



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
SEMESTRE 2024.2

Método Polinomial de Schelkunoff

ALUNO: João Vitor de Oliveira Fraga - Matrícula 537377
CURSO: Engenharia de Telecomunicações
PROFESSOR: Sérgio Antenor de Carvalho
DISCIPLINA: Antenas

Sumário

1	Introdução	3
2	Problemas e Objetivos	3
2.1	Problemas	3
2.2	Objetivos	3
3	Conceito Fundamental	3
3.1	Exemplo de Aplicação	4
4	Aplicações e Benefícios	5
4.1	Aplicações	5
4.2	Benefícios	5
5	Princípios Teóricos	6
5.1	Fator de Array e Representação Polinomial	6
5.2	Fatoração Polinomial e Controle de Nulos	7
5.3	Análise das Regiões Visível e Invisível	7
5.4	Relação entre Parâmetros Físicos e Padrão de Radiação	8
5.5	Critérios para a Síntese de Antenas com Nulos Específicos	8
5.6	Exemplo de Aplicação do Método	8
5.7	Interpretação Gráfica dos Nulos	9
6	Simulação do Método de Schelkunoff	9
6.1	Algoritmo	9
6.2	Resultados	10
7	Conclusão	11
8	Códigos	13

1 Introdução

O **Método Polinomial de Schelkunoff** foi desenvolvido por Sergei Alexander Schelkunoff em 1943 [2], [5]. Este método teve um impacto significativo no avanço das tecnologias de radar durante a Segunda Guerra Mundial, ao permitir um controle mais eficiente do padrão de radiação de antenas.

O método se baseia na representação do Fator de Array (AF) como um polinômio, cujas raízes determinam os nulos no padrão de radiação [1]. Com isso, torna-se possível ajustar o padrão de radiação das antenas para atender a requisitos específicos de sistemas de comunicação e radar.

2 Problemas e Objetivos

2.1 Problemas

Os sistemas de antenas enfrentam desafios significativos devido a:

- Interferências causadas por sinais indesejados.
- Lóbulos laterais que prejudicam a eficiência energética.

2.2 Objetivos

O método visa:

- Posicionar nulos em ângulos específicos para minimizar interferências.
- Controlar lóbulos principais e laterais.
- Proporcionar um ajuste fino do padrão de radiação para diferentes aplicações.

3 Conceito Fundamental

O fator de array pode ser representado por um polinômio, em que as raízes correspondem aos nulos desejados. A equação geral é dada por:

$$AF(\psi) = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)\psi} \quad (1)$$

Onde:

- N é o número de elementos no array.
- a_n são os coeficientes de excitação dos elementos.
- $\psi = kd\cos\theta + \beta$ é uma variável angular que depende do espaçamento d e do deslocamento de fase β .

3.1 Exemplo de Aplicação

Considerando um array linear de 4 elementos com espaçamento $d = \frac{\lambda}{4}$, o fator de array pode ser expresso como:

$$AF(\psi) = 1 + z + z^2 + z^3 \quad (2)$$

Este polinômio pode ser fatorado como:

$$AF(\psi) = (z - 1)(z - j)(z + j) \quad (3)$$

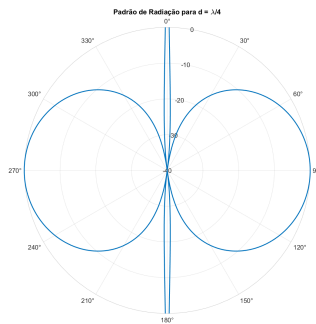


Figura 1: Padrão de radiação para $d = \frac{\lambda}{4}$.

4 Aplicações e Benefícios

4.1 Aplicações

O Método de Schelkunoff é utilizado em diversas áreas [4], [6]:

- **Telecomunicações:** Minimização de interferências em redes celulares e Wi-Fi.
- **Radares:** Melhoria na detecção de alvos ao suprimir reflexões indesejadas [5].
- **Astronomia:** Redução de interferências em radiotelescópios [2].
- **Sistemas de Defesa:** Otimização de antenas para vigilância e comunicação militar [4].

4.2 Benefícios

Os principais benefícios do método incluem:

- Alta precisão no posicionamento de nulos.
- Flexibilidade para ajustar configurações de antenas.
- Eficiência energética com foco no lóbulo principal.

5 Princípios Teóricos

O Método Polinomial de Schelkunoff fundamenta-se na representação Fator de Array (AF) como um polinômio cujas raízes determinam os nulos no padrão de radiação. Esse conceito permite um controle direto sobre o posicionamento angular dos nulos e, conseqüentemente, o formato dos lóbulos principais e laterais.

