolução de problemas que envolvem múltiplas divisões;
- Desafios Lógicos

DIVISIBILIDADE

RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL

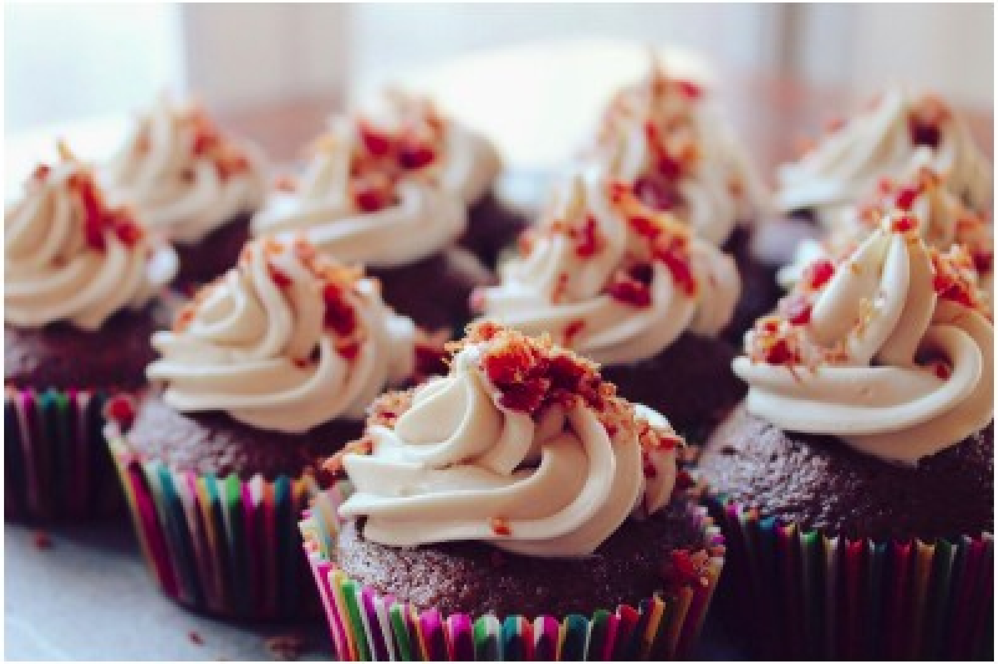
Relações Binárias – tipos:

- equivalência
  - reflexiva;
  - simétrica;
  - transitiva.
- ordem
  - parcial
    - reflexiva
    - anti-simétrica
    - transitiva
  - total

    * relação de ordem parcial que também apresenta a propriedade total

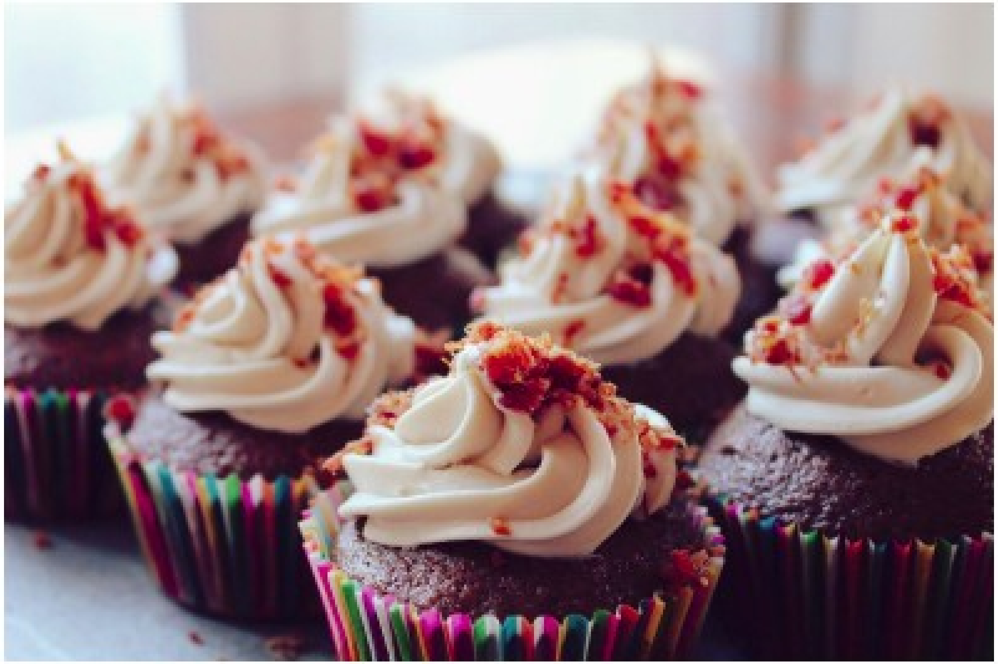
A divisibilidade por ser considerada uma relação de ordem parcial quando considera-se, apenas, o conjunto dos números naturais não nulos

