Variável Complexa

Terceira Lista de Exercícios

01. Resolva os itens a seguir.

(a) Mostre que $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ não existe.

(b) Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & \text{if } z\neq 0;\\ 0, & \text{if } z=0.\end{cases}$$

Mostre que f não é diferenciável no ponto 0.

02. Encontre $f'(z)$ nos seguintes casos:

(a) $f(z)=3z^2-2z+4$

(b) $f(z)=\dfrac{z-1}{2z+1}$ $\left(z\neq -\dfrac{1}{2}\right)$

(c) $f(z)=(1-4z^2)^3$

(d) $f(z)=\dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$ $(z\neq 0)$

03. Suponha que $f(z_0)=g(z_0)=0$ e que $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existem, com $g'(z_0)\neq 0$. Mostre que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

04. Seja z_0 um número complexo qualquer. Para cada função f a seguir, mostre que $f'(z_0)$ não existe.

(a) $f(z)=\bar{z}$

(b) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$

(c) $f(z)=2x+ixy^2$

(d) $f(z)=e^x e^{-iy}$

05. Para cada função f a seguir, mostre que $f'(z)$ e $f''(z)$ existem e encontre uma expressão para $f''(z)$.

(a) $f(z) = iz + 2$

(b) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$

(c) $f(z) = z^3$

(d) $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{senh}(y)$

06. Para cada função f a seguir, encontre todos os números complexos w para os quais $f'(w)$ existe e, para cada w encontrado, calcule $f'(w)$.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

(b) $f(z) = x^2 + iy^2$

(c) $f(z) = z\mathrm{Im}(z)$

07. Para cada função f a seguir, mostre que ela é diferenciável no domínio de definição indicado e calcule $f'(z)$.

(a) $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad (r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$

(b) $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\,\mathrm{sen}(\ln r), \quad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$

08. Seja f uma função inteira.

(a) Mostre que a função g dada por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também é inteira.

(b) Seja h a função dada por $h(z) = \overline{f(z)}$. Mostre que h é derivável em 0 se, e somente se, $f'(0) = 0$.

09. Seja n um inteiro positivo. Use a relação

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

para obter fórmulas para

(i) $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$

(ii) $\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(2x) + \cdots + \mathrm{sen}(nx)$

10. Neste exercício, z_0 denota um númeo complexo fixado. Para cada um dos conjuntos (a)–(h) abaixo, faça o seguinte:

(i) Esboce o conjunto;

(ii) Verifique se o conjunto é aberto, se é fechado, se é aberto e fechado ou se é nem aberto nem fechado;

(iii) Esboce a fronteira do conjunto;

(iv) Verifique se o conjunto é um domínio (aberto e conexo);

(v) Verifique se o conjunto é limitado ou se é ilimitado.

Conjuntos:

(a) $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z_0)$

(b) $\mathrm{Im}(z_0) > \mathrm{Re}(z)$

(c) $\mathrm{Re}(z^2) \geq 1$

(d) $\mathrm{Im}(zz_0) > 0$

(e) $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$

(f) $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$

(g) $1 < |z - \bar{z}_0| < 3$

(h) $\mathrm{Im}(z^2) \leq 1$