Introduction to control systems
TI0118

Homework 2

Student name: João Vitor de Oliveira Fraga
Student number: 537377

Student name: Abraão de Carvalho Albuquerque
Student number: 538286

Exercise 1

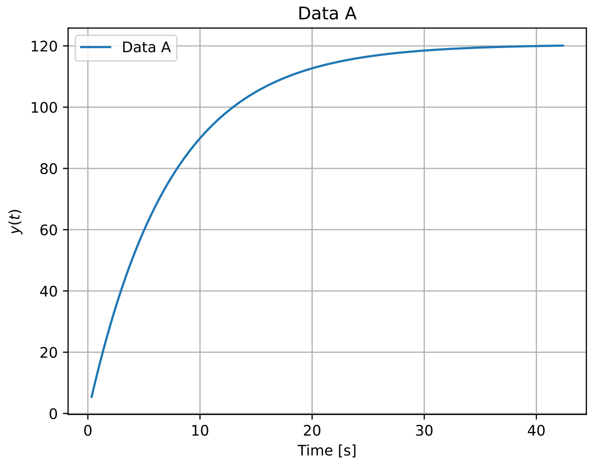
The unit steps responses of two systems A and B are recorded and reported in the files attached to the homework assignment. In each file, the first column gives the time vector, t, and the second column provides the output response, $y(t)$, for the systems A (in `HW2_ex1_dataA.txt`) and B (in `HW2_ex1_dataB.txt`). Do the following:

1. Load the data[1] and plot the responses for systems A and B.
2. Identify the order of the systems. Based on the plots, estimate the transient response characteristics, such as time constant, settling time, rise time, peak time and percentage of overshoot. Write the corresponding transfer functions $T_A(s)$ and $T_B(s)$ for the systems A and B.
3. In the plot obtained in item (1) of this exercise, add and compare the unit step response of the systems $T_A(s)$ with the data provided in `HW2_ex1_dataA.csv`. Do the same with the unit step response of $T_B(s)$ with the data provided in `HW2_ex1_dataB.csv`. Comment on your results.

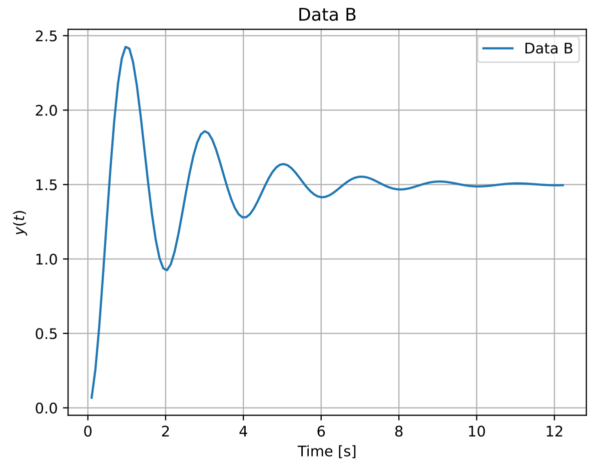
[1] To import the .csv data, you might use the function `readtable` in Matlab or `read_csv` in Python's Panda's library

Solution

Quando plotamos os sinais, obtemos os seguintes gráficos:



Fonte: Elaborado pelo autor.

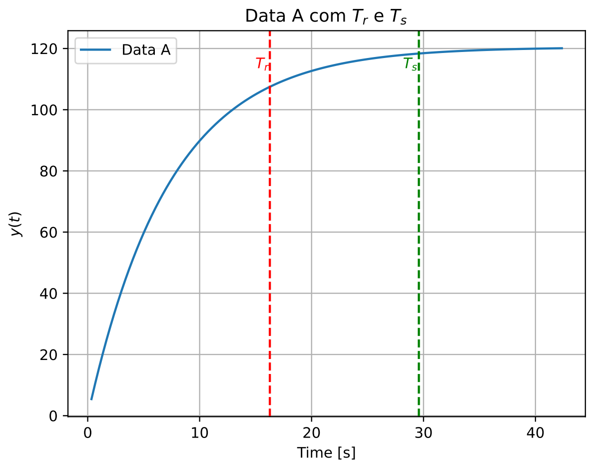


Fonte: Elaborado pelo autor.