DIVISIBILIDADE



Podemos dividir **n** cupcakes entre **m** pessoas, sem cortar nenhum deles?

DIVISIBILIDADE



Podemos dividir **n** cupcakes entre **m** pessoas, sem cortar nenhum deles?

Se a resposta é: SIM!

Significa que **n** é um múltiplo de **m**, logo, **m** divide **n**.

DIVISIBILIDADE

DEFINIÇÃO:

Se a e b são números inteiros com $a \neq 0$, dizemos que a divide b se houver um número inteiro q de modo que $b = aq$.

Quando a divide b dizemos que a é um fator de b e que b é um múltiplo de a.

$$\boxed{a \mid b}$$

$$\boxed{a \nmid b}$$

DIVISIBILIDADE

DEFINIÇÃO:

Se a e b são números inteiros com $a \neq 0$, dizemos que a divide b se houver um número inteiro q de modo que $b = aq$.

Quando a divide b dizemos que a é um fator de b e que b é um múltiplo de a.

$\boxed{a|b}$ → a divide b, $a \neq 0$

$\boxed{a \nmid b}$ → indica que a não divide b, sobra resto

DIVISIBILIDADE

EXEMPLO:

a) $3 \nmid 7$

b) $3 \mid 12$

DIVISIBILIDADE

EXEMPLO:

a) $3 \nmid 7$ → $\frac{7}{3}$ não é um número inteiro

b) $3 | 12$ → $\frac{12}{3} = 4$

DIVISIBILIDADE

EXEMPLO:

a) $3 \nmid 7$ $\rightarrow$ $\dfrac{7}{3}$ não é um número inteiro

b) $3 | 12$ $\rightarrow$ $\dfrac{12}{3} = 4$

SUA VEZ!

c) 3 ____ -18

d) 5 ____ 25

e) -7 ____ 21

f) 6 ____ 15

g) -41 ____ 87

DIVISIBILIDADE

EXEMPLO:

a) $3 \nmid 7$ $\rightarrow$ $\frac{7}{3}$ não é um número inteiro

b) $3 | 12$ $\rightarrow$ $\frac{12}{3} = 4$

SUA VEZ!

c) $3 | -18$

d) $5 | 25$

e) $-7 | 21$

f) $6 \nmid 15$

g) $-41 \nmid 87$

DIVISIBILIDADE

PROPRIEDADES:

Sejam $a, b, c, e d, \in \mathbb{Z}$

i) $a|a$ (reflexiva)

ii) $a|0$ (todo número inteiro divide 0)

iii) $1|a$

iv) $a|1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ (divisores de 1 são 1 e -1)

v) $0|a \Rightarrow a = 0$ (zero só divide zero)

vi) $a|b \Rightarrow ac|bc$ (multiplicatividade)

vii) $ac|bc \Rightarrow a|b \quad c \neq 0$ (lei do cancelamento)

viii) se $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$ (transitiva)

ix) se $a|b$ e $c|d \Rightarrow ac|bd$

x) se $a|b$ e $b|a \Leftrightarrow a = \pm b$

xi) se $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|(bx + cy)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ (linearidade)

xii) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \quad b \neq 0$

xiii) $a|b \Rightarrow (b/a)|b \quad a \neq 0$

DIVISIBILIDADE

EXERCÍCIO:

1) Represente os seguintes conjuntos:

a) D(10) = { conjunto dos divisores de 10}

b) M(5) = {conjunto dos múltiplos de 5}

2) Prove que 3 não divide 16, pois não existe nenhum inteiro **c** tal que 16=3**c**.

DIVISIBILIDADE

EXERCÍCIO:

1) Prove que se $a|b$ e $a|c$ então $a|(bx+cy)$ para todo x e y inteiros

2) Sejam a, b, c inteiros e n natural mostre que:

a) se $a|b$ então $ac|bc$

b) se $a|b$ então $a^n|b^n$

DIVISIBILIDADE

PROPOSIÇÃO:

Se **a** e **b** são inteiros, tal que **b|a**, b **≠ 0**, então **|b| ≤ |a|**

DEFINIÇÃO:

Se **n** é inteiro, diz-se que **n** é par se, e somente se, existe **k** inteiro tal que **n = 2k**.

DIVISIBILIDADE

EXERCÍCIO:

Prove que $4 \mid n^2-1$, para todo n inteiro não nulo e ímpar

DIVISIBILIDADE

DIVIDINDO A SOMA DE UMA SEQUÊNCIA

TEOREMA: Se b divide todos os inteiros em uma sequência n_1, n_2, n_3, …, n_k então b divide $n_1+n_2+n_3+...+n_k$.

DIVISIBILIDADE

EXEMPLO:
No final de uma festa, enquanto organizavam a casa quatro amigos percebem que sobraram 6 refrigerantes em lata. Como podem fazer para dividi-los entre eles?

DIVISIBILIDADE – ALGORITMO DA DIVISÃO

TEOREMA

Dados $a, b, \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0 \Rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\boxed{a = qb + r} \qquad 0 \leq r < |b|$$

Para a qual existe um único par de inteiro (q, r) que satisfaz tais condições.

DIVISIBILIDADE – ALGORITMO DA DIVISÃO

TEOREMA

Dados $a, b, \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0 \Rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\boxed{a = qb + r} \qquad 0 \leq r < |b|$$

Para a qual existe um único par de inteiro (q, r) que satisfaz tais condições.

EXEMPLO:

a) $a = 23$, $b = 10$

b) $a = -37$, $b = 5$

DIVISIBILIDADE – ALGORITMO DA DIVISÃO

$$a = qb + r$$

EXERCÍCIO:

Escreva o algoritmo da divisão para:

a) a= 43 ; b= 10

b) a= 36 ; b= 3

c) a= -29 ; b= 7

d) a= 100 ; b= -7

e) a= -100 ; b= -7

f) a= 2716 ; b= 10

DIVISIBILIDADE – ALGORITMO DA DIVISÃO

$$a = qb + r$$

EXERCÍCIO:

Escreva o algoritmo da divisão para os polinômios:

a) $a = 4x^3+5x^2+5x+8$; $b = 4x+1$

b) $a = x^2+x+1$; $b = x-1$

OBS: Quando um polinômio de grau $n \geq 1$ é dividido por outro de grau 1, tal divisão é considerada uma divisão por divisor linear

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

→ Operações associadas ao processo de divisão

<u>*DEFINIÇÃO:*</u>

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ pelo teorema anterior existe um único par de números $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qb + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Assim, definimos as operações:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \ \ div \ \ b = q \\ \\ a \ \ mod \ \ b = r \end{array}}$$

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

EXEMPLOS

a) $11 \quad div \quad 3 =$ $\qquad$ $11 \quad mod \quad 3 =$

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

EXEMPLOS

a) $11 \quad div \quad 3 =$ $\qquad$ $11 \quad mod \quad 3 =$

SUA VEZ!

