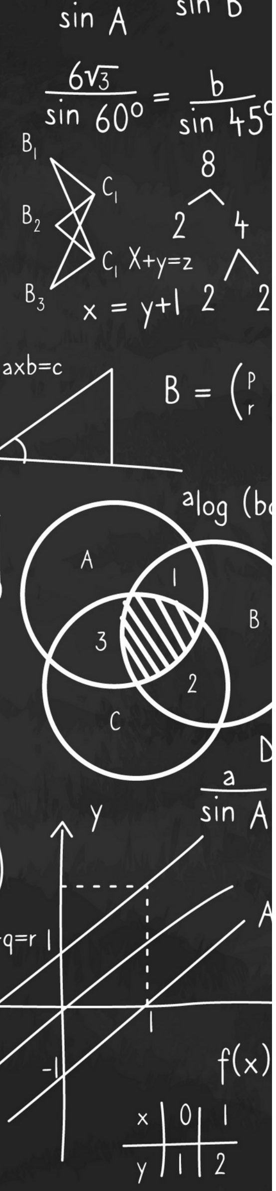


MATEMÁTICA DISCRETA 2

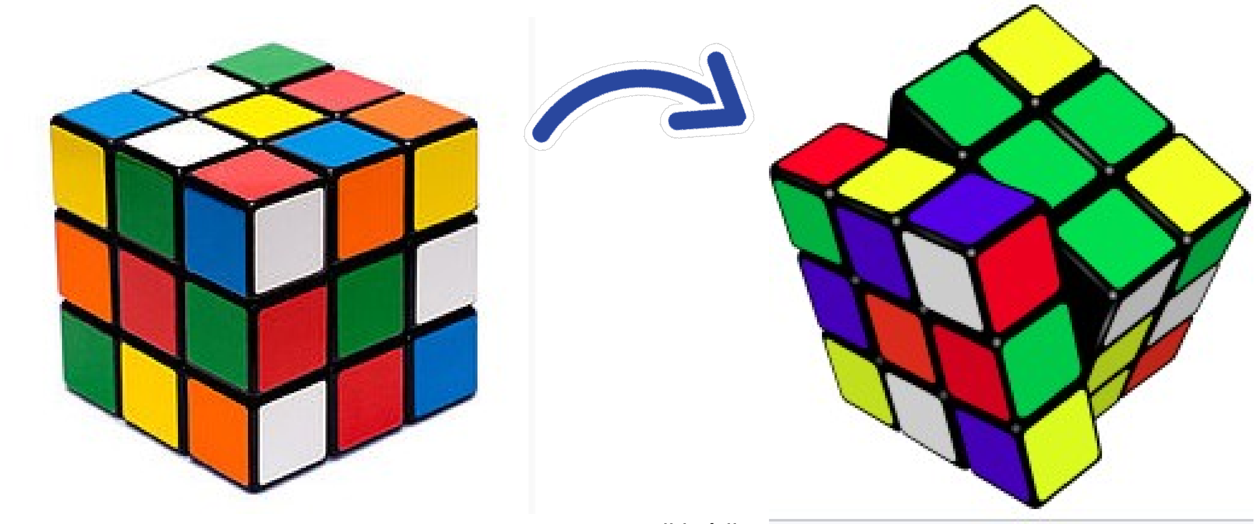
Aula 22
Subgrupos

Cristiane Loesch

Brasília
2025

CURIOSIDADE – GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

GRUPO DE RUBIK



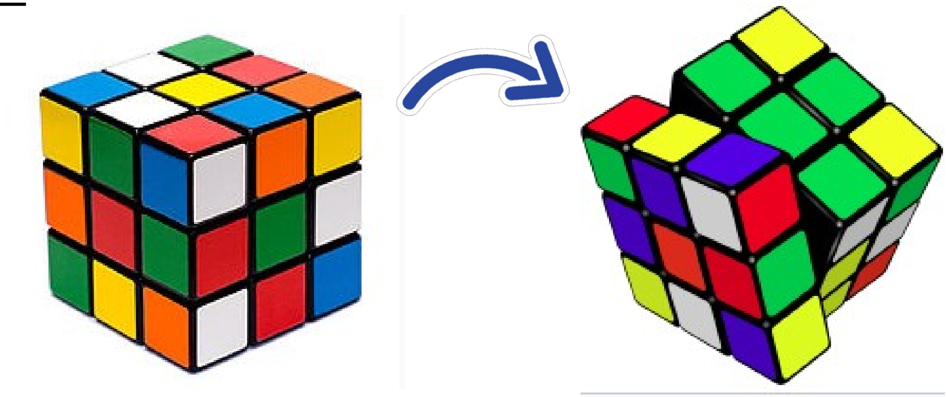
FONTE: Wikipédia

- Inventor: Ernő Rubik (Budapeste, 13.07.1944) em 1974 – professor de arquitetura

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

CURIOSIDADE – GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

GRUPO DE RUBIK



FONTE: Wikipédia

- Grupo de Rubik - conjunto de todas as permutações das faces do cubo

$$(R, \leftrightarrow)$$

→ número total de elementos de R = número de todas as possíveis configurações do cubo;

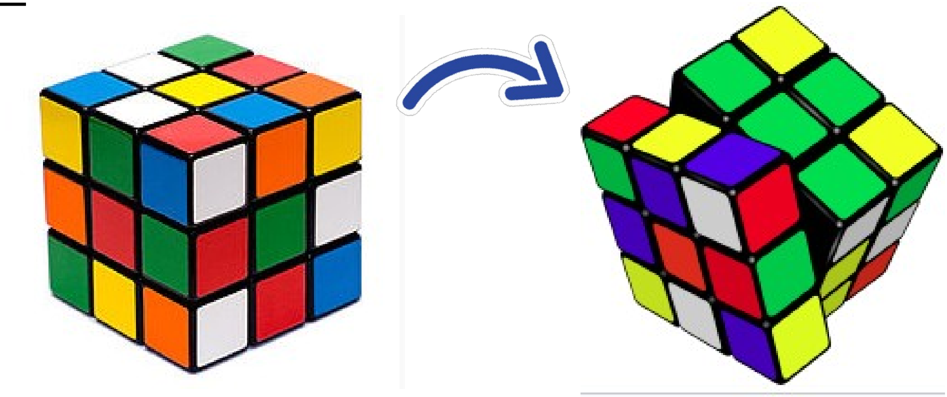
→ R não necessariamente possui todas as permutações das facetas, mas apenas aquelas que podem ser atingidas por meio dos movimentos possíveis de serem realizados no cubo;

→ ($\leftrightarrow$) indica a operação das possíveis permutações sobre o Cubo de Rubik.

