LISTA DE EXERCÍCIOS II - PDS 2024.1

ALUNO: JOÃO VITOR DE O. FRAGA

MAT: 537377

1. a) Os polos são $z = -0,5$ e $z = 0,25$. Como temos um sistema que precisa ser causal, isso implica que ele é lateral-direito, portanto, a RDC de $H(z)$ é $|z| > 0,5$.

b) Para que seja estável é necessário que a RDC contenha o círculo unitário, como a RDC é $|z| > 0,5$ então contém o círculo, logo o sistema é estável.

c) Temos que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4 + 0,25z^{-1} - 0,5z^{-2}}{(1-0,25z^{-1})(1+0,5z^{-1})}$ $\therefore (1+0,5z^{-1} - 0,25z^{-1} - 0,125z^{-2})Y(z) = (4+0,25z^{-1} - 0,5z^{-2})X(z)$

$$\therefore Y(z) + 0,5z^{-1}Y(z) - 0,25z^{-1}Y(z) - 0,125z^{-2}Y(z) = 4X(z) + 0,25z^{-1}X(z) - 0,5z^{-2}X(z)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y[n] + 0,25y[n-1] - 0,125y[n-2] = 4x[n] + 0,25x[n-1] - 0,5x[n-2]$$

$$\therefore y[n] = 4x[n] + 0,25x[n-1] - 0,5x[n-2] - 0,25y[n-1] + 0,125y[n-2]$$

d) Podemos definir $H(z) = 4 - \frac{0,75z^{-1}}{(1-0,25z^{-1})(1+0,5z^{-1})}$

$$\therefore \frac{0,75z^{-1}}{(1-0,25z^{-1})(1+0,5z^{-1})} = \frac{A}{1-0,25z^{-1}} + \frac{B}{1+0,5z^{-1}} = H'(z)$$

$$A = (1-0,25z^{-1})H'(z)\Big|_{z=0,25} = \frac{0,75\cdot\left(\frac{1}{0,25}\right)}{1+0,5\cdot\left(\frac{1}{0,25}\right)} = \frac{0,75\cdot 4}{1+(0,5\cdot 4)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$B = (1+0,5z^{-1})\cdot H'(z)\Big|_{z=-0,5} = \frac{0,75\cdot\left(\frac{-1}{0,5}\right)}{1-0,25\left(-\frac{1}{0,5}\right)} = \frac{0,75(-2)}{1-0,25(-2)} = \frac{-1,5}{1,5} = -1$$

$$H(z) = 4 - \frac{1}{1-0,25z^{-1}} + \frac{1}{1+0,5z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] = 4\delta[n] - (0,25)^n u[n] + (-0,5)^n u[n]$$

e) Se $x[n] = u[n-1]$, temos que $X(z) = \frac{-1}{1-z^{-1}}$, $|z| < 1$. Como $Y(z) = H(z)\cdot X(z)$, então:

$$Y(z) = \frac{4 + 0,25z^{-1} - 0,5z^{-2}}{(1-0,25z^{-1})(1+0,5z^{-1})} \cdot \frac{-1}{1-z^{-1}}$$

, $0,5 < |z| < 1$, já que precisa ter as duas RDCs

Então:

$$Y(z) = \frac{-4 - 0,25z^{-1} + 0,5z^{-2}}{(1-0,25z^{-1})(1+0,5z^{-1})(1-z^{-1})}, \quad 0,5 < |z| < 1$$

f) Sabemos que $Y(z) = \dfrac{-4 - 0{,}25z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}{(1-0{,}25z^{-1})(1+0{,}5z^{-1})(1-z^{-1})} = \dfrac{A}{1-0{,}25z^{-1}} + \dfrac{B}{1+0{,}5z^{-1}} + \dfrac{C}{1-z^{-1}}$

$A = (1-0{,}25z^{-1}) \cdot Y(z)\Big|_{z=0{,}25} = \dfrac{-4-0{,}25\cdot 4+0{,}5(4)^2}{(1+0{,}5\cdot 4)(1-4)} = \dfrac{-3}{9} = \dfrac{-1}{3}$

$B = (1+0{,}5z^{-1})\, Y(z)\Big|_{z=-0{,}5} = \dfrac{-4-0{,}25(-2)+0{,}5(-2)^2}{(1-0{,}25(-2))(1-(-2))} = \dfrac{-1{,}5}{4{,}5\cdot 3} = \dfrac{-1}{3}$

$C = (1-z^{-1})\,Y(z)\Big|_{z=1} = \dfrac{-4-0{,}25+0{,}5}{(1-0{,}25)(1+0{,}5)} = \dfrac{-3{,}75}{0{,}75\cdot 1{,}5} = \dfrac{-5}{\frac{3}{2}} = \dfrac{-10}{3}$

$\therefore\; Y(z) = \dfrac{\frac{-1}{3}}{1-0{,}25z^{-1}} - \dfrac{\frac{1}{3}}{1+0{,}5z^{-1}} - \dfrac{\frac{10}{3}}{1-z^{-1}}$

