



Lista de Exercícios 02 - Parte 1

Sistema de Comunicações Digitais

Q-01 Um sistema de comunicação digital emprega a seguinte sinalização para a transmitir a informação:

$$s_0(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = A, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Esta sinalização é chamada de sinalização *on/off*. No receptor, o demodulador correlaciona o sinal recebido $r(t)$ com $s(t)$ e amostra a saída do correlator em $t + T$. Determine a probabilidade de erro em função da SNR. Compare a sinalização *on/off* com a sinalização antipodal.

Q-02 Um sistema de comunicação transmite uma das três mensagens m_1 , m_2 e m_3 usando os sinais $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$. O sinal $s_3(t) = 0$, e os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são descritos como

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T/3 \\ -A, & T/3 < t \leq T \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t \leq T/3 \\ -2A, & T/3 < t \leq T \end{cases}$$

O canal de comunicação é um canal AWGN com densidade espectral de potência $N_0/2$.

- Considerado que as três mensagens são equiprováveis, quais são as regras de decisão ótimas para este sistema? Mostre as regiões de decisão na constelação do sinal.
- Se os sinais são equiprováveis, expresse a probabilidade de erro para o receptor ótimo em termos da SNR por bit.

Q-03 Suponha um símbolo binário $A \in \{0, 1\}$, com probabilidades *a priori* $p_A(0) = q$ e $p_A(1) = 1 - q$ seja transmitido em um canal simétrico binário (BSC). O sinal observado $Y \in \{0, 1\}$ também é binário e igual a A com probabilidade $1 - p$.

- (a) Encontre as regras de decisão para o detector ML. Assuma que $p < 1/2$.
- (b) Assuma que $p = 0.2$ e $q = 0.9$. Determine o detector MAP e sua probabilidade de erro.
- (c) Determine o detector MAP para as probabilidades p e q .

Q-04 Considere a variável aleatória $X \in \{+3, +1, -1, -3\}$ com as respectivas probabilidades *a priori* $p_X(\pm 3) = 0.1$ e $p_X(\pm 1) = 0.4$. Dada a observação y da variável aleatória $Y = X + N$, onde N é um ruído AWGN com variância σ^2 , independente de X . Encontre as regiões de decisão para o detector MAP. Agora suponha $\sigma^2 = 0.25$ e o valor observado $y = 2.1$, qual o valor de x será decidido pelo detector MAP?

Q-05 Considere a variável aleatória $X \in \{x_1, x_2\}$ com as probabilidades *a priori* $p_X(x_1) \neq p_X(x_2)$. Dada a observação y da variável aleatória $Y = X + N$, onde N é um ruído AWGN com variância σ^2 , independente de X . Determine o limite de decisão do detector MAP para os valores entre x_1 e x_2 .

Q-06 A modulação ortogonal é um caso especial da modulação M -aria (M -QAM, M -PAM, etc) em que os símbolos transmitidos são ortogonais entre si e possuem a mesma energia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t)g_j^*(t)dt = \mathcal{E}_g\delta_{i-j}$$

Logo, no caso sem interferência inter-simbólica (ISI), temos a mesma relação para os pulsos recebidos

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(t)h_j^*(t)dt = \mathcal{E}\delta_{i-j}$$

- (a) Considere $M = 4$ e que $\mathbf{g}(t) = \{g_0(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ seja o vetor com os possíveis pulsos na transmissão. Supondo que $g_2(t)$ tenha sido o pulso transmitido, determine o vetor de pulsos na recepção $\mathbf{h}(t)$.
- (b) Determine uma expressão aproximada para a probabilidade de erro no caso de uma modulação ortogonal de ordem M .
- (c) Compare o resultado do item anterior com a probabilidade de erro de uma modulação M -QAM. Em qual das duas a probabilidade de erro aumenta mais depressa conforme M aumenta?

Q-07 Foi visto em sala de aula que para evitar interferência inter-simbólica (ISI), devemos satisfazer o critério de Nyquist, ou seja, o pulso equivalente (convolução entre pulso de transmissão, canal e filtro de recepção) amostrado $p(kT) = \delta_k$. De outra forma, a transformada de Fourier do pulso equivalente amostrado é dada por

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f - m/T) = T.$$

Porém, no caso de uma modulação ortogonal, temos um vetor de pulsos $\mathbf{h}(t) = [h_0(t), \dots, h_m(t), \dots, h_M(t)]$. Supondo que não há ISI, as componentes deste vetor de pulsos deverão ser ortogonais entre si, levando ao critério de Nyquist generalizado.

- (a) Comente sobre o critério de Nyquist generalizado e sua expressão para que não haja ISI neste caso.
- (b) Qual é a largura de banda necessária para satisfazer o critério de Nyquist? Explique seu resultado.
- (c) Qual relação de custo-benefício poderíamos concluir entre a modulação ortogonal e a M -ária? Responda este item com base nas respostas obtidas no item anterior e também nas respostas da Questão 6.