Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Engenharia de Telecomunicações

Guias e Ondas

Prova 02

Aluno: Alyson Veras de Araújo
Matricula: 390245
Professor: Sergio Antenor de Carvalho

Fortaleza, 2019

Questão 01 - Uma linha de transmissão sem perdas com $C = 8 \times 10^{-11}$ F/m e $L = 3 \times 10^{-7}$ H/m tem comprimento $d = 38m$ e uma carga $Z_L = 20\Omega$. Se uma fonte ideal de tensão fornece 100V na entrada da linha e opera numa frequência $f_1 = 2$ MHz a $f_2 = 4$ MHz, determine as curvas da corrente de entrada da linha e a corrente na carga em função da frequência(intensidade e fase).

Solução:

PARTE 1

Precisamos calcular a corrente na entrada da linha (z = 0) e na carga(z = 20m). Para isso é preciso antes calcular V^+, Z_0, γ e Γ.

Consideremos para uma fonte ideal, a tensão V^+. Esta pode é dada pela equação abaixo:

$$V^+ = \frac{V_{in}}{1+\Gamma} = \frac{100}{1+\Gamma}$$

Assim podemos calcular Z_0:

$$Z_0 = (\frac{L}{C})^{1/2} = (\frac{3 \times 10^{-7}}{8 \times 10^{-11}})^{1/2} = 42,86\Omega$$

Com isso podemos calcular o coeficiente de reflexão Γ dada pela equação:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{20 - 42,86}{20 + 42,86} \approx -0,376$$

Agora podemos calcular a constante de fase β através da equação abaixo:

$$\beta = \omega(LC)^{1/2} = 2\pi f(LC)^{1/2}$$

Substituindo os valores encontrados, temos:

$$\beta = 2\pi f(3 \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{-11})^{1/2} = 3,08f \times 10^{-8} rad/m$$

Agora podemos obter o valor do coeficiente de reflexão da fonte Γ_S através da equação abaixo:

$$\Gamma_S = \Gamma_L e^{-2jd\beta}$$

$\Gamma_S = -0,376e^{-j(2\times38\times3,08\times10^{-8}\times f)}$

$$\Gamma_S = -0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}}$$

Após todo esses processos conseguimos agora calcular a corrente de entrada na linha I_S e a corrente na carga I_L através das equações abaixo.

$$I_S = \frac{V^+}{Z_0}(1 - \Gamma_S)$$

$$I_L = \frac{V^+ e^{-jd\beta}}{Z_0}(1 - \Gamma_L)$$

Desenvolvendo as equações:

