PDS Lista 1 - João Vitor de O. Fraga - 537377

1- temos que $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-(n-k)} \cdot u[-(n-k)]$

$\to y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-(n-k)} = \alpha^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k} = \alpha^{-n}\cdot\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \Rightarrow y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{\alpha^{n}-\alpha^{n+1}}$ ou $\frac{1-\alpha^{n+1}}{\alpha^{n}(1-\alpha)}$ //

2- Para facilitar, iremos usar a transformada Z nos itens

a) $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=0 \xrightarrow{\mathcal{Z}} 1-5z^{-1}+6z^{-2}=0 \Rightarrow (1-2z^{-1})(1-3z^{-1})=0$

Dessa maneira, a solução homogênea é $y[n] = A(2)^{n} + B(3)^{n}$ //

b) $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=2x[n-1] \xrightarrow{\mathcal{Z}} 1-$

$\to Y(z)[1-5z^{-1}+6z^{-2}] = 2z^{-1}X(z)$, como $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$, então $H(z)=\frac{2z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$

$\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-3z^{-1}} = H(z)$,

$A = (1-2z^{-1})\cdot H(z)\Big|_{z=2} = \frac{1}{(1-\frac{3}{2})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ //

$B = (1-3z^{-1})H(z)\Big|_{z=3} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

Logo $H(z) = \frac{-2}{1-2z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] = -2(2)^{n}u[n] + 2(3)^{n}u[n]$ //

c) Se $x[n]=u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)\ \frac{1}{1-z^{-1}}$, e $Y(z)=X(z)\cdot H(z)$, portanto $Y(z)=\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})(1-z^{-1})}$

$\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-3z^{-1}} + \frac{C}{1-z^{-1}} = Y'(z)$, onde

$A = (1-2z^{-1})\cdot Y'(z)\Big|_{z=2} = \frac{1}{(1-\frac{3}{2})(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$

$B = (1-3z^{-1})Y'(z)\Big|_{z=3} = \frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})(1-\frac{1}{3})} = \frac{\cancel{\frac{2}{3}}}{(\frac{1}{3})\cancel{(\frac{2}{3})}} = 3$

$C = (1-z^{-1})Y'(z)\Big|_{z=1} = \frac{2}{(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$, logo

$Y(z) = \frac{-4}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-3z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y[n] = -4(2)^{n}u[n] + 3(3)^{n}u[n] + u[n]$ //

3- Podemos substituir $z=e^{j\omega}$, portanto $Y(e^{j\omega}) = \frac{2e^{j\omega}}{(e^{j\omega}-2)(e^{j\omega}-3)(e^{j\omega}-1)}$ //

4 - Usando a identidade de euler para reescrever x[n], teremos que

$x[n] = \frac{e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2j}$, dessa maneira, podemos definir y[n] como:

$y[n] = \frac{H(e^{j\frac{\pi n}{4}})e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}} H(e^{-j\frac{\pi n}{4}})}{2j}$, como sabemos o valor de $H(e^{j\omega})$, quando substituimos cada valor de ω por $\pm \pi/4$:

$H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = 2 - 2j = 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1 - e^{j\frac{\pi}{2}}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\pi}} = 2 + 2j = 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$

$\therefore y[n] = \frac{2\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi n}{4}} - 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4} - j\frac{\pi n}{4}}}{2j} \therefore y[n] = 2\sqrt{2}\, \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{4}\right)$ //

6- $W(e^{j\omega}) = \dfrac{(1-je^{-j\omega})(1+je^{-j\omega})}{1-0,8e^{-j\omega}} = \dfrac{1+je^{-j\omega}-je^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}{1-0,8e^{-j\omega}} = \dfrac{1+e^{-2j\omega}}{1-0,8e^{-j\omega}}$

$\therefore W(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-0,8e^{-j\omega}} + \dfrac{e^{-2j\omega}}{1-0,8e^{-j\omega}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h[n] = (0,8)^n u[n] + (0,8)^{n-2} u[n-2]$,,

