Introduction to control systems
TI0118

Homework 1

Student name: João Vitor de Oliveira Fraga
Student number: 537377

Student name: Abraão de Carvalho Albuquerque
Student number: 538286

Exercise 1

Find the inverse Laplace transform by hand calculations and verify your results using the Symbolic toolbox for the following functions:

a. $F_1(s) = \dfrac{3s^2 + 5s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

b. $F_2(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3}$

c. $F_3(s) = \dfrac{2s + 3}{s^3 + 6s^2 + 21s + 26}$

d. $F_4(s) = \dfrac{1 + 2e^{-s}}{s^2 + 3s + 2}$

Solution

Realizando o cálculo de cada um temos:

a.

$$F_1(s) = \frac{3s^2 + 5s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{3s^2 + 5s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Após isso, iremos descobrir os valores de A, B, C.

$$A = (s+1)F_1(s)\Big|_{s=-1} = \frac{3(-1)^2 + 5(-1)}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$B = (s+2)F_1(s)\Big|_{s=-2} = \frac{3(-2)^2+5(-2)}{(-2+1)(-2+3)} = \frac{12-10}{-1} = -2$$
$$C = (s+3)F_1(s)\Big|_{s=-3} = \frac{3(-3)^2+5(-4)}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{27-15}{2} = 6$$

Dessa maneira temos então que

$$F_1(s) = \frac{-1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{6}{s+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_1(t) = -e^{-t} - 2e^{-2t} + 6e^{-3t}$$

b.
$$F_2(s) = \frac{s^2+2s+1}{(s+2)^3} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)^3}$$

Após isso iremos descobrir os valores de A, B, C fazendo de maneira distribuida.

$s^2+2s+1 = A(s+2)^2+B(s+2)+C \rightarrow s^2+2s+1 = As^2+4As+4A+Bs+2B+C$

A = 1

4A + B = 2 $\rightarrow B = 2-4A = -2$

B = -2

4A + 2B + C = 1 $\rightarrow C = 1-4+4 = 1$

C = 1

Dessa maneira temos então que:

$$F_2(s)\frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_2(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{t^2e^{-2t}}{2}$$

c.

$$F_3(s) = \frac{2s+3}{s^3+6s^2+21s+16} = \frac{2s+3}{(s+2)(s^2+4s+13} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{(s^2+4s+13)}$$

Após isso iremos descobrir os valores de A, B, C.

$2s+3 = As^2+4As+13A+Bs^2+2Bs+Cs+2C \therefore 2s+3 = (A+B)s^2+(4A+2B+C)s+13A+2C$

Com isso conseguimos montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 4A+2B+C &= 2 \\ 13A+2C &= 3 \end{cases}$$

Quando substituimos então $A = -B$ no sistema linear temos:

$$\begin{cases} 2A + C &= 2 \\ 13A + 2C &= 3 \end{cases}$$

Quando resolvemos esse sistema linear, obtemos os seguintes valores:

$$A = -\frac{1}{9}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{20}{9}$$

Dessa maneira temos então que:

$$F_3(s) = \frac{-1}{3(s+2)} + \frac{s+8}{3(s^2+4s+13)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_3(t) = -\frac{e^{-2t}}{3} + \frac{(-2sen(3t) + 3cos(3t))e^{-2t}}{9} + \frac{8e^{-2t}sen(3t)}{9}$$

d.

$$F_4(s) = \frac{1+2e^{-2}}{s^2+3s+2} = \frac{1+2e^{-2}}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

Após isso iremos descobrir os valores de A, B, C.

$$A = (s+1)F_4(s)\bigg|_{s=-1} = \frac{1+2e}{1} = 1 + 2e$$

$$B = (s+2)F_4(s)\bigg|_{s=-2} = \frac{1+2e^2}{-1} = -1 + 2e^2$$

Dessa maneira temos então que:

$$F_4(s) = \frac{1+2e}{s+1} + \frac{-1-2e^2}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_4(t) = 2e^{1-t} - 2e^{2-2t} + e^{-t} - e^{-2t}$$