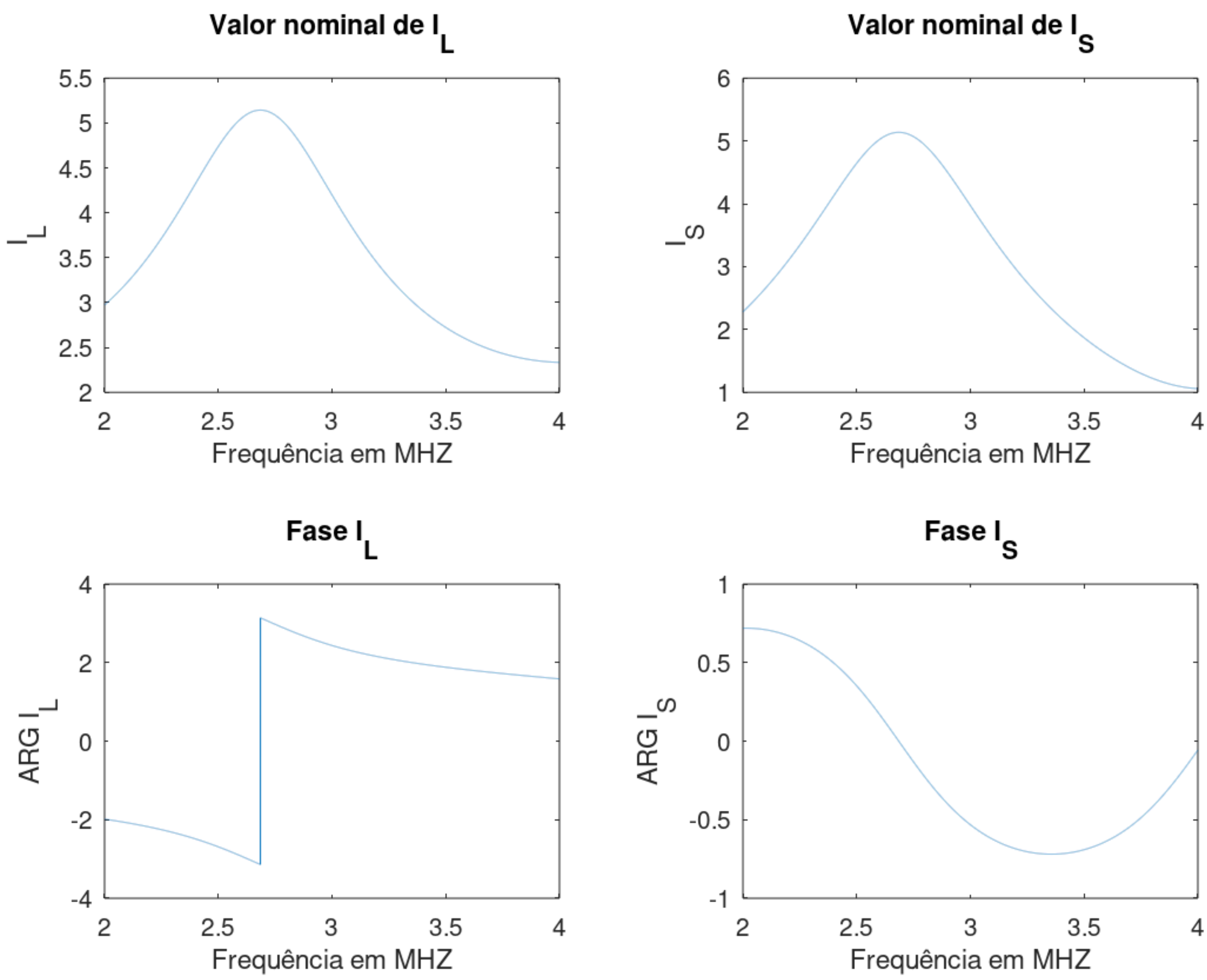
Para I_S:

$$I_S = \frac{V_{in}(1-\Gamma_S)}{Z_0(1+\Gamma_S)} = \frac{100(1-(-0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}}))}{42,86(1+(-0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}}))} \approx 2,33\frac{(1+0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}})}{(1-0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}})}A$$

Para I_L:

$$I_L = \frac{V_{in}e^{-jd\beta}(1-\Gamma_L)}{Z_0(1+\Gamma_S)} = \frac{100e^{-j38\times3,08f\times10^{-8}}(1+0,376)}{42,86(1-0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}})} \approx \frac{3,21\times e^{-j38\times3,08f\times10^{-8}}}{1-0,376e^{-j2,34f\times10^{-6}}}$$

Podemos encontrar os gráficos feito no Octave abaixo.



Questão 2 - Uma carga $Z_L = 100{+}j150\ \Omega$ está conectada a uma linha de transmissão sem perdas com $Z_0 = 50\ \Omega$. Usando a carta de Smith determine:(a)Γ, (b)TOE, (c)A admitância da carga Y_L, (d)A impedância a $0,35\lambda$ da carga, (e)A localização de V_{max} e V_{min} em relação a carga se a linha tiver um comprimento de $0,5\lambda$) e (f)A impedância de entrada na linha

a)Γ: Primeiramente devemos normalizar a impedância de carga Z_L em relação a impedância característica Z_0 através da equação abaixo:

$$Z_L = (r + jx)$$

$$Z_L' = \frac{Z_L}{Z_0}$$

$$Z_L' = \frac{100}{50} + j\frac{150}{50} = 2 + j3$$

Após descobrir Z_L'. Usamos a carta de Smith para achar o ponto de impedância. Sendo assim com a ajuda do compasso podemos encontrar o coeficiente de reflexão $|\Gamma|$.

$$|\Gamma| \approx 0,75$$

Agora traçamos uma reta do centro da carta em direção ao ponto Z_L' até alcançar a escala angular nas bordas da carta. Assim encontramos o ângulo.

$$\theta \approx 26,5°$$

Logo,Γ vale:

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta} \approx 0,75e^{26,5°j}$$

b) TOE: A Taxa de Onda Estacionária SWR(Stationary Wave Ratio) pode ser calculada medindo-se a distância do centro ao ponto Z_L' marcado na carta. Após isso mede o TOE na escala embaixo da carta na linha SWR.

$$TOE \approx 6,5$$

c) A admitância da carga Y_L: Para calcular a admitância normalizada basta encontrar o ponto diametralmente oposto

$$Y_L' \approx 0,14 - 0,23j$$
$$Y_L = Y_L' * Z_0 = \frac{0,14 - 0,23j}{50} = 0,0028 - 0,0046j$$

d) A impedância a $0,35\lambda$ da carga: Precisamos encontrar lo. Assim traça-se uma linha reta passando por Z_L' até a borda e encontramos

$$l_0 = 0,214\lambda$$

O caminho em $+0,35\lambda$ em direção ao gerador é percorrido e assim encontramos lin.

$$l_{in} = 0,564\lambda$$

Agora precisamos de uma nova reta que é traçada de l_{in} até o centro da carta. Assim encontramos ponto Z_L' normalizado:

$$Z_{in}' \approx 0,41 - 1,3j$$

Por fim multiplicamos por Z_0

$$Z_{in} = Z_{in}' Z_0 = 20 - 5j$$

e) A localização de V_{max} e V_{min} em relação a carga se a linha tiver um comprimento de $0,5\lambda$):

Primeiro iremos usar a seguinte formula para calcular V_{max} :

$$d_{max} = 0,25\lambda - l_0$$

Na qual l_0 ja foi encontrado. Logo, Vmax ocorre a uma distância d:

$$d_{max} = 0,25\lambda - 0,214\lambda = 0,036\lambda m$$

Agora giramos a partir de d_{max} uma distância de $0,25\lambda$ em direção ao gerador para encontrar d_{min}:

$$d_{min} = d_{max} + 0,25\lambda = 0,286\lambda$$

f) A impedância de entrada na linha:

Como o comprimento é de $0,5\lambda$ a impedância de entrada será a mesma que ZL, portanto:

$$Z_{ent}' = Z_L = 100 + 150j$$

Questão 3 - Uma linha de transmissão sem perdas com $Z_0 = 150\ \Omega$ tem $d = 18m$ de comprimento e opera em $f_1 = 24$ MHz. A velocidade de propagação na linha é de $v = 2 \times 10^8$ m/s. Se a linha está terminada por uma carga $Z_L = 250 + j150\ \Omega$, use as expressões analíticas para obter:(a) As posições do primeiro máximo e do primeiro mínimo e (b) a impedância de entrada na linha. Comprove usando a Carta de Smith.

a) As posições do primeiro máximo e do primeiro mínimo:

Primeiramente devemos calcular o coeficiente de reflexão da carga Γ_L. Podemos usar a equação abaixo fornecido na literatura.

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{250 + 150j - 150}{250 + 150j + 150} = \frac{100 + 150j}{400 + 150j} \approx \frac{180,28e^{j56,31^\circ}}{427,2e^{j20,56^\circ}} \approx 0,42e^{j35,74^\circ}$$

Em seguida, é necessário encontrar a constante de fase β:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \times 24 \times 10^6}{2 \times 10^8} \approx 0,754 rad/m$$

Agora vamos encontrar d_{max} e d_{min}. Para isso precisamos encontrar onde a impedância é máxima e mínima. Logo usaremos as formulas abaixo.

$$d_{max} = \frac{\theta_{R_L}}{2\beta}$$

$$d_{min} = \frac{\theta_{R_L} + \pi}{2\beta}$$

Devemos fornecer θ_{R_L} em radianos Para isso utilizaremos a fórmula abaixo.

$$\theta_{R_L} = \frac{35,75^\circ \times \pi}{180^\circ} = 0.624 rad$$

Logo,

$$d_{max} = \frac{0,624}{2 \times 0,754} = 0,414m$$

$$d_{min} = \frac{0,624 + \pi}{2 \times 0,754} = 2,5m$$

confirmando o resultado pela Carta de Smith. Logo:

$$Z_L' = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{250 + j150}{150} = 1,7 + 1j$$

Traçaremos novamente uma reta que passa pelo ponto Z'_L e encontraremos $l_0 = 0,20\lambda$

