UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Sistemas de Comunicações Digitais
Engenharia de Telecomunicações – 2023.2
Lista de Exercícios 2 – 30/11/2023
Professor: André L. F. de Almeida
Instrutor de apoio 01: Rubem Vasconcelos
Instrutor de apoio 02: Bruno Sokal

1. Considere a constelação 8-PAM com o alfabeto $\{\pm 7c \pm 5c \pm 3c \pm 1c\}$, ilustrada na Figura 1. Considerando que a distância entre dois símbolos adjacentes seja igual a d, determine

   (a) A energia média $\mathcal{E}_m$ da constelação.

   (b) Uma expressão para a probabilidade de erro em função da distância d.

   (c) Se aumentarmos a distância d, aumentaremos a probabilidade de erro? Justifique.

   (d) Uma expressão para a probabilidade de erro em função de $\frac{\mathcal{E}_m}{N_0}$, onde $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

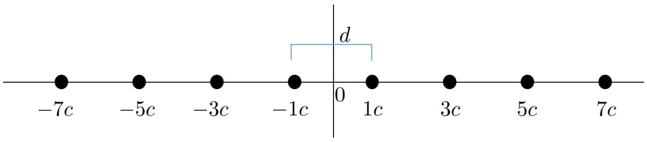


Figura 1: Constelações Sinais 8-PAM.

2. Considere a constelação M-PAM ilustrada na Figura 2. Determine

   (a) A energia média $\boldsymbol{\mathcal{E}}_m$ da constelação.

   (b) Desenvolva uma expressão para a probabilidade de erro em função da SNR, i.e., $\mathcal{E}_m/N_0$, onde N_0 é a densidade espectral de potência do ruído dada por $\sigma^2 = N_0/2$.

   (c) Desenvolva uma expressão para a probabilidade de erro em função da distância d entre dois símbolos.

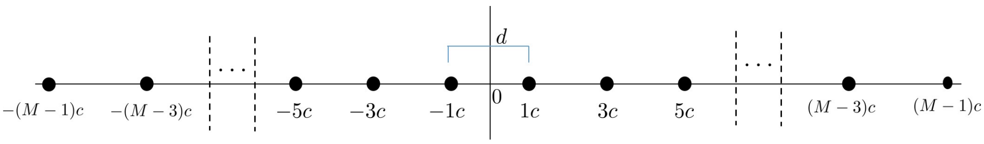
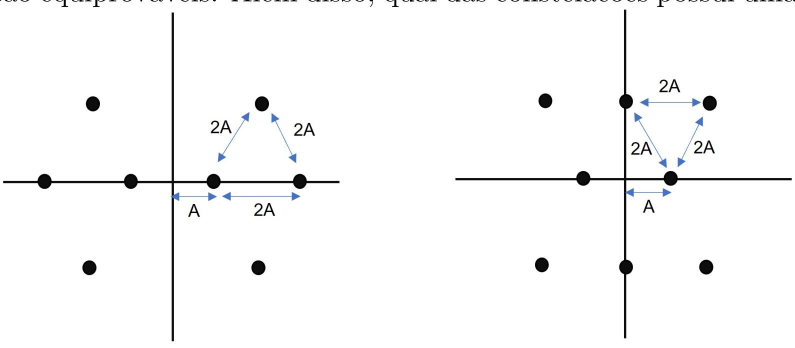


Figura 2: Constelações Sinais M-PAM.

3. Considere duas constelacões com oito símbolos possíveis, ilustradas na figura abaixo. A distância entre dois pontos adjacentes é $2A$. Determine a energia média para cada uma das constelações, assumindo que os símbolos são equiprováveis. Além disso, qual das constelacões possui uma maior eficiência energética?