Comparando agora com os valores achados quando rodamos o código, obtemos os seguintes valores:

$$f_1(t) = \left(-e^{2t} - 2e^{t} + 6\right) e^{-3t}u(t)$$
$$f_2(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - 4t + 2\right) e^{-2t}u(t)$$
$$f_3(t) = \frac{1}{9}\left(6\sin(3t) + \cos(3t) - 1\right) e^{-2t}u(t)$$
$$f_4(t) = \left(-\left(1 - e^{t}\right) e^{t-2}u(t) - 2\left(1 - e^{t-1}\right) e^{t}u(t-1)\right) e^{2-3t}$$

Quando comparamos com os valores obtidos a partir do cálculo manual pode parecer que são equações diferentes, porém elas mudam apenas a escrita, já que representam a mesma função.

Listing 1: Ode resolution

```
from sympy import symbols, inverse_laplace_transform, exp

# Definindo as vari veis "t" no dom nio do Tempo e "s" no dom nio de
    Laplace
s, t = symbols('s␣t')

# Definindo as fun   es que eu quero encontrar a transformada inversa de
     Laplace
F1 = (3*s**2 + 5*s)/(s**3 + 6*s**2 + 11*s + 6)
F2 = (s**2 + 2*s +1)/((s + 2)**3)
F3 = (2*s + 3)/(s**3 + 6*s**2 + 21*s + 26)
F4 = (1 + 2*exp(-s))/(s**2 + 3*s + 2)

# Encontrando as transformada inversas de Laplace
f1 = inverse_laplace_transform(F1, s, t)
f2 = inverse_laplace_transform(F2, s, t)
f3 = inverse_laplace_transform(F3, s, t)
f4 = inverse_laplace_transform(F4, s, t)

# Imprimir o resultado
print(f'Temos␣que␣as␣transformadas␣inversas␣de␣Laplace␣s  o:\n␣f1(t)␣=␣{
    f1}␣\n␣f2(t)␣=␣{f2}␣\n␣f3(t)␣=␣{f3}␣\n␣f4(t)␣=␣{f4}')
```

Exercise 2

In order to study the effect of zeros in response of a system, consider the transfer function given in equation (1).

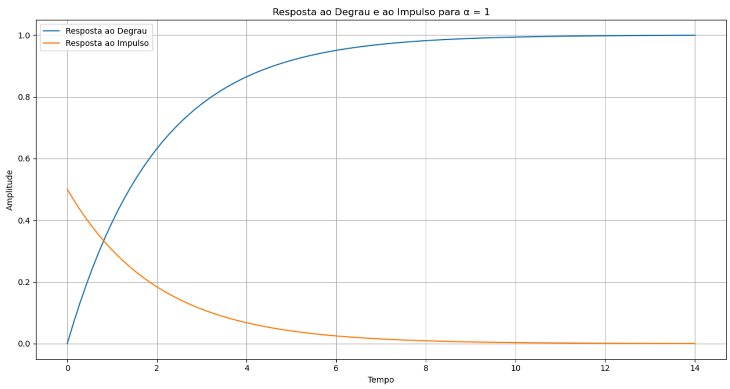
$$G(s) = \frac{\alpha s + 1}{2s^2 + 3s + 1} \tag{1}$$

Do the following:

1. For $\alpha = 1$, find and plot the unit step and impulse responses.
2. For $\alpha = [-1, 5, 0, 5\,, 7]$, plot and compare the unit step response.
3. Discuss how the system varies its response for the different values of α.

Solution

Figure 1: Resposta $G(s)$ para $\alpha = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Nós conseguimos obter esse plot e essas diferentes respostas, pois sabemos que quando colocamos no domínio de Laplace a função impulso, obtemos 1, e a função degrau unitário, obtemos $\frac{1}{s}$, resolvendo as duas equações, temos:

$$G(s)_{impulso} = \frac{s+1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{s+1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+\frac{1}{2}}$$

$$A = (s+1)G(s)_{impulso}\Big|_{s=-1} = 0$$

$$B = (s+\frac{1}{2})G(s)_{impulso}\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 1$$

$$G(s)_{impulso} = \frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2s+1}$$