Logo podemos encontrar os máximos e mínimos.

$$d_{max} = 0,25\lambda - 0,20\lambda = 0,05\lambda = 0,03\frac{v}{f} = 0,414m$$

$$d_{min} = d_{max} + 0,25\lambda = 0,3\lambda = 0,3\frac{v}{f} = 2,5m$$

b) A impedância de entrada na linha:

Calculamos o coeficiente de reflexão da fonte Γ_S com valores em radianos:

$$\Gamma_S = \Gamma_L e^{-2j\beta l} = |R_L|e^{j\theta}e^{-2j\beta l} = 0,42e^{0,624j}e^{-j27,14} = 0,42e^{-j26,52}$$

Agora Convertemos para graus e expandimos para forma padrão:

$$\Gamma_S = 0,42e^{-j27,14°} = 0,42e^{-j79°} = 0,08 - 0,412j$$

Agora podemos calcular a impedância de entrada Z_{ent}. Logo,

$$Z_{ent} = Z_0\frac{1+\Gamma_S}{1-\Gamma_S} = 150\frac{1+0,08-j0,412}{1-0,08+j0,412} = \frac{1,08-j0,412}{0,92+j0,412}$$

$$Z_{ent} = 150\frac{1,158e^{-20,88°j}}{1,01e^{24,12°j}} \approx 171,98e^{45°j} = 121,61 - 121,61j$$

Pela Carta de Smith é preciso apenas girar um comprimento de onda inteiro em direção ao gerador. Sabemos que para uma volta completa é preciso andar $0,5\lambda = 0,5$ Logo,

$$0,5\lambda = 0,5\frac{v}{f} = 0,5\frac{2\times 10^8}{24\times 10^6} = 0,5\times 8,3 = 4,15m$$

A linha de transmissão tem um comprimento $d = 18m$, então ela dará uma volta completa e uma volta incompleta que valerá:

$$d = 18m - 4,15m = 13,85m = 1,67\lambda$$

Podemos encontrar l_{ent}somando $1,67\lambda$ a partir da posição da carga $l_0 = 0,20\lambda$:

$$l_{ent} = 1,67\lambda + 0,20\lambda = 1,87\lambda = 0,37\lambda$$

Novamente basta traçar uma reta a partir de l_{ent} até o centro e gira-se o ponto Z'_L ate o encontro com a nova reta:

$$Z'_{ent} = 0,75 - 0,75j$$

$$Z_{ent} = Z'_{ent} Z_0 = (0,75 - 0,75j) \times 150 = 112,5 - 112,5j$$

Questão 4 - Uma rede de casamento, utilizando um elemento reativo em série com um comprimento d de uma LT, é utilizada para casar uma carga $Z_L = 100 + j150\ \Omega$ em uma LT com $Z_0 = 50\ \Omega$ operando a $f_1 = 1f$ GHz. Determine o comprimento completo da linha d e o valor do elemento reativo se:(a) um capacitor em série for utilizado ou (b) um indutor em série for utilizado.

a **Capacitor em série:**

Novamente, vamos normalizar a impedância da carga:

$$Z_L' = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{100 + 150j}{50} = 2 + 3j \approx 3,60e^{56,30°j}$$

que fornece o ponto a ser marcado. A partir daí gira se no sentido horário com o compasso até achar o ponto onde z = 1 + jb, que tenha parte real unitária. Pela carta de Smith esse ponto é

$$Z_C' = 1 + 2,2J$$

então para que se anule essa parte imaginária indutiva, coloca-se um capacitor de forma que

$$Z_C = 1 + j2,2 - j2,2$$

de capacitância $Z_C = -j2,2$. Para $Z_0 = 50$

Para encontrar o valor da impedância do capacitor não normalizada:

$$Z_{Capacitor} = Z'_{Capacitor} Z_0 = -j110$$

Para achar o valor da capacitância basta substituir na fórmula. Logo,

$$Z_{Capacitor} = \frac{-j}{\omega C} >> C = \frac{1}{110 \times 2\pi f} = C = \frac{1}{110 \times 2\pi \times \times 10^9} \approx 1,45 \times 10^{-12} F$$

