Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Guias e Ondas - TI0053

Avaliação Parcial 1

Discente: Lucas de Souza Abdalah
Matrícula: 385472
Docente: Dr. Sérgio Antenor

Fortaleza, 03 de maio de 2019

Conteúdo

1 Problemas

1.1 Questão 1

Campos elétricos de duas ondas eletromagnéticas de polarização linear, propagando em uníssono através do espaço livre são dados por $\mathbf{E_1}$ (1) e $\mathbf{E}_2$ (2) com z em metros e onde a e b são constantes. Determine para a onda eletromagnética resultante: o campo magnético instantâneo, a polarização da onda, o vetor de Poynting instantâneo e médio.

$$\mathbf{E_1} = e^{-j\pi(z-0,25)}\vec{a}_x \ V/m \tag{1}$$

$$\mathbf{E_2} = ae^{-j\pi(z-0,25b)}\vec{a}_y \ V/m \tag{2}$$

Solução:
Considerando os valores de a e b, 2 e 5, respectivamente, teremos:

1.1.1 Campo Magnético Instantâneo

Um campo elétrico $\mathbf{E}$ em coordenadas retangulares será dado pela soma das componentes dos campos $E_x\hat{a_x}$, $E_y\hat{a_y}$ e $E_z\hat{a_z}$. Assumindo que a componente em $\vec{a_z}$ é zero, tem-se que soma dos campos elétricos $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ resulta no próprio $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = e^{-j\pi(z-0,25)}\hat{a}_x + ae^{-j\pi(z-0,25b)}\hat{a}_y \tag{3}$$

O **Campo Magnético Instantâneo** pode ser obtido através da manipulação da expressão (4)

$$\vec{k} \times E = \mu\omega H \rightarrow H = \frac{\vec{k} \times E}{\omega\mu} \tag{4}$$

Da equação de **velocidade de fase** temos ω:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \rightarrow \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{5}$$

Dado a expressão (3) combinada com (4) e (5)

$$H = \frac{\vec{k} \times E}{\mu\omega} = \frac{k_0}{\mu_0\omega}\hat{a_z} \times E = \frac{k_0}{\mu_0\omega}[\hat{a_z} \times (e^{-j\pi(z-0,25)}\hat{a_x} - ae^{-j\pi(z-0,25b)}\hat{a_y})] \tag{6}$$

Consequentemente:

$$H = (e^{-j\pi(z-0,25)}\hat{a_y} - ae^{-j\pi(z-0,25b)}\hat{a_x})\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \tag{7}$$

Sabendo que a impedância da onda é definida como $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$, então:

$$H = (e^{-j\pi(z-0,25)}\hat{a_y} - ae^{-j\pi(z-0,25b)}\hat{a_x})\frac{1}{120\pi} \tag{8}$$

Logo, o campo instantâneo é a parte real do campo, ou seja, $\mathbb{R}\{\text{H}\}$:

$$\vec{H} = -\frac{a}{120\pi}cos[\omega t - \pi(z-0,25b)]\hat{a_x} + \frac{1}{120\pi}cos[\omega t - \pi(z-0,25)]\hat{a_y} \tag{9}$$

Substituindo os dados:

$$\vec{H} = -\frac{1}{60\pi}cos[\omega t - \pi(z-1,25)]\hat{a_x} + \frac{1}{120\pi}cos[\omega t - \pi(z-0,25)]\hat{a_y}$$

1.1.2 Polarização da Onda

Dado que a onda é plana, não haverá componente paralela a direção da propagação, de forma que para a análise é interessante rotacionar o eixo das coordenadas, buscando a coincidência dele com a direção de propagação.

$$\hat{E} = (E_{x0}\hat{a_x} + E_{y0}\hat{a_y})e^{-jkz} \tag{10}$$

Portanto $E_{x_0} = E_{x_0}e^{j\varphi_x}$ e $E_{y_0} = E_{y_0}e^{j\varphi_y}$, portanto:

$$\hat{E} = e^{j0,25\pi}\hat{a_x} + ae^{j0,25b\pi}\hat{a_y} \tag{11}$$

Com a expressão (11) é possível observar que é $E_{x_0} = 1$ e $E_{y_0} = a$. Além do mais, as fases iniciais de x e y são das por $\varphi_x = 0,25\pi$ e $\varphi_y = 0,25b\pi$, respectivamente.

