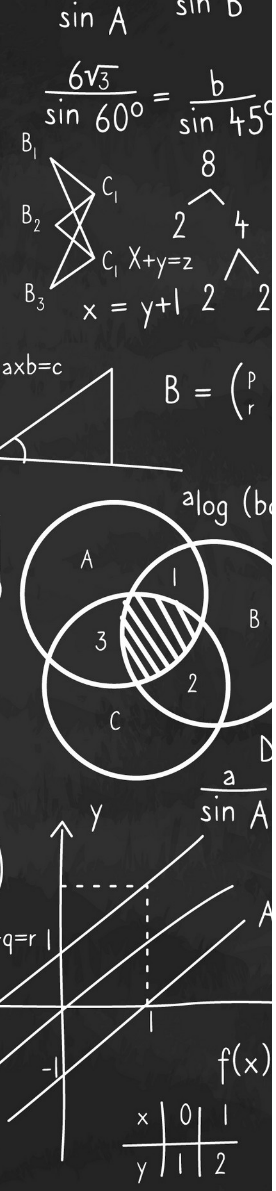


MATEMÁTICA DISCRETA 2

Aula 17
Grupos

Cristiane Loesch

Brasília
2025

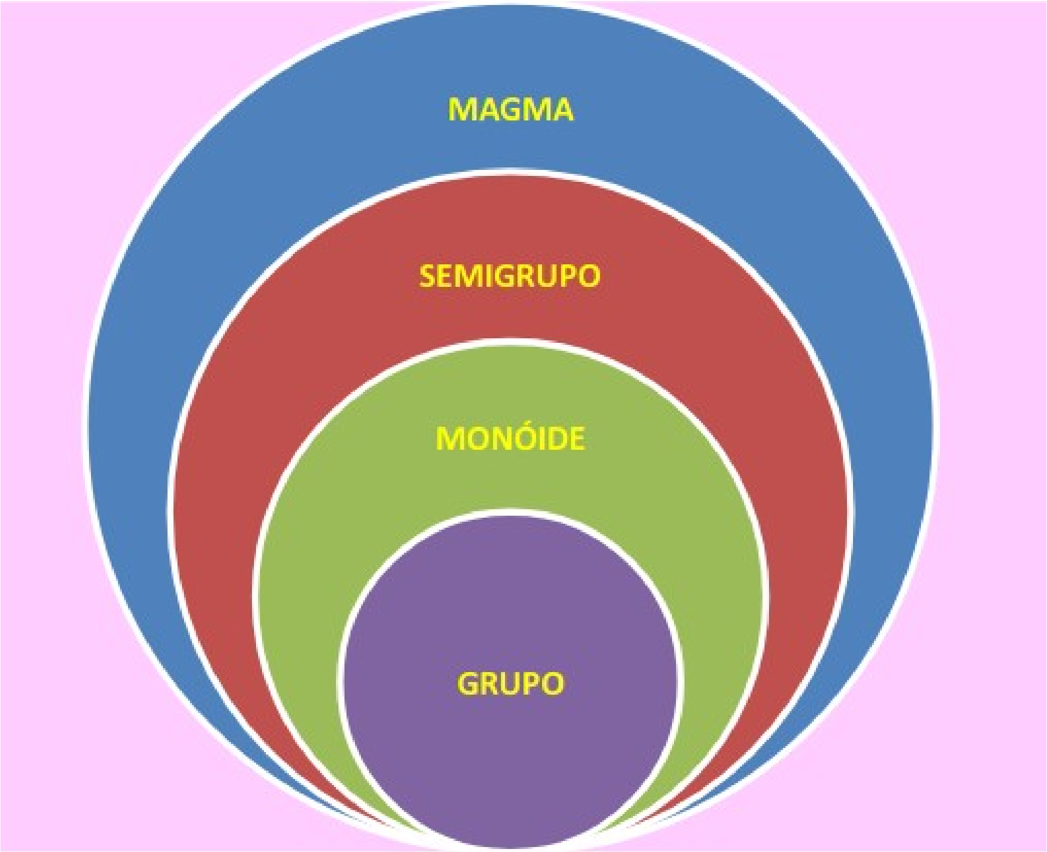
O conceito de grupo é, seguramente, uma das ideias centrais da Matemática. Certamente existem poucos ramos matemáticos nos quais os grupos não sejam empregados implicitamente ou explicitamente. Teoria quântica, estrutura atômica e molecular e cristalografia são apenas algumas das áreas das ciências nas quais a ideia de grupo como uma medida de simetria tem sido utilizada com grande importância.

FONTE: Vieira; Alves (2009)


UNDER CONSTRUCTION!