Para comprimento d temos:

$$d = l_C - l_0$$

Como já sabemos o método de calcularmos l_C e l_0 conforme os procedimentos apresentados nos problemas anteriores. Temos:

$$l_C = 0,191\lambda$$

$$l_0 = 0,213\lambda$$

Assim

$$d = 0,191\lambda - 0,213\lambda = -0,022$$

Usamos o fator 0,5 para uma volta e obtemos o valor de $\lambda = 0,478m$

Logo,

$$\lambda = 0,478\lambda m$$

b) Indutor em série:

Para a indutância deve se achar o ponto ZL = 1 − jx, que é também encontrado na interseção do raio de Z'_L com o círculo real unitário. Logo seguindo os mesmo passos anteriores. Temos,

$$Z'_L = 1 - 2,2j$$

$$Z_L = 1 + j2,2 - j2,2$$

de indutância $Z_L = -j2,2$. Para $Z_0 = 50$

$$Z_{Indutor} = Z'_{Indutor} Z_0 = 110j$$

Por fim, o valor da indutância é:

$$j\omega L = Z_{Indutor} >> L = \frac{Z_{Indutor}}{2\pi f} = \frac{110}{2\pi \times 1 \times 10^9} \approx 1,75 \times 10^{-8} H$$

Seguindo os mesmo passos anteriores temos:

$$d = l_I - l_0$$

$$l_I = 0,308\lambda$$

$$l_0 = 0,213\lambda$$

$$d = 0,308\lambda - 0,213\lambda = 0,095\lambda m$$

Questão 5 - Projete duas redes de casamento: Uma por toco paralelo em aberto e a outra por toco paralelo em curto para casar uma carga $Z_L = 100+j150$ Ω em uma LT com impedância $Z0 = 50\ \Omega$. Supondo agora que a carga mudou para $Z_L = Z(1) = 40 - j50\ \Omega$, determine o coeficiente de reflexão visto na rede de casamento. Entregue as cartas de Smith utilizadas.

Normalizando as impedâncias:

$$Z'_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{100 + j150}{50} = 2 + j3 \approx 3,60e^{j56,30°}$$

$$Z'_1 = \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{40 - j50}{50} = 0,8 - j1 \approx 1,8e^{-j51,34°}$$

Encontrando a posição na Carta de Smith l_0 normalizada da carga:

$$l_0 = 0,213\lambda m$$

Agora vamos seguir os mesmo passos da questão anterior para encontrar a localização normalizada do capacitor e indutor. Sendo assim,

$$Z_C = 1 + 2,2j$$

$$Z_I = 1 - 2,2j$$

$$l_C = 0,191\lambda m$$

$$l_I = 0,308\lambda m$$

$$d = l_C - l_0 = 0,191\lambda m - 0,213\lambda m = -0,022\lambda m = 0,478\lambda m$$

Para os comprimentos ds_{Curto} e ds_{Aberto} utilizamos as fórmulas:

$$ds_{Aberto} = l_{Toco} = l_I = 0,308\lambda m$$

$$ds_{Curto} = l_{Toco} - 0,25\lambda = l_I - 0,25\lambda = 0,308\lambda m - 0,25\lambda m = 0,058\lambda m$$

Para encontrar o coeficiente de reflexão $|\Gamma|$ para a rede de casamento iremos usar os dados associados a Z'_1 na Carta de Smith. Sabemos que:

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$$

O módulo é calculado marcando o ponto Z'_1 na carta de Smith.

$$|\Gamma| \approx 0,75$$

Traçando uma reta como nos exercícios anteriores só que passando por Z_1' podemos encontrar a fase para Γ. Sendo assim.

$$\theta \approx -72°$$

Logo,

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} = 0,75 e^{-72° j}$$

Questão 6 - Medidas são realizadas na frequência $f = 10$ KHz sobre uma LT de $l_0 = 0,9$ Km. Os resultados das medições mostram que a impedância característica é $Z_0 = 90|-24°\ \Omega$, a atenuação total é de $\alpha_l = 0,05$ Np e o deslocamento de fase entre a entrada e a saída é de $\beta_l = 8° = 0,140rad$. Determine:(a)R, L, G, C por Km de linha, (b)a velocidade de fase e (c)a potência dissipada ao longo da linha sabendo que a potência de entrada vale $P_{in} = 5$ W e que há casamento de impedância entre a carga e a linha.

a)

De acordo com a literatura sabemos que:

O deslocamento de fase $\nabla\beta$ e o coeficiente de atenuação α podem ser encontrado pelas expressões abaixo:

$$\beta = \beta_l / l_0 = \frac{0,140rad}{0,9km} = 0,157\frac{rad}{km}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_l}{l_0} = \frac{0,05Np}{0,9km} = 0,056\frac{Np}{km}$$

Que esses valores são correlacionados pela equação do vetor de propagação.

$$\gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$

E a impedância Z_0 é fornecida pela expressão abaixo:

$$Z_0 = \frac{Z}{Y} = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}$$

.

