LISTA DE EXERCÍCIOS III - PDS 2024.1
ALUNO: JOÃO VITOR DE O. FRAGA
MAT: 537377

1. a) Sabemos que $x[n] = x(nT)$, onde nT irá substituir t, portanto:

$$4000\pi n T = \frac{\pi n}{3} \rightarrow T = \frac{1}{12000}\, s$$

b) Não, pois eu tenho outros valores em que o cosseno será igual, por exemplo: $\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{13\pi n}{3}\right)$ e para esse caso teríamos $T = \frac{13}{12000}\, s$

2. Consideramos que $x[n] = x(nT)$:

a) $x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 1000\, t) \rightarrow x[n] = \cos\left(2\pi \cdot 1000 \cdot n \cdot \frac{1}{3000}\right) \rightarrow x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

b) $x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t) \rightarrow x[n] = \cos\left(2\pi \cdot 1000 \cdot n \cdot \frac{1}{1500}\right) \rightarrow x[n] = \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)$

c) $x_c(t) = \frac{\cos(2\pi \cdot 1000\, t)}{\pi t} \rightarrow x[n] = \frac{\cos\left(2\pi \cdot 1000 \cdot n \cdot \frac{1}{5000}\right)}{\pi n \cdot \frac{1}{5000}} \rightarrow x[n] = \frac{5000 \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)}{\pi n}$

3. Temos que no tempo $w(t) = x_1(t)\, x_2(t)$, isso irá implicar que quando for colocado no domínio da frequência iremos obter uma convolução, portanto, $W(j\Omega) = X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$. Outro dado é que $X_1(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_1$ e $X_2(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_2$. Devido a convolução feita, temos que $W(j\Omega)$ é limitado pela soma das larguras de bandas de $X_1(j\Omega)$ e $X_2(j\Omega)$, logo: $W(j\Omega) = 0, |\Omega_1 + \Omega_2| \geq 0$.
Com base no teorema de Nyquist, que para esse caso diz que $f_{s\,min} \geq 2(\Omega_1 + \Omega_2)$

$$T = \frac{1}{f_s} \rightarrow T < \frac{1}{2(\Omega_1 + \Omega_2)}\, s$$

4. a) Usando o teorema de Nyquist: $f_s \geq 2 \cdot 5 \cdot 10^3$, $T = \frac{1}{f_s} \therefore T < \frac{1}{10.000}\, s$

b) Relacionando a frequência referente ao tempo discreto (ω) e a frequência referente ao tempo contínuo (Ω), temos $\omega = 2\pi \cdot \frac{\Omega}{f_s} \therefore \frac{\pi}{8} = 2\pi \cdot \frac{\Omega}{10^4} \rightarrow \frac{1}{8} \cdot 10000 = 2\Omega \therefore \Omega = 625\,Hz$, será a frequência de corte.

5. A partir do teorema de Nyquist: $f_s \geq 2\Omega_0$, pois Ω_0 é a frequência máxima, portanto

$$T \leq \frac{1}{2\Omega_0}$$

6. Se $f_s = 16KHz$, então $T = \frac{1}{16000}$ s. Para o sistema ser LIT é necessário impedir o aliasing.

Como $f_s \geq 2\Omega_c$ então $\Omega_c \leq 8KHz$, contudo, como é feito uma filtragem passa-baixa onde é necessário que $2\pi \frac{\Omega_c}{f_s} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega_c \leq \frac{f_s}{4} \therefore \Omega_c \leq 4KHz$ para que não seja "cortado" após a filtragem. Portanto, $\Omega_c = 4KHz$.

7. a) Temos que $X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_c(j\frac{\omega}{T})$, $|\omega| < \pi$, se $Y_d(e^{j\omega}) = W_d(e^{j\omega}) \, X_d(e^{j\omega})$, então:

$Y_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot W_d(e^{j\omega}) \cdot X_c(j\frac{\omega}{T})$, $|\omega| < \pi$, após passar pelo conversor D/C temos então que:

$Y_c(j\Omega) = T\,Y(e^{j\Omega t})$, $|\Omega| < \frac{\pi}{T}$ e se $Y_c(j\Omega) = W_c(j\Omega)\, X_c(j\Omega)$, então: $W_c(j\Omega) = \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = W_d(e^{j\omega})$

$$\therefore W_c(j\Omega) = \frac{e^{j\Omega T/2} - e^{-j\Omega T/2}}{T} \rightarrow W_c(j\Omega) = \frac{2j}{T} \cdot sen\left(\frac{\Omega T}{2}\right), \; |\Omega| < \frac{\pi}{T}$$

b) $x_d[n] = x_c(nT) \rightarrow x_d[n] = \frac{sen(\Omega_m nT)}{\Omega_m nT}$; como $T = \frac{\pi}{\Omega_m}$ então $\Omega_m = \frac{\pi}{T}$, então:

$x_d[n] = \frac{sen(\pi n)}{\pi n} \Rightarrow x_d[n] = 0$ então $y_c(t) = 0$ e $y_d[n] = 0$

8. Temos que $x[n] = x_c(nT_1)$ e após passar pelo conversor D/C $y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_1) \cdot sinc\left(\frac{t - nT_2}{T_2}\right)$

$\therefore y_c(t) = x_c\left(\frac{T_2}{T_1} \cdot t\right)$, nesse caso se $T_2 > T_1$ iremos obter uma versão "expandida" do sinal e se $T_1 > T_2$ teremos uma versão "comprimida" do sinal, ou em outras palavras, $T_1 > T_2$ será um sinal acelerado e $T_2 > T_1$ será um sinal desacelerado.

9. Podemos alterar para: $x[n] \rightarrow \boxed{5\uparrow} \rightarrow \boxed{5\downarrow} \rightarrow \boxed{3\downarrow} \rightarrow \boxed{3\uparrow} \rightarrow y[n]$ sem sofrer consequências, pois estou adicionando 0 em 5 (expandido) e logo em seguida comprimindo em 5, ficando então:

$x[n] \rightarrow \boxed{3\downarrow} \xrightarrow{x'[n]} \boxed{3\uparrow} \rightarrow y[n]$, como $x'[n] = x[3n]$ e $y[n] = \begin{cases} x'[n/3], & n = 3k, \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$$\therefore y[n] = \begin{cases} x[n], & n = 3k, \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

10. a) Resolvendo os sistemas, temos:

Sistema A: $W_A[n] = x[2n] \rightarrow y_A[n] = \begin{cases} W_A[n/3], & n = 3K, \forall K \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c \end{cases}$

Sistema B: $W_B[n] = \begin{cases} x[n/3], & n = 3K, \forall K \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c \end{cases} \rightarrow y_B[n] = W_B[2n]$

Expandindo temos que:

$$y_A[n] = \begin{cases} x\left[\frac{2n}{3}\right], & \frac{n}{3} \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c. \end{cases}, \quad y_B[n] = \begin{cases} x[2n/3], & \frac{2n}{3} \in \mathbb{Z} \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Então são equivalentes, pois todo valor que n for inteiro em $\frac{n}{3}$ ele será inteiro em $\frac{2n}{3}$ e vice-versa.