UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

SEMESTRE 2023.2

Trabalho sobre Diferenças Finitas

ALUNO: João Vitor de Oliveira Fraga

MATRÍCULA: 537377

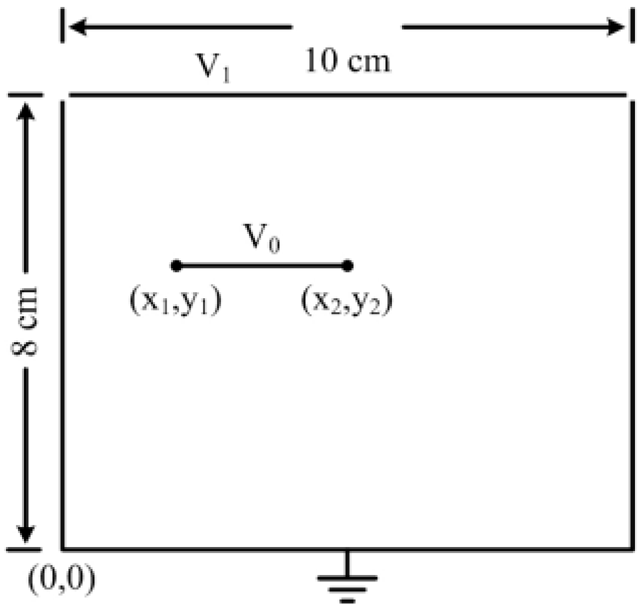
CURSO: Engenharia de Telecomunicações

PROFESSOR: Sergio Antenor de Carvalho

QUESTÃO Nº 1

Para a geometria definida na figura calcule a distribuição de potencial e o campo elétrico na estrutura. Plote a distribuição de potencial e a direção do campo elétrico. Analise os resultados mostrando quais regiões temos o campo elétrico mais intenso. Use o método das diferenças finitas: o iterativo e o da matriz banda. Plote a distribuição de cargas na estrutura e a partir desta distribuição calcule a distribuição de potencial e campo elétrico (a sua direção) em torno da estrutura numa grade quadrada de $20cm$ de lado.

Figura 1: Geometria para o cálculo da distribuição de potencial e campo elétrico



Fonte: Sergio Antenor.

Resposta: Para essa questão, o professor incluiu os valores usados de V_1, V_0, x_1, y_1, x_2 e y_2. No meu caso eu fui o aluno 19, e minhas especificações para a questão foram:

- $V_1 = 10V$
- $V_0 = 6V$
- $(x_1, y_1) = (2cm, 7cm)$
- $(x_2, y_2) = (4cm, 7cm)$

Com essas informações conseguimos então entender que o a nossa linha com o valor de V_0 será um linha reta, facilitando assim o desenrolar da questão.

Para resolver a questão foi pedido que fosse usado o Método das Diferenças Finitas: Iterativo e Matriz Banda. Dito isto, iremos começar com os resultados do método interativo que se mostrou mais fácil de fazer.

Método das Diferenças Finitas Iterativo

Temos o seguinte código:

```
L = 10;
discretizacao = 100;
V1 = 10; % Para a primeira linha
V0 = 6; % De (2, 7) até (4, 7)
U = zeros(80, discretizacao);  % Matriz 80x100
U(80, 1:100) = V1;  % Potencial de 10 V na borda superior
U(70, 20:40) = V0;

% Loop para calcular o potencial
for k = 1:10000
    for i = 2:79
        for j = 2:99
            if U(i, j) == V1 || U(i, j) == V0 % Mantém o potencial nas
    bordas e na linha
                continue;
            end
            U(i, j) = (U(i - 1, j) + U(i + 1, j) + U(i, j - 1) + U(i, j
    + 1)) / 4;
        end
    end
end
surf(U);shading interp; colorbar;
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
zlabel('Potencial (V)');
title('Distribuição de Potencial na Caixa');
%%
```