(a) (b)

4. Considere a modulação 8-QAM ilustrada na Figura 3, com o respectivo alfabeto $\{\pm 1 \pm j, \pm 3 \pm j\}$. Determine:

   (a) A energia média $\mathcal{E}_m$ da constelação

   (b) Um expressão para a probabilidade de erro média da modulação 8-QAM

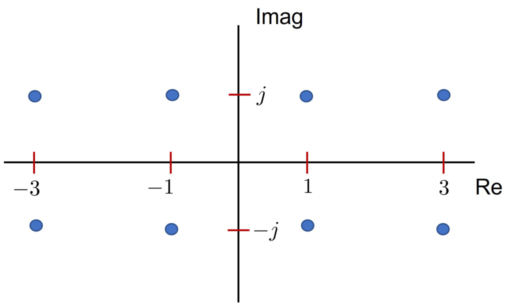


Figura 3: Constelações Sinais 8-QAM.

5. Considere a constelação 16-QAM com o alfabeto $\{\pm 3c \pm j3c; \pm c \pm j3c; \pm 3c \pm jc; \pm c \pm jc\}$, ilustrada na Figure 4. Considerando que a distância entre dois símbolos adjacentes seja igual a d, determine

   (a) A energia média $\mathcal{E}_m$ da constelação.

   (b) Uma expressão para a probabilidade de erro em função da distância d.

   (c) Se aumentarmos a distância d, aumentaremos a probabilidade de erro? Justifique.

   (d) Uma expressão para a probabilidade de erro em função de $\frac{\mathcal{E}_m}{N_0}$, onde $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

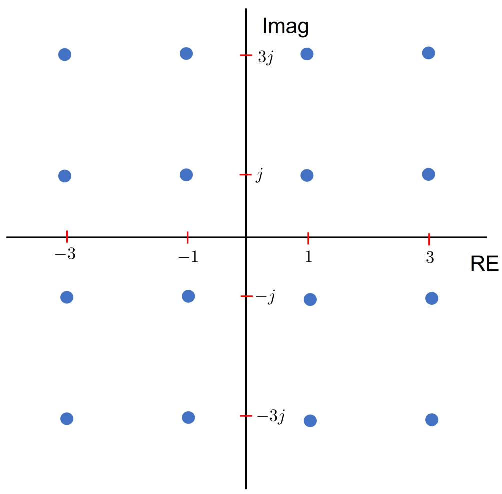


Figura 4: Constelações Sinais 16-QAM.

6. Considere a constelação 16-PSK com as fases $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{16}\}$ ilustrada na Figura 5, com o círculo de raio unitário.

   (a) A energia média $\mathcal{E}_m$ da constelação.

   (b) Uma expressão para a probabilidade de erro em função da distância d.

   (c) Codifique cada símbolo do alfabeto de acordo com a codificação de Gray

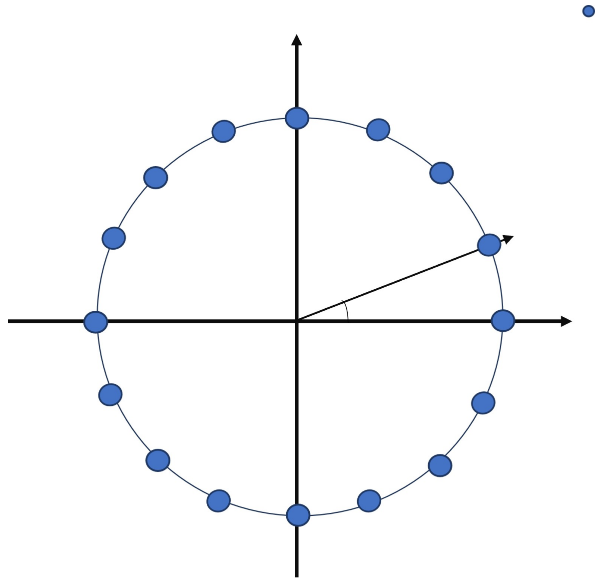


Figura 5: Constelações Sinais 16-PSK.