Data A

Conseguimos então perceber que o sistema obtido a partir de 'Data A" é um sistema de primeira ordem.
Com base nisso, sabemos que a constante de tempo $\frac{1}{a}$ se refere ao tempo em que o sinal obtem $63,2\%$ de seu valor máximo, tendo isso em mente, utilizamos um código em Python, e definimos que a constante de tempo é $7.39590267s$, logo $a = 0.13521$s.

A partir disso, conseguimos definir o tempo de subida $(T_r) = \frac{2.2}{a} \therefore T_r = 16.271$s. E o tempo de acomodação $(T_s) = \frac{4}{a} \therefore T_s = 29.584$.
Agora, para que seja possível definir a equação da função de transferência $T_a(s)$, precisamos achar o ganho K, que podemos definir $K = a \cdot y_{\text{final}}(t)$, Fazendo então essa multiplicação em python, tendo em vista que $y_{\text{final}}(t) = 120.0862$, temos então que $K = 16.237$.
Com esses valores, podemos definir a função de transferência para um sistema de primeira ordem como: $G(s) = \frac{K}{(s+a)}$. Portanto, a função de transferência de 'Data A" é $T_A(s) = \frac{16.237}{(s+0.13521)}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Data B

Já para 'Data B", conseguimos inferir que se trata de um sistema de segunda ordem subamortecido.
Para começarmos a análise do sistema, podemos primeiramente obter o percentual de overshoot $(\%OS)$ usando o python, onde $\%OS = \frac{y_{\text{max}}(t) - y_{\text{fin}}(t)}{y_{\text{fin}}(t)} \cdot 100$, em que $\%OS = 62.118\%$.
Além disso, conseguimos obter tanto o tempo de pico (T_p) quanto T_r, que é o instante de tempo que minha função tem o maior valor e o intervalo de tempo entre eu atingir 10% e 90% do meu valor final, respectivamente. Quando rodamos o código em python, obtemos $T_p = 0.9695$s e $T_s = 0.3878$s.
Tendo tanto o $\%OS$ quanto T_p, eu consigo definir o valor do coeficiente de amortecimento (ζ) e a frequência natural não amortecida (ω_n).

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \therefore \zeta = 0.14985 \tag{1}$$

Com o valor de ζ é possível obter tanto o valor de ω_n quanto da constante de tempo a.

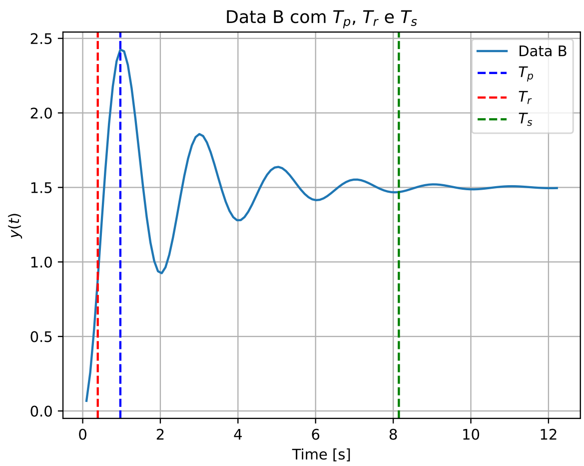
$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} \therefore \omega_n = 3.2774 \text{ rad/s} \tag{2}$$

$$a = \zeta\omega_n \therefore a = 0.49111\text{s} \tag{3}$$

Com esses valores, é então possível calcular T_s, que para um sistema de segunda ordem apresenta uma equação um pouco diferente. Temos que $T_s = \frac{4}{a} \therefore T_s = 8.1448$s.
Sabendo então todos esses valores, a única coisa que falta é definir qual a constante K do sistema, que se refere ao ganho. Para um sistema de segunda ordem, temos que:

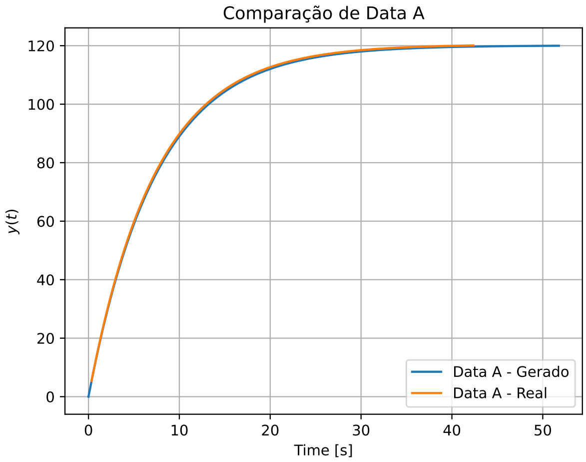
$$K = y_{fin}(t)\omega_n^2 \therefore K = 16.066$$

Então, sabemos que a função de transferência de um sistema de segunda ordem é definido por: $G(s) = \frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$. Portanto, a função de transferência de "Data B" é: $T_B(s) = \frac{16.066}{s^2+0.98222s+10.742}$.

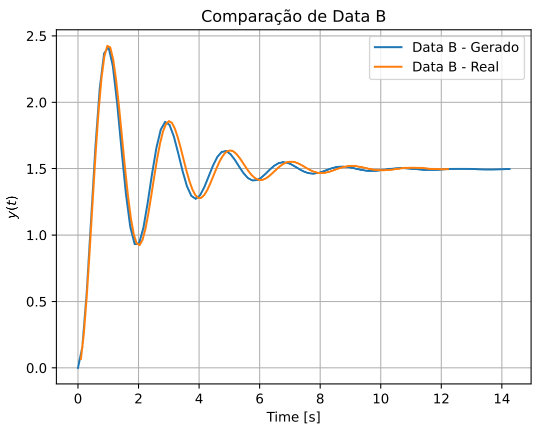


Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando comparamos as funções dadas por "Data A" e por "Data B" com a resposta ao degrau unitários das funções de transferências que obtemos $T_A(s)$ e $T_B(s)$, obtemos os gráficos a seguir:



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conseguimos perceber que para “Data A”,obtemos uma função de transferência que ficou sobreposta. Já para “Data B”, durante uma parte elas ficaram sobrepostos, mas depois é como se o sinal gerado a partir da função de transferência estivesse deslocado.
Código da Questão 1 no GitHub.

Exercise 2

Consider a system with the transfer function in (4):

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{(0.1s + 1)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)} \tag{4}$$

Consider two different cases with (i) $\tau = 0.5$ and (ii) $\tau = 20$. For each case separately, do the following:

1. Find the poles and zeros of the system. Plot them in a zero-pole map and draw your conclusions.

2. Use the dominant-poles argument to find an equivalent second-order transfer function. Can the zero be neglected in this case?

3. Plot and compare the step responses for system in equation (4) and the second order equivalent one. Explain and justify the differences between the responses.

Solution

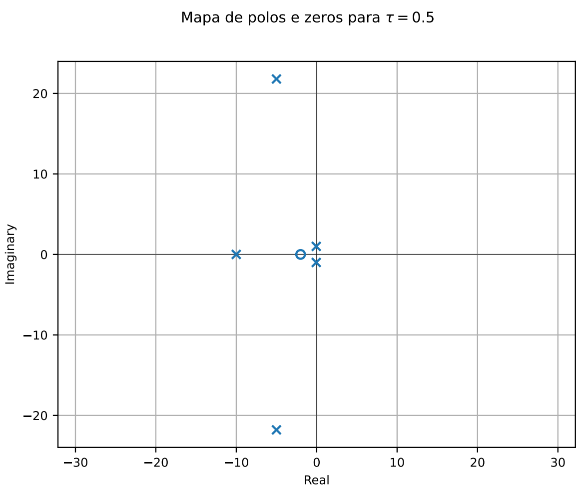
Os polos são representador por $p_{i,j}$, onde i se refere a equação que ele é referente e j a qual é o polo dessa equação.
Temos portanto que para qualquer valor de τ, os polos são:

- $p_{1,1} = -10$;
- $p_{2,1} = -5 + j21.79$;
- $p_{2,2} = -5 - j21.79$;
- $p_{3,1} = -0.05 + j0.998$;
- $p_{3,2} = -0.05 - j0.998$.