Na aula passada
iniciamos os estudo das
estruturas algébricas.
Antes de prosseguir
vamos rever alguns dos
principais conceitos, ok ?!

Estruturas Algébricas



Fonte: Paiva, C. R. (2010)

EXERCÍCIO – aula passada

Seja $\langle G, * \rangle$ um grupo com $x, y \in G$. Prove que $(x * y)' = x' * y'$

Propriedades:

1) Comutativa

$$x * y = y * x \quad , \quad \forall\, x, y \in A$$

2) Associativa

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad , \quad \forall\, x, y, z \in A$$

3) Elemento Neutro

$$x * e = e * x = x \quad , \quad \forall\, x \in A$$

4) Elemento invertível ou simetrizável

$$x * y = y * x = e \quad , \quad \forall\, x, y \in A$$

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \rightarrow A$ denotada por $(\ A, * \ )$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \to A$ denotada por $(A, *)$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

- do fechamento $\longrightarrow$ Grupóide

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \to A$ denotada por $(A, *)$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

- do fechamento $\longrightarrow$ Grupóide
- do fechamento e associativa $\longrightarrow$ Semi-grupo

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \to A$ denotada por $(A, *)$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

- do fechamento → Grupóide
- do fechamento e associativa → Semi-grupo
- do fechamento, associativa e elemento neutro → Monóide

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \rightarrow A$ denotada por $(A, *)$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

- do fechamento ⟶ Grupóide
- do fechamento e associativa ⟶ Semi-grupo
- do fechamento, associativa e elemento neutro ⟶ Monóide
- do fechamento, associativa, elemento neutro e elemento invertível ⟶ Grupo

Dado um conjunto não-vazio *A* dotado de uma operação binária $A \times A \to A$ denotada por $(A, *)$ que satisfaz a(s) propriedade(s):

- do fechamento $\longrightarrow$ Grupóide
- do fechamento e associativa $\longrightarrow$ Semi-grupo
- do fechamento, associativa e elemento neutro $\longrightarrow$ Monóide
- do fechamento, associativa, elemento neutro e elemento invertível $\longrightarrow$ Grupo

Obs: estruturas algébricas que satisfazem a propriedade comutativa recebem a característica "extra" de Abeliano.

- Exemplo: Monóide Abeliano

Estruturas Algébricas- Grupos

CARACTERÍSTICAS DE GRUPOS

- Grupo Abeliano ou Comutativo
  Quando o Grupo satisfaz a propriedade comutativa da operação binária em questão.

CARACTERÍSTICAS DE GRUPOS

- Grupo Abeliano ou Comutativo

  Quando o Grupo satisfaz a propriedade comutativa da operação binária em questão.

CARACTERÍSTICAS DE GRUPOS

- Grupo Abeliano ou Comutativo
  Quando o Grupo satisfaz a propriedade comutativa da operação binária em questão.

- Grupo Aditivo
  Quando a operação binária considerada sobre ele é a adição. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal “+” de adição.

CARACTERÍSTICAS DE GRUPOS

- Grupo Abeliano ou Comutativo
  Quando o Grupo satisfaz a propriedade comutativa da operação binária em questão.

- Grupo Aditivo
  Quando a operação binária considerada sobre ele é a adição. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal “+” de adição.

- Grupo Multiplicativo
  Quando a operação binária considerada sobre ele é a multiplicação. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal “·” de multiplicação ou apenas por justaposição.

PROPRIEDADES DE GRUPOS

1. $e \in G$, e é único (e = elemento neutro)

2. $\forall a \in G$, $\exists$ um único inverso

3. $\forall a, b \in G \Rightarrow (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

4. $\forall a \in G \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

5. $\forall a, b, c \in G : a * b = a * c \Rightarrow b = c$ (LEI DO CANCELAMENTO)

Propriedade do Cancelamento

$$\forall a, b, c \in G, \quad se \quad a*b=a*c \quad ou \quad b*a=c*a \;\rightarrow\; b=c$$

Propriedade do Cancelamento

$$\forall a, b, c \in G, \quad se \quad a*b=a*c \quad ou \quad b*a=c*a \;\rightarrow\; b=c$$

EXEMPLO: $G=\langle GL_{2,} \cdot \; \rangle \longrightarrow A \cdot B = C \cdot B$ **?**

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriedade do Cancelamento

$$\forall a, b, c \in G, \quad se \quad a*b = a*c \quad ou \quad b*a = c*a \;\rightarrow\; b = c$$