(d) Uma expressão para a probabilidade de erro em função de $\frac{\mathcal{E}_m}{N_0}$, onde $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

7. Um sistema de comunicação digital emprega a seguinte sinalização para a transmitir a informação:

$$s_0(t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$s_1(t) = A, \quad 0 \le t \le T.$$

Esta sinalização é chamada de sinalização *on/off*. A saída amostrada do correlator é dada por:

$$r = s_m + n, \quad m = \{0, 1\}$$

onde $s_0 = 0$, e $s_1 = A\sqrt{T}$, e n é o ruído aditivo Gaussiano com média zero e variância $\sigma_n^2 = N_0/2$. Com bases nessas informações

(a) Equacione e determine o limiar utilizado para tomada de decisão sob qual símbolo fora enviado pelo transmissor

(b) Sabendo que s_0 e s_1 são equiprováveis, determine a probabilidade de erro em função da SNR. Dados: a função de densidade probabilidade da Gaussiana de média zero e variância σ^2 é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

8. Suponha que seja transmitido um simbolo A_i de uma constelação $\mathcal{A}$ com símbolos binários, isto é, $\mathcal{A} \in \{0, 1\}$, cujas probabilidades a priori são dadas por $p_A(0) = 1 - q$ e $p_A(1) = q$. No receptor, o sinal observado Y também é um sinal binário, isto é $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Sabendo que a o sinal observado na saída, Y, é igual ao símbolo transmitido A_i com uma probabilidade de $1 - p$, responda

(a) Determine o detector MAP em função de p e q

(b) Para quais valores de p e q, o detector MAP irá decidir sempre pelo símbolo $\hat{A}_1 = 1$.

9. Considere o sinal recebido

$$y = a_i + n,$$

onde n é o ruído additivo Gaussiano com média zero e variância $N_0/2$, a_i é o símbolo transmitido, o qual pertence a constelação 4-PAM com as seguintes probabilidade de ocorrências, $P(a_0) = 0.3, P(a_1) = 0.25, P(a_2) = 0.15, P(a_3) = 0.3$. Sabemos que dada a observação y, podemos utilizar os detectores de máxima verossimilhança (ML) e máxima a posteriori (MAP) para inferir qual símbolo fora transmitido. Sobre os detectores ML e MAP, responda:

   (a) Qual o critério utilizado pelo detector ML para detecção do símbolo transmitido a_i? Desenvolva sua resposta.

   (b) Qual o critério utilizado pelo detector MAP para detecção do símbolo transmitido a_i? Desenvolva sua resposta.

   (c) Determine em quais condições, o detector MAP é equivalente ao detector ML. Desenvolva sua resposta.

10. A modulação ortogonal é um caso especial da modulação M-ária (M-QAM, M-PAM, M-PSK, etc), na qual os pulsos usados para transmissão são ortogonais entre si, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t)g_j^*(t)dt = \mathcal{E}, \quad i = j \tag{1}$$

onde $g_i(t)$ e $g_j(t)$, para $i, j = \{0, \ldots, M-1\}$, são os possíveis pulsos na transmissão e M é a ordem da modulação. De outra forma, podemos definir um vetor de pulsos na transmissão como $\mathbf{g}(t) = [g_0(t), g_1(t), \ldots, g_{M-1}(t)]$. Sobre a modulação ortogonal, responda:

   (a) Quais outras condições, além da Equação (1), são necessárias para garantir a ortogonalidade em uma trasnsmissão usando modulação ortogonal?

   (b) Suponha que $M = 4$ e que o pulso $g_1(t)$ tenha sido o pulso escolhido para a transmissão, isto é, o vetor de pulsos é dado por $\mathbf{g}(t) = [0, \sqrt{\mathcal{E}}, 0, 0]$. O vetor sinal recebido é dado $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é o vetor de ruído aditivo com média zero e variância $\sigma^{\mathbf{2}} = [\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2]$. Definindo a saída do correlator como $\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{r}(t)\mathbf{g}^*(t)dt$, determine os valores de $\mathbf{y}$, isto é, y_0, y_1, y_2, y_3.

   (c) Considere que seja utilizado uma modulação ortogonal FSK (Frequency Shift-Keying), onde os pulsos na transmissão são descritos como

$$g_i(t) = e^{j2\pi f_i t} g(t), \quad i = 0, \ldots, M-1,$$
$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \geq t \geq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

   Determine o espaçamento entre as frequências f_i e f_j para $i \neq j$ necessário para que a condição em (1) seja satisfeita.