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

CURIOSIDADE – GRUPOS DE PERMUTAÇÃO

GRUPO DE RUBIK

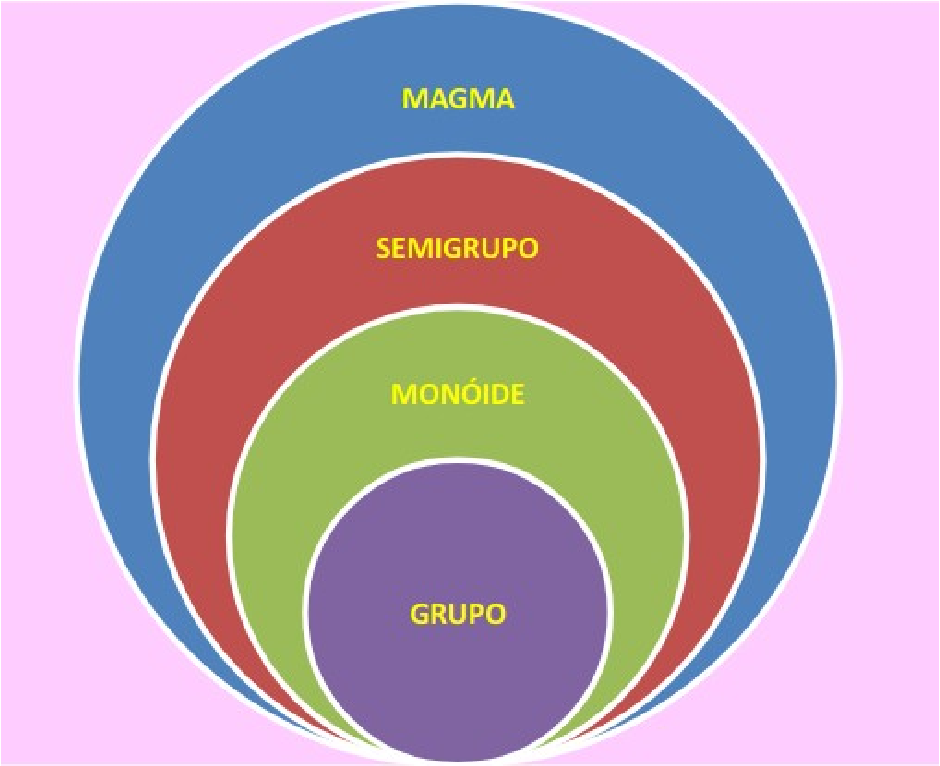


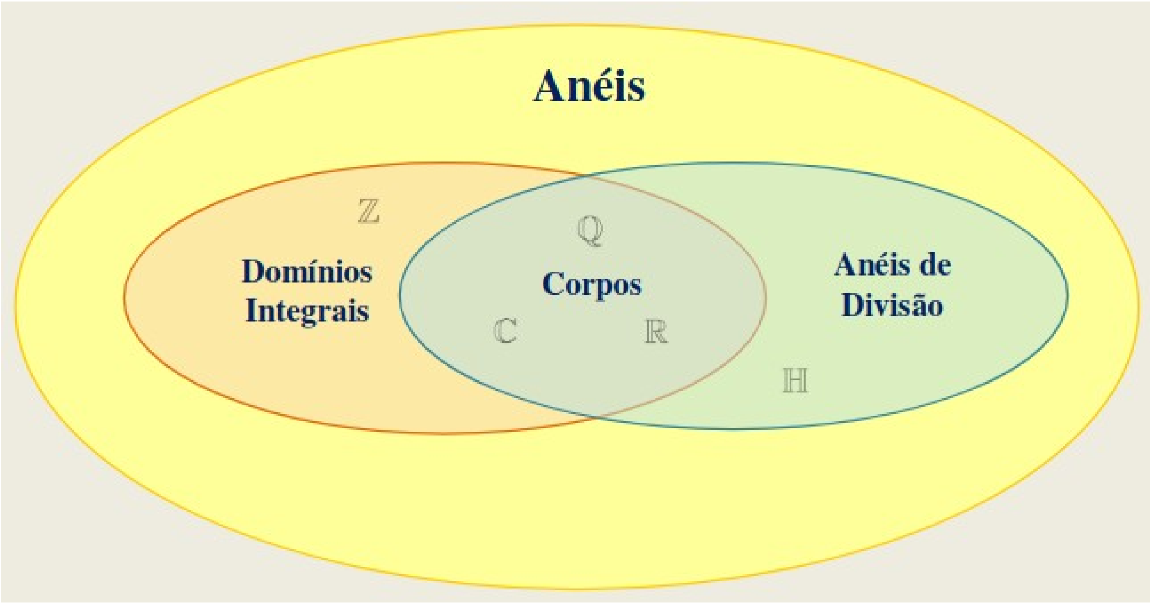
FONTE: Wikipédia

- Simulador do cubo mágico (download) http://www.geometer.org/rubik/
- Vídeos com dicas de resolução por Renan Cerpe https://cubovelocidade.com.br/
- Grupo mágico e a teoria dos grupos por Waldeck Schützer https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik/

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

Estruturas Algébricas





Fonte: Paiva, C. R. (2010)

SUBGRUPOS

- a análise do subconjunto de um conjunto pode ser, por vezes, mais interessante do que a do próprio conjunto. No nosso caso, o interesse é por conjuntos que respeitem a estrutura algébrica de interesse.

  EXEMPLO: Consideremos o grupo dos números inteiros com a operação adição

  $$(\mathbb{Z},\ +\ )$$

  e o subconjunto

  $$H = \{\, número\, inteiros\ pares \,\}$$

  com a operação de adição

  $$(H,\ +\ )$$

  H, também, é grupo.

SUBGRUPOS

Seja G um grupo em relação a uma operação $*$ e cujo elemento neutro seja e. Um subconjunto H de G é dito ser um subgrupo de G se for, também, por si só um grupo em relação à mesma operação, ou seja, se:

i) $e \in H$

ii) $h_1 * h_2 \in H \quad , \quad h_{1,} h_2 \in H$

iii) $h^{-1} \in H \quad , \quad \forall h \in H$.

Todo grupo G possui pelo menos dois subgrupos: o próprio G e o $\{e\}$ formado pelo elemento neutro.