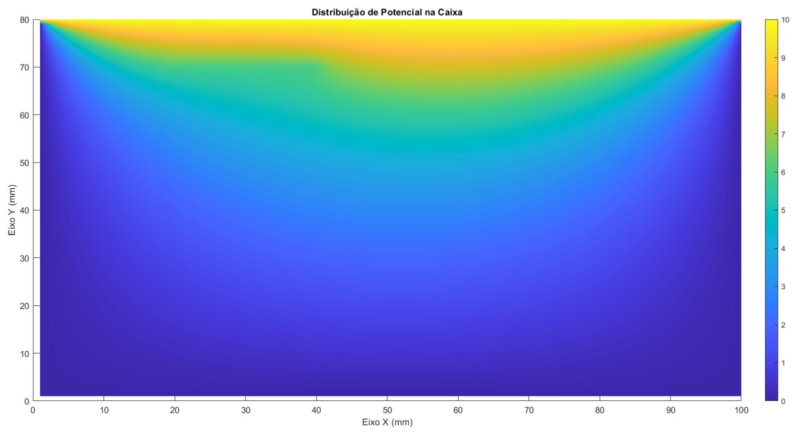
```
[Ex,Ey]=gradient(-U);
epi = 8.85e-12;
% Calcula a divergência do campo elétrico
[divEx, ~] = gradient(Ex);
[~, divEy] = gradient(Ey);
divE = abs(divEx) + abs(divEy);
% Calcula a densidade de carga
rho = epi .* divE;
% Visualização da distribuição de carga
figure;
surf(rho); shading interp; colorbar;
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
zlabel('\rho');
title('Distribuição de Carga na Caixa');
% Visualização alternativa da distribuição de carga
figure;
imagesc(rho); colormap('jet'); colorbar;
title('Distribuição de Carga na Caixa');
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
figure, contour(U,'LineWidth',2);
hold on, quiver(Ex,Ey,4), hold off
axis tight;
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
title('Campo Elétrico na Estrutura')
%%
dx = 0.5;
dy = 0.5;
% Define a região de interesse fora da caixa
x_f = [-20, 80]; % Limites em x
y_f = [-20, 80]; % Limites em y

% Cria uma grade para calcular o potencial fora da caixa
[X, Y] = meshgrid(min(x_f):dx:max(x_f), min(y_f):dy:max(y_f));
V_exterior = zeros(size(X)); % Inicializa a matriz de potencial exterior
```

```
% Cálculo do potencial exterior a partir da distribuição de carga
for i = 1:size(U, 1)
    for j = 1:size(U, 2)
        r = sqrt((X - i*dx).^2 + (Y - j*dy).^2);
        V_exterior = V_exterior + rho(i, j) ./ (4 * pi * epi * r);
    end
end

% Tratar singularidades
V_exterior(isinf(V_exterior)) = NaN;

% Calculando o campo elétrico exterior
[Ex_exterior, Ey_exterior] = gradient(-V_exterior, dx, dy);

% Plotando o potencial exterior
figure;
surf(X, Y, V_exterior);
shading interp;
colorbar;
title('Distribuição de Potencial Exterior da Caixa');
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
zlabel('Potencial (V)');

% Plotando o campo elétrico exterior
figure;
quiver(X, Y, Ex_exterior, Ey_exterior, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
title('Campo Elétrico Exterior');
xlabel('Eixo X (mm)');
ylabel('Eixo Y (mm)');
```

Após colocarmos esse código no ambiente do MatLab, iremos analisar os resultados obtidos.

Primeiro iremos verificar se o potencial ficou certo, tendo em vista que a linha superior deve ter um potencial de exatamwente $10V$, enquanto a linha que vai se (x_1, y_1) até (x_2, y_2) deve ter um potencial de 6V, o que se mostra verdadeiro na imagem plotada:

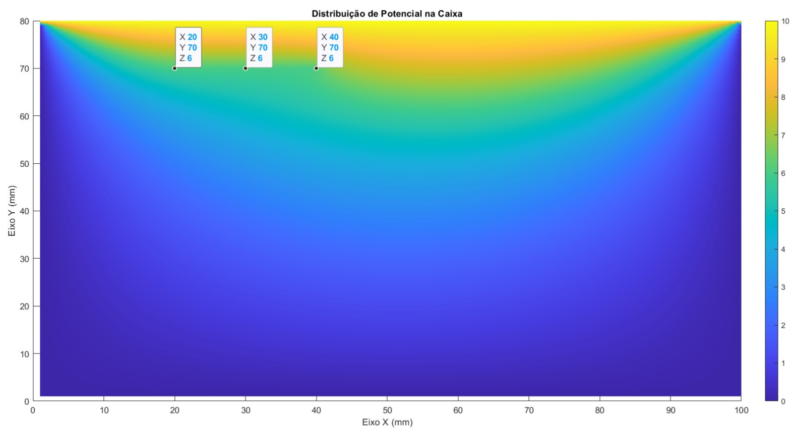
Figura 2: Potencial na Caixa



Fonte: Elaborado pelo autor.