Agora iremos desenvolver essas expressões de acordo com a literatura Logo,

Tiraremos o módulo ao quadrado da expressão:

$$|Z_0|^2 = |\sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}|^2$$

$$|Z_0|^2 = \frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}$$

$$|Z_0|^2 G + j|Z_0|^2 C\omega = R + jL\omega$$

Agora vamos Igualar a parte real e imaginária é possível obter duas equações:

$$|Z_0|^2 G = R$$

$$|Z_0|^2 C = L$$

Realizando o mesmo procedimento para γ:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2 \times \alpha \times \beta j - \beta^2 = RG + jRC\omega + jLG\omega - LC\omega^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - LC\omega^2$$

$$2\alpha\beta = (RC + GL)\omega$$

Com as equações associadas vamos Substituir os valores R e L γ:

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - LC\omega^2 = (G^2 - C^2\omega^2)Z_0^2$$

$$G^2 - c^2\omega^2 = a_1$$

$$2\alpha\beta = (RC + GL)\omega = (GC + GC)|Z_0|^2\omega$$

$$GC = \frac{\alpha\beta}{|Z_0|^2\omega}$$

$$G = \frac{a_2}{C}$$

Encontramos:

$$a_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|Z_0|^2} = -2,66 \times 10^{-6}$$

$$a_2 = \frac{\alpha\beta}{|Z_0|^2\omega} = \frac{0,056 \times 0,157}{90^2 \times 2\pi \times 10 \times 10^3} = 1,73 \times 10^{-11}$$

Substituindo na equação $G = \frac{a_2}{C}$ em $G^2 - c^2\omega^2 = a_1$:

$$\frac{a_1^2}{C^2} - C^2\omega^2 = a_2$$

$$a_2^2 - C^4\omega^2 = a_1 C^2$$

$$C^4\omega^2 + C^2 a_1 - a_2^2 = 0$$

De acordo com a literatura devemos usar na equação uma variável de apoio $X = C^2$

$$X^2\omega^2 + X a_1 - a_2^2 = 0$$

$$X_{1|2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4 \times a_2^2 \times \omega^2}}{2\omega^2}$$

Assim encontramos:

$$C = \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4 \times a_2^2 \times \omega^2}}{2\omega^2}}$$

$$C = \sqrt{\frac{+2,66 \times 10^{-6} + \sqrt{(-2,66 \times 10^{-6})^2 + 4 \times (1,73 \times 10^{-11})^2 \times (2\pi \times 10 \times 10^3)^2}}{2(2\pi \times 10 \times 10^3)^2}}$$

$$C = \sqrt{\frac{+2,66 \times 10^{-6} + \sqrt{11,81 \times 10^{-12}}}{7,90 \times 10^9}}$$

$$C = \sqrt{\frac{6,21 \times 10^{-6}}{7,90 \times 10^9}} = 2,80 \times 10^{-8} F = 28 \frac{nF}{km}$$

$$G = \frac{a_2}{C} = \frac{1,73 \times 10^{-11}}{28 \times 10^{-9}} = 0,6 \frac{mS}{km}$$

$$R = |Z_0|^2 G = 4,86 \frac{\Omega}{km}$$

$$L = |Z_0|^2 C = 2,27 \times 10^{-4} \frac{H}{km}$$

O Consideramos apenas o valor positivo de X pois não usamos valores negativos para parâmetros da LT.

b)

Para encontrar velocidade da fase, usaremos uma simples relação. Logo,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times f}{\beta} = \frac{2\pi \times 10 \times 10^3 \frac{rad}{s}}{0,130 \frac{rad}{km}} = 4,002 \times 10^5 \frac{km}{s}$$

c