Teorema de Lagrange

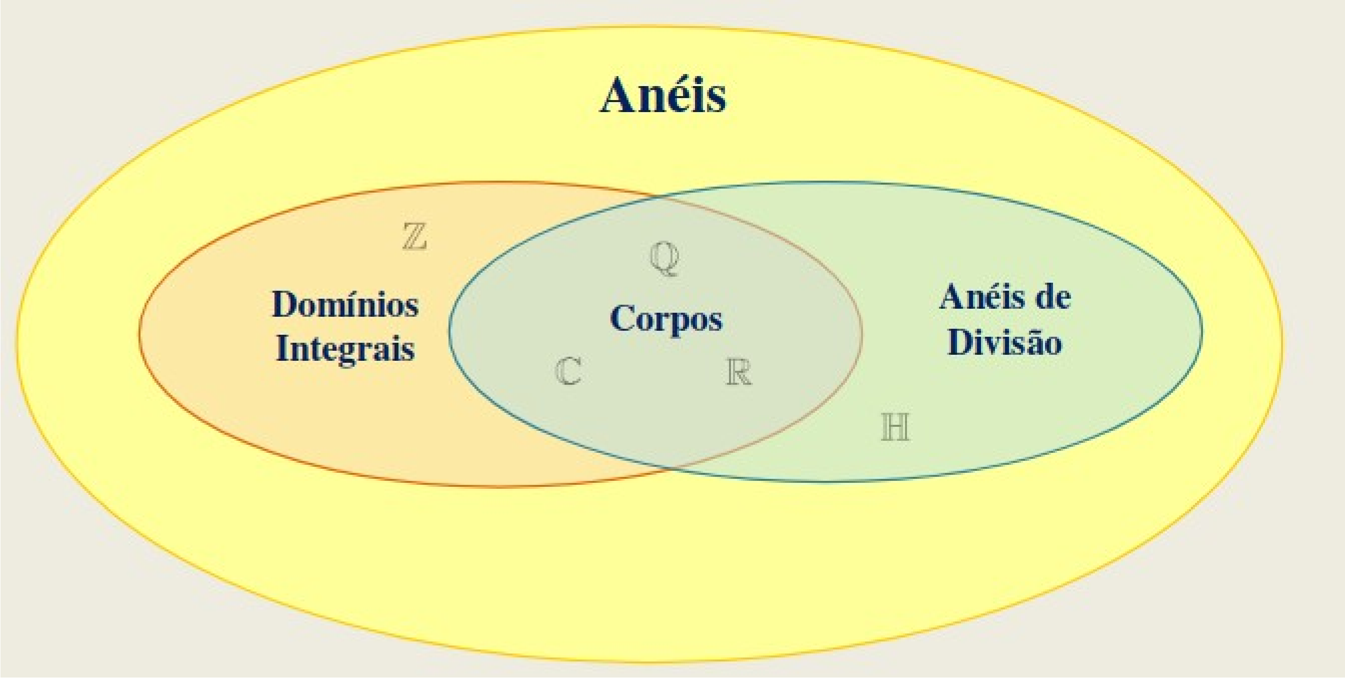
Se G for um conjunto finito e H for um subgrupo de G, então $|H|$ é um divisor de $|G|$.

$$|G|=|H|(G:H)$$


UNDER CONSTRUCTION!


Continuando, hoje, vamos falar sobre anéis e corpos.

Anéis



Fonte: Paiva, C. R. (2010)

Anéis

- Estruturas algébricas
- Consistem de conjuntos munidos de duas operações binárias internas

→ usualmente, as operações são adição e multiplicação

$$+ \ : A \times A \to A \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot \ : A \times A \to A \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

Anéis

DEFINIÇÃO:

Um conjunto não vazio A é chamado Anel (ou anel associativo) e representado por

$$\langle A, + , \cdot \rangle$$

se em A estiverem definidas as operações:

$$+ \ : A \times A \rightarrow A \qquad (a, b) \rightarrow a + b$$

$$\cdot \ : A \times A \rightarrow A \qquad (a, b) \rightarrow a \cdot b$$

para as quais A é fechado e se forem válidas as seguintes propriedades:

Propriedades:

(A_1)	$a, b, c \in A$	$(a+b)+c=a+(b+c)$	Associativa da adição
(A_2)	$a, b \in A$	$a+b=b+a$	Comutativa da adição
(A_3)	$a, e \in A$	$a+e=e+a=a$	Elemento neutro da adição
(A_4)	$a, a' \in A$	$a+a'=a'+a=e$	Elemento simétrico da adição
(M_1)	$a, b, c \in A$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$	Associativa da multiplicação
(AM)	$a, b, c \in A$	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ $(b+c) \cdot a=b \cdot a+c \cdot a$	Distributiva da multiplicação em relação à adição

Anel Comutativo

Se além das propriedades para definir anel a estrutura algébrica,

$$\langle A, + , \cdot \rangle$$

também, for comutativa da multiplicação

$$(M_2) \qquad a, b \in A \qquad a \cdot b = b \cdot a \;\cdot$$

Anel Comutativo

Se além das propriedades para definir anel a estrutura algébrica,

$$\langle A, + , \cdot \rangle$$

também, for comutativa da multiplicação

$$(M_2) \qquad a, b \in A \qquad a \cdot b = b \cdot a \ .$$

Anel com unidade

Se além das propriedades para definir anel a estrutura algébrica,

$$\langle A, + , \cdot \rangle$$

apresentar, também, elemento neutro e ele for único.

$$(M_3) \qquad a \in A \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ .$$

EXEMPLOS:

a) $\langle \mathbb{N}, + , \cdot \rangle$ não é anel, pois não satisfaz a propriedade do elemento simetrizável para a adição.

EXEMPLOS:

a) $\langle \mathbb{N}, + , \cdot \rangle$ não é anel, pois não satisfaz a propriedade do elemento simetrizável para a adição.

b) $\langle \mathbb{Q}, + , \cdot \rangle$ é anel, no qual o elemento neutro para adição é o número zero.

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento)

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

7º) Distributiva

ANEL

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

ANEL COMUTATIVO

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a, b) \rightarrow a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a, b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

$$(a+b)+c = a+b+c$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a + b) + c = a + b + c$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$

$$\left.\begin{aligned} (a+b)+c &= a+b+c \\ a+(b+c) &= a+b+c \end{aligned}\right\} =$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$

Admite associativa!

$$\left.\begin{array}{l} (a+b)+c = a+b+c \\ a+(b+c) = a+b+c \end{array}\right\} =$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$

$$a+b \qquad b+a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a * b = b * a$

$$a + b \quad = \quad b + a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$

Admite comutativa!

$$a+b = b+a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a, b) \rightarrow a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a, b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z} \qquad a * b = b * a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, e \in \mathbb{Z} \qquad a * e = e * a = a$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

$$a+e=a \longrightarrow e=a-a \longrightarrow e=0$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$
$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c\in\mathbb{Z} \qquad (a*b)*c=a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b\in\mathbb{Z} \qquad a*b=b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e\in\mathbb{Z} \qquad a*e=e*a=a$

$$a+e=a \longrightarrow e=a-a \longrightarrow e=0$$

*já provou-se a comutativa

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $\quad a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

$$a+e=a \longrightarrow e=a-a \longrightarrow e=0$$

*já provou-se a comutativa

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

$$a + a' = e \longrightarrow a + a' = 0 \longrightarrow a' = -a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

$$a + a' = e \longrightarrow a + a' = 0 \longrightarrow a' = -a$$

*já provou-se a comutativa

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

Admite operação interna!