A olho nu pode ser dificil de acreditar que dentro do espaço correto, o potencial é de $6V$, contudo se formos analisar os valores plotados, conseguimos verificar isso, como é provado na imagem a seguir:

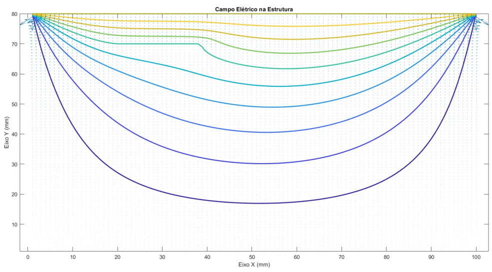
Figura 3: Potencial na Caixa com Valores



Fonte: Elaborado pelo autor.

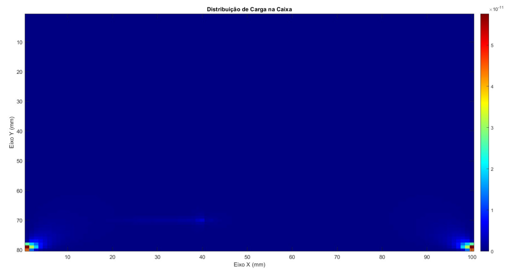
É possível então verificar que o código se mostrou eficar em realizar a itereção para calcular o potencial ao longo da caixa ao mesmo tempo que mantém os potenciais fixos em V_0 e V_1.

Após isso, usarmos o método das diferenças finitas para obter o potencial dentro da caixa, basta usarmos o $-\nabla V$, para assim obter o Campo Elétrico e logo após a distribuição de carga dentro da caixa.



(a) Campo Elétrico na Caixa

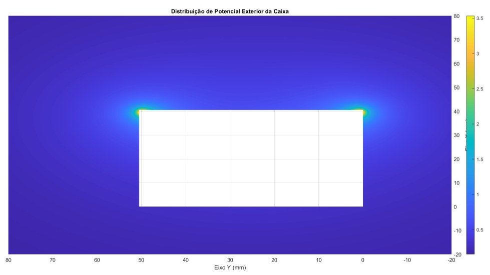
Fonte: Elaborado pelo autor.



(b) Carga na Caixa

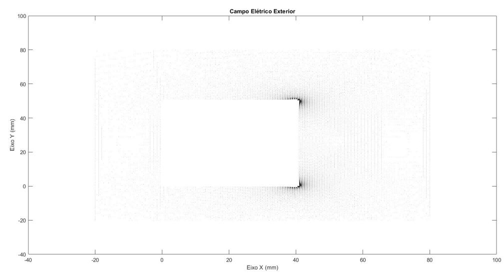
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso temos todos os dados pedidos para o interior da caixa, com isso iremos partir para plotar o que é pedido do lado de fora da caixa.



(a) Potencial Fora da Caixa

Fonte: Elaborado pelo autor.



(b) Campo Elétrico Fora da Caixa

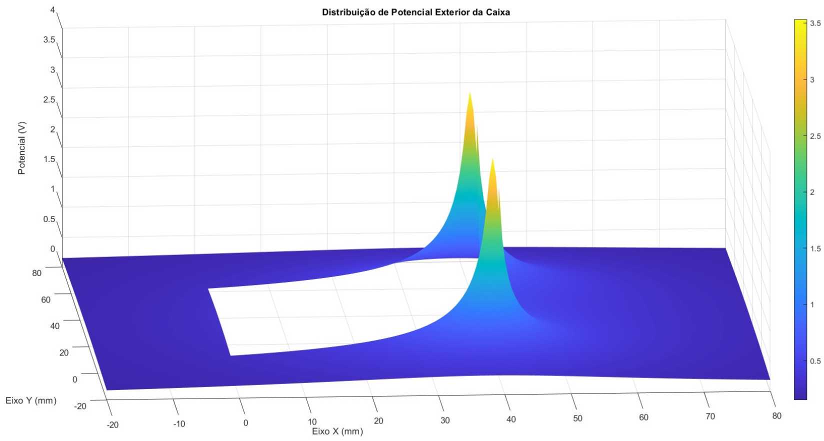
Fonte: Elaborado pelo autor.