Já no domínio do tempo:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{x0}cos(\omega t - k_z z + \varphi_x)\hat{a_x} + E_{y0}cos(\omega t - k_z z + \varphi_y)\hat{a_y} \tag{12}$$

Utilizando parâmetros de razão de intensidade entre as componentes do campo e de diferença entre as fases, respectivamente: $A = \frac{E_{y0}}{E_{x0}}$ e $\varphi = \varphi_y - \varphi x$.

$$A = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} = \frac{a}{1} = 2 \tag{13}$$

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = 1,25\pi - 0,25\pi = \pi \tag{14}$$

Observe que dado a fase φ em (14) é um múltiplo de $n\pi$, para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ cumprindo o parâmetro da polarização é linear.

1.1.3 Vetor de Poynting Instantâneo

Para calcular o vetor de Poynting, $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, devemos calcular o campo elétrico, extraindo $\mathrm{I\!R}\{\mathrm{Ee^{j\omega t}}\}$.

$$\hat{E} = cos[\omega t - \pi(z - 0,25)]\hat{a_x} + bcos[\omega t - \pi(z - 0,25b)]\hat{a_y} \tag{15}$$

Desenvolvendo o produto vetorial, tem-se

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{a_x} & \hat{a_y} & \hat{a_z} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a_x} & \hat{a_y} & \hat{a_z} \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = E_x H_y \hat{a_z} - E_y H_x \hat{a_z} \tag{16}$$

Substituindo pelas componentes descobertas, tem-se que:

$$\vec{P} = \frac{1}{120\pi} cos^2[\omega t - \pi(z - 0,25)]\hat{a_z} - \frac{a^2}{120\pi} cos^2[\omega t - \pi(z - 0,25b)]\hat{a_z} \tag{17}$$

Por fim, utilizando as constantes:

$$\vec{P} = \frac{1}{120\pi} cos^2[\omega t - \pi(z - 0,25)]\hat{az} - \frac{1}{30\pi} cos^2[\omega t - \pi(z - 1,25)]\hat{az}$$

1.1.4 Vetor de Poynting Médio

O vetor de Poynting médio é dado por:

$$\vec{P_m} = \frac{1}{2}\mathrm{I\!R}\{\mathrm{E} \times \mathrm{H}^*\}. \tag{18}$$

Onde o conjugado de H é:

$$H^* = -\frac{1}{60\pi} e^{j\pi(z-1,25)}\hat{a_x} + \frac{1}{120\pi} e^{j\pi(z-0,25)}\hat{a_y} \tag{19}$$

Observe que é possível escrever a equação em função dos conjugados que descrevem o campo elétrico.

$$H^* = -\frac{1}{60\pi} E_y^* \hat{a_x} + \frac{1}{120\pi} E_x^* \hat{a_y} \tag{20}$$

Então

$$E \times H^* = \frac{1}{120\pi}|E_x|^2 \hat{a_z} + \frac{1}{60\pi}|E_y|^2 \hat{a_z} \tag{21}$$

O cálculo do módulo dos campos será dado simplesmente por: $|E_x|^2 = 1^2 = 1$ e $|E_y|^2 = a^2 = 4$, logo:

$$\vec{P_m} = \frac{1}{2}\mathrm{I\!R}\ \{\frac{4}{120\pi} + \frac{1}{60\pi}\}\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{20\pi}\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z} \tag{22}$$

Por fim, o vetor Poynting Médio será

$$\vec{P_m} = \frac{1}{40\pi}\hat{a_z} \tag{23}$$

1.2 Questão 2

Uma onda eletromagnética plana uniforme harmônica no tempo na frequência f propaga na direção $z > 0$ através de um tecido biológico de parâmetros desconhecidos. O campo magnético da onda tem somente a componente x e a sua intensidade rms na origem do sistema de coordenadas é $H_0 = 25mA/m$. A amplitude da onde é reduzida em $3,25\ dB$ para cada centímetro percorrido, e o coeficiente de fase da onda chega a $\beta = 260\ rad/m$. Determine permissividade e a condutividade do tecido.

Solução:

Considerando o valor de $f = 3,1GHz$.

