

# Variável Complexa

## Sexta Lista de Exercícios

01. O limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ i + \left( \frac{2+3i}{5} \right)^n \right]$  existe? Justifique sua resposta.

02. O limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ i + \left( \frac{4+3i}{5} \right)^n \right]$  existe? Justifique sua resposta.

03. Mostre que as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{in}$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i}$  divergem.

04. Determine o raio de convergência das séries a seguir.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n$	(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n}{(5+i)^n} (z+2)^n$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n z^n$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(4+3i)^n} z^n$	(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} z^n$

05. Seja  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < 1$ . Mostre as seguintes identidades:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$	(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$	(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z+4z^2+z^3}{(1-z)^4}$

06. Sejam  $r$  e  $\theta$  números reais, com  $0 < r < 1$ . Mostre as seguintes identidades:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r \cos(\theta) - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r \sin(\theta)}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$
--	--

07. Encontre a expressão de  $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$  como uma série de potências centrada em 0 e calcule o seu raio de convergência.