$$G(s)_{degrau} = \frac{s+1}{s(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s+1} + \frac{F}{s+\frac{1}{2}}$$

$$D = (s)G(s)_{degrau}\Big|_{s=0} = 1$$

$$E = (s+1)G(s)_{degrau}\Big|_{s=-1} = 0$$

$$F = (s+\frac{1}{2})G(s)_{degrau}\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = -2$$

$$G(s)_{degrau} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1}$$

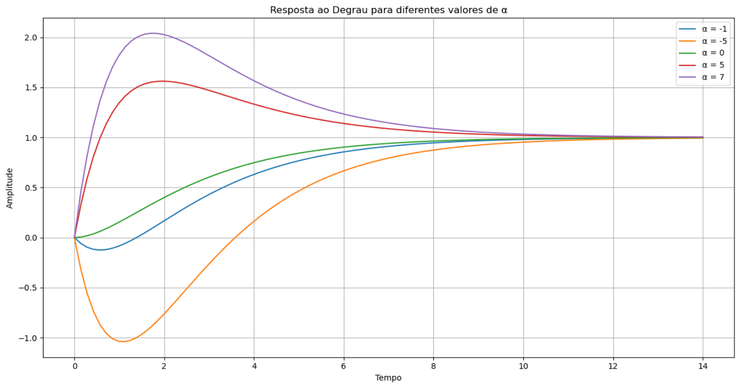
Trazendo então para o domínio do tempo, temos as seguintes equações:

$$g(t)_{impulso} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}$$

$$g(t)_{degrau} = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

Análisando essas equações, conseguimos comprovar que a plotagem está correta, tendo em vista que a resposta em degrau irá convergir em 1 e a resposta ao impulso irá convergir em 0.

Figure 2: Resposta $G(s)$ para $\alpha = [-1, 5, 0, 5\,, 7]$



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Aqui temos a plotagem para os diferentes valores de α

3. Isso ocorre devido ao fato de que quando mudamos o valor que está multiplicando o s, nossos sistema irá ter uma nova solução, que quando colocarmos elas no domínio do tempo iremos ter diferentes funções, a exemplo temos que:

$$f_{\alpha=-1}(t) = -2e^{-t} + \frac{3e^{-\frac{t}{2}}}{2}, f_{\alpha=-5}(t) = -6e^{-t} + \frac{7e^{-\frac{t}{2}}}{2}, f_{\alpha=0}(t) = -e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}$$

$$f_{\alpha=5}(t) = 4e^{-t} - \frac{3e^{-\frac{t}{2}}}{2}, f_{\alpha=7}(t) = 6e^{-t} - \frac{5e^{-\frac{t}{2}}}{2}$$

A partir de um certo ponto essas funções irão ter valores diferentes, mas em seguida as funções irão se aproximar de 1, como mostrado no gráfico.