Assumindo um meio com perda, a expressão para onda plana é desenvolvida a partir das equações de Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\nabla\rho}{\epsilon} + \mu\frac{\partial \vec{J_1}}{\partial t} + \sigma\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} \tag{24}$$

É possível visualizar que a variação $e^{j\omega t}$ implica em $j\omega$ e $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$

Já assumindo um meio sem fontes, $\vec{J_1} = \rho = 0$ tendo como consequência

$$\nabla \vec{E} = \sigma\mu j\omega\vec{E} - \mu\epsilon(\omega)^2\vec{E}$$

Aplicando a mesma metodologia para $\vec{H}$, é dado:

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma\mu j\omega\vec{H} - \mu\epsilon(\omega)^2\vec{H}$$

Observe que o parâmetro de propagação $\gamma^2 = j\mu\sigma\omega - \mu\epsilon\omega^2$ está contido nestas equações. Este é parâmetro é complexo, então pode ser reescrito como $\gamma = \alpha + j\beta$, de modo que: $(\alpha + j\beta)^2 = j\mu\sigma\omega - \mu\epsilon\omega^2 \rightarrow \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2$

Dessa forma, é possível analisar as partes real e complexas separadamente

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\mu\epsilon\omega^2$$

$$2\alpha\beta = \mu\sigma\omega$$

Então, isolando os termos ϵ e σ:

$$\epsilon = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{-\mu\omega^2}$$

$$\sigma = \frac{2\alpha\beta}{\mu\omega}$$

Recorrendo a velocidade angular $\omega = 2\pi f$, dado que $f = 3,1GHz$, logo $\omega = 6,2\pi 10^9 rad/s$. Por fim,convertendo os valores da questão, obtém-se que: $1dB \rightarrow 0,11512925Np$, então $3,25\frac{dB}{cm} = 34,4075\frac{Np}{m}$

Assumindo por fim, que $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, a condutividade σ será:

$$\sigma = \frac{(2)(37,4075)(260)}{(4\pi 10^{-7})(6,2\pi 10^9)}$$

$$\sigma = 0,7947S/m$$

Já a permissividade ϵ será:

$$\epsilon = \frac{(37,4075)^2 - (260)^2}{-(4\pi 10^{-7})(6,2\pi 10^9)^2}$$

$$\epsilon = 148,2821pF/m$$

1.3 Questão 3

Uma onda eletromagnética plana uniforme harmônica no tempo na frequência f e intensidade de campo elétrico $E_i = 1\ V/m$ propaga no ar e incide normalmente na superfície planar de um grande bloco de concreto com parâmetros elétricos $\varepsilon_r = 6$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 2,5 \times 10^{-3}$. Determine: a) A classificação do bloco de concreto; b) A taxa de onda estacionária no ar; c) O vetor de Poynting médio no tempo no concreto; d) As porcentagens da potência incidente média no tempo que são refletidas a partir da interface e transmitidas no bloco de concreto.

Solução:

Considerando o valor de $f = 12,5GHz$

1.3.1 Classificação do Bloco de Concreto

Para obter a classificação do bloco de concreto, será utilizada a tangente de perdas relacionada com a razão entre a corrente de condução e a corrente de deslocamento. Sendo a velocidade angular $\omega = 2\pi f$ e $\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$

$$\omega = 2\pi(12,5)(10^9) \rightarrow 0,7854.10^{10} rad/s$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{2,5.10^{-3}}{(6.8,85.10^{-1})(2\pi 10^{10})} \rightarrow 5,9920.10^{-4}$$

Tendo em vista que o valor da tangente de perdas é muito menor que 0,01, o bloco pode ser considerado um meio dielétrico.

1.3.2 Taxa de Onda Estacionária no Ar

A TOE é definida como: $\frac{|E_{max}|}{|E_{min}|}$. Além dessa definição, é interessante relacionar o o coeficiente de reflexão com a TOE: $TOE = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$.