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

Admite elemento simétrico!

$$a + a' = e \longrightarrow a + a' = 0 \longrightarrow a' = -a$$

*já provou-se a comutativa

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \qquad (a,b)\to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \qquad (a,b)\to a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c\in\mathbb{Z} \qquad (a*b)*c=a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b\in\mathbb{Z} \qquad a*b=b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e\in\mathbb{Z} \qquad a*e=e*a=a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a'\in\mathbb{Z} \qquad a*a'=a'*a=e$

Admite elemento simétrico!

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a, b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a, e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a, a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad (a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z}$ $\quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z}$ $\quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

$$\left.\begin{array}{l}(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \\ a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c\end{array}\right\} =$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento):

Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \qquad a*b = b*a$

Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \qquad a*e = e*a = a$

Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \qquad a*a' = a'*a = e$

Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$

Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \qquad (a,b)\to a+b$$
$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \qquad (a,b)\to a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c=a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b\in\mathbb{Z}$ $\quad a*b=b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e\in\mathbb{Z}$ $\quad a*e=e*a=a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a'\in\mathbb{Z}$ $\quad a*a'=a'*a=e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c=a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ $\; a\cdot(b+c)=\underline{a\cdot b}+a\cdot c$ e $(b+c)\cdot a=\underline{b\cdot a}+c\cdot a$

$$\underline{a\cdot b=b\cdot a}$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z} \qquad (a,b)\rightarrow a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z} \qquad (a,b)\rightarrow a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b,c\in\mathbb{Z} \qquad (a*b)*c=a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b\in\mathbb{Z} \qquad a*b=b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,e\in\mathbb{Z} \qquad a*e=e*a=a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,a'\in\mathbb{Z} \qquad a*a'=a'*a=e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c\in\mathbb{Z} \qquad (a*b)*c=a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c\in\mathbb{Z} \quad a\cdot(b+c)=\underline{a\cdot b}+\underline{a\cdot c}$ e $(b+c)\cdot a=\underline{b\cdot a}+\underline{c\cdot a}$

$$\underline{a\cdot b=b\cdot a}$$

$$\underline{a\cdot c=c\cdot a}$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,e \in \mathbb{Z} \quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,a' \in \mathbb{Z} \quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad a \cdot (b+c) = \underline{a \cdot b} + \underline{a \cdot c}$ e $(b+c) \cdot a = \underline{b \cdot a} + \underline{c \cdot a}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a \cdot b = b \cdot a} \\ \underline{a \cdot c = c \cdot a} \end{array}\right\} \text{Vale comutativa}$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z}$ $\quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z}$ $\quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad a \cdot (b+c) = \underline{a \cdot b} + \underline{a \cdot c}$ e $(b+c) \cdot a = \underline{b \cdot a} + \underline{c \cdot a}$ Admite distributiva!

$$\left.\begin{matrix} \underline{a \cdot b = b \cdot a} \\ \underline{a \cdot c = c \cdot a} \end{matrix}\right\} \text{Vale comutativa}$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ Admite distributiva!

É ANEL!!!

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a\cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z}$ $\quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z}$ $\quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ e $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ Admite distributiva!

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,e \in \mathbb{Z} \quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle : a,a' \in \mathbb{Z} \quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b,c \in \mathbb{Z} \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ Admite distributiva!

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle : a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$

$$a \cdot b \qquad b \cdot a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, e \in \mathbb{Z}$ $\quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a, a' \in \mathbb{Z}$ $\quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\; a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ Admite distributiva!

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z} \quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z} \quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ Admite distributiva!

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z} \quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

$$a \cdot b = b \cdot a$$

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento): Admite operação interna!

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a+b$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad (a,b) \to a \cdot b$$

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,e \in \mathbb{Z}$ $\quad a*e = e*a = a$ Admite elemento neutro!

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: $a,a' \in \mathbb{Z}$ $\quad a*a' = a'*a = e$ Admite elemento simétrico!

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Admite associativa!

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ Admite distributiva!

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$: $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a*b = b*a$ Admite comutativa!

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento)

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

É ANEL COMUTATIVO!!!

EXEMPLO: Verifique se $\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$ é um anel comutativo.

1º) verificar operação interna (fechamento)

2º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

3º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

4º) Elemento Neutro $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

5º) Elemento Simétrico $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

6º) Associativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

7º) Distributiva $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

8º) Comutativa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

É ANEL COMUTATIVO!!!

EXEMPLO: Outros exemplos de anel:

a)

$$\langle \mathbb{Z}, + , \cdot \rangle \qquad \langle \mathbb{R}, + , \cdot \rangle$$

$$\langle \mathbb{C}, + , \cdot \rangle \qquad \langle M_n(R), + , \cdot \rangle \qquad \langle n\mathbb{Z}, + , \cdot \rangle$$

b) operações de $I_2=\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

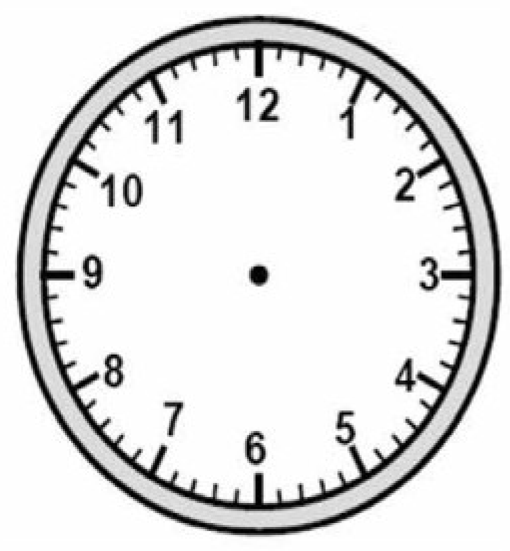
$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\langle I_2, + , \cdot \rangle$$

Obs: um exemplo prático, deste caso, bits do computador : 0 desligado, 1 ligado

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:



FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:

Imagine que num determinado instante ele marca 11h

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:

→ Imagine que num determinado instante ele marca 11h

→ Três horas depois, o relógio marca 2h.

