



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA**  
**SEMESTRE 2024.1**

**Guias de Onda - Retangulares e Cilíndricos**

**ALUNO:** Abraão de Carvalho Albuquerque

**MATRÍCULA:** 538286

**CURSO:** Engenharia de Telecomunicações

**PROFESSOR:** Sergio Antenor de Carvalho

**DISCIPLINA:** Guias e Ondas

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais</b>	<b>4</b>
2.1	Ondas Eletromagnéticas . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Equações de Maxwell</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Modos de Propagação em Guias de Ondas</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Guias de Ondas Retangulares</b>	<b>7</b>
5.1	Teoria dos Guias de Ondas Retangulares . . . . .	7
5.2	Modos TE (Transversal Elétrico) . . . . .	7
5.3	Modos TM (Transversal Magnético) . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Análise Matemática dos Modos</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Exemplo de Cálculo para Guia de Onda Retangular</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Guias de Ondas Cilíndricos</b>	<b>9</b>
8.1	Teoria dos Guias de Ondas Cilíndricos . . . . .	9
<b>9</b>	<b>Modos TE (Transversal Elétrico)</b>	<b>9</b>
<b>10</b>	<b>Modos TM (Transversal Magnético)</b>	<b>10</b>
<b>11</b>	<b>Análise Matemática dos Modos</b>	<b>10</b>
<b>12</b>	<b>Exemplo de Cálculo para Guia de Onda Cilíndrico</b>	<b>11</b>
<b>13</b>	<b>Conclusão</b>	<b>11</b>
<b>14</b>	<b>Exemplos Guias de Ondas Retangulares</b>	<b>11</b>
14.1	Exemplo 1 . . . . .	11
14.2	Exemplo 2 . . . . .	13
14.2.1	Constantes de Propagação . . . . .	16
14.2.2	Coeficiente de Reflexão . . . . .	16

<b>15 Ejemplos Guías de Ondas Cilíndricas</b>	<b>18</b>
15.1 Ejemplo 1 . . . . .	18
15.2 Ejemplo 2 . . . . .	22
<b>16 Códigos</b>	<b>25</b>
16.1 Guías de Ondas Rectangulares - Ejemplo 1 . . . . .	25
16.2 Guías de Ondas Rectangulares - Ejemplo 2 . . . . .	26
16.3 Guías de Ondas Cilíndricas - Ejemplo 1 . . . . .	28
16.4 Guías de Ondas Cilíndricas - Ejemplo 2 . . . . .	30

# 1 Introdução

Guias de onda são estruturas físicas projetadas para conduzir a propagação de ondas eletromagnéticas de alta frequência em um meio confinado, minimizando as perdas de energia e distorções. Eles são amplamente utilizados em sistemas de telecomunicações, radares, micro-ondas e outras aplicações de alta frequência. O estudo dos guias de onda é fundamental para a compreensão de como ondas eletromagnéticas se comportam em ambientes confinados e como elas interagem com os materiais ao redor.

Guias de onda podem ser de diferentes formas e materiais, dependendo da aplicação. Os tipos mais comuns incluem guias de onda retangulares e cilíndricos, cada um com características específicas que influenciam o modo de propagação das ondas. Essas estruturas fornecem um meio eficiente para direcionar e controlar a propagação de energia eletromagnética, evitando a dispersão e a perda de sinal.

Para compreender a teoria dos guias de onda, é essencial ter um sólido entendimento dos conceitos de ondas eletromagnéticas, descritos pelas equações de Maxwell. Estas equações fornecem a base matemática para descrever a evolução dos campos elétricos e magnéticos no espaço e no tempo, e são fundamentais para derivar as características dos modos de propagação em guias de onda.

## 2 Conceitos Fundamentais

Antes de entrarmos nos detalhes específicos dos guias de onda, é importante revisar alguns conceitos fundamentais de eletromagnetismo que são a base para a teoria dos guias de onda.

### 2.1 Ondas Eletromagnéticas

Ondas eletromagnéticas são oscilações de campos elétricos e magnéticos que se propagam pelo espaço. No vácuo, essas ondas viajam com a velocidade da luz,  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Em um meio material, a velocidade de propagação é menor, dependendo das propriedades do meio, como a permissividade elétrica ( $\epsilon$ ) e a permeabilidade magnética ( $\mu$ ). A equação

da onda eletromagnética é dada por:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  representam os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. Essas equações descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas em meios lineares e homogêneos, onde não há cargas ou correntes livres.

### 3 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações diferenciais que descrevem como os campos elétrico e magnético se originam e se comportam em resposta a cargas e correntes. Elas são fundamentais para o estudo da propagação das ondas eletromagnéticas e são expressas na forma diferencial como:

- **Lei de Gauss para o campo elétrico:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Essa equação indica que o fluxo elétrico divergente de um ponto é proporcional à densidade de carga elétrica no local.

- **Lei de Gauss para o campo magnético:**

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Indica que não existem monopolos magnéticos e que o fluxo magnético total através de qualquer superfície fechada é zero.

- **Lei de Faraday:**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Mostra que um campo elétrico é gerado por uma variação temporal de um campo magnético.

- **Lei de Ampère-Maxwell:**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Relaciona o campo magnético a uma corrente elétrica e à variação temporal do campo elétrico.

Estas equações são a base para o desenvolvimento dos modos de propagação em guias de onda e nos ajudam a entender como a energia eletromagnética se propaga e interage com as fronteiras das guias de onda.

## 4 Modos de Propagação em Guias de Ondas

Em um guia de onda, as ondas eletromagnéticas podem se propagar em diferentes modos, dependendo da frequência de operação e das características geométricas do guia. Os modos mais comuns são:

- **Modo Transversal Eletromagnético (TEM):** Neste modo, tanto o campo elétrico quanto o campo magnético são perpendiculares à direção de propagação. O modo TEM só pode existir em estruturas com mais de um condutor, como cabos coaxiais.
- **Modo Transversal Elétrico (TE):** No modo TE, a componente longitudinal do campo elétrico (na direção de propagação) é nula. A energia é transmitida principalmente pelos campos elétricos e magnéticos transversais. Este é o modo mais comum em guias de ondas retangulares.
- **Modo Transversal Magnético (TM):** No modo TM, a componente longitudinal do campo magnético é nula. A energia é transmitida principalmente pelos campos elétricos longitudinais e pelos campos magnéticos transversais. Este modo também é suportado por guias de ondas retangulares e cilíndricos.