$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$

$y[n] = \frac{-1}{3}(0{,}25)^n u[n] - \frac{1}{3}(-0{,}5)^n u[n] - \frac{10}{3} u[-n-1]$,,

2. Temos que $W(z) = \dfrac{1-z^3}{1-z^4}$, RDC $|z|>1$, $u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{1}{1-z^{-1}} \to \dfrac{z}{z-1}$, RDC $|z|>1$

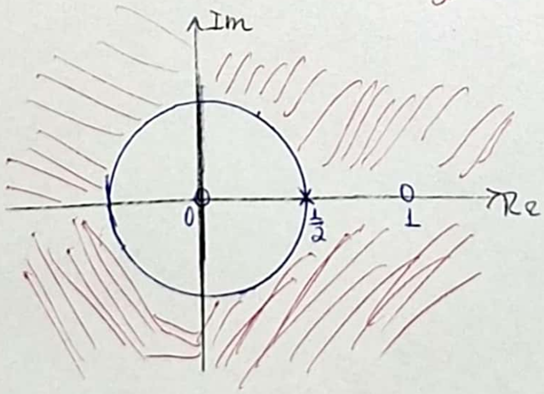
$W(z)\cdot U(z) = z^{-1}\left(\dfrac{1-z^{-3}}{1-z^{-4}}\right)\cdot \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z^{-1}-z^{-4}}{(1-z^{-4})(1-z^{-1})} = \dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \dfrac{z^{4}}{1-z^{-4}}$, RDC $|z|>1$

$\therefore \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] * u[n] = u[n-1] - \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-4-4k]$,,

3. a) $x[n] = u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$, RDC $|z|>1$

$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = \dfrac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, RDC $|z|>\frac{1}{2}$

Se sabemos que $W(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} \therefore W(z) = \dfrac{4z(1-z^{-1})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, RDC $|z|>\frac{1}{2}$



b) Podemos reescrever $H(z)$ como: $H(z) = \frac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, RDC $|z| > \frac{1}{2}$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

c) Sim, pois sua RDC inclui o círculo unitário.

d) Não, pois o valor inicial de n é -1, portanto, não é lateral direito.

4. Em $X(z) = \frac{1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1/4}{1-2z^{-1}}$ nós temos dois polos, sendo eles $z = 1/2$ e $z = 2$

como a RDC inclui o círculo unitário, então a RDC é $\frac{1}{2} < z < 2$, ficamos então com uma parte causal e uma anti-causal, onde a causal se refere a $1/2$ e a anti-causal 2, logo:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X_{cau}(z) + \lim_{z\to 0} zX_{anti}(z) \therefore x[0] = \lim_{z\to\infty} \frac{1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \lim_{z\to 0} \frac{(1/4)\cdot z}{1-2z^{-1}} = \frac{1}{3} + 0$$

$$\therefore x[0] = \frac{1}{3}$$

5. Podemos expandir usando séries de Taylor $X(z) = e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, sabemos também que $X(z)$ é definido por $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$, mas pela série de Taylor de e^{z} o valor de n irá começar em 0.

Igualando então: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \therefore e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{-1})^{-n}}{n!} \therefore x[n] = \frac{1}{n!}$

6. a) $H(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, $x[n] = u[n]$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot u[k]\cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} 3\left(\frac{1}{3}\right)^k = 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\therefore y[n] = \begin{cases} \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right), & n \geq 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

b. $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, $x[n] = u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$$\therefore Y(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{3}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$A = (1-\tfrac{1}{3}z^{-1}) \cdot Y(z)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{-3}{2}, \quad B = (1-z^{-1}) \cdot Y(z)\Big|_{z=1} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

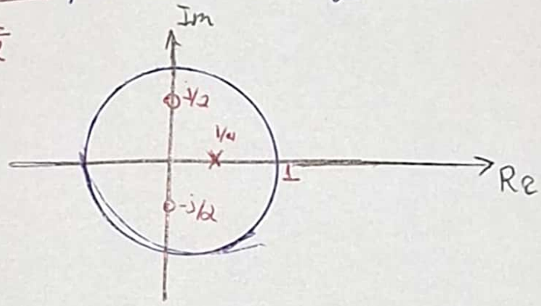
$$\therefore Y(z) = \frac{\frac{-3}{2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y[n] = \frac{-3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{2}$$

$$\therefore y[n] = \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)_{//}$$

7. A partir do diagrama, temos que os zeros são j e $-j$ e o polo é $\frac{1}{2}$, portanto:

$$X(z) = \frac{z^2+1}{z-\frac{1}{2}}, \quad y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X\left(\frac{1}{1/2} \cdot z\right) = X(2z)$$

$$\therefore Y(z) = \frac{(2z)^2+1}{2z-\frac{1}{2}} = \frac{4z^2+1}{2z-\frac{1}{2}}$$, os zeros são $\frac{j}{2}$ e $\frac{-j}{2}$, o polo é $1/4$