7 - Se definimos $W(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{1+e^{-2j\omega}}{1-0,8e^{-j\omega}} \therefore (1-0,8e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = (1+e^{-2j\omega})X(e^{j\omega})$

$\therefore y[n] - 0,8y[n-1] = x[n] + x[n-2] \longrightarrow y[n] = x[n] + x[n-2] + 0,8y[n-1]$,,

8- Usando a resposta em frequência da saída, temos:

$y[n] = W(e^{j0}) \cdot 4 + 2|W(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \angle W(e^{j\omega_0}))$. Para que esse valor seja uma constante é necessário que $|W(e^{j\omega_0})| = 0$, isso só ocorre para $1 + e^{-2j\omega} = 0 \therefore \omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Agora o valor da constante será:

$y[n] = 4 \cdot W(e^{j0}) = 4 \cdot \left(\dfrac{1+1}{1-0,8}\right) \therefore y[n] = 40$,,

9- a) Pelas tabelas, sabemos que $y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & c.c \end{cases}$, dessa maneira sua transformada será:

$Y(e^{j\omega}) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$, considerando $M = 2L$, então: $Y(e^{j\omega}) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega(2L+1)}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega L}$

sabendo que $w[n] = y[n+L] \xrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega L}$

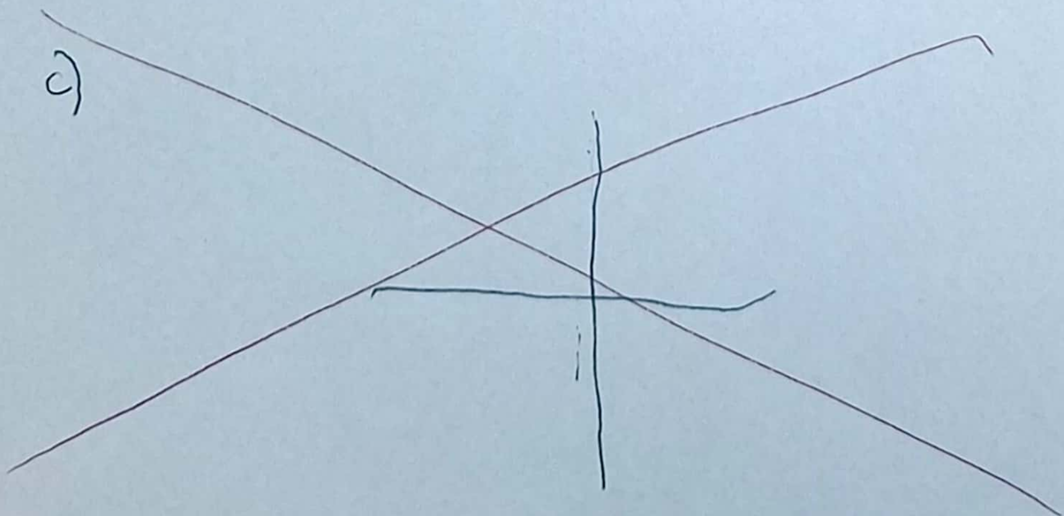
$W(e^{j\omega}) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega(2L+1)}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$,,

b) Quando aplicamos a transformada de Fourier em $x[n]$, temos:

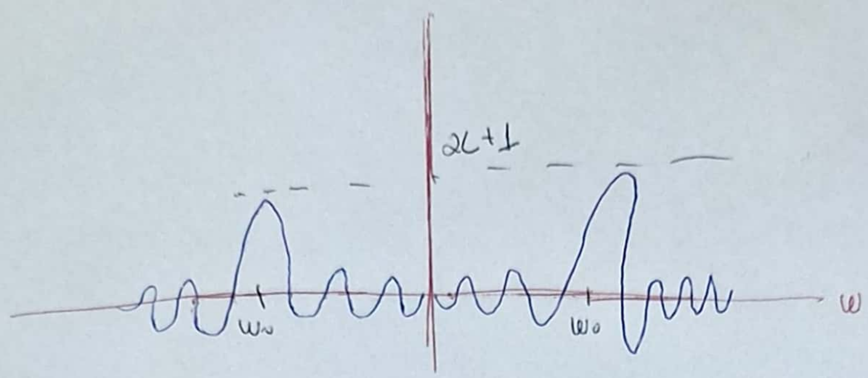
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot W(e^{j\omega}) * (\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \pi W(e^{j(\omega+\omega_0)})\right]$