Cada um desses modos tem uma configuração de campo específica que depende das dimensões do guia de onda e das condições de contorno nas paredes do guia. A análise matemática desses modos é essencial para determinar as frequências de corte e as características de propagação das ondas em guias de onda.

## 5 Guias de Ondas Retangulares

### 5.1 Teoria dos Guias de Ondas Retangulares

Guias de ondas retangulares são uma das formas mais simples e comuns de guias de onda. Eles consistem em um condutor metálico com uma seção transversal retangular. A estrutura do guia impõe condições de contorno que limitam as frequências e modos de propagação das ondas eletromagnéticas. Abaixo da frequência de corte, as ondas não podem se propagar e sofrem atenuação exponencial.

A solução das equações de Maxwell em guias retangulares é obtida assumindo-se que os campos variam harmonicamente no tempo e na direção de propagação, resultando em equações diferenciais parciais que podem ser resolvidas por métodos como separação de variáveis. A solução dessas equações nos dá os modos TE e TM permitidos no guia.

### 5.2 Modos TE (Transversal Elétrico)

Nos modos TE, a componente do campo elétrico na direção de propagação,  $E_z$ , é nula. O campo magnético, no entanto, possui uma componente longitudinal,  $H_z$ , que é dada por:

$$H_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

onde  $m$  e  $n$  são números inteiros que definem o modo específico de propagação,  $a$  e  $b$  são as dimensões do guia, e  $\beta$  é a constante de propagação ao longo da direção  $z$ .

As frequências de corte para os modos TE são dadas por:

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Somente acima dessa frequência o modo  $TE_{mn}$  pode se propagar no guia.

### 5.3 Modos TM (Transversal Magnético)

Nos modos TM, a componente do campo magnético na direção de propagação,  $H_z$ , é nula. O campo elétrico longitudinal é dado por:

$$E_z(x, y, z) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Esses modos são caracterizados por ter campos elétricos longitudinais, e a frequência de corte é dada pela mesma expressão dos modos TE.

## 6 Análise Matemática dos Modos

Para cada modo de propagação, podemos obter as componentes transversais dos campos elétrico e magnético a partir das equações diferenciais de Maxwell reduzidas. As equações de Helmholtz resultantes para as componentes longitudinais dos campos elétricos e magnéticos são resolvidas com as seguintes condições de contorno:

1. Nas paredes metálicas do guia, a componente tangencial do campo elétrico deve ser nula.
2. A componente normal do campo magnético também deve ser nula nas paredes do guia.

Essas condições permitem determinar os coeficientes de propagação e as distribuições de campo para cada modo. A análise desses modos é essencial para projetar guias de onda eficientes que suportem as frequências desejadas com o mínimo de perda de sinal.

## 7 Exemplo de Cálculo para Guia de Onda Retangular

Considere um guia de onda retangular com dimensões  $a = 5$  cm e  $b = 2$  cm, operando a uma frequência de 10 GHz. Vamos calcular a frequência de corte e a impedância característica para o modo TE<sub>10</sub>.

1. \*\*Frequência de Corte:\*\*

$$f_{c_{TE10}} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0.05} = 3 \text{ GHz}$$



2. **\*\*Impedância Característica:\*\*** Assumindo uma frequência de operação  $f = 6$  GHz ( $f > f_c$ ), temos:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Substituindo os valores:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi \times 6 \times 10^9}{3 \times 10^8}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{0.05}\right)^2}$$

$$\beta \approx 157.08 \text{ rad/m}$$

E a impedância característica:

$$Z_{TE} = \frac{2\pi \times 6 \times 10^9 \times 377}{157.08} \approx 14400\Omega$$

## 8 Guias de Ondas Cilíndricos

### 8.1 Teoria dos Guias de Ondas Cilíndricos

Guias de ondas cilíndricos possuem uma seção transversal circular e são usados em aplicações que exigem simetria radial, como em sistemas de antenas e cavidades ressonantes. Diferentemente dos guias retangulares, a análise dos modos de propagação em guias cilíndricos envolve o uso de funções de Bessel, que descrevem as distribuições de campo elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas.

As equações diferenciais que governam os campos eletromagnéticos nos guias cilíndricos são derivadas das equações de Maxwell. Usando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , podemos expressar os campos elétrico e magnético em termos das funções de Bessel de primeira espécie,  $J_n(k_c \rho)$ .

## 9 Modos TE (Transversal Elétrico)

Nos modos TE em guias cilíndricos, a componente do campo elétrico ao longo da direção de propagação ( $E_z$ ) é nula. A equação diferencial para o campo magnético longitudinal é dada por:

$$H_z(\rho, \phi, z) = H_0 J_n(k_c \rho) \cos(n\phi) e^{-j\beta z}$$

onde  $J_n$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $n$ ,  $k_c$  é o número de onda de corte e  $\beta$  é a constante de propagação.

## 10 Modos TM (Transversal Magnético)

Nos modos TM, a componente longitudinal do campo magnético ( $H_z$ ) é nula. A equação diferencial para o campo elétrico longitudinal é dada por:

$$E_z(\rho, \phi, z) = E_0 J_n(k_c \rho) \cos(n\phi) e^{-j\beta z}$$

Esses modos são caracterizados por campos elétricos longitudinais e campos magnéticos transversais.

## 11 Análise Matemática dos Modos

Assim como nos guias retangulares, as condições de contorno nas paredes do guia cilíndrico determinam os modos permitidos. As funções de Bessel,  $J_n(k_c \rho)$ , devem se anular nas paredes do guia para garantir que as componentes tangenciais do campo elétrico sejam nulas. Isso resulta em frequências de corte que dependem dos zeros das funções de Bessel, conhecidos como  $x_{n,m}$ .

A frequência de corte para um modo TM ou TE específico é dada por:

$$f_c = \frac{v_p}{2\pi a} \cdot x_{n,m}$$

onde  $v_p$  é a velocidade de propagação da onda, e  $a$  é o raio do guia cilíndrico.

## 12 Exemplo de Cálculo para Guia de Onda Cilíndrico

Considere um guia cilíndrico com raio  $a = 3$  cm, operando a uma frequência de 15 GHz. Calcule a frequência de corte para o modo TE<sub>11</sub> e a constante de propagação.

