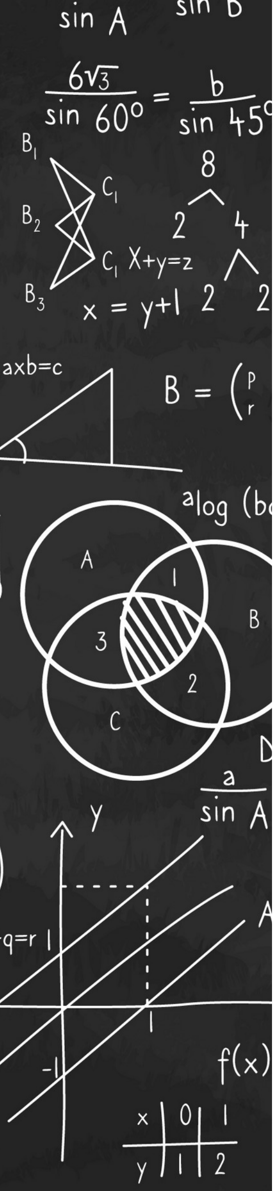


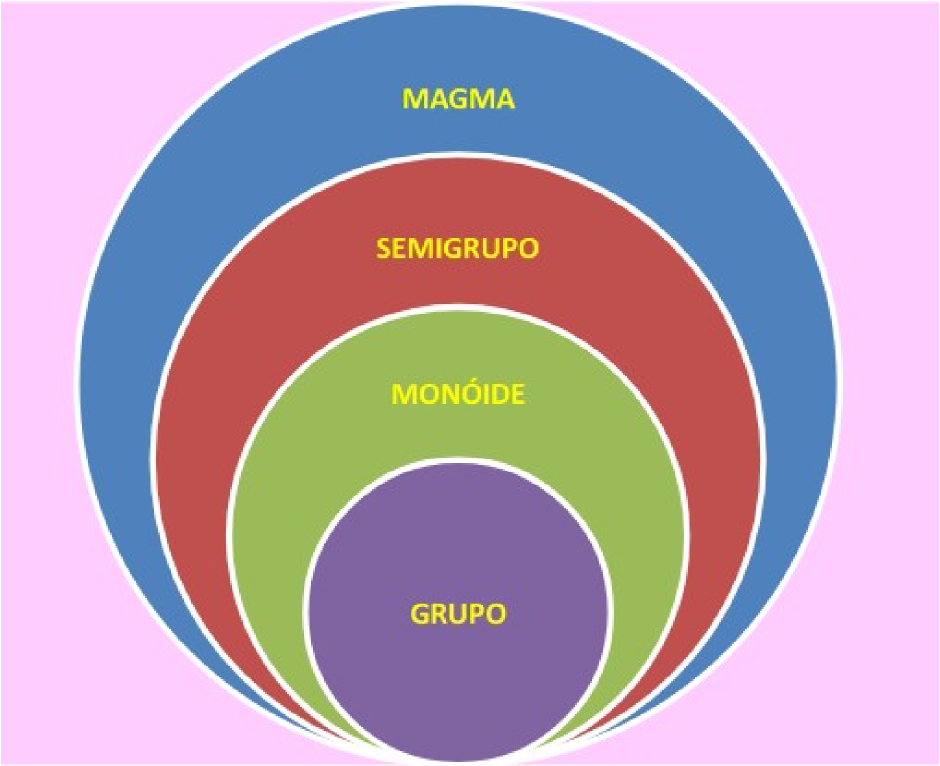
MATEMÁTICA DISCRETA 2

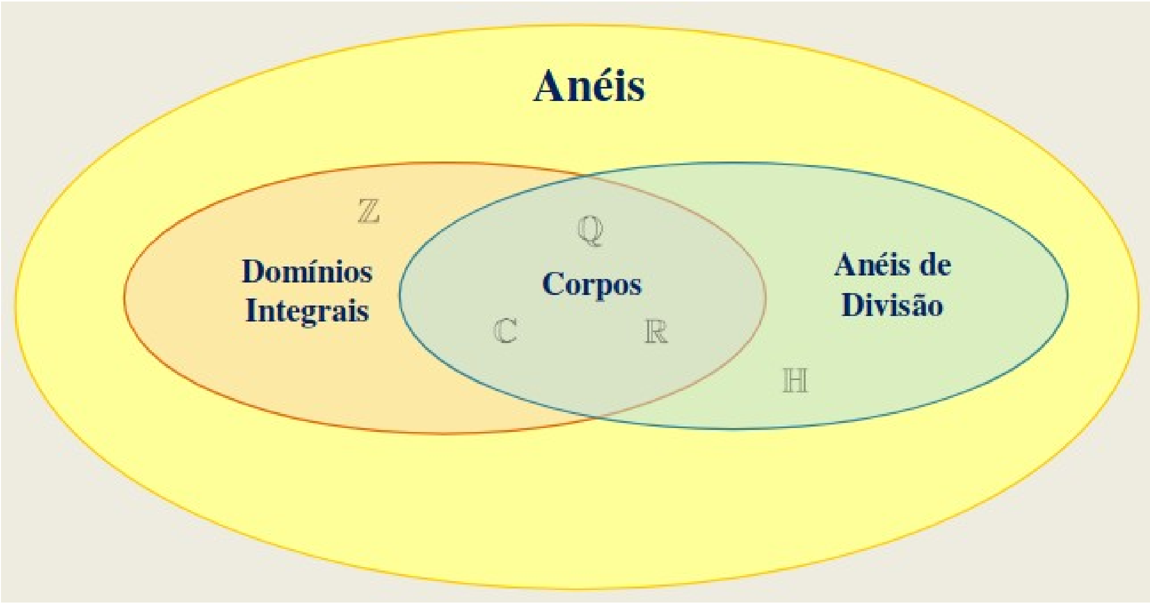
Aula 23
Homomorfismo e Isomorfirmo

Cristiane Loesch

Brasília
2025

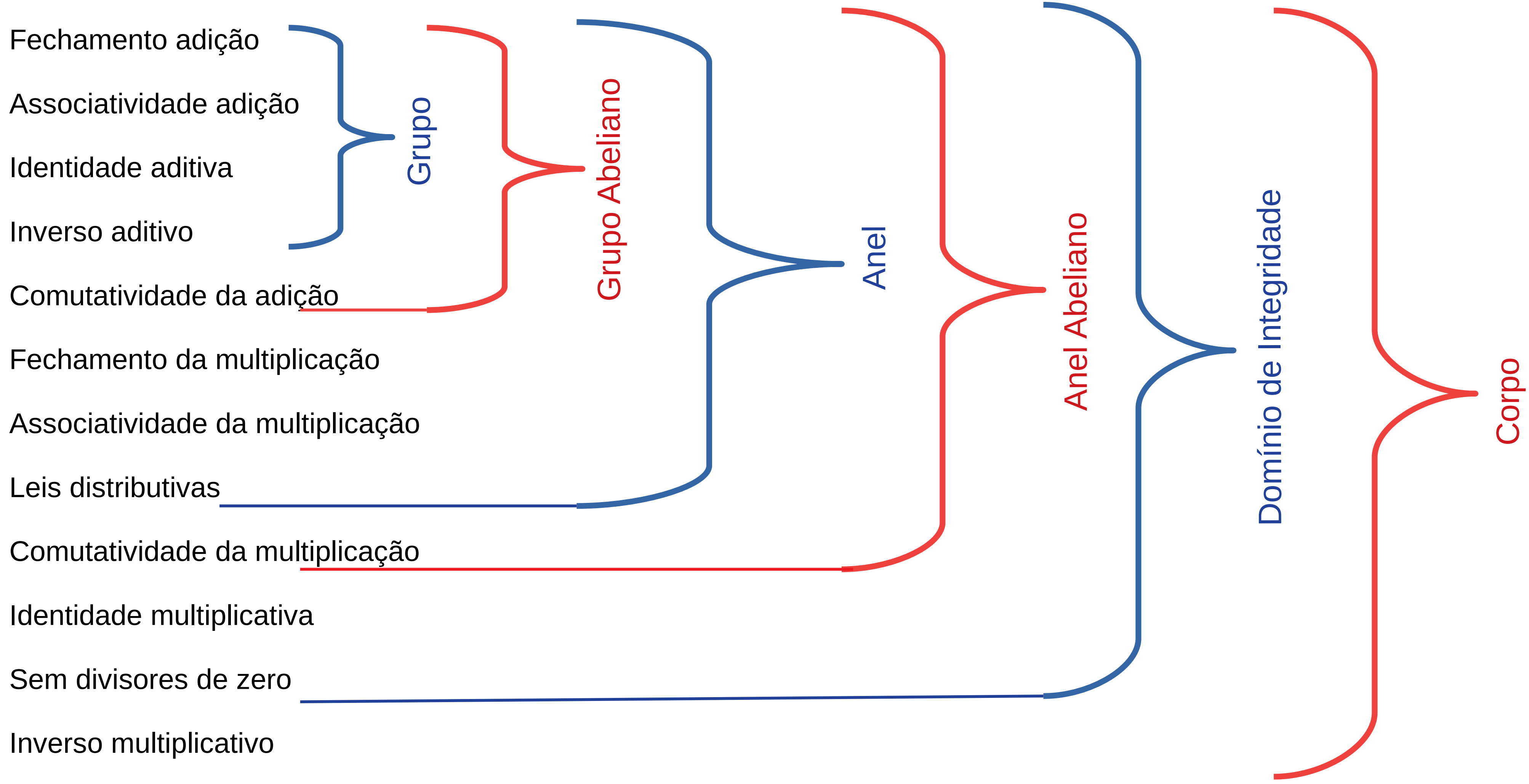
Estruturas Algébricas





Fonte: Paiva, C. R. (2010)

Estruturas Algébricas



Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Definição 3.1. Sejam $(G, *)$ e $(H, \otimes)$ grupos.

1. Uma aplicação $f : G \to H$ é um *homomorfismo* se, e somente se,

$$\forall a, b \in G,\ f(a * b) = f(a) \otimes f(b).$$