Conseguimos analisar na distribuição de carga dentro da caixa que as acumulações ocorrem nas extremidas dos fios, tanto no no da parte superior da caixa quanto na parte interna interna dela.

Além disso, é possível perceber que o fio interior influencia no potencial do lado de fora da caixa, conseguimos ver isso de uma maneira mais clara na seguinte imagem.

Com isso finalizamos a análise do Método das Diferenças Finitas usando o iterativo

Figura 6: Potencial Fora da Caixa 3D



Fonte: Elaborado pelo autor.

Método das Diferenças Finitas da Matriz Banda

Temos o seguinte código:

```
Nx=100; % Número de pontos na direção x
Ny=100; % Número de pontos na direção y
Ngrid=Nx*Ny;
dx=1; % resolução da grade
dy=1;

V=zeros(Nx,Ny); % Potencial inicial em todos os pontos

% Definindo as condições de contorno
V(1,:)=0;
V(:,1)=0;
V(:,end)=0;
V(end,:)=-10;

% Definindo os pontos da linha de potencial
x1 = 20; y1 = 87.5;
x2 = 40; y2 = 87.5;
numPoints = max(abs(x2-x1), abs(y2-y1)); % Número de pontos na linha
xLine = round(linspace(x1, x2, numPoints));
yLine = round(linspace(y1, y2, numPoints));

```

```
V=V'; % Transposição para trabalhar com a indexação correta
Vi=V(:); % Condição inicial em forma de vetor

% Formando a Matriz Laplaciana
neg_one=-1.*ones(Ngrid,1);
pos_one=1.*ones(Ngrid,1);
Lap=spdiags([pos_one pos_one 4.*neg_one pos_one pos_one], [-Nx -1 0 1 Nx
    ], Ngrid, Ngrid);

% Aplicando as condições de contorno de Dirichlet
C=spdiags(Lap,1);
for i=1:(Nx-1)
   C(i*Nx+1)=0;
end
Lap=spdiags(C,1,Lap);
C=spdiags(Lap,-1);
for i=1:(Nx-1)
   C(i*Nx)=0;
end
Lap=spdiags(C,-1,Lap); % Matriz Laplaciana

% Definindo a linha de potencial
for i = 1:numPoints
   idx = (yLine(i)-1)*Nx + xLine(i); %  ndice  linear correspondente
   Lap(idx, :) = 0;  % Zera a linha na matriz Laplaciana
   Lap(idx, idx) = 1; % Define o coeficiente diagonal para 1
   Vi(idx) = 6;      % Define o valor do potencial (30V)
end

% Resolver o sistema linear
Vf=(Lap\Vi); % Potencial do capacitor
potencial=reshape(Vf,Nx,Ny)'; % conversão do vetor de potencial para
    matriz

%Plotando o Resultado Correto
surf(potencial);shading interp; colorbar;
xlabel('Eixo X (mm)');
```

```
ylabel('Eixo Y (mm)');
zlabel('Potencial (V)');
title('Distribuição de Potencial na Caixa');
%%
[Ey, Ex] = gradient(-potencial, dx, dy); % O MATLAB retorna Ey antes de Ex

figure('Color','w');
quiver(Ex, Ey, 'AutoScaleFactor', 4); % Aumentar o tamanho dos vetores
axis equal tight;
title('Campo Elétrico dentro da caixa','fontsize',14);
xlabel('X','fontsize',14);
ylabel('Y','fontsize',14);
set(gca, 'FontSize', 14);
%%

% Constante de permissividade do vácuo
epsilon0 = 8.854e-12;

% Calculando o campo elétrico normal nas arestas
% Note que você precisa extrair a componente normal do campo elétrico
% nas arestas e na linha interna. O método exato dependerá da orientação
% de cada aresta e da linha.

% Para as arestas verticais (esquerda e direita)
rho_s_left = epsilon0 * abs(Ex(:,1));
rho_s_right = epsilon0 * abs(Ex(:,end));

% Para as arestas horizontais (superior e inferior)
rho_s_top = epsilon0 * abs(Ey(1,:));
rho_s_bottom = epsilon0 * abs(Ey(end,:));

% Para a linha de potencial interna
% Você precisa calcular a componente normal do campo elétrico
% ao longo dessa linha. O cálculo exato dependerá da orientação da linha.
rho_s_line = epsilon0 * abs(Ex(20:40,70));
```

```

% Agora você tem a distribuição de carga nas arestas e na linha interna
% Você pode visualizar ou analisar esses dados conforme necessário


% Crie uma matriz de zeros para a densidade de carga
rho = zeros(Ny, Nx);

% Atribua os valores calculados de rho_s às bordas correspondentes
rho(1,:) = rho_s_top;        % Aresta superior
rho(end,:) = rho_s_bottom;   % Aresta inferior
rho(:,1) = rho_s_left;       % Aresta esquerda
rho(:,end) = rho_s_right;    % Aresta direita

% Agora atribua os valores de rho_s_line à linha interna
for i = 1:numPoints
    rho(yLine(i), xLine(i)) = rho_s_line(i);
end

% Plotando a densidade de carga superficial com surf
figure;
surf(rho);
shading interp; % Para um visual mais suave sem linhas de grade
title('Distribuição de Carga Superficial');
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Densidade de Carga (C/m^2)');
colorbar; % Adiciona uma barra de cores para
figure;
imagesc(rho);
colormap('jet');
colorbar;
title('Distribuição de Carga a caixa');
xlabel('Coordenada X');
ylabel('Coordenada Y');
%%
epsilon0 = 8.854e-12; % Permissividade do vácuo
```