Listing 2: Ode resolution

```
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

#ITEM 1
num1 = [1, 1]
den1 = [2, 3, 1]
sys1 = signal.TransferFunction(num1, den1)

# Calculando e plotando a resposta ao impulso
t1, y1 = signal.step(sys1)
t2, y2 = signal.impulse(sys1)

plt.figure()
plt.plot(t1, y1)
plt.plot(t2, y2)
plt.legend(['Resposta␣ao␣Degrau', 'Resposta␣ao␣Impulso'])
plt.title('Resposta␣ao␣Degrau␣e␣ao␣Impulso␣para␣ ␣=␣1')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.show()

#ITEM 2.
alphas = [-1, -5, 0, 5, 7]
num = []
den = [2, 3, 1]
# Criando a fun  o de transfer ncia
sys = []
for i in range(len(alphas)):
    num = [alphas[i], 1]
    sys.append(signal.TransferFunction(num, den))

t, y = [[] for _ in range(len(alphas))], [[] for _ in range(len(alphas))]


for i in range(len(alphas)):
    t[i], y[i] = signal.step(sys[i])

plt.figure()
for i in range(len(alphas)):
    plt.plot(t[i], y[i])
plt.legend([' ␣=␣-1', ' ␣=␣-5', ' ␣=␣0', ' ␣=␣5', ' ␣=␣7'])
plt.title('Resposta␣ao␣Degrau␣para␣diferentes␣valores␣de␣ ')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Exercise 3

Consider the input-output model in equation (4):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4\frac{d^2u(t)}{dt} + 15\frac{du(t)}{dt} + 19u(t) \tag{2}$$

1. Define the characteristic polynomial and plot the system modes.
2. Given the initial conditions in equation (3), find the free evolution of the system in equation (4):

$$y(t)\Big|_{t=0} = 1, \quad \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 1 \tag{3}$$

3. Find the forced response of the system subject to a unit step input.
4. By means of the programming language of your choice, plot the response $y(t)$ and comment on your results.

Solution

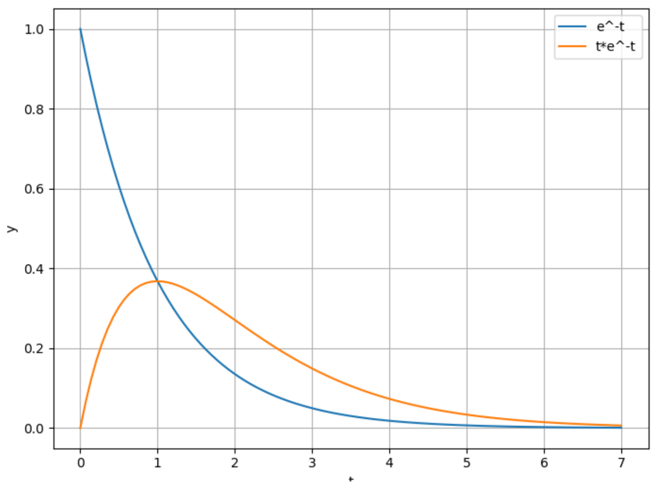
1. Usando a transformada de laplace:

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 \tag{4}$$

   Logo, temos que a única raiz da equação é -1 com multiplicidade igual a 2. Portanto, os modos do sistema são:

$$e^{-t}, te^{-t}$$

Figure 3: Plot dos modos do sistema e^{-t} e te^{-t}



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Iremos usar transformada de laplace para calcular a evolução livre do sistema tendo os valores iniciais.

$$s^2Y(s) - sy'(0) - y(0) + 2sY(s) - y'(0) + Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+1}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$s + 3 = A(s+1) + B$$

Com isso, temos que A = 1 e B = 2. Substituindo os valores na equação e fazendo a transformada inversa temos que:

$$y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}$$

3. Iniciamos novamente, fazendo a transformada de laplace para equação:

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) = U(s)(4s^2 + 15s + 19)$$

Isolando o Y(s) e substituindo o valor de U(s) pela transformada de laplace da função degrau únitario temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} * \frac{4s^2 + 15s + 19}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

De mesmo modo do item anterior podemos concluir que:

$$s^2(A+B) + s(2A + B + C) + A = 4s^2 + 15s + 19$$

Com isso, temos que A = 19, B = -15 e C =-8. Substituindo os valores na equação e fazendo a transformada inversa temos que:

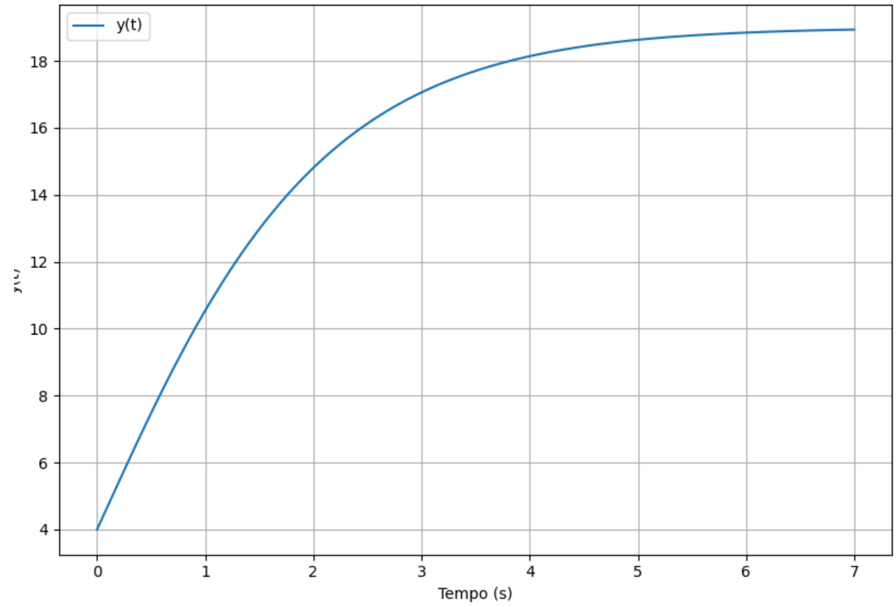
$$y(t) = 19 - 15e^{-t} - 9te^{-t}$$

4. Com a equação acima antes de calcular a trasformada inversa de laplace, apenas fazendo a resposta na frequência ao degrau únitario, foi feita a implementação do código em python. A seguir o código e o gráfico:

Listing 3: Ode resolution