11. A partir do conhecimento das probabilidades de erro de uma modulação M-ária, como a M-QAM, e de uma modulação ortogonal de ordem M, compare as principais diferenças entre essas modulações tendo em vista a perfomance em termos de probabilidade de erro e uso de recursos tais como largura de banda.

12. Determine a representação no espaço de sinais para o conjunto de sinais $\{s_k(t)\}_{k=1}^{4}$ utilizando o conjuto ortonormal $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{2}$.

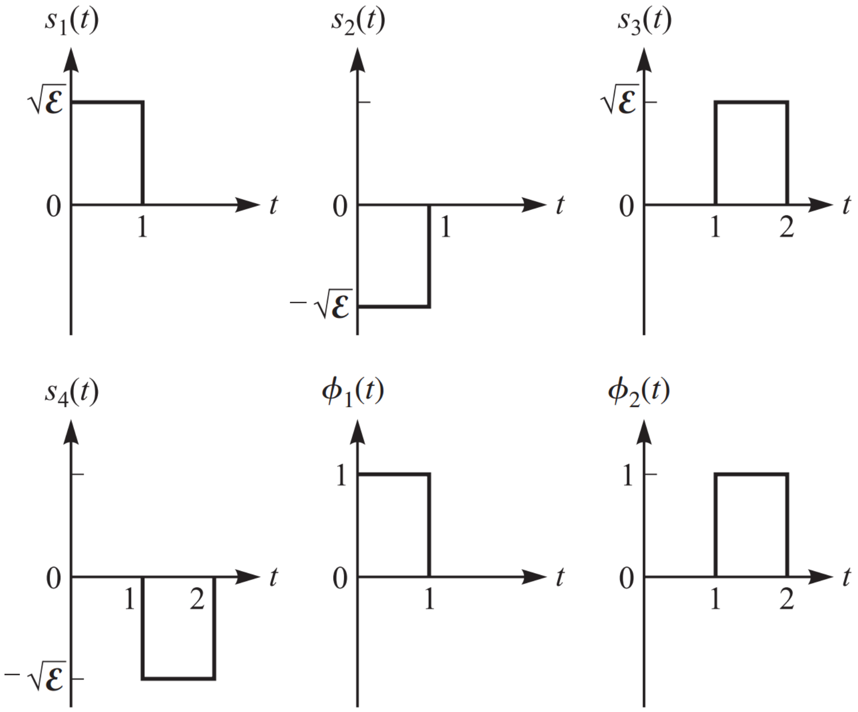


Figura 6: Conjunto de sinais $\{s_k(t)\}_{k=1}^{4}$ e $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{2}$.

Desenhe a constelação de sinais mostre que ela é equivalente do esquema de modulação QPSK.

13. Especifique a codificação Gray para cada símbolo da seguinte constelação de sinais.

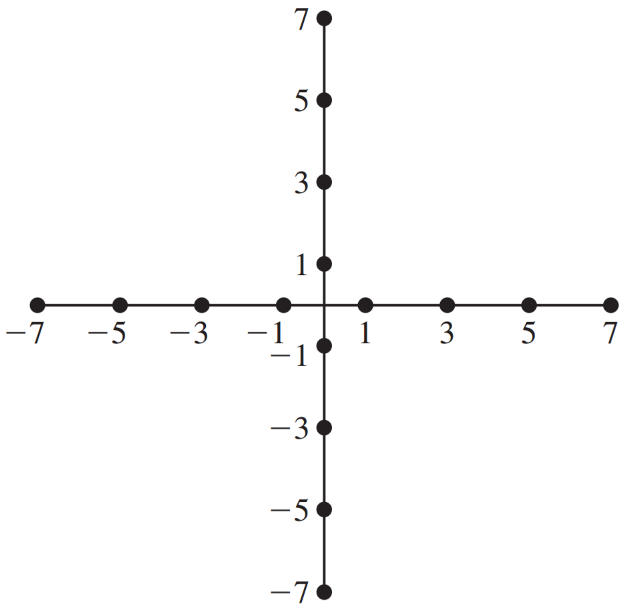


Figura 7: Constelação com codificação Gray.

Explique o porquê que esta codificação se torna mais eficiente em termos de taxa de erro de bits.