1. **Frequência de Corte:** O primeiro zero da função de Bessel de ordem 1 ( $J_1$ ) é  $x_{11} \approx 2.405$ . A frequência de corte é dada por:

$$f_{c_{TE_{11}}} = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2.405 = \frac{3 \times 10^8}{2\pi \times 0.03} \times 2.405 \approx 3.82 \text{ GHz}$$

2. **Constante de Propagação:** Assumindo uma frequência de operação  $f = 15$  GHz ( $f > f_c$ ), temos:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{2.405}{a}\right)^2}$$

Substituindo os valores:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi \times 15 \times 10^9}{3 \times 10^8}\right)^2 - \left(\frac{2.405}{0.03}\right)^2}$$
$$\beta \approx 314.16 \text{ rad/m}$$

## 13 Conclusão

Guias de ondas retangulares e cilíndricos são essenciais para a transmissão eficiente de sinais de alta frequência. A análise teórica e prática dos modos de propagação, das frequências de corte e da impedância característica permite o projeto de sistemas de telecomunicações com baixo nível de perda e alta precisão. A compreensão dessas estruturas e dos fenômenos associados a elas é fundamental para o desenvolvimento de tecnologias avançadas em telecomunicações e radares.

## 14 Exemplos Guias de Ondas Retangulares

### 14.1 Exemplo 1

Para analisar o comportamento de um guia de onda retangular, calculamos a frequência de corte para diferentes modos de propagação. O guia de onda tem dimensões de largura

$a = 5 \times 10^{-2}$  m e altura  $b = 2 \times 10^{-2}$  m. A frequência de corte é um parâmetro crítico, pois indica a menor frequência na qual um modo específico pode se propagar. Abaixo dessa frequência, o modo será atenuado e não propagará.

A frequência de corte para um modo  $TE_{mn}$  é dada pela equação:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (1)$$

onde:

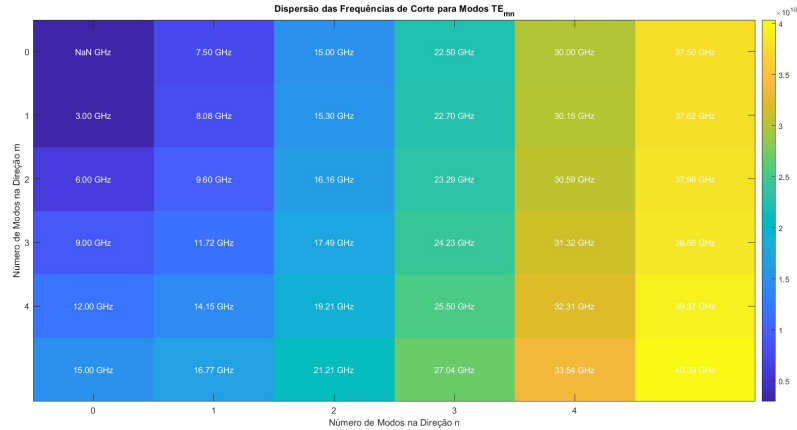
- $c = 3 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz no vácuo.
- $m$  e  $n$  são os números inteiros que representam os modos na direção  $x$  e  $y$ .
- $a$  e  $b$  são as dimensões do guia de onda.

O código MATLAB realiza o seguinte procedimento:

- Inicializa os parâmetros do guia de onda, incluindo suas dimensões e a velocidade da luz no vácuo.
- Define o número máximo de modos a serem calculados nas direções  $m$  e  $n$ .
- Cria uma matriz para armazenar as frequências de corte calculadas para cada combinação de modos.
- Usa um loop duplo para calcular a frequência de corte para cada par  $(m, n)$ , utilizando a Eq. (11).
- Para o caso  $m = 0$  e  $n = 0$ , define a frequência de corte como NaN (Not a Number), pois o modo TEM não é suportado em guias de onda retangulares.
- Plota um gráfico de dispersão das frequências de corte, com os eixos representando os modos  $m$  e  $n$ .
- Adiciona ao gráfico os valores das frequências de corte calculadas, para facilitar a visualização e interpretação.

O gráfico resultante é um mapa de cores que mostra as frequências de corte para diferentes modos. As cores indicam a magnitude da frequência de corte, com tons mais escuros representando frequências mais baixas e tons mais claros indicando frequências mais altas, que está referenciado na Fig. 1.

Figura 1



Fonte: Autor

A Fig. 1 mostra a dispersão das frequências de corte para os modos  $TE_{mn}$  de um guia de onda retangular com largura  $a = 0,05$  m e altura  $b = 0,02$  m.

O gráfico mostra que os modos de ordem superior requerem frequências de operação cada vez maiores para serem propagantes, o que pode limitar o uso desses modos em aplicações práticas. Em geral, para guias de ondas, utilizam-se modos de ordem inferior, como  $TE_{10}$ , para minimizar a frequência de operação e facilitar a propagação do sinal.

Esse tipo de análise é crucial no design de sistemas de micro-ondas e telecomunicações, pois ajuda a determinar quais modos são adequados para uma determinada aplicação, garantindo eficiência e minimizando perdas de sinal.

## 14.2 Exemplo 2

Neste projeto, analisamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um guia de onda retangular, considerando duas seções com dimensões diferentes. A mudança de dimensões resulta em uma descontinuidade que gera reflexão e transmissão parciais da onda. O

objetivo é calcular e visualizar a distribuição do campo elétrico e magnético, bem como determinar o coeficiente de reflexão na junção entre as duas seções.

As dimensões das duas seções do guia de onda são:

- **Seção 1:** Largura  $a_1 = 5 \times 10^{-2}$  m e altura  $b_1 = 2 \times 10^{-2}$  m.
- **Seção 2:** Largura  $a_2 = 4 \times 10^{-2}$  m e altura  $b_2 = 1,5 \times 10^{-2}$  m.
- A frequência de operação é  $f = 10$  GHz.

A frequência de corte para um modo  $TE_{mn}$  é dada pela equação:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (2)$$

onde:

- $c = 3 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz no vácuo.
- $m$  e  $n$  são os números inteiros que representam os modos na direção  $x$  e  $y$ .
- $a$  e  $b$  são as dimensões do guia de onda.