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{Z_1}{\sqrt{6}} = \frac{120\pi}{\sqrt{6}} = 153,9\Omega$$

Agora, substituindo Z_1 e Z_2 na expressão do coeficiente de reflexão, temos que: $\Gamma = \frac{49\pi - 120\pi}{120\pi + 49\pi} = -0,42$

Por fim, a TOE é:

$$TOE = \frac{1+0,42}{1-0,42} = 2,4483$$

1.3.3 Vetor de Poynting médio

Novamente, para calcular o vetor de Poynting Médio temos

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\mathbb{R}\{\mathrm{E} \times \mathrm{H}^*\}. \tag{25}$$

Observe que o conjugado de H é dado por: $H^* = \frac{TE_0}{Z_2}e^{-\alpha z + j\beta z}$, então

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2Z_2}|T|^2|E_0|^2 e^{-2\alpha z}\hat{a_z} \tag{26}$$

O coeficiente de transmissão é $T = \Gamma + 1 \rightarrow -0,42 + 2 = 0,58$

$$\vec{P}_m = \frac{(0,58)^2(1)^2}{(2)(49\pi)}\hat{a_z} \rightarrow 1,09264.10^{-3}e^{-2\alpha z}\hat{a_z}. \tag{27}$$

Por fim, temos que $\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}Z_2 \rightarrow 2\alpha = \sigma Z_2 = 49\pi.2,5.10^-3 = 0,38485$

Então a equação termina como:

$$\vec{P}_m = 1,09264.10^{-3}e^{-0,38485z}\hat{a_z}W/m^2$$

1.3.4 Porcentagem da Potência Incidente

Sendo Z_1 e Z_2 reais, é possível escrever:

$$\vec{P_m} = \frac{|E_0|^2}{2Z_1} e^{-2\alpha z} \hat{a_z}$$

$$\vec{P_{m_1}} = \frac{-|r|^2 E_0|^2}{2Z_1} e^{-2\alpha z} \hat{a_z}$$

$$\vec{P_{m_2}} = \frac{|T|^2 E_0|^2}{2Z_2} e^{-2\alpha z} \hat{a_z}$$

Portanto, a incidência percentual média no tempo será dada pela razão entre $\vec{P_{m_1}}$ e $\vec{P_m}$

$$\frac{\vec{P_{m_1}}}{\vec{P_m}} = \frac{2,33957.10^{-4}}{1,32629.10^{-3}} \rightarrow 17,64\%$$

Já a porcentagem da incidência média transmitida na interface é a razão entre $\vec{P_{m_2}}$ e $\vec{P_m}$:

$$\frac{\vec{P_{m_2}}}{\vec{P_m}} = \frac{1,0926474.10^{-3}}{1,32629.10^{-3}} \rightarrow 82,38\%$$

1.4 Questão 4

Uma onda eletromagnética plana na frequência f incide normalmente em um sistema de 3 meios caracterizados por ϵ_r^1, ϵ_r^2, ϵ_r^3, figura 2.40 da apostila. Projete a camada central (meio 2) com a menor espessura, para que não haja reflexão da onda incidente de volta ao meio 1. Gere o gráfico da potência refletida no meio 1 para a faixa de frequência 0,5f a 1,5f. Mostre no gráfico a faixa em que a potência refletida é metade da incidente, isto é, a faixa de queda de $3dB$ (caso não encontre aumente a faixa de frequência).

Solução:

Considerando o valor de $f = 3GHz$, $\epsilon_r^1 = 2$ e $\epsilon_r^3 = 4$

Primeiramente, para descobrir a permissividade do meio 2, a relação do coeficiente de reflexão entre os meios 2 e 3 é utilizada:

$$\Gamma = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{(-2\mu_2 d)}$$

Para não haver reflexão, como dito no enunciado, o coeficiente de reflexão é igual a zero, logo $Z_2 = Z_3$. Então, com a relação das impedâncias:

$$Z_2 = Z_3 \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_3}{\epsilon_3}}$$

.

Assumindo que a permeabilidade dos meios seja igual a do vácuo (μ_0), logo:

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_r^2}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r^3}} \rightarrow \epsilon_r^2 = \epsilon_r^3 = 4$$

Então, para calcular o número de onda no meio 2, temos que $k_2 = \dfrac{\omega}{\nu_P}$, desenvolvendo as variáveis:

$$\nu_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r^2 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r^2}}$$

Aplicando as relações obtidas:

$$k_2 = \frac{2f\pi\sqrt{\epsilon_r^2}}{c}$$

Combinando as equações dispostas anteriormente e com a relação entre o comprimento de onda e k_2 temos:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi c}{2f\pi\sqrt{\epsilon_r^2}} \rightarrow \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r^2}}$$

Com o que foi posto anteriormente, é possível calcular a menor espessura do meio 2 para que a reflexão da onda incidente para o meio 1 seja evitada:

$$d = \frac{n\lambda_2}{4}$$

O menor valor para n, diferente de zero, seria 2, logo $d = \dfrac{\lambda_2}{2}$.

$$d = \frac{3.10^8}{(2)(3.10^9)(\sqrt{4})} \rightarrow 0,0250m$$

A distância é de 25mm.