2. Uma aplicação $f : G \to H$ é um *isomorfismo* se, e somente se, f é um homomorfismo bijetor. Neste caso, dizemos que G e H são grupos isomorfos e denotamos por $G \cong H$.

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Definição 3.1. Sejam $(G, *)$ e $(H, \otimes)$ grupos.

1. Uma aplicação $f : G \to H$ é um *homomorfismo* se, e somente se,

$$\forall a, b \in G,\ f(a * b) = f(a) \otimes f(b).$$

2. Uma aplicação $f : G \to H$ é um *isomorfismo* se, e somente se, f é um homomorfismo bijetor. Neste caso, dizemos que G e H são grupos isomorfos e denotamos por $G \cong H$.

Definição 3.3. Seja G um grupo.

1. Uma aplicação $\phi : G \to G$ é um *endomorfismo* se, e somente se, ϕ é um homomorfismo.

2. Uma aplicação $\phi : G \to G$ é um *automorfismo* se, e somente se, ϕ é um isomorfismo.

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Lema 3.5. Sejam G e H grupos, e $f : G \to H$ um homomorfismo. Então:

1. $f(e_G) = e_H$ onde $e_G \in G$, $e_H \in H$ são os elementos neutros.
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.
3. $f(a^n) = f(a)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Lema 3.5. Sejam G e H grupos, e $f : G \to H$ um homomorfismo. Então:

1. $f(e_G) = e_H$ onde $e_G \in G$, $e_H \in H$ são os elementos neutros.