5.1 Fator de Array e Representação Polinomial

O fator de array para um sistema de N elementos igualmente espaçados pode ser expresso matematicamente como [5], [6]:

$$AF(\psi) = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)\psi} \quad (4)$$

Onde:

- N é o número total de elementos no array;
- a_n representa a amplitude ou coeficiente de excitação aplicado ao n -ésimo elemento;
- $\psi = kd \cos \theta + \beta$ é a variável angular;
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda;
- d é o espaçamento entre os elementos;
- β é o deslocamento de fase inicial;
- θ é o ângulo de observação.

O fator de array pode ser convertido em uma forma polinomial de grau $N - 1$ usando a substituição $z = e^{j\psi}$:

$$AF(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^{n-1} \quad (5)$$

Essa representação permite tratar o problema como uma equação polinomial cujas raízes z_k determinam as direções dos nulos do padrão de radiação.

5.2 Fatoração Polinomial e Controle de Nulos

A fatoração do polinômio pode ser escrita como:

$$AF(z) = a_N \prod_{k=1}^{N-1} (z - z_k) \quad (6)$$

Onde z_k são as raízes do polinômio que definem as direções dos nulos no padrão de radiação. A posição dos nulos é controlada pelo argumento das raízes z_k , que estão distribuídas no círculo unitário.

Cada raiz corresponde a um ângulo específico θ_k , relacionado por:

$$z_k = e^{j(kd \cos \theta_k + \beta)} \quad (7)$$

Essa abordagem permite controlar diretamente a direção dos nulos, configurando o padrão de radiação de maneira mais precisa.

5.3 Análise das Regiões Visível e Invisível

O número complexo z é mapeado sobre o círculo unitário [1], [5]:

$$z = e^{j(kd \cos \theta + \beta)}, \quad |z| = 1 \quad (8)$$

A região visível é determinada pelos ângulos θ que correspondem ao intervalo real de radiação útil:

$$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (9)$$

- Quando $d \leq \frac{\lambda}{2}$: Todo o padrão de radiação principal está contido na região visível, evitando aliasing.
- Quando $d > \frac{\lambda}{2}$: Pode ocorrer aliasing, e parte dos lóbulos principais pode se projetar fora da região visível.

5.4 Relação entre Parâmetros Físicos e Padrão de Radiação

O espaçamento d e o número de elementos N influenciam diretamente a largura do lóbulo principal (HPBW - Half Power Beamwidth) e o nível de lóbulos laterais (SLL - Side Lobe Level) [5].

- Um aumento no número de elementos N tende a reduzir a largura do lóbulo principal, aumentando a direcionalidade do feixe.
- Aumentar o espaçamento d pode introduzir lóbulos secundários indesejáveis, caso ultrapasse $\lambda/2$.

5.5 Critérios para a Síntese de Antenas com Nulos Específicos

Para configurar nulos em direções desejadas, é necessário determinar as raízes z_k correspondentes. Dada uma direção θ_k de nulo, o valor da raiz é definido por:

$$z_k = e^{j(kd \cos \theta_k + \beta)} \quad (10)$$

Isso permite configurar nulos em ângulos específicos, o que é essencial para:

- Supressão de interferência em direções indesejadas.
- Redução de interferências provenientes de outras fontes próximas.

5.6 Exemplo de Aplicação do Método

Considerando um array linear de 4 elementos igualmente espaçados por $d = \frac{\lambda}{4}$ e desejando nulos em $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$, o fator de array pode ser expresso como:

$$AF(\psi) = (e^{j\pi \cos(30^\circ)} - z_1)(e^{j\pi \cos(90^\circ)} - z_2)(e^{j\pi \cos(150^\circ)} - z_3) \quad (11)$$

O padrão de radiação gerado posicionará nulos exatamente nas direções desejadas, minimizando interferências provenientes desses ângulos.

5.7 Interpretação Gráfica dos Nulos

A distribuição dos nulos pode ser visualizada no gráfico de radiação. O posicionamento correto dos nulos proporciona maior eficiência energética e um padrão de radiação otimizado, como ilustrado na Figura 4:

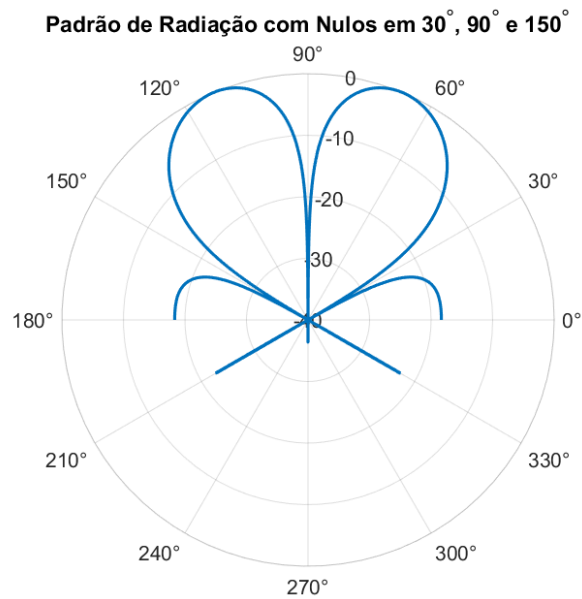


Figura 2: Padrão de radiação com nulos posicionados em 30°, 90° e 150°.

6 Simulação do Método de Schelkunoff

6.1 Algoritmo

O pseudocódigo da simulação do método está ilustrado na Figura 3, além disso o código completo está disponibilizada no Código 1:

Algorithm 1 Simulação do Método de Schelkunoff

- 1: **Entrada:** Número de elementos (N), espaçamento (d), ângulos dos nulos θ_{nulos} .
 - 2: Calcular as raízes dos nulos: $z_{nulos} = e^{j\pi \cos(\theta_{nulos})}$.
 - 3: Inicializar o fator de array: $AF \leftarrow 1$.
 - 4: **for** cada ângulo θ no intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$ **do**
 - 5: **for** cada raiz z_k em z_{nulos} **do**
 - 6: Atualizar: $AF \leftarrow AF \cdot (e^{j\pi \cos(\theta)} - z_k)$.
 - 7: **end for**
 - 8: **end for**
 - 9: Normalizar AF : $AF \leftarrow \frac{AF}{\max(|AF|)}$.
 - 10: Plotar o padrão de radiação em escala logarítmica (dB).
 - 11: **Saída:** Gráfico do padrão de radiação com nulos posicionados.
-

Figura 3: Pseudocódigo da Simulação do Método de Schelkunoff.

6.2 Resultados

A simulação foi realizada com os seguintes parâmetros:

- Número de elementos: $N = 4$.
- Espaçamento: $d = \frac{\lambda}{4}$.
- Direções dos nulos: $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.

O padrão de radiação obtido é apresentado na Figura 4:

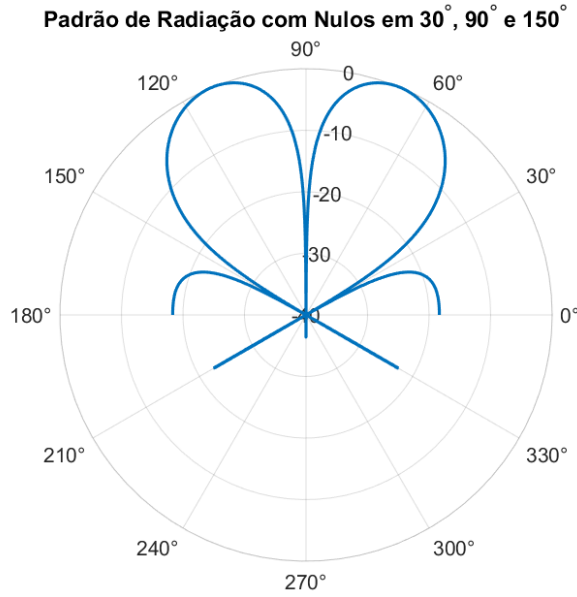


Figura 4: Padrão de radiação com nulos em 30° , 90° e 150° .

7 Conclusão

O Método Polinomial de Schelkunoff demonstrou ser uma ferramenta poderosa e eficiente no controle dos padrões de radiação em arrays de antenas. A abordagem baseada em polinômios permite o posicionamento estratégico de nulos em direções específicas, proporcionando uma maneira robusta de minimizar interferências e otimizar a eficiência do sistema.

Os resultados obtidos através da simulação confirmam a eficácia do método:

- Nulos foram posicionados com precisão nos ângulos desejados (30° , 90° e 150°), demonstrando a capacidade do método de suprimir sinais indesejados provenientes dessas direções.
- O padrão de radiação apresentou uma concentração eficiente no lóbulo principal, maximizando a direção desejada e minimizando a energia desperdiçada em lóbulos laterais.
- O aumento do número de elementos no array (N) e a escolha apropriada do espaçamento (d) resultaram em maior direcionalidade e controle sobre o padrão de radiação.

