Variável Complexa

Quinta Lista de Exercícios

01. Sejam n um inteiro não negativo e γ uma curva que liga z_1 a z_2. Mostre que

$$\int_\gamma z^n \, dz = \frac{1}{n+1}\left[(z_2)^{n+1} - (z_1)^{n+1}\right].$$

02. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$.

(a) $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = \dfrac{1}{4}e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(g) $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$ e γ é o quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i, percorrido no sentido anti-horário.

(h) $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ r > 0$.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n},\ n \geq 2$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ r > 0$.

(j) $f(z)$ é o ramo de z^{-1+i} dado por

$$f(z) = \exp\left[(-1+i)\log z\right], \quad (|z| > 0,\ 0 < \arg(z) < 2\pi),$$

e $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(k) $f(z)$ é o ramo de z^i dado por

$$f(z) = \exp\left(i \log z\right), \quad (|z| > 0,\ -\pi < \arg(z) < \pi),$$

e $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$.

03. Seja $k \in \mathbb{R}$. Resolva os itens a seguir.

(a) Mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz = 2\pi i$, onde $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{k\cos(t)} \cos(k \operatorname{sen}(t))\,dt = \pi$.

04. Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^2 - 1}\,dz \right| \le \frac{\pi}{3},$$

onde $\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

05. Seja γ o segmento de reta cujas extremidades são i e 1. Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^4}\,dz \right| \le 4\sqrt{2}.$$

Sugestão: Use que o ponto médio de γ é o ponto de γ mais próximo da origem.