Já referente aos zeros, temos que para $\tau = 0.5$ o zero é $z_{0.5} = -2$. Para $\tau = 20$ o zero é $z_{20} = -0.05$
Para definir a função de trasnferência no computador, para assim poder plota-la, nós multiplicamos as partes do denominador, obtendo assim uma função de transferência

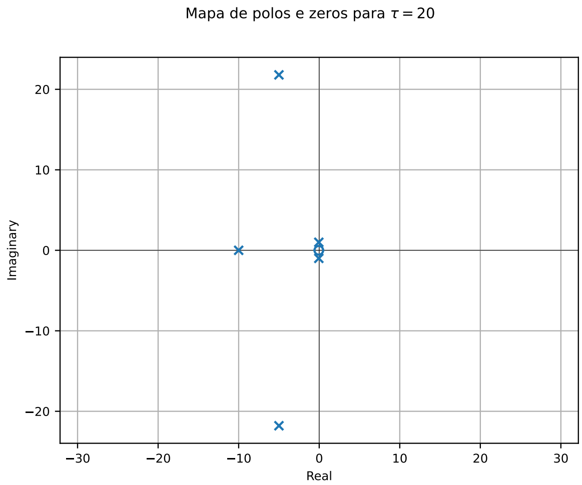
$$G(s) = \frac{\tau s}{00.0002s^5 + 0.00402s^4 + 0.1206s^3 + 1.016s^2 + 0.22s + 1}$$

Plotando os mapas de polos e zeros, obtemos:



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir disso, conseguimos inferir que estamos trabalhando com um sistema estável, pois todos os polos do sistema estão do lado negativo do eixo Real.
O argumento do polo dominante, segundo o Ogata, nos diz que os polos mais próximos do eixo imaginário ($j\omega$), serão dominantes no comportamento da resposta do sistema, já que esses polos são referentes aos termos da resposta transitória que descrece mais devagar.

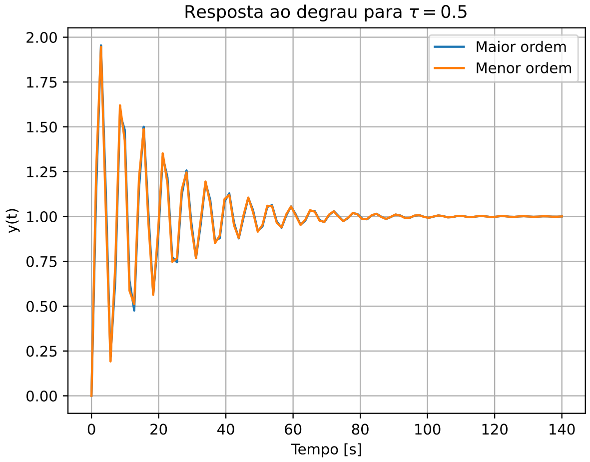


Fonte: Elaborado pelo autor.

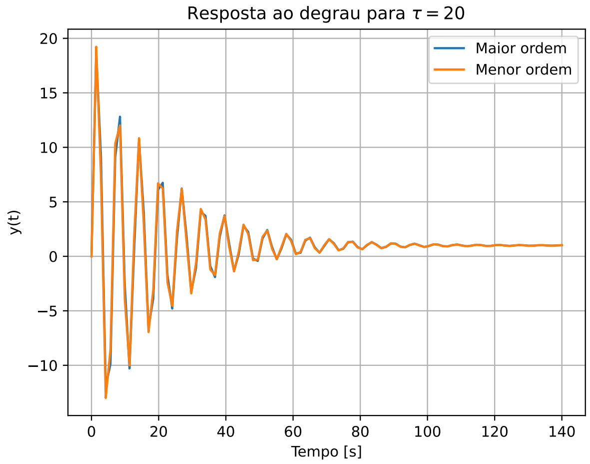
Isso signfica que esses polos são os de maior importância entre todos os polos, já que os outros que ficam mais distantes não terão tanta influência na resposta do sistema.
Portanto, é possível que eu aproxime um sistema de quinta ordem, que é o referente ao exercício, para um sistema de segunda ordem, deixando apenas a equação que detém o polo dominante.
Temos então que os polos mais próximos do eixo $j\omega$ são $p_{3,1}$ e $p_{3,2}$, que são referentes a $s^2 + 0.1s + 1$.
Então, a função de transferência usando o argumento dos polos dominantes é:

$$G_{domin}(s) = \frac{\tau s + 1}{s^2 + 0.1s + 1}$$

Quando plotamos as resposta de degrau para os sistemas, obtemos os seguintes gráficos:



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conseguimos então perceber que os dois sistemas estão quase que sobrepostos. O motivo de não estarem totalmente sobrepostos é por conta dos outros polos que foram “ignorados”. Código da Questão 2.

Exercise 3

It is given the state-space model in (5).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5}$$

1. Compute and explain the transfer function corresponding to the system in (5).
2. Briefly explain the concept of *bounded-input, bounded-output* (BIBO) stability. Evaluate BIBO stability for the given system.
3. Briefly explain the concept of Lyapunov stability. Evaluate Lyapunov stability for the given system.
4. Discuss how BIBO stability theory and Lyapunov stability differ for LTI systems. Compare and explain the results of item (2) and (3) of this exercise.

Solution

Para achar o $G(s)$ a partir do espaço de estado, foi usado o conhecimento de que:

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$$

Com isso, precisamos agora descobrir quais são as matrizea A, B, C, D, temos então que $D = 0$ e:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Is = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Então, a partir disso fazemos o cálculo com as matrizes:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \therefore G(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$

Colocamos as matrizes no Python e quando rodamos o código obtemos:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$

Mostrando que está igual ao resultado achado anteriormente.
A estabilidade de um sistema Bounded-Input, Bounded-Output (BIBO), diz que para toda entrada limitada irá gerar uma saída limitada. Isso significa que se o valor absoluto da entrada menor que infinito, o valor absoluto da saída será também menor que infinito. Para avaliar a estabilidade BIBO do sistema, é necessário examinar os polos da função de transferência, que são $p_1 = -1 + j2$ e $p_2 = -1 - j2$. Percebemos então que todos os polos estão do lado esquerdo do eixo imaginário, em outras palavras, suas partes reais são negativas. Dessa maneira, o sistema se qualifica como um sistema BIBO estável.
Já sobre a estabilidade de Lyapunov, ela é feita a partir da análise dos autovalores (λ) da matris A, que caso todos valor de λ tiver a parte real negativa, o sistema é assintoticamente estável, isso significa que a solução do sistema tende a algum ponto de equilíbrio ao longo do tempo. Caso λ tenha um valor em que sua parte real seja positiva, teremos um sistema instável, e caso seu valor real seja negativo mas o valor imaginário esteja em cima do eixo $j\omega$, teremos um sistema marginalmente estável. A vantagem de usar esse tipo de estabilidade, é que serve tanto para sistemas lineares quanto para sistemas não-lineares,
Para o sistema dado, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores λ são definidos como as raízes do determinante característico, logo iremos calcular a partir de $\det(A - \lambda I)$, portanto:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) \therefore \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Portanto, as raízes de λ são $\lambda_1 = -1 + j2$ e $\lambda_2 = -1 - j2$. Com esses valores, percebemos que para todo λ, suas partes reais são negativas, logo, de acordo com o critério de Lyapunov, temos um sistema assintoticamenta estável.
Já sobre suas diferenças, temos que:

- A estabilidade BIBO se concentra na relação entrada-saída de um sistema, já que sua definição é feita a partir de uma entrada limitada gerar uma saída limitada. Além disso sua verificação é feita a partir de uma função de transferência;

- Já a estabilidade de Lyapunov não precisa diretamente nem da entrada nem da saída do sistema, mas sim do seu comportamento interno que é descrito a partir do modelo de espaço de estado. Além disso, a estabilidade de Lyapunov verifica se as soluções do sistema tendem a um ponto de equilíbrio ao longo do tempo, independentemente das entradas externas.

