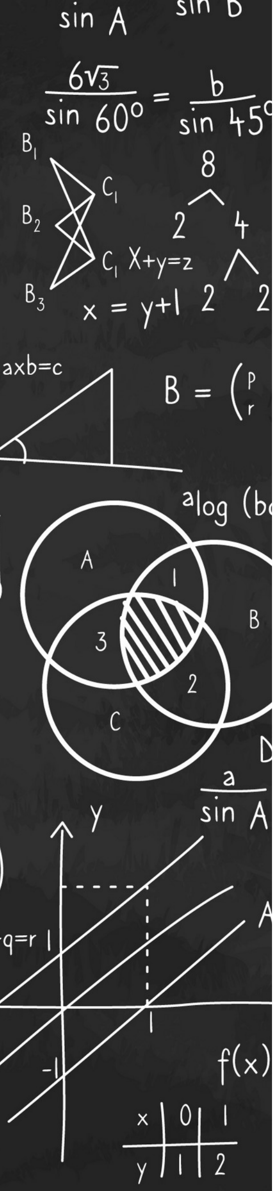

Matemática Discreta 2

Aula 14
Equações Diofantinas

Cristiane Loesch

Brasília
2024

Equação Diofantina Linear

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$
$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{ax + by = c}$$

x, y são incógnitas.

Equação Diofantina Linear

$$a,b,c \in \mathbb{Z}$$
$$x,y \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{ax+by=c}$$

x, y são incógnitas.

EXEMPLO: (OBMEP- adaptada) De quantas maneiras é possível comprar doces de $\mathrm{R\$5}$ e de $\mathrm{R\$3}$ de modo a gastar ao todo $\mathrm{R\$50}$?

Equação Diofantina Linear

$$a,b,c \in \mathbb{Z}$$
$$x,y \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{ax+by=c}$$

x, y são incógnitas.

EXEMPLO: (OBMEP- adaptada) De quantas maneiras é possível comprar doces de $\text{R\$}5$ e de $\text{R\$}3$ de modo a gastar ao todo $\text{R\$}50$?

$$5x+3y=50$$

Equação Diofantina Linear

$$\boxed{ax+by=c}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$
$$x, y \in \mathbb{Z}$$

x, y são incógnitas.

EXEMPLO: (OBMEP- adaptada) De quantas maneiras é possível comprar doces de R\$5 e de R\$3 de modo a gastar ao todo R\$50 ?

$$5x+3y=50$$

quantidade de doces de 5 reais

quantidade de doces de 3 reais

Equação Diofantina Linear

$$\boxed{a\,x+b\,y=c}$$

$a,b,c\in\mathbb{Z}$
$x,y\in\mathbb{Z}$

x,y são incógnitas.

EXEMPLO: (OBMEP- adaptada) De quantas maneiras é possível comprar doces de R\$5 e de R\$3 de modo a gastar ao todo R\$50 ?

Observe que neste caso x e y não podem ser números negativos

$$5\,x+3\,y=50$$

quantidade de doces de 5 reais

quantidade de doces de 3 reais

Equação Diofantina Linear

EXEMPLO:

$$5x+3y=50$$

Pensando na solução:

10	0	
11	$y<0$	→ não pode
9		→ não compra a qtidade inteira de doces de 3 reais
8		
7	5	→ ótimo, 7 * 5 = 35, sobra 15 que é múltiplo de 3
6		→ não compra a qtidade inteira de doces de 3 reais
5		
4	10	→ ótimo, 4 * 5 = 20, sobra 30 que é múltiplo de 3 → 10 doces de R$3
3		→ não compra a qtidade inteira de doces de 3 reais
2		
1	15	→ ótimo, 1 * 5 = 5, sobra 45 que é múltiplo de 3 → 15 doces de R$3

Como x e y não podem ser negativos paramos aqui! →

Equação Diofantina Linear

TEOREMA:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ considere que:

$$a\,x + b\,y = c$$

então:

i) a equação tem solução inteira ($x, y \in \mathbb{Z}$) se, e somente se, $mdc(a,b) \mid c$

ii) todas as soluções da equação são do tipo:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t$$

$$t \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

Exemplo de demonstração: https://youtu.be/Wxrdw35jojo?si=m6jjoEk_qY-BgCsG

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIOFANTINA:

$$ax + by = c$$

se existe solução, então:

$$mdc(a,b) \mid a$$

$$mdc(a,b) \mid b$$

$$mdc(a,b) \mid c$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIOFANTINA:

EXEMPLO:

$$6x+9y=2021$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIOFANTINA:

EXEMPLO:

$$4x+6y=10$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIOFANTINA:

EXEMPLO:

$$6\,x + 9\,y = 2022$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIOFANTINA:

EXEMPLO: (OMBEP – adaptada) De quantas maneiras é possível comprar meias de $R\$10,00$ e $R\$14,00$ gastando $R\$100,00$?

EXERCÍCI Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

1) Utilizando o principio da Indução Matemática verifique que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro n.

3) Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

4) Encontre a solução das equações diofantinas:

a) $43x + 5y = 167$

b) $119x + 272y = 1700$

c) $6643x + 2873y = 6500$

EXERCÍCI Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

5) Utilizando o principio da Indução Matemática verifique que:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \forall n \geqslant 1;$$

6) Determine $\mathrm{mdc}(a, b)$ e $\mathrm{mmc}(a, b)$ para os inteiros a e b dados abaixo:

a) $a = 15$ e $b = 80$;

b) $a = 8798$ e $b = 2314$;

7) Assumido que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, mostre o seguinte:

a) $\mathrm{mdc}(a+b, a-b) = 1$ ou 2. (*Dica:* Seja $d = \mathrm{mdc}(a+b, a-b)$ e mostre que $d \mid 2a$, $d \mid 2b$; assim, $d \leqslant \mathrm{mdc}(2a, 2b) = 2\mathrm{mdc}(a, b)$);

8) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $\mathrm{mdc}(b, c) = 1$. Mostre que $\mathrm{mdc}(a, c) = 1$. (dica: teorema de Bezout)

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 2

IME

Exercício 3.

Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro n.

Solução 3.

Pelo algoritmo da divisão, $n = 2k + r$; $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1\}$.

- $n = 2k \Rightarrow n^2 + 2 = 4k^2 + 2 \Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$ pois $4 \mid 4k^2$ e $4 \nmid 2$;
- $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 \Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$ pois $4 \mid \left(4k^2 + 4k\right)$ e $4 \nmid 3$.

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 3

IME

(14) Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

Solução

Vamos primeiramente observar quais são os possíveis restos da divisão de um número quadrado perfeito por 7.

Dado n, queremos analisar o comportamento de n^2 na divisão por 7. Pelo algoritmo da divisão, temos que $n = 7p + r; p \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dessa forma,

- $n = 7p \Rightarrow n^2 = 49p^2 = 7\left(7p^2\right) = 7k;$
- $n = 7p + 1 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 2p\right) + 1 = 7k + 1;$
- $n = 7p + 2 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 4p\right) + 4 = 7k + 4;$
- $n = 7p + 3 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 6p + 1\right) + 2 = 7k + 2;$
- $n = 7p + 4 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 8p + 2\right) + 2 = 7k + 2;$
- $n = 7p + 5 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 10p + 21\right) + 4 = 7k + 4;$
- $n = 7p + 6 \Rightarrow n^2 = 7\left(7p^2 + 12p + 35\right) + 1 = 7k + 1;$

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 3

Note que o quadrado de um número, quando dividido por 7, deixa resto $0, 1, 2$ ou 4. De todas combinações possíveis para a soma de dois quadrados, a única que deixa resto múltiplo de 7 é se pegarmos dois números da forma $7k$. Assim:

$$7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a \text{ e } 7 \mid b$$

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 5

IME **Solução 6.**

a) *Base*: $n = 1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)(1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) \\ &= \frac{(k+1)}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \\ &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}. \end{aligned}$$

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 6

IME

$$\mathrm{mdc}\,(15,80) = \mathrm{mdc}\,(15, 80 - 5 \cdot 15) = \mathrm{mdc}\,(15,5) = \mathrm{mdc}\,(15 - 3 \cdot 5, 5) = \mathrm{mdc}\,(0,5) = 5.$$

$$\mathrm{mmc}\,(15,80) = \frac{15 \cdot 80}{\mathrm{mdc}\,(15,80)} = 240.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mdc}\,(8798, 2314) &= \mathrm{mdc}\,(8798 - 3 \cdot 2314, 2314) = \mathrm{mdc}\,(1856, 2314)\\ &= \mathrm{mdc}\,(1856, 2314 - 1 \cdot 1856) = \mathrm{mdc}\,(1856, 458)\\ &= \mathrm{mdc}\,(1856 - 4 \cdot 458, 458) = \mathrm{mdc}\,(24, 458)\\ &= \mathrm{mdc}\,(24, 458 - 19 \cdot 24) = \mathrm{mdc}\,(24, 2)\\ &= \mathrm{mdc}\,(2, 24 - 12 \cdot 2) = \mathrm{mdc}\,(2, 0) = 2.\end{aligned}$$

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO7

IME

a) Seja $d = \text{mdc}(a+b, a-b)$. Logo:

$$\begin{matrix} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d \mid a+b+(a-b) \\ d \mid a-b-(a+b) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid -2b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{matrix} \Rightarrow d \mid \text{mdc}(2a, 2b) \Rightarrow d \mid 2\text{mdc}(a, b) \Rightarrow d \mid 2 \cdot 1.$$

Logo, $d = 1$ ou $d = 2$.

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO8

$a \mid b \Rightarrow b = k \cdot a; k \in \mathbb{Z}$. Se $\text{mdc}(b, c) = 1$, então, por Bezout, existem $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$bx + cy = 1 \Rightarrow kac + cy = 1.$$

Seja $d = \text{mdc}(a, c)$. Como $d \mid a$, então $d \mid kac$; como $d \mid c$, então $d \mid cy$. Logo, $d \mid 1$. Portanto,$d = 1$.