$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + W(e^{j(\omega+\omega_0)})\right]$,,

c)



c)



10- a) Sabemos que $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$, efetuando a equação de diferenças e colocando-as na frequên

$$Y(e^{j\omega}) = (1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})X(e^{j\omega}) \therefore H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$$ //

b) Se sabemos $H(e^{j\omega})$, basta fazer a transformada inversa de Fourrier, ficando:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h[n] = \delta + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$ //

c) Sim, pois ~~os módulos e o s~~ os módulos de h[n] são somáveis.

11- Para que um sinal seja periódico, é necessário que $x[n] = x[n+T]$, onde T é o período, com base nisso:

~~a) $e^{j(2\pi n/5)} = e^{j(2\pi/5)\cdot(n+T)} = e^{2\pi n/5 + 2\pi K}$, se considerarmos $2\pi K = \frac{2\pi T}{5}$, igualando K=1, então T=5, portanto, x[n] é periódico.~~

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi n}{19}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{19} + 2k\pi\right)$, $2k\pi = \frac{\pi T}{19} \therefore T = 38$, então x[n] é periódico.

c) Não é periódico, pois o primeiro "n" impede que ocorra ~~por~~ a periodicidade do sinal.

~~d) $e^{\pi n} = e^{\pi n + 2\pi K}$, $2\pi K = \pi T$, $T = 2$, x[n] é periódico~~

a) O sinal não é periódico pois e^{x}, ~~...~~ não é periódico, caso fosse e^{jx} assim seria periódico

d) Mesma resposta do item a).

2- a) ~~y[n] = (x[n]*h~~

$y[n] = (x[n] * (\delta[n] + h_1[n])) * h_0[n]$, como $y[n] = x[n] * h[n]$, então:

$h[n] = (\delta[n] + h_1[n]) * h_0[n] = h_0[n] + h_1[n] * h_0[n] \therefore h[n] = \alpha u[n] + \beta^{n-1} u[n-1]$

b) Aplicando a transformada de Fourier:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} + \beta \sum_{K=0}^{\infty} \alpha^{(K-1)} e^{-j\omega K} \quad , \; K = n-1 \therefore H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}} \quad , \alpha < 1_{,,}$$

c) $$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}} \therefore [1-\alpha e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega}) = [1+\beta e^{-j\omega}] \cdot X(e^{j\omega})$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] + \beta x[n-1] \therefore y[n] = x[n] + \beta x[n-1] + \alpha y[n-1]_{,,}$$

e) Para ser causal é necessário que $h[n] = 0, n < 0$ e essas condições são satisfeitas, logo é um sistema causal. Se tiver transformada de Fourier o sistema é estável, e como achamos a transformada, o sistema também é estável.

13- Se $x[n] = \delta[n]$, então $X(e^{j\omega}) = 1$, dessa maneira, como $W(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$.

E sabendo que $(-1)^n w[n] = e^{-j\pi n} w[n]$, $y[n] = w[n] + e^{j\pi n} w[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\omega-\pi)})$, onde

$$H(e^{j(\omega-\pi)}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} \le |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$, então $Y(e^{j\omega}) = 1 \therefore y[n] = \delta[n]_{,,}$

14. Opção b), em que um possível ~~h~~ $h[n]$ seria: $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \; , \; H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1/4 \cdot e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]_{,,}$$