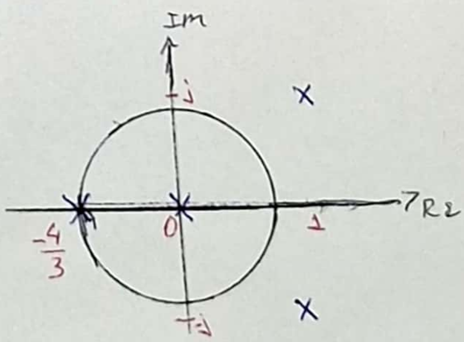


8. Temos que para $X(z)$ os polos são: $\frac{-3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{j}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{j}{2}$ e o zero é 0, portanto:

$X(z) = \dfrac{z}{(z^2-z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{4})}$, $|z| > \frac{4}{3}$, pois o sistema é estável. Como $y[n] = x[-n+3] \to Y(z) = z^{-3}X(z^{-1})$

$$\therefore Y(z) = \frac{z^{-3} \cdot z^{-1}}{(z^{-2}-z^{-1}+\frac{1}{2})(z^{-1}+\frac{3}{4})} = \frac{1/z^4}{\frac{(2-2z+z^2)(4+3z)}{8z^3}} = \frac{8z^3}{(2-2z+z^2)(4+3z)z^4}$$

$\therefore Y(z) = \dfrac{8}{z(2-2z+z^2)(4+3z)}$, os polos são $0, -\frac{4}{3}, 1+j, 1-j$. Já sobre a RDC, como $y[n] = x[-n+3]$ isso irá se transformar num sistema anti-causal, portanto a RDC é $|z| < 4/3$



9. a) Para que exista Transformada de Fourrier é preciso ter um sistema estável, logo a RDC precisa incluir o círculo unitário, então a RDC é $\frac{1}{3} < |z| < 2$. Dessa maneira ~~o sist~~ $x[n]$ é uma sequência bilateral.

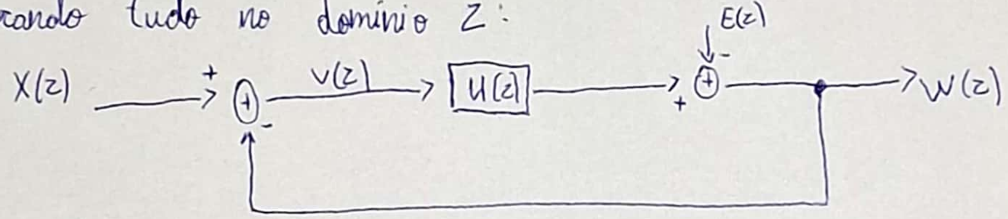
b) Duas, sendo elas $\frac{1}{3} < |z| < 2$ e $2 < |z| < 3$

c) Não, pois se o sistema fosse causal ia ser necessário que sua RDC fosse $|z| > 3$, implicando assim que o sistema não é estável.

10. Sabemos que $W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ∴ $W(z) = \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}} = \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}$

E como a RDC de $Y(z)$ é a interseção das RDCs de $W(z)$ com $X(z)$, a RDC de $W(z)$ é $|z| > \frac{2}{3}$.

11. Deixando tudo no domínio Z:



a) Se $V(z) = X(z) - W(z)$ e $W(z) = V(z)H(z) + E(z)$

$W(z) = (X(z) - W(z)) \cdot H(z) + E(z) = X(z)H(z) - W(z)H(z) + E(z)$

∴ $W(z) + W(z)H(z) = X(z)H(z) + E(z) \rightarrow W(z)[1 + H(z)] = X(z)H(z) + E(z)$

∴ $W(z) = \frac{X(z)H(z) + E(z)}{1 + H(z)}$ ∴ $W(z) = \cancel{\frac{W(z)}{1+W(z)}}\ \frac{H(z)}{1+H(z)} X(z) + \frac{1}{1+H(z)} \cdot E(z)$,

b) Dado que: $W_1(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{\frac{1}{z-1}}{\frac{z-1+1}{z-1}} = \frac{1}{z}$ ou z^{-1}

$W_2'(z) = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{\frac{z-1+1}{z-1}} = \frac{\frac{1}{z}}{z-1} = \frac{z-1}{z}$ ou $1 - z^{-1}$

c) Não, pois seu polo é 1, no entanto, $W_1(z)$ e $W_2(z)$ não, pois seus polos são 0.

Digitalizado com CamScanner

12.

a) $X(z) = \dfrac{-1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{4/3}{1-2z^{-1}} = \dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$, RDC $\frac{1}{2}<|z|<2$

b) Dada a equação $Y(z) = \dfrac{1-z^{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$ é possível ter três RDCs, sendo elas: $|z|<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<|z|<2$, $|z|>2$, contudo, sabemos que a RDC de $Y(z)$ é a interseção das RDCs de $X(z)$ e $W(z)$, devido a RDC de $X(z)$ a única RDC possível para $Y(z)$ é $\frac{1}{2}<|z|<2$.

c) Para isso é necessário saber $W(z)$, $W(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{\dfrac{1-z^{+2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}}{\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}} = 1 - z^{2}$

$W(z) = 1 - z^{2} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$