Calculamos as frequências de corte para as duas seções utilizando a Eq. (11):

- Para a **Seção 1** ( $TE_{10}$ ):  $m = 1$  e  $n = 0$ , temos:

$$f_{c1} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0,05} = 3,00 \text{ GHz}$$

- Para a **Seção 2** ( $TE_{10}$ ):  $m = 1$  e  $n = 0$ , temos:

$$f_{c2} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0,04} = 3,75 \text{ GHz}$$

Como a frequência de operação é  $f = 10$  GHz, ela está acima das frequências de corte de ambas as seções, permitindo a propagação do modo  $TE_{10}$ .

A constante de propagação  $\beta$  determina a taxa de variação da fase da onda ao longo da direção de propagação  $z$ . Ela é dada por:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad (3)$$

onde:

- $k = \frac{2\pi f}{c}$  é o número de onda no vácuo.
- $\frac{m\pi}{a}$  é o número de onda de corte.

Calculamos  $\beta$  para ambas as seções:

- Para a **Seção 1**:

$$k = \frac{2\pi \times 10 \times 10^9}{3 \times 10^8} \approx 209,44 \text{ rad/m}$$

$$\beta_1 = \sqrt{209,44^2 - \left(\frac{\pi}{0,05}\right)^2} \approx 199,79 \text{ rad/m}$$

- Para a **Seção 2**:

$$\beta_2 = \sqrt{209,44^2 - \left(\frac{\pi}{0,04}\right)^2} \approx 194,16 \text{ rad/m}$$

O coeficiente de reflexão na junção entre as duas seções é calculado usando a relação entre as impedâncias das duas seções. A impedância característica de um guia de onda é dada por:

$$Z = \frac{k}{\beta} \times 377 \quad (4)$$

onde  $377 \Omega$  é a impedância intrínseca do meio (vácuo).

Calculamos as impedâncias para as duas seções:

- Para a **Seção 1**:

$$Z_1 = \frac{209,44}{199,79} \times 377 \approx 395,12 \Omega$$

- Para a **Seção 2**:

$$Z_2 = \frac{209,44}{194,16} \times 377 \approx 407,59 \Omega$$

O coeficiente de reflexão  $\Gamma$  é então calculado como:

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \approx \frac{407,59 - 395,12}{407,59 + 395,12} \approx 0,01 \quad (5)$$

O coeficiente de transmissão  $T$  é dado por:

$$T = 1 + \Gamma \approx 1 + 0,01 = 1,01 \quad (6)$$

As frequências de corte calculadas indicam que o modo  $TE_{10}$  é propagante nas duas seções para a frequência de operação de 10 GHz, pois  $f = 10$  GHz é maior que as frequências de corte de ambas as seções. Isso significa que a onda eletromagnética pode se propagar sem atenuação nas duas seções do guia de onda.

#### 14.2.1 Constantes de Propagação

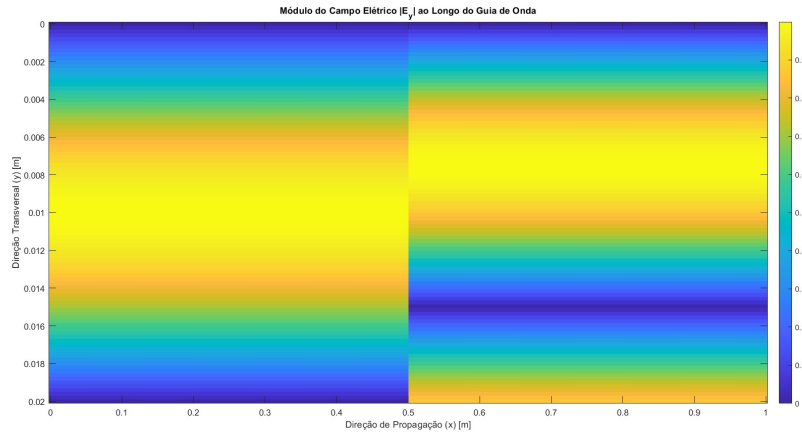
As constantes de propagação  $\beta_1 = 199,79$  rad/m e  $\beta_2 = 194,16$  rad/m indicam que a fase da onda varia ligeiramente mais lentamente na Seção 2 do que na Seção 1. Isso é esperado, pois a Seção 2 é mais estreita, o que resulta em uma constante de propagação menor.

#### 14.2.2 Coeficiente de Reflexão

O coeficiente de reflexão  $\Gamma = 0,01$  indica que apenas 1% da onda incidente é refletida na junção entre as duas seções. Isso significa que a descontinuidade é pequena e a maior parte da onda é transmitida. O coeficiente de transmissão  $T = 1,01$  confirma que quase toda a onda é transmitida para a Seção 2.



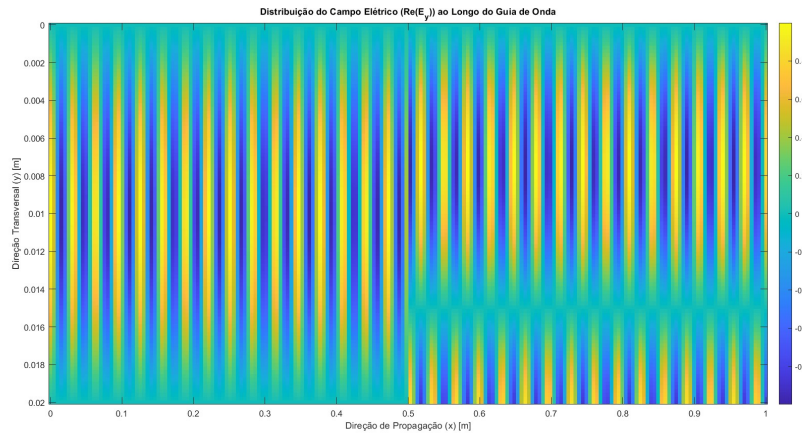
Figura 2



Fonte: Autor

A Fig. 2 mostra o módulo do campo elétrico  $|E_y|$  ao longo do guia de onda. Podemos observar que a amplitude do campo elétrico é quase constante em ambas as seções, com uma ligeira mudança na junção em  $x = 0,5$  m. Isso está de acordo com o pequeno coeficiente de reflexão calculado. A descontinuidade não resulta em uma grande alteração na amplitude, pois a maior parte da energia é transmitida.