b) $23 \quad div \quad 10 =$ $\qquad$ $23 \quad mod \quad 10 =$

c) $-37 \quad div \quad 5 =$ $\qquad$ $-37 \quad mod \quad 5 =$

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

Obs:

→ equivalências na programação:

$$a \text{ div } b \rightarrow a|b \text{ ou } a||b$$

$$a \text{ mod } b \rightarrow a \,\%\, b$$

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

Obs:

→ equivalências na programação:

a div b → *a|b ou a||b*

a mod b → *a % b*

→ significados do mod

a) $a \quad mod \quad b = c$ → dividir e tomar o resto da divisão

b) $a \equiv b \left(mod\, n \right) \Rightarrow a - b$ → a - b é múltiplo de n , comumente utilizado em relações de equivalência

DIVISIBILIDADE – DIV E MOD

EXEMPLO: Phyton

Python 2.7

Run ▶

```python
print('Matematica Discreta')

print('10 div 2', 10/2) #imprime o resultado da divisao de 10 por 2
print('10 mod 2', 10%2) #imprime o resto da divisao de 10 por 2

A={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} #conjunto A

Q=list()    #define uma lista onde serao incluidos os valores de Q
R=list()    #define uma lista onde serao incluidos os valores de R

for n in A:  #utiliza um a um os valores definidos no conjunto A

    Q.append(n/3) # calcula n div 3
    R.append(n%3) # calcula n mod 3

print('Q', Q)     #imprime a lista dos valores de Q, resultado da
                  #divisao de n por 3

print('R', R)    #imprime a lista dos valores de R, o resto da
                 #divisao de n por 3
```

```
Matematica Discreta
('10 div 2', 5)
('10 mod 2', 0)
('Q', [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3])
('R', [0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1])
>
```

FEITO EM:https://replit.com/languages/python

DICAS VEJA: https://realpython.com/python-modulo-operator/ E http://excript.com/python/modulo-da-divisao-python.html
(acesso em 06/05/2021)

DIVISIBILIDADE

$$a = qb + r$$

EXERCÍCIO:

1) Na intenção de trocar minhas moedas do cofrinho, levei-as a uma loja. Como tinha várias moedas de 10 e 25 centavos, a atendente me sugeriu comprar um objeto. Mostre que o preço de qualquer objeto que eu comprar deverá ser divisível por 5 centavos, considerando que não houve troco.

2) Considere que você trabalha em uma loja de chocolates e deve montar caixas de bombom. Sabendo que cada caixa deve conter 8 bombons e que você tem 153 para distribuir entre as caixa, responda:

a) Quantas caixas completas poderá embalar?

b) Quantos bombons vão sobrar, que não couberam nas caixas?

c) Represente as operações anteriores utilizando o algoritmo da divisão, DIV e MOD

DIVISIBILIDADE

$$a = qb + r$$

EXERCÍCIO:

3) Uma fábrica tem 987 produtos para transportar em um caminhão. A capacidade inicial do caminhão é de 150 produtos por viagem, mas a cada viagem a capacidade do caminhão diminui em 10 produtos (na segunda viagem, o caminhão carrega 140 produtos, na terceira 130, e assim sucessivamente).

a) Quantas viagens completas o caminhão precisará fazer até que todos os produtos sejam transportados, se ele puder transportar 150 produtos em todas as viagens? Quantos produtos serão transportados na última viagem?

b) Quantas viagens completas o caminhão precisará fazer até que todos os produtos sejam transportados, considerando a variação de capacidade do caminhão? Quantos produtos serão transportados na última viagem?

c) Qual é a capacidade de cada viagem do caminhão ao longo do processo, considerando o fator de redução?

DIVISIBILIDADE

$$a = qb + r$$

EXERCÍCIO:

4) Pesquisar quais são as regras de divisibilidade entre 2 e 11