EXEMPLO: $G = \langle GL_{2,} \cdot \ \rangle \longrightarrow A \cdot B = C \cdot B$ **?**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedade do Cancelamento

$$\forall a, b, c \in G, \ \ se \ \ a*b=a*c \ \ ou \ \ b*a=c*a \ \rightarrow \ b=c$$

EXEMPLO: $G=\langle GL_{2,} \cdot \ \rangle \longrightarrow A\cdot B=C\cdot B$ **?**

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=C\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedade do Cancelamento ✗

$$A \neq C$$

Propriedade do Cancelamento

EXEMPLO: $(\mathbb{Z}, \; + \;)$, $b * a = c * a \rightarrow b = c$ **?**

$$a + b = b + c \longrightarrow 3 + b = 5 + 3 \longrightarrow b = 5$$

Propriedade do Cancelamento ✓

Propriedade do Cancelamento

EXEMPLO: $\left(\mathbb{Z}, \;+\; \right)$, $b*a=c*a \rightarrow b=c$ **?**

$$a+b=b+c \longrightarrow 3+b=5+3 \longrightarrow b=5$$

Propriedade do Cancelamento ✓

EXEMPLO: $\left(\mathbb{Z}, \;\cdot\; \right)$, $b*a=c*a \rightarrow b=c$ **?**

$$4\cdot 0=6\cdot 0 \longrightarrow 4\neq 6$$

Propriedade do Cancelamento ✗

CARACTERÍSTICAS DE GRUPOS

- Grupo Abeliano ou Comutativo
  Quando o Grupo satisfaz a propriedade comutativa da operação binária em questão.

- Grupo Aditivo
  Quando a operação binária considerada sobre ele é a adição. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal “+” de adição.

- Grupo Multiplicativo
  Quando a operação binária considerada sobre ele é a multiplicação. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal “·” de multiplicação ou apenas por justaposição.

- Grupo Finito
  Grupo no qual o conjunto G é finito. O número de elementos de G, nesse caso, é chamado de ordem do grupo G.

Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo finito é um grupo $(G, *)$ em que o número de elementos de G é a ordem do grupo $(o(G))$. Caso contrário, diz-se que o grupo é infinito e que sua ordem é infinita.

Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo finito é um grupo $(G, \ * \ )$ em que o número de elementos de G é a ordem do grupo $(o(G))$. Caso contrário, diz-se que o grupo é infinito e que sua ordem é infinita.

EXEMPLO:

$$G=\{-i,-1,i,1\}$$

$$G=\{1,2,3\}$$

$$H=\{1,2,3,\ldots\}$$

Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo finito é um grupo $(G, *)$ em que o número de elementos de G é a ordem do grupo $(o(G))$. Caso contrário, diz-se que o grupo é infinito e que sua ordem é infinita.

EXEMPLO:

$$G=\{-i, -1, i, 1\} \longrightarrow o(G)=4$$

$$G=\{1,2,3\}$$

$$H=\{1,2,3,\ldots\}$$

Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo finito é um grupo $(G, *)$ em que o número de elementos de G é a ordem do grupo $(o(G))$. Caso contrário, diz-se que o grupo é infinito e que sua ordem é infinita.

EXEMPLO:

$$G = \{-i, -1, i, 1\} \longrightarrow o(G) = 4$$

$$G = \{1, 2, 3\} \longrightarrow o(G) = 3$$

$$H = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo finito é um grupo $(G, \; * \;)$ em que o número de elementos de G é a ordem do grupo $(o(G))$. Caso contrário, diz-se que o grupo é infinito e que sua ordem é infinita.

EXEMPLO:

$$G=\{-i, -1, i, 1\} \longrightarrow o(G)=4$$

$$G=\{1,2,3\} \longrightarrow o(G)=3$$

$$H=\{1,2,3,\ldots\} \longrightarrow o(G)=grupo\,infinito$$

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

Considere o conjunto $G=\{-1,1\}$ e a operação binária usual. Será que $(G,\ \cdot\ )$ é um grupo finito?

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

Considere o conjunto $G=\{-1,1\}$ e a operação binária usual. Será que $(G,\ \cdot\ )$ é um grupo finito?

1º) construir a tabela operatória

$\cdot$	-1	1
-1		
1		

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

Considere o conjunto $G=\{-1,1\}$ e a operação binária usual. Será que $(G, \cdot)$ é um grupo finito?