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:

→ Imagine que num determinado instante ele marca 11h;

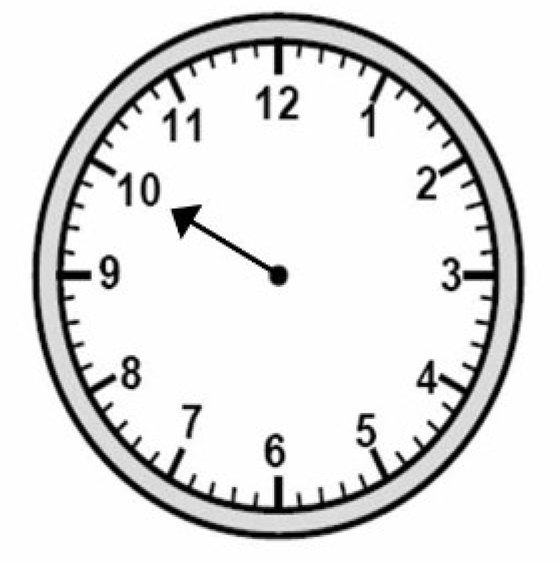
→ Três horas depois, o relógio marca 2h;

→ Seis horas depois, o relógio marca 5h;

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:



Imagine que num determinado instante ele marca 11h;

Três horas depois, o relógio marca 2h;

Seis horas depois, o relógio marca 5h;

Onze horas depois, o relógio marca 10h;

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:

→ Imagine que num determinado instante ele marca 11h;

→ Três horas depois, o relógio marca 2h;

→ Seis horas depois, o relógio marca 5h;

→ Onze horas depois, o relógio marca 10h;

Matematicamente, podemos indicar um conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ no qual

$$11 + 3 = 2,\ \ 11 + 6 = 5 \ \text{ e } \ 11 + 11 = 10$$

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Considere o mostrador do relógio:

→ Imagine que num determinado instante ele marca 11h;

→ Três horas depois, o relógio marca 2h;

→ Seis horas depois, o relógio marca 5h;

→ Onze horas depois, o relógio marca 10h;

Matematicamente, podemos indicar um conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ no qual

$$11 + 3 = 2,\ \ 11 + 6 = 5 \ \text{ e } \ 11 + 11 = 10$$

Imagine, ainda, que o ponteiro das horas marca 12h. Decorrido três vezes o intervalo de 7 h, tal ponteiro marcará 9h, ou seja, matematicamente $3 \cdot 7 = 9$.

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição

EX.

$$\underline{(5+9)}+8=5+\underline{(9+8)}$$
$$\underline{2+8}=\underline{5+5}$$
$$10=10$$

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓

$$a+e=a \rightarrow a+12=a, \forall\, a \in I_{12}$$

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição

→ comutativa da adição

→ 12 é o elemento neutro aditivo

$a+e=a \rightarrow a+12=a, \forall\, a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo

$a+a'=e \rightarrow a+a'=12, \forall\, a \in I_{12}$

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓

$a+e=a \rightarrow a+12=a, \forall\, a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo ✓

$a+a'=e \rightarrow a+a'=12, \forall\, a \in I_{12}$

→ associativa da multiplicação ✓

EX. $(5 \cdot 8) \cdot 9 = 5 \cdot (8 \cdot 9)$

$4 \cdot 9 = 5 \cdot 12$

$12 = 12$

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓

$a + e = a \rightarrow a + 12 = a, \forall a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo ✓

$a + a' = e \rightarrow a + a' = 12, \forall a \in I_{12}$

→ associativa da multiplicação ✓

→ distributiva ✓ EX. $5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3$

$5 \cdot 10 = 11 + 3$

$2 = 2$

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓

$a+e=a \rightarrow a+12=a, \forall a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo ✓

$a+a'=e \rightarrow a+a'=12, \forall a \in I_{12}$

→ associativa da multiplicação ✓

→ distributiva ✓ EX. $5 \cdot (7+3) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3$

$5 \cdot 10 = 11 + 3$

$2 = 2$

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição

→ comutativa da adição

→ 12 é o elemento neutro aditivo

$a+e=a \rightarrow a+12=a, \forall a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo

$a+a'=e \rightarrow a+a'=12, \forall a \in I_{12}$

→ associativa da multiplicação

→ distributiva EX. $5 \cdot (7+3) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3$

$5 \cdot 10 = 11 + 3$

$2 = 2$

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓

→ comutativa da adição ✓

→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓

$a + e = a \rightarrow a + 12 = a, \forall a \in I_{12}$

→ elemento simetrizável aditivo ✓

$a + a' = e \rightarrow a + a' = 12, \forall a \in I_{12}$

→ associativa da multiplicação ✓

→ distributiva ✓ EX. $5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3$

$5 \cdot 10 = 11 + 3$

$2 = 2$

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição ✓
→ comutativa da adição ✓
→ 12 é o elemento neutro aditivo ✓
→ elemento simetrizável aditivo ✓
→ associativa da multiplicação ✓
→ distributiva ✓

$\langle I_{12}, + , \cdot \rangle$ **É ANEL!**

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição
→ comutativa da adição
→ 12 é o elemento neutro aditivo
→ elemento simetrizável aditivo
→ associativa da multiplicação
→ distributiva

$\langle I_{12}, + , \cdot \rangle$ **É ANEL!**

→ comutativa da multiplicação

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

Naturalmente, você observa que é possível definir as operações de adição e multiplicação dentro do conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ e podemos criar tabelas operatórias para o conjunto

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

→ associativa da adição

→ comutativa da adição

→ 12 é o elemento neutro aditivo

→ elemento simetrizável aditivo

→ associativa da multiplicação

→ distributiva

$\langle I_{12}, + , \cdot \rangle$ **É ANEL!**

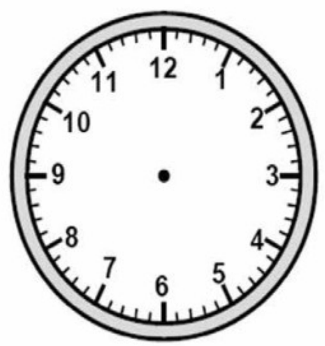
→ comutativa da multiplicação

→ 1 é o elemento neutro multiplicativo

$a \cdot e = a \rightarrow a \cdot 1 = a, \forall a \in I_{12}$

EXEMPLO: Evaristo e Perdigão (2002, p. 50)