Figura 3



Fonte: Autor

A Fig. 3 mostra a distribuição do campo elétrico  $\text{Re}(E_y)$  ao longo do guia de onda. Podemos ver as oscilações características da propagação do modo  $\text{TE}_{10}$  na Seção 1 e na Seção 2. As oscilações têm uma menor frequência espacial na Seção 2, refletindo a menor

constante de propagação  $\beta_2$ . A transição suave na junção mostra que a onda é transmitida com mínima reflexão.

A análise teórica e a simulação mostram que a onda se propaga com eficiência através das duas seções do guia de onda. A descontinuidade introduzida pela mudança nas dimensões do guia resulta em um pequeno coeficiente de reflexão, indicando que a maior parte da energia é transmitida para a segunda seção. Esse tipo de análise é essencial para o design de sistemas de micro-ondas e telecomunicações que utilizam guias de ondas com diferentes dimensões.

## 15 Exemplos Guias de Ondas Cilíndricos

### 15.1 Exemplo 1

Neste projeto, simulamos a propagação do modo  $TE_{11}$  em um guia de onda cilíndrico. A análise foi realizada para calcular a distribuição do campo magnético longitudinal  $H_z$  e do campo elétrico transversal  $E_\phi$  dentro do guia. Os parâmetros utilizados na simulação são:

- Raio do guia de onda:  $a = 0,05$  m.
- Frequência de operação:  $f = 15$  GHz.
- Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \times 10^8$  m/s.
- Permeabilidade do vácuo:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m.
- Permissividade do vácuo:  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$  F/m.

A frequência de corte para o modo  $TE_{11}$  é calculada utilizando o primeiro zero da função de Bessel de ordem 1 ( $J_1$ ). Para o modo  $TE_{11}$ , o primeiro zero é  $x_{11} = 1,841$ . A frequência de corte é dada por:

$$f_c = \frac{x_{mn} \cdot c}{2\pi a} \quad (7)$$

Substituindo os valores:

$$f_c = \frac{1,841 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 0,05} \approx 5,86 \text{ GHz}$$

Como a frequência de operação é  $f = 15 \text{ GHz}$ , que é maior que a frequência de corte calculada, o modo  $\text{TE}_{11}$  é propagante no guia de onda.

A constante de propagação  $\beta$  determina a taxa de variação da fase da onda ao longo da direção de propagação  $z$ . Ela é calculada como:

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (8)$$

onde:

- $k = \frac{2\pi f}{c}$  é o número de onda no vácuo.
- $k_c = \frac{x_{mn}}{a}$  é o número de onda de corte.

Calculando  $k$  e  $k_c$ :

$$k = \frac{2\pi \times 15 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 314,16 \text{ rad/m}$$

$$k_c = \frac{1,841}{0,05} = 36,82 \text{ rad/m}$$

Finalmente, a constante de propagação  $\beta$  é dada por:

$$\beta = \sqrt{314,16^2 - 36,82^2} \approx 311,94 \text{ rad/m}$$

O campo magnético longitudinal para o modo  $\text{TE}_{11}$  é dado por:

$$H_z(r, \phi, z) = H_0 \cdot J_1(k_c \cdot r) \cdot \cos(\phi) \cdot e^{-j\beta z} \quad (9)$$

onde:

- $H_0$  é a amplitude do campo magnético.
- $J_1$  é a função de Bessel de primeira ordem.
- $k_c$  é o número de onda de corte.
- $\beta$  é a constante de propagação.

O campo elétrico transversal para o modo  $TE_{11}$  é dado por:

$$E_\phi(r, \phi, z) = -\frac{H_0 \cdot \beta}{\omega \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\partial J_1(k_c \cdot r)}{\partial r} \cdot \sin(\phi) \cdot e^{-j\beta z} \quad (10)$$

onde:

- $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular.
- $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo.
- $\frac{\partial J_1(k_c \cdot r)}{\partial r}$  é a derivada da função de Bessel de primeira ordem.

A seguir, interpretamos as imagens geradas com base nas equações acima.

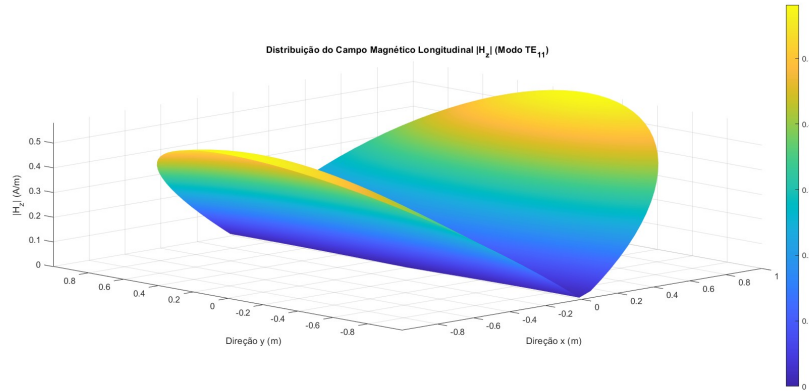


Figura 4: Distribuição do Campo Magnético Longitudinal  $|H_z|$  (Modo  $TE_{11}$ )

A Fig. 4 mostra a distribuição do campo magnético longitudinal  $|H_z|$  no modo  $TE_{11}$  ao longo do guia de onda cilíndrico. Observa-se que o campo é máximo no centro do guia (  $r = 0$  ) e diminui em direção às paredes do guia. Isso é consistente com o comportamento

da função de Bessel de primeira ordem  $J_1$ , que descreve a variação radial do campo magnético no modo  $TE_{11}$ .

A forma simétrica do campo, com um máximo central e diminuição suave até as paredes, é uma característica típica dos modos TE em guias de onda cilíndricos. A variação ao longo do eixo longitudinal  $z$  não está representada na figura, pois estamos visualizando apenas o módulo do campo no plano transversal.