1º) construir a tabela operatória

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Todos os elementos resultantes da operação multiplicação pertencem a G => G é fechado

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

b) Associativa

$$-1\cdot(-1\cdot(-1))=(-1\cdot(-1))\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(-1\cdot 1)=(-1\cdot(-1))\cdot 1$$
$$-1\cdot(1\cdot(-1))=(-1\cdot 1)\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(1\cdot 1)=(-1\cdot 1)\cdot 1$$
$$1\cdot(-1\cdot(-1))=(1\cdot(-1))\cdot(-1)$$
$$1\cdot(-1\cdot 1)=(1\cdot(-1))\cdot 1$$
$$1\cdot(1\cdot(-1))=(1\cdot 1)\cdot(-1)$$
$$1\cdot(1\cdot 1)=(1\cdot 1)\cdot 1$$

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

$$-1\cdot(-1\cdot(-1))=(-1\cdot(-1))\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(-1\cdot 1)=(-1\cdot(-1))\cdot 1$$
$$-1\cdot(1\cdot(-1))=(-1\cdot 1)\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(1\cdot 1)=(-1\cdot 1)\cdot 1$$
$$1\cdot(-1\cdot(-1))=(1\cdot(-1))\cdot(-1)$$
$$1\cdot(-1\cdot 1)=(1\cdot(-1))\cdot 1$$
$$1\cdot(1\cdot(-1))=(1\cdot 1)\cdot(-1)$$
$$1\cdot(1\cdot 1)=(1\cdot 1)\cdot 1$$

Além disso, o conjunto G é formado por números inteiros e a associatividade é válida para o produto de números inteiros, por restrição, é válida, também, para G.

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

O elemento neutro na multiplicação é o 1

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento

b) Associativa

c) Elemento Neutro

d) Elemento Invertível

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

O inverso de -1 é -1, pois

$$-1\cdot(-1)=1$$

1 é o elemento neutro da multiplicação. O inverso de 1 é 1.

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível ✓

Logo,

G é grupo em relação à multiplicação.

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível ✓

Observe, também, que existe simetria dos elementos da tabela em relação à diagonal principal.

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível ✓

Observe, também, que existe simetria dos elementos da tabela em relação à diagonal principal. Logo, existe comutatividade da operação sobre G.

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível ✓

e) Comutativa ✓

EXEMPLO: *Tabela de Cayley*

2º) Verificar as propriedades

a) Fechamento ✓

b) Associativa ✓

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

c) Elemento Neutro ✓

d) Elemento Invertível ✓

e) Comutativa ✓

$(G, \cdot)$ **é um Grupo Abeliano Finito de ordem 2**

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

Permutação

- Possíveis maneiras de se ordenar os elementos do conjunto sem repetir nenhum e usando todos

Definição:

Seja A um conjunto. Uma permutação sobre A é uma bijeção de A em si mesmo.

EXEMPLO:

$$A=\{1,2,3,4,5\} \qquad f: A \to A$$

$$f=\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$$

Permutação

Representação:

→ Por letras minúsculas gregas (π, σ, τ)

→ Número de permutações: $n!$

→ Conjunto de todas as permutações: $|S_n| = n!$

Propriedades

$$\forall \pi, \sigma, \tau \in S_n, \pi \circ \sigma \in S_n$$

$$\forall \pi, \sigma, \tau \in S_n, \pi \circ (\sigma \circ \tau) = (\pi \circ \sigma) \circ \tau$$

$$\forall \pi \in S_n, \pi \circ \iota = \iota \circ \pi = \pi$$

$$\forall \pi \in S_n, \pi^{-1} \in S_n e\, \pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = \iota$$

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

EXEMPLO: Seja a permutação S_5 a seguir:

$$\pi=\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$$

a) expresse-a na forma de tabela:

b) expresse-a na forma de quadro:

c) expresse-a na forma de ciclos:

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

EXEMPLO: $\pi = \{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$

a) Tabela:

x	$\pi(x)$
1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

b) Quadro

c) Ciclos

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

EXEMPLO: $\pi = \{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$

a) Tabela:

x	$\pi(x)$
1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

b) Quadro

$$\pi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{Bmatrix}$$

c) Ciclos

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

EXEMPLO: $\pi = \{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$

a) Tabela:

x	$\pi(x)$
1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

c) Ciclos $\pi = (1,2,3,4)(5)$

b) Quadro

$$\pi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{Bmatrix}$$

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

EXEMPLO: $\pi=\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$

a) Tabela:

x	$\pi(x)$
1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

b) Quadro

$$\pi=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{Bmatrix}$$

c) Ciclos $\pi=(1,2,3,4)(5)$

$$1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 1$$

$\pi(1)=2$

$\pi(2)=4$

$\pi(5)=5$

$\pi(4)=3$

$\pi(3)=1$

Permutação

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PERMUTAÇÃO:

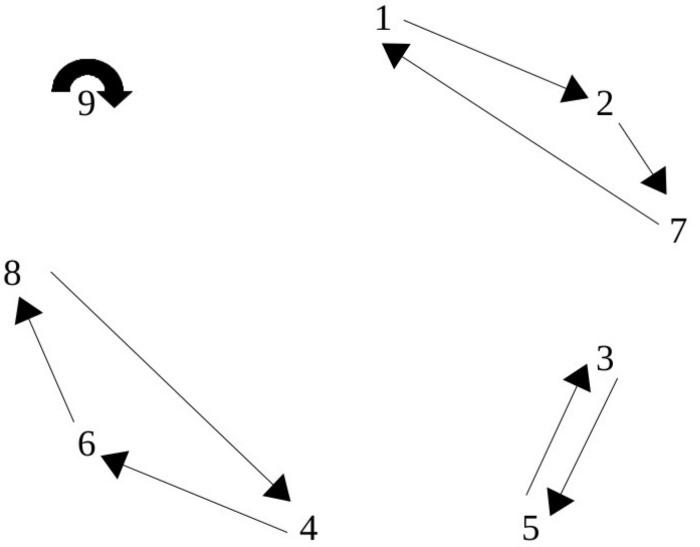
EXEMPLO:

$$\pi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 3 & 8 & 1 & 4 & 9 \end{Bmatrix} \in S_9$$

Ciclos:

$$(1,2,7)(3,5)(4,6,8)(9)$$

Grafos:



Permutação

INVERSA:

$\pi(k)=j$ → se j segue k em um ciclo π ,

$\pi^{-1}(j)=k$ → k segue j em um ciclo π^{-1}

EXEMPLO:

$$\pi=(1,2,7,9,8)(5,6,3)(4) \quad \in S_9$$

$$\pi^{-1}=(8,9,7,2,1)(3,6,5)(4)$$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Seja A um conjunto não vazio. Denotaremos por $P(A)=\{f: A \rightarrow A, f\ é\ bijetora\}$ Então, $(P(A), \circ, i_A)$ é um grupo em que a operação $\circ$ é a composição de funções e o elemento neutro é a função identidade de A, denotado i_A.

O grupo $(P(A), \circ, i_A)$ é chamado grupo das permutação de A.

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

EXEMPLO: S_3(P) , P={1,2,3} , operação composição de funções

n! = 3! = 6 bijeções

S_3= {f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6}

$$f_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad f_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad f_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad f_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

EXEMPLO: S_3(P) , P={1,2,3}

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

EXEMPLO: $S=\{1,2,3\}$, $f, g \in S_3$, calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f:\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \\ f(3)=3 \end{cases} \qquad g:\begin{cases} g(1)=2 \\ g(2)=3 \\ g(3)=1 \end{cases}$$

Verifique se é comutativa.

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

EXEMPLO: $S=\{1,2,3\}$, $f, g \in S_3$, calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f:\begin{cases} f(1)=2 \\ \underline{f(2)=1} \\ f(3)=3 \end{cases} \qquad g:\begin{cases} \underline{g(1)=2} \\ g(2)=3 \\ g(3)=1 \end{cases}$$

$$f \circ g(1)=f(g(1))=f(2)=1$$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

EXEMPLO: $S=\{1,2,3\}$, $f, g \in S_3$, calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f:\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \\ f(3)=3 \end{cases} \qquad g:\begin{cases} g(1)=2 \\ g(2)=3 \\ g(3)=1 \end{cases}$$

$$f \circ g(1)=f(g(1))=f(2)=1 \quad \neq \quad g \circ f(1)=g(f(1))=g(2)=3$$

$$f \circ g(2)=f(g(2))=f(3)=3 \quad \neq \quad g \circ f(2)=g(f(2))=g(1)=2$$

$$f \circ g(3)=f(g(3))=f(1)=2 \quad \neq \quad g \circ f(3)=g(f(3))=g(3)=1$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

não é grupo comutativo

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique se é comutativa.

Estruturas Algébricas - Grupos

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$f(g(1)) =$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$f(g(1)) = f(1) = 3$ $\qquad f(g(3)) = f(4) = 4$

$f(g(2)) = f(3) = 2$ $\qquad f(g(4)) = f(2) = 1$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$g(f(1)) = g(3) = 4$ $\qquad$ $g(f(3)) = g(2) = 3$

$g(f(2)) = g(1) = 1$ $\qquad$ $g(f(4)) = g(4) = 2$

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad g \circ f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Estruturas Algébricas - Grupos

GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

Outra notação: $f=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{bmatrix}$

EXEMPLO: Em S_4 calcule $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$, dados:

$$f=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad g=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f \circ g=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad g \circ f=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$f \circ g \neq g \circ f$ não é grupo comutativo