1.5 Questão 5

Uma onda plana na frequência f propaga no ar e incide num ângulo de θ_i sobre o mar ($\epsilon = 80\epsilon_0$, $\sigma = 3S/m$). Calcular: a) as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas (E_r, H_r, E_t, H_t) considerando que $E_i = 500uV/m$ e a sua polarização é paralela; b) o ângulo de transmissão.

Solução:

Considerando o valor de $f = 240KHz$ e $\theta_i = 45^o$

1.5.1 Ângulo de Transmissão

É mais interessante neste problema definir primeiro o ãngulo de transmissão e isto pode ser feito com a Lei de Snell:

$$\frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_t)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}$$

Resultando em:

$$\theta_t = arcsen\left(\frac{sen(\theta_i)\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{|\gamma|}\right)$$

Visto que $\gamma = \alpha + j\beta$, é necessário encontrar os dois coeficiente. Isso será possível observando a a tangente das perdas, verificando a classificação do meio.

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{3}{2\pi(240.10^3)(80\epsilon_0)} = 2808,6$$

Observe que o a tangente das perda é muito maior que um, logo o mar é um bom condutor, então serão utilizados os parâmetros para bons condutores:

Para α:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi(240.10^3)(4\pi10^{-7})3}{2}} = \sqrt{\frac{5.6849}{2}} = 1,6860$$

Para β:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi(240.10^3)(4\pi10^{-7})3}{2}} = \sqrt{\frac{5.6849}{2}} = 1,6860$$

Como a premissa era que γ fosse complexo, consequentemente:

$$|\gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2,3844$$

$$\theta_t = arcsen\left(\frac{sen(45^o)2\pi(240.10^3)\sqrt{(4\pi10^{-7})(8,85.10^{-12})}}{2,3844}\right)$$

Por fim o ângulo $\theta_t \approx 0^o$.

1.5.2 Amplitudes

Observe que a polarização é paralela, logo o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão serão definidos como:

$$\Gamma_{||} = \frac{-Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}{Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}$$

$$T_{||} = \frac{2Z_2 cos(\theta_i)}{Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}$$

Então, seja $Z_1 = 120\Omega$, a impedância Z_2 do mar é:

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}(1+j) = \frac{\sqrt{2\pi(240.10^3)(4\pi 10^{-7})}}{\sqrt{3}}(1+j)$$

Então $Z_2 = 0,7948 + j0,7948$.
Com isso é possível calcular os coeficientes:

$$\Gamma_{||} = \frac{-Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}{Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}$$

$$\Gamma_{||} = \frac{-120\pi cos(45^o) + (0,7948 + j0,7948)cos(0^o)}{120\pi cos(45^o) + (0,7948 + j0,7948)cos(0^o)}$$

Fazendo manipulações utilizando a relação Euler obtém-se que:

$$\Gamma_{||} = 0,9941e^{-j0,3417^o}$$

O mesmo se aplica pra esse caso:

$$T_{||} = \frac{2Z_2 cos(\theta_i)}{Z_1 cos(\theta_i) + Z_2 cos(\theta_t)}$$

$$T_{||} = \frac{2(0,7948 + j0,7948)cos(45^o)}{120\pi cos(45^o) + (0,7948 + j0,7948)cos(0^o)}$$

$$T_{||} = 5,95.10^{-3}e^{j44,8^o}$$

Por fim, é possível calcular E_Γ e H_Γ:

$$E_\Gamma = |\Gamma_{||}|\ |E_i| \rightarrow E_\Gamma = 0,9941.500\mu = 497,05\mu V/m$$

$$H_\Gamma = \frac{|E_\Gamma|}{Z_1} \rightarrow H_\Gamma = \frac{497,05\mu}{120\pi} = 1,3183\mu A/m$$