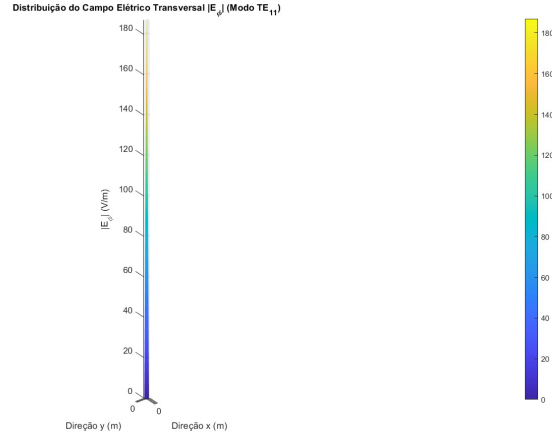


Figura 5: Distribuição do Campo Elétrico Transversal  $|E_\phi|$  (Modo  $TE_{11}$ )

A Fig. 5 mostra a distribuição do campo elétrico transversal  $|E_\phi|$  para o modo  $TE_{11}$ . Observa-se que o campo elétrico é máximo próximo às paredes do guia e mínimo no centro. Essa distribuição é explicada pela derivada da função de Bessel de primeira ordem, que atinge valores mais altos nas regiões próximas às paredes.

O campo elétrico transversal apresenta simetria com relação ao eixo  $z$  e varia periodicamente com o ângulo  $\phi$ , alternando entre máximos e mínimos. Isso reflete a dependência angular  $\sin(\phi)$ , característica do modo  $TE_{11}$ , onde o campo magnético é máximo na direção  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$ .

A simulação realizada para o guia de onda cilíndrico no modo  $TE_{11}$  permitiu visualizar a distribuição dos campos elétrico e magnético no interior do guia. As imagens mostram claramente as características esperadas para o modo  $TE_{11}$ , com o campo magnético longitudinal apresentando um máximo no centro e o campo elétrico transversal sendo máximo próximo às paredes do guia.

Essas simulações são úteis para entender o comportamento dos modos de propagação em guias de ondas cilíndricos, sendo fundamentais para o design e análise de dispositivos de micro-ondas e telecomunicações.

## 15.2 Exemplo 2

Os guias de onda cilíndricos são amplamente utilizados para transmitir sinais de alta frequência em micro-ondas e comunicações por satélite. A frequência de corte é um parâmetro crucial que determina a frequência mínima na qual um determinado modo de propagação pode se propagar. Para modos TE (Transverso Elétrico) e TM (Transverso Magnético), a frequência de corte é dada pela equação:

$$f_c = \frac{x_{mn} \cdot c}{2\pi a} \quad (11)$$

onde:

- $f_c$  é a frequência de corte.
- $x_{mn}$  é o zero da função de Bessel correspondente ao modo de propagação.
- $c$  é a velocidade da luz no vácuo, aproximadamente  $3 \times 10^8$  m/s.
- $a$  é o raio do guia de onda.

Para este projeto, consideramos os seguintes modos:

- **Modo TE<sub>01</sub>**: Primeiro zero da função de Bessel de ordem zero ( $J_0$ ), com  $x_{01} = 2,405$ .
- **Modo TE<sub>11</sub>**: Primeiro zero da função de Bessel de primeira ordem ( $J_1$ ), com  $x_{11} = 1,841$ .
- **Modo TM<sub>01</sub>**: Primeiro zero da derivada da função de Bessel de ordem zero ( $J'_0$ ), com  $x'_{01} = 3,832$ .

A frequência de corte é calculada para cada modo de propagação variando o raio do guia de onda  $a$  de 1 cm a 10 cm. Utilizando a Eq. (11), temos:

- Para o modo  $\mathbf{TE}_{01}$ :

$$f_{c,TE01} = \frac{2,405 \times 3 \times 10^8}{2\pi a}$$

- Para o modo  $\mathbf{TE}_{11}$ :

$$f_{c,TE11} = \frac{1,841 \times 3 \times 10^8}{2\pi a}$$

- Para o modo  $\mathbf{TM}_{01}$ :

$$f_{c,TM01} = \frac{3,832 \times 3 \times 10^8}{2\pi a}$$

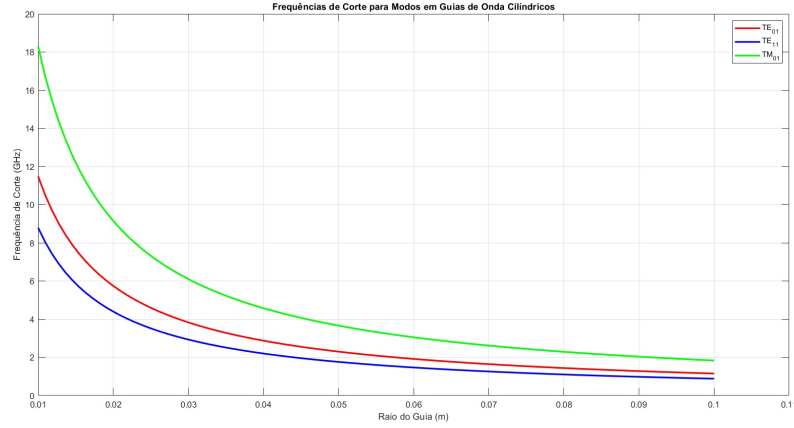


Figura 6: Frequências de Corte para Modos em Guias de Onda Cilíndricos

A Fig. 6 mostra a variação das frequências de corte em função do raio do guia de onda para os modos  $\mathbf{TE}_{01}$ ,  $\mathbf{TE}_{11}$  e  $\mathbf{TM}_{01}$ . Cada curva corresponde a um modo diferente de propagação, e podemos observar que a frequência de corte diminui conforme o raio aumenta.

- Modo  $\mathbf{TE}_{01}$  (curva vermelha): - A frequência de corte é intermediária entre os modos  $\mathbf{TE}_{11}$  e  $\mathbf{TM}_{01}$ . - Para raios maiores, a frequência de corte diminui rapidamente, permitindo a propagação do modo em frequências mais baixas.
- Modo  $\mathbf{TE}_{11}$  (curva azul): - Apresenta a menor frequência de corte entre os modos considerados. - Isso significa que o modo  $\mathbf{TE}_{11}$  é o primeiro a se propagar conforme a frequência aumenta.

- Modo  $TM_{01}$  (curva verde): - Apresenta a maior frequência de corte entre os modos.
  - Para raios pequenos, a frequência de corte é muito alta, o que limita a propagação do modo.

À medida que o raio do guia de onda aumenta, todas as frequências de corte diminuem, tornando o guia de onda capaz de suportar modos de propagação em frequências mais baixas. Guias de onda maiores, portanto, são mais versáteis para operar em uma ampla faixa de frequências.