```
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import symbols, inverse_laplace_transform, exp

# Definindo as vari veis "t" no dom nio do Tempo e "s" no dom nio de
    Laplace
s, t = symbols('s␣t')

# Definindo as fun  es que eu quero encontrar a transformada inversa de
    Laplace
F1 = (4*s**2 + 15*s+ 19)/(s**3 + 2*s**2 + s )

# Encontrando as transformada inversas de Laplace
f1 = inverse_laplace_transform(F1, s, t)

# Imprimir o resultado
print(f'Temos␣que␣as␣transformadas␣inversas␣de␣Laplace␣s  o:\n␣f(t)␣=␣{f1
    }')

num = [4,15,19]
den = [1,2,1]
sys = signal.TransferFunction(num, den)
t, y = signal.impulse(sys)

print('Resposta␣ao␣impulso␣y(t)␣=␣', sys.inputs)

plt.figure()
plt.plot(t, y, label='y(t)')
plt.xlabel('Tempo␣(s)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Sa da␣y(t)␣em␣resposta␣a␣u(t)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
[t, y] = ode45(@(t,x) springmass(t,x,m,c,k),[0 50],[2 0]);
```

Figure 4: Resposta a função $\mu(t)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico corresponde ao valor esperado no item 3, pois y(0)=4 e quando t vai tendendo ao infinito ficamos com valores cada vez mais próximos a 19. Podemos considerar essa função como um degrau unitario que não tem o aumento brusco de valor e sobe mais devagar ao valor de 19.

Exercise 4

Given the state-space model in (5):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t) \end{cases} \tag{5}$$

1. Find a the corresponding transfer function $G(s) = Y(s)/U(s)$.
2. Find an input-output model equivalent to the state-space model.
3. Find the state and output forced evolution as response of the input $u(t) = e^{-3t}\delta(t)$.

Solution

1. Para achar o $G(s)$ a partir do espaço de estado, foi usado o conhecimento de que $G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$

   Com isso, precisamos agora descobrir quais são as matrizea A, B, C, D, temos então que $D = 0$ e:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Is = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

   Então, a partir disso fazemos o cálculo com as matrizes:

$$(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}) \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \therefore G(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$

   Colocamos as matrizes no Python e quando rodamos o código obtemos:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$

   Mostrando que está igual ao resultado achado anteriormente.

2. Sabemos que $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ quando fazemos a separação, temos então a seguinte equação:

$$(2s)Y(s) = (s^2 + 2s + 5)U(s) \therefore 2sY(s) = s^2U(s) + 2sU(s) + 5U(s)$$

Aplicando então a transformada inversa de Laplace, temos que o modelo entrada-saída é:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du^2(t)}{dt} + 2\frac{du(t)}{dt} + 5u(t)$$

3. Para realizar essa questão, usamos o seguinte conhecimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \therefore Y(s) = G(s)U(s)$$

Como sabemos que $u(t) = e^{-3t}\delta(t)$, quando aplicamos a transformada de Laplace obtemos: $U(s) = \frac{1}{s+3}$, com isso em mente, temos então:

$$Y(s) = G(s)U(s) = (\frac{2s}{s^2 + 2s + 5})(\frac{1}{s+3}) = \frac{2s}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15}$$

Resolvendo essa equação, temos:

$$\frac{2s}{(s+3)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

$2s = As^2 + 2As + 5A + Bs^2 + 3Bs + Cs + 3C \therefore 2s = (A+B)s^2 + (2A+3B+C)s + 5A + 3C$

Montando o sistema linear temos então:

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ 2A + 3B + C &= 2 \\ 5A + 3C &= 0 \end{cases}$$

Após resolver esse sistema, obtemos os seguintes valores:

$$A = -\frac{3}{4}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{5}{4}$$

Temos então a seguinte equação

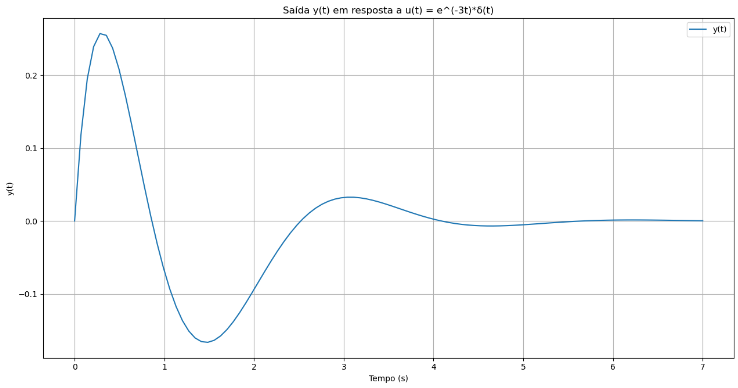
$$Y(s) = -\frac{3}{4(s+3)} + \frac{3s + 5}{4(s^2 + 2s + 5)}$$

Aplicando então a transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \frac{3(-sen(2t) + 2cos(2t))e^{-t}}{8} + \frac{5e^{-t}sen(2t)}{8} - \frac{3e^{-3t}}{4}$$

Fazendo então a plotagem dessa equação, temos:

Figure 5: Resposta a função $e^{-3t}\delta(t)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Listing 4: Ode resolution