Calculando também

$$E_T = |T_{||}|\ |E_i| \rightarrow 5,95.10^{-3}.500\mu = 2,975\mu V/m$$

$$H_T = \frac{|E_T|}{Z_2} \rightarrow H_T = \frac{2,975\mu}{1,124} = 2,647\mu A/m$$

1.6 Questão 6

Projete a antena triangular equilátera mostrada na figura para recepção ótima de uma onda plana $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\vec{a}_x e^{-jk_0 z} V/m$ na frequência f. Faça um gráfico da fem em induzida em função da frequência mostrando a faixa em que a fem cai para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de seu valor máximo. Repita a análise considerando que a onda propaga na direção perpendicular ao lado assinalado b e polarização paralela ao lado. Calcule a razão perímetro/λ.

Solução:

Considerando o valor de $f = 1,8GHz$

$$Fem = \int_0^{\frac{\sqrt{3}b}{2}} |E_0|cos(\omega t - kz_1)dx + \int_{\frac{\sqrt{3}b}{2}}^0 |E_0|cos(\omega t - kz_2)dx$$

Observe que todos independem de x, logo saem da integral:

$$Fem = |E_0|cos(\omega t - kz_1)\int_0^{\frac{\sqrt{3}b}{2}} dx + |E_0|cos(\omega t - kz_2)\int_{\frac{\sqrt{3}b}{2}}^0 dx$$

Aplicando os limites da integração

$$fem = \frac{\sqrt{3}b}{2}|E_0|\ [cos(\omega t - kz_1) - cos(\omega t - kz_1)]$$

Pela geometria do problema é possível observar que $z_2 = z_1 + b$

$$fem = \frac{\sqrt{3}b}{2}|E_0|\ [cos(\omega t - kz_1) - cos(\omega t - kz_1 - kb)]$$

Definindo que $\phi = \omega t - kz_1$, podemos rescrever de modo que:

$$fem = \frac{\sqrt{3}b}{2}|E_0|\ [cos(\phi) - cos(\phi - kb)]$$

Utilizando transformações trigonométricas

$$cos(\phi) - cos(\phi - kb) = -2sen\left(\frac{2\phi - kb}{2}\right)sen\left(\frac{kb}{2}\right)$$

Resultando na equação:

$$fem = \frac{\sqrt{3}b}{2}|E_0| \left[-2sen\left(\frac{2\phi - kb}{2}\right) sen\left(\frac{kb}{2}\right)\right]$$

$$fem = \sqrt{3}b|E_0| \left[-\underbrace{sen\left(\phi - k\frac{b}{2}\right)}\underbrace{sen\left(k\frac{b}{2}\right)}\right]$$

Observe que há dois termos sublinhados, o primeiro é responsável pela variação no tempo. Já o segundo será o responsável por alcançar a máxima amplitude sinal, então no caso da antena ter a maior Fem possível quando:

$$sen\left(k\frac{b}{2}\right) = +1$$

E isto vai ocorrer quando $k\frac{b}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, ou seja, $b = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

Logo, b deve ser um múltiplo ímpar de $\frac{\lambda}{2}$.

Assumindo $n = 0 \rightarrow b = \frac{\lambda}{2}$

Sabendo que temos a frequência f e assumindo que essa onda se propaga com a mesma velocidade que no vácuo, teremos:

$$b = \frac{c}{2f} \rightarrow \frac{3.10^8}{2(1,8.10^9)} \approx 8,3cm$$

Então, o tamanho ideal da lateral da antena para máximo aproveitamento da Fem seria cerca de 8,3 cm.

Sendo o Perímetro $\Delta = 3b$,

$$3b = (2n+1)\frac{3\lambda}{2}$$

Já a razão perímetro/λ será:

$$\frac{\Delta}{\lambda} = (2n+1)\frac{3}{2}$$

Referências

[1] Sérgio Antenor de Carvalho. *Equações de Maxwell*, (2014).

[2] Sérgio Antenor de Carvalho. *Guias e Ondas*, (2012).

[3] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*, 3ª ed Bookman (2012).

[4] Sérgio Antenor de Carvalho. *Eletromagnetismo Computacional*, (2012).