$I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$



→ associativa da adição
→ comutativa da adição
→ 12 é o elemento neutro aditivo
→ elemento simetrizável aditivo
→ associativa da multiplicação
→ distributiva

→ comutativa da multiplicação
→ 1 é o elemento neutro multiplicativo

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

É ANEL COMUTATIVO COM UNIDADE

$$\langle I_{12}, + , \cdot \rangle$$

Divisores de zero

Seja A um anel, um elemento $a \in A$ é um divisor de zero se:

i) $a \neq 0$

ii) $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

Divisores de zero

Seja A um anel, um elemento $a \in A$ é um divisor de zero se:

i) $a \neq 0$

ii) $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

→ diz-se que A é sem divisores de zero quando $a \cdot b = 0 \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{cases}$

Divisores de zero

Seja A um anel, um elemento $a \in A$ é um divisor de zero se:

i) $a \neq 0$

ii) $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

→ diz-se que A é sem divisores de zero quando $a \cdot b = 0 \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{cases}$

→ A será chamado **anel de integridade** se for comutativo, unitário e sem divisores de zero

Divisores de zero

Seja A um anel, um elemento $a \in A$ é um divisor de zero se:

i) $a \neq 0$

ii) $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

→ diz-se que A é sem divisores de zero quando $a \cdot b = 0 \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{cases}$

→ A será chamado **anel de integridade** se for comutativo, unitário e sem divisores de zero

EXEMPLO: Anéis de Integridade

$\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \qquad \langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle \qquad \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$

Divisores de zero

Seja A um anel, um elemento $a \in A$ é um divisor de zero se:

i) $a \neq 0$

ii) $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

→ diz-se que A é sem divisores de zero quando $a \cdot b = 0 \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{cases}$

→ A será chamado **anel de integridade** se for comutativo, unitário e sem divisores de zero

Propriedades:

→ propriedades de anel
→ verifique notas de aula

Ideal ou Subanel

Seja A um anel, e B um subconjunto não vazio de A, se :

i) Dados quaisquer $a, b \in B$, $a - b \in B$

ii) $\forall a, b \in B \quad , \quad a \cdot b \in B$

Ideal ou Subanel

Seja A um anel, e B um subconjunto não vazio de A, se :

i) Dados quaisquer $a, b \in B$, $a - b \in B$

ii) $\forall a, b \in B \quad , \quad a \cdot b \in B$

Propriedades:

→ se o ideal contém elemento inversível do anel ele é todo o anel

Ideal ou Subanel

Seja A um anel, e B um subconjunto não vazio de A, se :

i) Dados quaisquer $a, b \in B$, $a - b \in B$

ii) $\forall a, b \in B$, $a \cdot b \in B$

Propriedades:

→ se o ideal contém elemento inversível do anel ele é todo o anel

EXEMPLO:

$\mathbb{Z}$ é subanel de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ é subanel de $\mathbb{R}$

Anel Quociente

Sejam A um anel e I o ideal de A, denota-se

$$\frac{A}{I}$$

ao conjunto de todas as classes de equivalências módulo I, com:

i) $\bar{a},\bar{b}\in\frac{A}{I} \longrightarrow \bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$

ii) $\bar{a},\bar{b}\in\frac{A}{I} \longrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\cdot b}$

tal que, $\left(\frac{A}{I},\ +\ ,\ \cdot\ \right)$ é chamado Anel quociente do anel A pelo ideal I.

*vide propriedades nas notas de aula.

Anel Quociente

Sejam A um anel e I o ideal de A, denota-se

$$\frac{A}{I}$$

ao conjunto de todas as classes de equivalências módulo I, com:

i) $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{A}{I} \longrightarrow \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

ii) $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{A}{I} \longrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

tal que, $\left(\frac{A}{I}, +, \cdot\right)$ é chamado Anel quociente do anel A pelo ideal I.

*vide propriedades nas notas de aula.

Equivalência módulo n

Dado um inteiro $n \geq 2$, diz-se que dois números inteiros a e b são equivalentes módulo n

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se $a-b$ for múltiplo de n

<u>Equivalência módulo n</u>

Dado um inteiro $n \geq 2$, diz-se que dois números inteiros a e b são equivalentes módulo n

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se $a - b$ for múltiplo de n

EXEMPLO: $11 \equiv 5 \pmod{3}$ $\qquad$ $11 - 5 = 6 = 3 \cdot 2$

Equivalência módulo n

Dado um inteiro $n \geq 2$, diz-se que dois números inteiros a e b são equivalentes módulo n

$$a \equiv b \,(mod\, n)$$

se $a-b$ for múltiplo de n

EXEMPLO: $11 \equiv 5\,(mod\, 3)$ $\quad 11-5=6=3 \cdot 2$

$21 \not\equiv 9\,(mod\, 5)$ $\quad 21-9=12$

Equivalência módulo n

Dado um inteiro $n \geq 2$, diz-se que dois números inteiros a e b são equivalentes módulo n

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se $a - b$ for múltiplo de n

EXEMPLO: $11 \equiv 5 \pmod{3}$ $\qquad 11 - 5 = 6 = 3 \cdot 2$

$21 \not\equiv 9 \pmod{5}$ $\qquad 21 - 9 = 12$

Uma **classe de equivalência** de a *módulo* n é o conjunto de todos os inteiros que são equivalentes a a *módulo* n, ou seja,

$$\bar{a} = \{ x \in \mathbb{Z} / x \equiv a \pmod{n} \}$$

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 \pmod{n}$.