Para guias com raios menores, a frequência de corte é mais alta, restringindo a propagação a modos específicos. Esse comportamento é importante para o projeto de guias de onda que visam operar apenas em determinados modos, evitando modos indesejados que possam causar interferência ou distorção no sinal propagado.



## 16 Códigos

### 16.1 Guias de Ondas Retangulares - Exemplo 1

```
1 % Par metros do guia de onda retangular
2 a = 5e-2; % Largura do guia (m)
3 b = 2e-2; % Altura do guia (m)
4 c = 3e8; % Velocidade da luz no vácuo (m/s)
5
6 % Número máximo de modos para cálculo
7 max_m = 5;
8 max_n = 5;
9
10 % Inicialização da matriz para armazenar as frequências de corte
11 frequencias_corte = zeros(max_m, max_n);
12
13 % Cálculo das frequências de corte para os modos TE_{mn}
14 for m = 0:max_m
15     for n = 0:max_n
16         if m == 0 && n == 0
17             frequencias_corte(m+1, n+1) = NaN; % Modo TEM não é
suportado
18         else
19             frequencias_corte(m+1, n+1) = (c/2) * sqrt((m/a)^2 + (n/b)
^2);
20         end
21     end
22 end
23
24 % Plot das frequências de corte
25 figure;
26 imagesc(frequencias_corte);
27 colorbar;
28 title('Dispersão das Frequências de Corte para Modos TE_{mn}');
29 xlabel('Número de Modos na Direção n');
30 ylabel('Número de Modos na Direção m');
31 set(gca, 'XTick', 1:max_n, 'XTickLabel', 0:max_n);
```

```

32 set(gca, 'YTick', 1:max_m, 'YTickLabel', 0:max_m);
33
34 % Mostrar os valores das frequências de corte na tabela
35 for m = 0:max_m
36     for n = 0:max_n
37         text(n+1, m+1, sprintf('%.2f GHz', frequencias_corte(m+1, n+1)*1
38             e-9), ...
39             'HorizontalAlignment', 'center', 'Color', 'w');
40 end

```

## 16.2 Guias de Ondas Retangulares - Exemplo 2

```

1 % Projeto de Simulação de Guias de Onda Retangulares em MATLAB
2 clear; clc; close all;
3
4 % Par metros do guia de onda retangular (Seção 1)
5 a1 = 5e-2; % Largura do guia (m)
6 b1 = 2e-2; % Altura do guia (m)
7
8 % Par metros do guia de onda retangular (Seção 2)
9 a2 = 4e-2; % Nova largura do guia (m)
10 b2 = 1.5e-2; % Nova altura do guia (m)
11
12 % Par metros do sinal
13 f = 10e9; % Frequência de operação (Hz)
14 c = 3e8; % Velocidade da luz no vácuo (m/s)
15 lambda = c / f; % Comprimento de onda (m)
16 omega = 2 * pi * f; % Frequência angular (rad/s)
17 k = 2 * pi / lambda; % Número de onda no vácuo (rad/m)
18
19 % Número de modos para cálculo
20 m = 1; % Modo na direção x
21 n = 0; % Modo na direção y
22
23 % Frequências de corte para as duas seções
24 fc1 = (c/2) * sqrt((m/a1)^2 + (n/b1)^2); % Frequência de corte (Seção 1)

```

```

25 fc2 = (c/2) * sqrt((m/a2)^2 + (n/b2)^2); % Frequência de corte (Seção 2)
26
27 % Verificação de propagação na Seção 1 e Seção 2
28 if f < fc1 || f < fc2
29     error('A frequência de operação deve ser maior que a frequência de
        corte em ambas as seções.');
```

30 end

31

32 % Constantes de propagação

33 beta1 = sqrt(k^2 - (m\*pi/a1)^2); % Constante de propagação Seção 1

34 beta2 = sqrt(k^2 - (m\*pi/a2)^2); % Constante de propagação Seção 2

35

36 % Coeficiente de reflexão e transmissão na junção

37 Z1 = (k / beta1) \* 377; % Impedância da Seção 1

38 Z2 = (k / beta2) \* 377; % Impedância da Seção 2

39 Gamma = (Z2 - Z1) / (Z2 + Z1); % Coeficiente de reflexão

40 T = 1 + Gamma; % Coeficiente de transmissão

41

42 % Display dos resultados

43 fprintf('Frequência de corte na Seção 1: %.2f GHz\n', fc1\*1e-9);

44 fprintf('Frequência de corte na Seção 2: %.2f GHz\n', fc2\*1e-9);

45 fprintf('Constante de propagação na Seção 1: %.2f rad/m\n', beta1);

46 fprintf('Constante de propagação na Seção 2: %.2f rad/m\n', beta2);

47 fprintf('Coeficiente de Reflexão: %.2f\n', abs(Gamma));

48 fprintf('Coeficiente de Transmissão: %.2f\n\n', abs(T));

49

50 % Malha de pontos para visualização

51 x = linspace(0, 1, 200); % Direção de propagação

52 y = linspace(0, b1, 100); % Direção transversal

53 [X, Y] = meshgrid(x, y);

54

55 % Campo elétrico no guia (modo TE<sub>10</sub>)

56 E0 = 1; % Amplitude do campo elétrico

57 Ey1 = E0 \* sin(m \* pi \* Y / b1) .\* exp(-1j \* beta1 \* X); % Campo elétrico na Seção 1

58 Ey2 = E0 \* sin(m \* pi \* Y / b2) .\* exp(-1j \* beta2 \* X); % Campo elétrico na Seção 2

```

59
60 % Junção: Considerando descontinuidade na seção x = 0.5
61 Ey = Ey1; % Inicializa com a primeira seção
62 Ey(:, X(1, :) > 0.5) = Ey2(:, X(1, :) > 0.5); % Aplica descontinuidade
63
64 % Visualização do campo elétrico
65 figure;
66 imagesc(x, y, real(Ey));
67 colorbar;
68 title('Distribuição do Campo Elétrico (Re(E_y)) ao Longo do Guia de Onda
        ');
69 xlabel('Direção de Propagação (x) [m]');
70 ylabel('Direção Transversal (y) [m]');
71
72 % Visualização do módulo do campo elétrico
73 figure;
74 imagesc(x, y, abs(Ey));
75 colorbar;
76 title('Módulo do Campo Elétrico |E_y| ao Longo do Guia de Onda');
77 xlabel('Direção de Propagação (x) [m]');
78 ylabel('Direção Transversal (y) [m]');