Já sobre o sistema ser estável ou não, ambas as abordagens asseguraram a estabilidade do sistema, no entanto, a partir de óticas diferentes, pois, enquanto um se concentra na relação de entrada e saída do sistema (BIBO), o outro método foca na estabilidade interna do sistema (Lyapunov).
Código da Questão 3.

Exercise 4

The unity feedback system has the forward transfer function given by (6):

$$G(s) = \frac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)} \tag{6}$$

1. Evaluate the system type.
2. Find the value of K to yield a 1% error in steady-state for an input of $0.1t$].
3. Find the static error constants for the value of K found in item (2) of this exercise.
4. Verify the stability of your system and plot its step response.

Solution

Para achar o tipo do sistema nós precisamos achar a quantidade de polos em zero do sistema. Nesse caso, temos apenas um polo em zero, logo o sistema é do Tipo 1.
Para verificar se o sistema é estável, usei a regra do sinal de Descartes e como não houveram mudanças de sinal o sistema é estável. Prosseguindo para o cálculo do erro temos que:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Sendo $R(s)$ a transformada de Laplace do $0.1t$, logo $R(s)$ igual a:

$$R(s) = \frac{0.1}{s^2}$$

Substituindo os valores na equação do erro:

$$0.01 = \frac{0.1}{s} * \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)}}$$

$$0.1s = \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)}}$$

$$\frac{1}{0.1s} = 1 + \frac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)}$$

$$\lim_{s\to 0} 10 - s = \frac{K(s+7)}{s^3+25s^2+196s+480}$$

$$10 = \frac{7K}{480}$$

Com isso, temos que o valor de K para que o erro do sistema seja 1% é de:

$$K = 685,71$$

Com o tipo do sistema sendo 1 temos que:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \infty$$

E que:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{7K}{480} = 10$$

E que:

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = 0$$

Por último, temos que fechar o sistema usando a equação:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s))}$$

$$T(s) = \frac{\frac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)}}{1 + \frac{K(s+7)}{s(s^3+25s^2+196s+480)}}$$

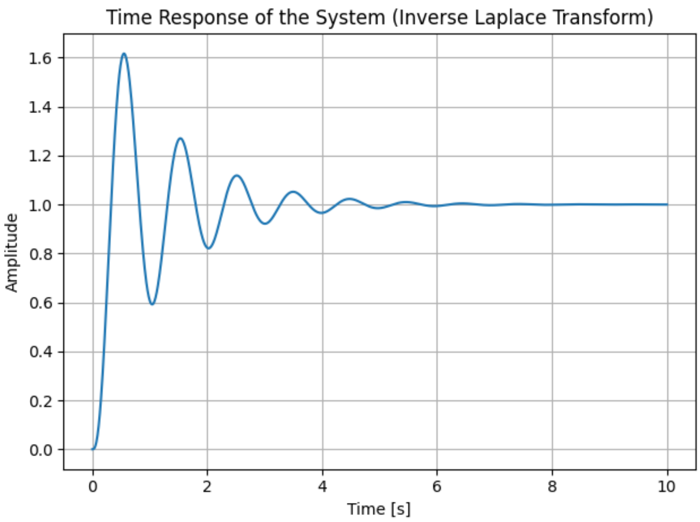
$$T(s) = \frac{K(s+7)}{K(s+7) + s^4 + 25s^3 + 196s^2 + 480s)}$$

$$T(s) = \frac{685.71(s+7)}{s^4 + 25s^3 + 196s^2 + 1165.71s + 4800}$$

Temos que os polos são:

$$p_1 = -16.22, \; p_2 = -7.09, \; p_3 = -0.84 + 6.40j \text{ e } p_4 = -0.84 - 6.40j$$

Percebemos então que todos os polos estão do lado esquerdo do eixo imaginário, em outras palavras, suas partes reais são negativas. Dessa maneira, o sistema se qualifica como um sistema estável. Agora mostrando a sua resposta no tempo. Segue o gráfico da resposta:
Código da Questão 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.