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 \pmod{n}$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 \pmod{n}$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Adição:

$\bar{0} + \bar{0} =$

Produto:

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 (mod\, n)$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Adição:

$\bar{0} + \bar{0} = \overline{0+0} =$

Produto:

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 (mod\, n)$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Adição:

$\bar{0} + \bar{0} = \overline{0+0} = \bar{0}$

Produto:

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{n-1}\}$$

sendo $n\equiv 0(mod\, n)$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$

Adição:

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0+0}=\overline{0}$

$\overline{0}+\overline{1}=\overline{0+1}=\overline{1}$

$\overline{0}+\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$

$\overline{0}+\overline{3}=\overline{0+3}=\overline{3}$

$\overline{1}+\overline{1}=\overline{1+1}=\overline{2}$

$\overline{1}+\overline{2}=\overline{1+2}=\overline{3}$

$\overline{1}+\overline{3}=\overline{1+3}=\overline{4}=\overline{0}$, $4\equiv 0(mod\,4)$

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}=\overline{0}$, $4\equiv 0(mod\,4)$

$\overline{2}+\overline{3}=\overline{2+3}=\overline{3}=\overline{1}$, $5\equiv 1(mod\,4)$

$\overline{3}+\overline{3}=\overline{3+3}=\overline{6}=\overline{2}$, $6\equiv 2(mod\,4)$

Produto:

$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0\cdot 0}=\overline{0}$

$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{0\cdot 1}=\overline{0}$

$\overline{0}\cdot\overline{2}=\overline{0\cdot 2}=\overline{0}$

$\overline{0}\cdot\overline{3}=\overline{0\cdot 3}=\overline{0}$

$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1\cdot 1}=\overline{1}$

$\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{1\cdot 2}=\overline{2}$

$\overline{1}\cdot\overline{3}=\overline{1\cdot 3}=\overline{3}$

$\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{2\cdot 2}=\overline{4}=\overline{0}$, $4\equiv 0(mod\,4)$

$\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{2\cdot 3}=\overline{6}=\overline{2}$, $6\equiv 2(mod\,4)$

$\overline{3}\cdot\overline{3}=\overline{3\cdot 3}=\overline{9}=\overline{1}$, $9\equiv 1(mod\,4)$

Conjunto das classes de equivalência módulo *n*

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

sendo $n \equiv 0 \pmod{n}$.

EXEMPLO: Montar uma tabela das operações de $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Adição:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Produto:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Congruência

Sejam A um anel e I o ideal de A, diz-se que dois elementos $a, b \in A$ são equivalentes (ou congruentes) se $a - b \in I$, ou seja, $a \equiv b \pmod{I}$ e este é uma relação de equivalência.

i) reflexiva: $a \equiv a \pmod{I} \longrightarrow a - a = 0 \in I$

ii)simétrica: se $a \equiv b \pmod{I} \longrightarrow a - b \in I$ logo,

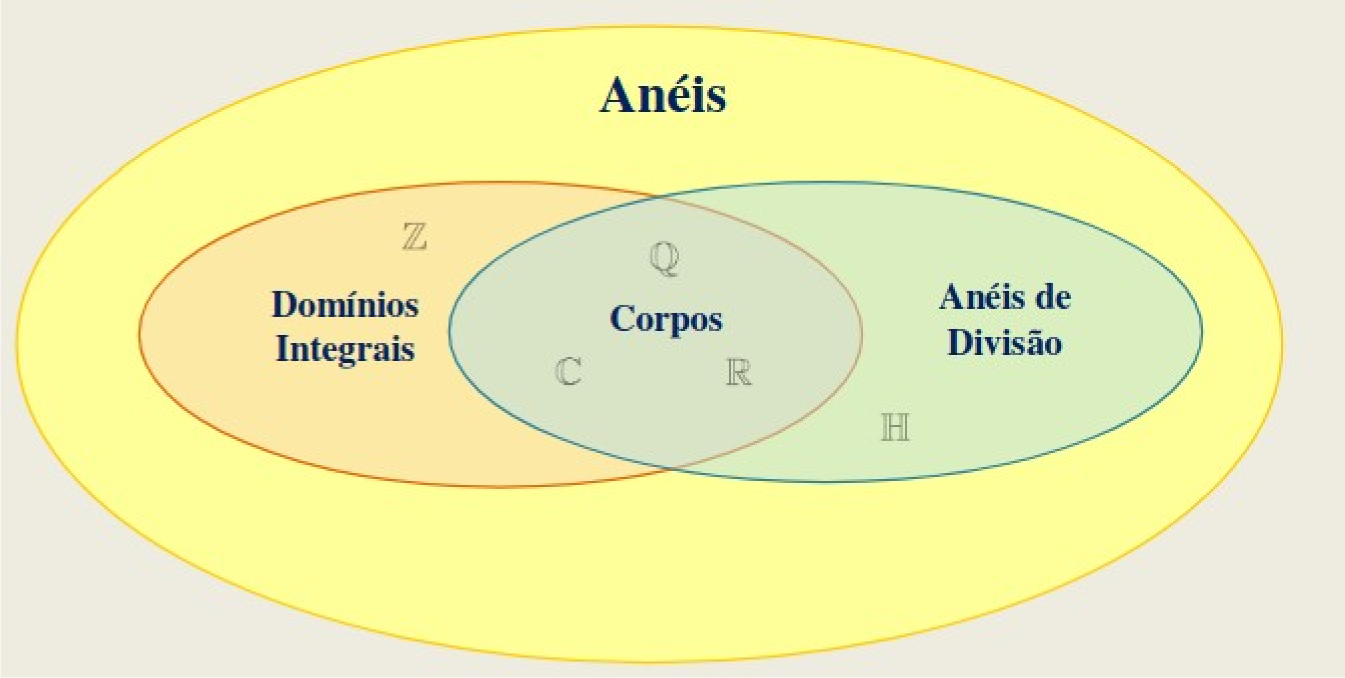
$$-(a-b) \in I \Leftrightarrow b - a \in I \longrightarrow b \equiv a \pmod{I}$$

iii) transitiva: se $a \equiv b \pmod{I}$ e $b \equiv c \pmod{I}$ temos:

$a - b \in I$ e $b - c \in I$ sendo I um ideal tem-se

$$(a-b)+(b-c) \in I \rightarrow a - c \in I \text{ logo } a \equiv c \pmod{I}$$

Corpos



Fonte: Paiva, C. R. (2010)

Corpos

Chama-se corpo todo anel abeliano, unitário K e para todo $x \in K$, com $x \neq 0$ $x^{-1} \in K$, ou seja, um corpo é um anel abeliano com unidade no qual todo elemento não nulo é inversível.