```
import numpy as np
from sympy import inverse_laplace_transform, symbols, Matrix, eye,
    Function, simplify, fraction, exp, DiracDelta, lambdify,
    laplace_transform
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

#ITEM 1
#Sabemos que para encontrar a fun  o de transfer ncia dessa quest o
       necess rio utilizar da seguinte equa  o:
#G(s) = C(Is - A)^-1 * B + D
#Declarando as vari veis de acordo com a equa  o

s, t = symbols('s␣t')

A = Matrix([[0, 1], [-5, -2]])
B = Matrix([[0], [2]])
C = Matrix([[0, 1]])
Is = s*eye(2)

G_s = (C * (Is - A).inv() * B)
G_s = G_s[0]
print(f'\nA␣fun  o␣de␣transfer ncia␣do␣sistema␣ :\n␣{G_s}')

#ITEM 2
#Temos que G(s) = Y(s)/U(s), onde Y(s)   a sa da e U(s)   a entrada,
    fazendo ent o a separa  o das vari veis:
g_t = inverse_laplace_transform(G_s, s, t)
print(f'\nTemos␣ent o␣que␣o␣modelo␣entrada-sa da␣do␣sistema␣ :\n␣{g_t}
    ')

#ITEM 3
```

```
#Para encontrar a resposta a u(t) =  e^(  3t  )*  (t)
#Sabemos que G(s) = 2*s/(s**2 + 2*s + 5), quando multiplicamos por U(s) =
    1/s + 3, temos que Y(s) = 2*s/(s**2 + 2*s + 5) * 1/(s+3)
#Logo Y(s) = 2*s/(s**3 + 5*s**2 + 11*s + 15)

num = [2, 0]
den = [1, 5, 11, 15]
sys = signal.TransferFunction(num, den)
t, y = signal.impulse(sys)

plt.figure()
plt.plot(t, y, label='y(t)')
plt.xlabel('Tempo␣(s)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Sa da␣y(t)␣em␣resposta␣a␣u(t)␣=␣e^(-3t)*  (t)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```