Demonstração: Sejam e_G e e_H os respectivos elementos neutros de G e H. Se $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, e $f : G \to H$ é um homomorfismo, então:

1. $f(e_G) = e_H$. De fato, $f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G)$.

   Logo, como $f(e_G) \in H$, pelo Lema $\boxed{1.7}$ vem que $f(e_G) = e_H$.

Lema 1.7. Sejam $(G, *)$ um grupo e $a \in G$. Se $a * a = a$, então $a = e$.

Demonstração: Como $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1} * a = e$. Logo,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a = e.$$

Por outro lado,

$$a^{-1} * (a * a) = (a^{-1} * a) * a = e * a = a.$$

Portanto, $a = e$. ∎

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Lema 3.5. Sejam G e H grupos, e $f : G \to H$ um homomorfismo.
Então:

2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.

Demonstração: Sejam e_G e e_H os respectivos elementos neutros de G e H. Se $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, e $f : G \to H$ é um homomorfismo, então:

2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. De fato, $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_G) = e_H$.

   Consequentemente, pela unicidade do elemento inverso vem que $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Lema 3.5. Sejam G e H grupos, e $f : G \to H$ um homomorfismo. Então:

3. $f(a^n) = f(a)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam e_G e e_H os respectivos elementos neutros de G e H. Se $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, e $f : G \to H$ é um homomorfismo, então:

3. $f(a^n) = f(a)^n$. De fato,

$$f(a^n) = f(\underbrace{aa\cdots a}_{n}) = \underbrace{f(a)f(a)\cdots f(a)}_{n} = f(a)^n.$$

FONTE: em anexo

Núcleo de um Homomorfismo de Grupos

Definição 3.14. Sejam G e H grupos, e $f : G \to H$ um homomorfismo. Definimos o *núcleo* de f, denotado por $Ker(f)$, como segue:

$$Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}.$$

FONTE: em anexo

Homomorfismo e Isomorfismo de Anéis

Definição 7 Sejam $(R, +, \cdot)$ e $(S, \oplus, \odot)$ anéis. Uma função $\varphi : R \to S$ é um **homomorfismo de anéis** se, para todo $a, b \in R$, temos:

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$, (i.é, φ é um homomorfismo de grupos)

(ii) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$.

Se, além disso, φ é bijetora, dizemos que φ é um **isomorfismo de anéis** e, neste caso, dizemos tamém que os anéis R e S são isomorfos e denotamos por $R \cong S$ ou $R \overset{\varphi}{\cong} S$.

Se $(R, +, \cdot) = (S, \oplus, \odot)$, dizemos que φ é um **endomorfismo** de anéis.

Se $\varphi : R \to R$ é um isomorfismo, então φ é um **automorfismo** do anel R.

FONTE: https://sites.icmc.usp.br/iresdias/material/sma306.pdf

Homomorfismo de Anéis

Teorema 6 *Seja* $\varphi : (R, +, \cdot) \to (S, \oplus, \odot)$ *um homomorfismo de anéis.*

Então:

(i) $\varphi(O_R) = O_S$,

(ii) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, $\forall\, a \in R$,

(iii) $\varphi(R) = \{\varphi(a);\ a \in R\}$ *é um subanel de* S.

(iv) *Se* R *tem 1, então* $\varphi(1_R) = 1_{\varphi(R)}$.

(v) *Se* $a \in R$ *é inversível, ou seja, tem inverso multiplicativo, então* $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ *em* $\varphi(R)$.

FONTE: https://sites.icmc.usp.br/iresdias/material/sma306.pdf

Núcleo de um Homomorfismo de Anéis

Corolário 3 *Se* $\varphi : R \to S$ *é um homomorfismo de anéis, então* $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{O_s\})$ *é um subanel de* R*, chamado o* **núcleo do homomorfismo** φ. *Note que* $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in R;\ \varphi(a) = O_S\}$.

FONTE: https://sites.icmc.usp.br/iresdias/material/sma306.pdf