Propriedades

i) K é um anel de integridade

ii) se I é um ideal de K => $I = \{0\}$ ou $I = K$

iii) $I = \{0\}$ é um ideal máximal de K

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$

$$\bar{0}+\bar{2}=\overline{0+2}=\bar{2}$$

$$\bar{0}+\bar{4}=\overline{0+4}=\bar{4}$$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$

$$\bar{0}+\bar{2}=\overline{0+2}=\bar{2}$$

$$\bar{0}+\bar{4}=\overline{0+4}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{2}=\overline{2+2}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{4}=\overline{2+4}=\bar{6}=\bar{0}$$

$$\bar{4}+\bar{4}=\overline{4+4}=\bar{8}=\bar{2}$$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$ é corpo

$$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$$

$$\overline{0}+\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$$

$$\overline{0}+\overline{4}=\overline{0+4}=\overline{4}$$

$$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}$$

$$\overline{2}+\overline{4}=\overline{2+4}=\overline{6}=\overline{0}$$

$$\overline{4}+\overline{4}=\overline{4+4}=\overline{8}=\overline{2}$$

+	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$

$$\bar{0}+\bar{2}=\overline{0+2}=\bar{2}$$

$$\bar{0}+\bar{4}=\overline{0+4}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{2}=\overline{2+2}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{4}=\overline{2+4}=\bar{6}=\bar{0}$$

$$\bar{4}+\bar{4}=\overline{4+4}=\bar{8}=\bar{2}$$

$$\bar{2}\cdot\bar{2}=\overline{2\cdot 2}=\bar{4}$$

$$\bar{2}\cdot\bar{4}=\overline{2\cdot 4}=\bar{8}=\bar{2}$$

$$\bar{4}\cdot\bar{4}=\overline{4\cdot 4}=\overline{16}=\bar{4}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$

$$\bar{0}+\bar{2}=\overline{0+2}=\bar{2}$$

$$\bar{0}+\bar{4}=\overline{0+4}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{2}=\overline{2+2}=\bar{4}$$

$$\bar{2}+\bar{4}=\overline{2+4}=\bar{6}=\bar{0}$$

$$\bar{4}+\bar{4}=\overline{4+4}=\bar{8}=\bar{2}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

$$\bar{2}\cdot\bar{2}=\overline{2\cdot 2}=\bar{4}$$

$$\bar{2}\cdot\bar{4}=\overline{2\cdot 4}=\bar{8}=\bar{2}$$

$$\bar{4}\cdot\bar{4}=\overline{4\cdot 4}=\overline{16}=\bar{4}$$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

EXEMPLO: Verifique se $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ é corpo

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$$
$$\bar{0}+\bar{2}=\overline{0+2}=\bar{2}$$
$$\bar{0}+\bar{4}=\overline{0+4}=\bar{4}$$
$$\bar{2}+\bar{2}=\overline{2+2}=\bar{4}$$
$$\bar{2}+\bar{4}=\overline{2+4}=\bar{6}=\bar{0}$$
$$\bar{4}+\bar{4}=\overline{4+4}=\bar{8}=\bar{2}$$

$$\bar{2}\cdot\bar{2}=\overline{2\cdot 2}=\bar{4}$$
$$\bar{2}\cdot\bar{4}=\overline{2\cdot 4}=\bar{8}=\bar{2}$$
$$\bar{4}\cdot\bar{4}=\overline{4\cdot 4}=\overline{16}=\bar{4}$$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

→ tem unidade (elemento $\bar{4}$); é comutativo; não tem divisores de zero; todo elemento não nulo é inversível => B é corpo.

EXEMPLO: Características dos conjuntos numéricos

Estrutura	Corpo	Grupo	Anel
$(\mathbb{N}, +, \cdot)$			
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$		✓	✓
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	✓	✓	✓
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$	✓	✓	✓
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$	✓	✓	✓

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

Estruturas Algébricas

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fechamento adição}\\[1em]\text{Associatividade adição}\\[1em]\text{Identidade aditiva}\\[1em]\text{Inverso aditivo}\end{array}\right\}\text{Grupo}$$

Estruturas Algébricas

Fechamento adição

Associatividade adição

Identidade aditiva

Inverso aditivo

Comutatividade da adição

Grupo

Grupo Abeliano

Estruturas Algébricas

Fechamento adição

Associatividade adição

Identidade aditiva

Inverso aditivo

Comutatividade da adição

Fechamento da multiplicação

Associatividade da multiplicação

Leis distributivas

Grupo

Grupo Abeliano

Anel

Estruturas Algébricas

Fechamento adição

Associatividade adição

Identidade aditiva

Inverso aditivo

Comutatividade da adição

Fechamento da multiplicação

Associatividade da multiplicação

Leis distributivas

Comutatividade da multiplicação

Grupo

Grupo Abeliano

Anel

Anel Abeliano

Estruturas Algébricas

Fechamento adição

Associatividade adição

Identidade aditiva

Inverso aditivo

Comutatividade da adição

Fechamento da multiplicação

Associatividade da multiplicação

Leis distributivas

Comutatividade da multiplicação

Identidade multiplicativa

Sem divisores de zero

Grupo

Grupo Abeliano

Anel

Anel Abeliano

Domínio de Integridade

Estruturas Algébricas

Fechamento adição

Associatividade adição

Identidade aditiva

Inverso aditivo

Comutatividade da adição

Fechamento da multiplicação

Associatividade da multiplicação

Leis distributivas

Comutatividade da multiplicação

Identidade multiplicativa

Sem divisores de zero

Inverso multiplicativo

Grupo

Grupo Abeliano

Anel

Anel Abeliano

Domínio de Integridade

Corpo

EXERCÍCIOS

1) Usando como base o exemplo do relógio discutido em aula, resolva o exercício a seguir:

Evaristo e Perdigão (2002, p. 53)
Considere o conjunto $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que refere-se aos dias da semana, associando os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 aos dias de domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado, respectivamente. Verifique se $\langle I_7, +, \cdot \rangle$ é um anel.

2) Encontre o conjunto B de todos os números equivalentes a 3 módulo 4. Lembre-se que $a \equiv b(mod\, n) \Rightarrow a - b = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1) se estivermos numa quinta, após o decurso de seis dias iremos para uma quarta

$$5 + 6 = 4 \longrightarrow \text{quarta}$$

se estivermos num domingo e forem decorridos sete dias iremos para outro domingo

$$1 + 7 = \bar{7} \longrightarrow \text{domingo}$$

se estivermos num sábado e forem decorridos três vezes o período de quatro dias, a partir do domingo, iremos parar numa quinta-feira $\longrightarrow 3 \cdot 4 = 5$

Desta forma, estabelecemos duas operações no conjunto

$$I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

dadas pelas tabelas a seguir:

FONTE: Soares, M. (2012)
https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=7272

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1) $I_7 = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}\}$

Adição em I_7

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Multiplicação em I_7

·	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	1	3	5	7
3	3	6	2	5	1	4	7
4	4	1	5	2	6	3	7
5	5	3	1	6	4	2	7
6	6	5	4	3	2	1	7
7	7	7	7	7	7	7	7

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 54)

Do mesmo modo que I_{12}, o conjunto I_7 munido das operações acima é um anel.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

4) Encontre o conjunto B de todos os números equivalentes a 3 módulo 4. Lembre-se que $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a - b = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x - 3 = 4 \cdot k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$B = \{..,-5,-1,3,7,11,...\}$$