```

### 16.3 Guias de Ondas Cilíndricos - Exemplo 1

```

1 % Parâmetros do guia de onda cilíndrico
2 a = 5e-2; % Raio do guia de onda (m)
3 f = 15e9; % Frequência de operação (Hz)
4 c = 3e8; % Velocidade da luz no vácuo (m/s)
5 mu_0 = 4*pi*1e-7; % Permeabilidade do vácuo (H/m)
6 epsilon_0 = 8.854e-12; % Permissividade do vácuo (F/m)
7 eta = sqrt(mu_0/epsilon_0); % Impedância intrínseca do vácuo
8
9 % Cálculo da frequência de corte para o modo TE11
10 m = 1; % Ordem da função de Bessel (modo TE11)
11 n = 1; % Número de zeros da função de Bessel
12 x_mn = 1.841; % Primeiro zero da função de Bessel J_1
13 fc = (x_mn * c) / (2 * pi * a); % Frequência de corte (Hz)

```

```

14
15 % Verifica se a frequência de operação é maior que a frequência de corte
16 if f < fc
17     error('A frequência de operação deve ser maior que a frequência de
18         corte.');
```

18 end

```

19
20 % Cálculo do comprimento de onda no vácuo e número de onda
21 lambda = c / f; % Comprimento de onda no vácuo (m)
22 k = 2 * pi / lambda; % Número de onda no vácuo
23
24 % Constante de propagação no guia de onda
25 kc = x_mn / a; % Número de onda de corte
26 beta = sqrt(k^2 - kc^2); % Constante de propagação no guia
27
28 % Malha de pontos para visualização
29 rho = linspace(0, a, 100); % Direção radial
30 phi = linspace(0, 2*pi, 100); % Direção angular
31 [RH0, PHI] = meshgrid(rho, phi); % Malha em coordenadas cilíndricas
32
33 % Cálculo dos campos para o modo TE11
34 H0 = 1; % Amplitude do campo magnético
35 Hz = H0 * besselj(m, kc * RH0) .* cos(m * PHI); % Componente
    longitudinal do campo magnético
36 omega = 2 * pi * f; % Frequência angular
37 E_phi = -(H0 * beta / (omega * epsilon_0)) * besselj_prime(m, kc * RH0)
    .* sin(m * PHI); % Componente do campo elétrico transversal
38
39 % Visualização do campo magnético longitudinal Hz
40 figure;
41 polarplot3d(abs(Hz));
42 title('Distribuição do Campo Magnético Longitudinal |H_z| (Modo TE_{11})
    ');
43 xlabel('Direção x (m)');
44 ylabel('Direção y (m)');
45 zlabel('|H_z| (A/m)');
46 colorbar;
```

```

47
48 % Visualização do campo elétrico transversal E_phi
49 figure;
50 polarplot3d(abs(E_phi));
51 title('Distribuição do Campo Elétrico Transversal |E_\phi| (Modo TE_{11})');
52 xlabel('Direção x (m)');
53 ylabel('Direção y (m)');
54 zlabel('|E_\phi| (V/m)');
55 colorbar;
56
57 % Função auxiliar para derivada de Bessel de primeira espécie
58 function J_prime = besselj_prime(m, x)
59     J_prime = (besselj(m-1, x) - besselj(m+1, x)) / 2;
60 end
61
62 % Função para plotagem em coordenadas polares 3D
63 function polarplot3d(Z)
64     [nRho, nPhi] = size(Z);
65     rho = linspace(0, 1, nRho); % Normalização do raio
66     phi = linspace(0, 2*pi, nPhi); % ngulo
67     [RHO, PHI] = meshgrid(rho, phi);
68     X = RHO .* cos(PHI);
69     Y = RHO .* sin(PHI);
70     surf(X, Y, Z); % Sem parâmetros adicionais
71     shading interp;
72     axis equal tight;
73     xlabel('x (m)');
74     ylabel('y (m)');
75     zlabel('|Z|');
76 end

```

## 16.4 Guias de Ondas Cilíndricas - Exemplo 2

```

1 % Projeto Simples de Cálculo de Frequências de Corte em Guias de Onda
  Cilíndricas
2 clear; clc; close all;

```

```

3
4 % Par metros do guia de onda
5 c = 3e8; % Velocidade da luz no vácuo (m/s)
6
7 % Definição de raios para o guia de onda
8 raios = linspace(1e-2, 10e-2, 100); % Variando de 1 cm a 10 cm
9
10 % Zeros das funções de Bessel para os modos considerados
11 x_TE01 = 2.405; % Primeiro zero de J_0 para TE01
12 x_TE11 = 1.841; % Primeiro zero de J_1 para TE11
13 x_TM01 = 3.832; % Primeiro zero de J'_0 para TM01
14
15 % Inicialização dos vetores de frequências de corte
16 fc_TE01 = zeros(size(raios));
17 fc_TE11 = zeros(size(raios));
18 fc_TM01 = zeros(size(raios));
19
20 % Cálculo das frequências de corte para cada raio
21 for i = 1:length(raios)
22     a = raios(i); % Raio do guia
23     fc_TE01(i) = (x_TE01 * c) / (2 * pi * a); % Frequência de corte TE01
24     fc_TE11(i) = (x_TE11 * c) / (2 * pi * a); % Frequência de corte TE11
25     fc_TM01(i) = (x_TM01 * c) / (2 * pi * a); % Frequência de corte TM01
26 end
27
28 % Plot das frequências de corte
29 figure;
30 plot(raios, fc_TE01 * 1e-9, 'r', 'LineWidth', 2); % TE01
31 hold on;
32 plot(raios, fc_TE11 * 1e-9, 'b', 'LineWidth', 2); % TE11
33 plot(raios, fc_TM01 * 1e-9, 'g', 'LineWidth', 2); % TM01
34 hold off;
35
36 % Configurações do gráfico
37 xlabel('Raio do Guia (m)');
38 ylabel('Frequência de Corte (GHz)');
39 title('Frequências de Corte para Modos em Guias de Onda Cilíndricos');

```

```
40 legend('TE_{01}', 'TE_{11}', 'TM_{01}');  
41 grid on;
```