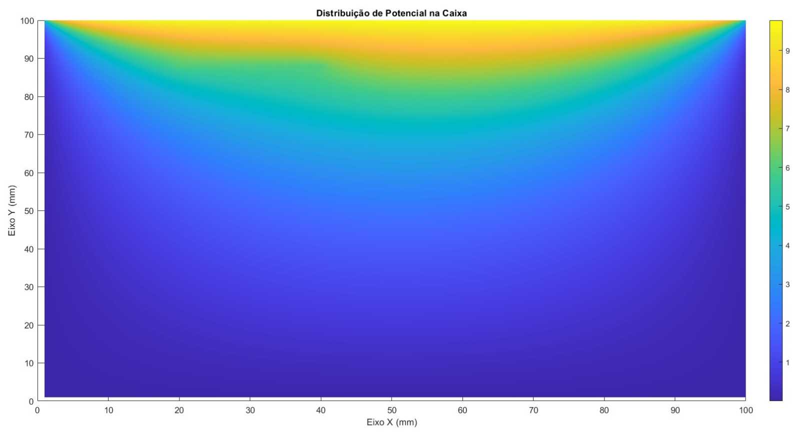
```

% Define a região de interesse
x_range = [-50, 150]; % Limites em x
y_range = [-50, 150]; % Limites em y

% Cria uma grade para calcular o potencial
[X, Y] = meshgrid(min(x_range):dx:max(x_range), min(y_range):dy:max(
    y_range));
V = zeros(size(X)); % Inicializa a matriz de potencial

% Cálculo do potencial a partir da distribuição de carga
for i = 1:Nx
    for j = 1:Ny
        r = sqrt((X - i*dx).^2 + (Y - j*dy).^2);
        V = V + rho(i, j) ./ (4 * pi * epsilon0 * r);
    end
end

% Tratar singularidades
V(isinf(V)) = NaN;

% Calculando o campo elétrico
[Ex, Ey] = gradient(-V, dx, dy);

% Plotando o potencial
figure;
surf(X, Y, V);
shading interp;
colorbar;
title('Distribuição de Potencial');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('Potencial (V)');

% Plotando o campo elétrico
figure;
quiver(X, Y, Ex, Ey, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
```

```
title('Campo Elétrico');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

Nesse método, confesso que foi bem mais díficil a ánalise e implementação do código. Isso ocorreu não somente pela dificuldade do método em si, mas porque o código anterior foi usado na tarefa 4.

Nesse código eu repeti alguns processos do código iterativo, onde eu defini as condições de contorno dada pelo professor. Após isso, utilizo o método das diferenças finitas, o código constrói uma matriz Laplaciana para modelar o operador Laplaciano na grade. As condições de contorno de Dirichlet são aplicadas, e um sistema linear é resolvido para obter a distribuição final do potencial. Por fim, o resultado é visualizado como um mapa de calor tridimensional, mostrando a variação do potencial elétrico na área especificada.

Figura 7: Potencial na Caixa



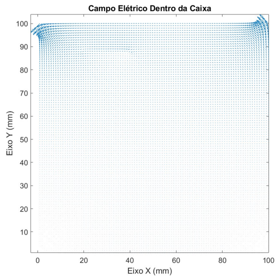
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando analisamos essa distribuição do potencial, conseguimos inferir que ela está semelhante a distribuição obtida usando o método iterativo, mostrando assim o sucesso na aplicação.

Com o potencial, conseguimos obter o restante dos valores. Obtemos o campo elétrico a partir de $-\nabla V$, e para ter a distribuição de carga, conseguimos $\rho = E\xi$.

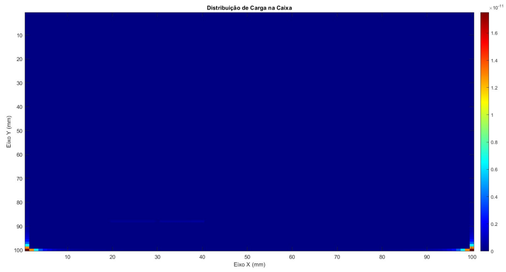
Após realizarmos esse processo no código, temos então as próximas imagens:

Conseguimos novamente perceber um acumulo de carga nas bordas dos dois fios e no restante da caixa é praticamente 0.



(a) Campo ELlétrico na Caixa

Fonte: Elaborado pelo autor.

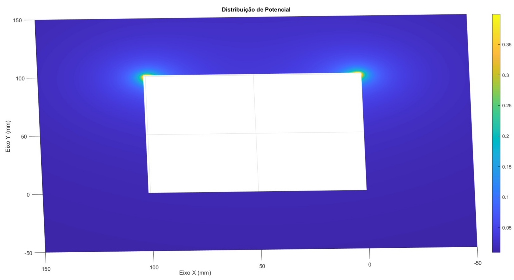


(b) Distribuição de Carga na Caixa

Fonte: Elaborado pelo autor.

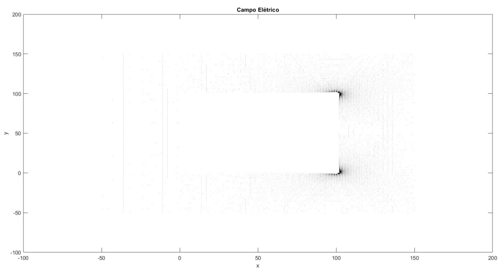
Após isso eu usei o mesmo código do método iterativo, para calcular o potencial e campo elétrico fora da caixa. Fiz isso por causa que se já temos ρ, então o objetivo da Matriz Banda já foi cumprido.

Quando fazemos isso, conseguimos as imagens a seguir.



(a) Potencial Elétrico Fora da Caixa

Fonte: Elaborado pelo autor.



(b) Campo Elétrico Fora da Caixa

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conclusão

Após comparar os métodos da matriz de banda e o interativo, observamos diferenças notáveis. O método da matriz de banda, que converge para o valor exato à medida que o número de iterações aumenta (é como se fosse o método iterativo que tende ao infinito), mostrou-se mais preciso em calcular o potencial dentro da caixa. Essa precisão se reflete de forma acumulativa, impactando significativamente a distribuição do campo elétrico e a densidade de carga (ρ), que variam consideravelmente entre os dois métodos. Devido a essa precisão elevada, o método da matriz de banda resulta em uma distribuição do potencial e do campo elétrico fora da caixa muito mais precisa e bem definida.

A implementação do método interativo foi relativamente simples, aproveitando minha experiência anterior a tarefa sobre Método das Diferenças Finitas. Adaptei esse conhecimento para incorporar uma linha de potencial elétrico dentro da caixa, atendendo às dimensões requeridas, o que me permitiu plotar com sucesso as informações necessárias.

Em resumo, os resultados alcançados destacam a dualidade dos métodos computacionais: enquanto métodos mais simples podem ser irregulares em precisão, aqueles mais complexos e desafiadores, como a matriz de banda, tendem a oferecer resultados mais precisos, sendo comparáveis em eficácia ao método dos elementos finitos em termos de acurácia.

Contudo, vale lembrar que dependendo do objetivo de usar esse método, talvez não seja tão necessário a utilização da Matriz Banda devido a sua complexidade.