O método oferece uma solução versátil e flexível para diversas aplicações, como:

- **Telecomunicações:** Controle de interferência em redes celulares, especialmente em ambientes densamente povoados.
- **Sistemas de Radar:** Aumento da precisão de detecção e supressão de reflexões espúrias.
- **Radioastronomia:** Redução de interferências externas, permitindo a captação de sinais astronômicos de baixa intensidade.
- **Sistemas de Defesa:** Otimização do padrão de radiação para vigilância e comunicação segura.

Mas apesar de sua eficácia, o método de Schelkunoff possui algumas limitações:

- O aumento excessivo do número de elementos N pode resultar em maior complexidade computacional.
- A precisão do método depende da exatidão dos parâmetros físicos, como o espaçamento d e o deslocamento de fase β .
- A presença de erros práticos, como variações no espaçamento entre elementos e imperfeições físicas, pode afetar o desempenho do padrão de radiação.

Para finalizar, o Método Polinomial de Schelkunoff se destaca como uma abordagem robusta e flexível no controle de padrões de radiação de antenas. Sua aplicação prática permite o desenvolvimento de sistemas de comunicação mais eficientes, com maior capacidade de rejeitar interferências e melhorar a qualidade do sinal.

A conexão entre teoria matemática e prática de engenharia proporcionada pelo método reafirma sua relevância em aplicações modernas de telecomunicações, defesa, astronomia e sistemas de radar. Assim, a pesquisa e o aprimoramento contínuo dessa técnica podem contribuir significativamente para o avanço da tecnologia de antenas.

8 Códigos

```
1 % MATLAB Code: Padrão de radiação para d = lambda/4
2
3 % Parâmetros iniciais
4 N = 4; % Número de elementos no array
5 d = 0.25; % Espaçamento normalizado (d/lambda)
6 theta = linspace(0, 2*pi, 1000); % Ângulos de varredura [rad]
7 k = 2*pi; % Constante de propagação
8
9 % Definição do fator de array
10 AF = zeros(size(theta));
11 for n = 1:N
12     AF = AF + exp(1j*(n-1)*k*d*cos(theta));
13 end
14
15 % Normalização da magnitude do fator de array
16 AF_magnitude = abs(AF) / max(abs(AF));
17
18 % Gráfico polar
19 figure;
20 polarplot(theta, 20*log10(AF_magnitude), 'LineWidth', 1.5);
21 rlim([-40 0]); % Limite do eixo radial em dB
22 title('Padrão de Radiação para d = \lambda/4');
23
24 grid on;
25 set(gca, 'ThetaZeroLocation', 'top', 'ThetaDir', 'clockwise');
26
27 % Salvando o gráfico
28 saveas(gcf, 'AF_lambda4.png');
29 %%
30 % Intervalo para 0 <= theta <= 90 graus
31 theta = linspace(-pi/2, pi/2, 1000); % Primeiro quadrante (0 a 90 graus)
32 z_visible = exp(1j * (k * d * cos(theta) + beta)); % Região visível no 1
    quadrante
33
34 % Gráfico ajustado
```

```

35 figure;
36 hold on;
37 plot(real(z_circle), imag(z_circle), 'k--', 'LineWidth', 1, 'DisplayName',
    'Círculo Unitário Completo');
38 plot(real(z_visible), imag(z_visible), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'Região Visível ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ )');
39 scatter(real(z_visible(1)), imag(z_visible(1)), 50, 'r', 'filled', '
    DisplayName', 'Início:  $\theta = 0^\circ$ ');
40 scatter(real(z_visible(end)), imag(z_visible(end)), 50, 'g', 'filled', '
    DisplayName', 'Fim:  $\theta = 90^\circ$ ');
41
42 % Configurações do gráfico
43 grid on;
44 axis equal;
45 xlabel('Re(z) (Parte Real)');
46 ylabel('Im(z) (Parte Imaginária)');
47 title('Círculo Unitário e Região Visível no Primeiro Quadrante');
48 legend show;
49
50 % Salvando o gráfico
51 saveas(gcf, 'circulo_unitario_quadrante1.png');
52 %%
53 % Configuração de parâmetros
54 N = 4; % Número de elementos no array
55 d = 0.25; % Espaçamento normalizado (d/lambda)
56 theta_nulos = [30, 90, 150]; % Direções dos nulos em graus
57 k = 2*pi; % Constante de propagação
58 theta = linspace(0, 180, 1000); % Ângulos de varredura em graus
59
60 % Conversão de ângulos para radianos
61 psi_nulos = cosd(theta_nulos); % Projeção angular
62 z_nulos = exp(1j * pi * psi_nulos); % Cálculo das raízes (nulos)
63
64 % Fator de array usando o método de Schelkunoff
65 AF = ones(size(theta)); % Inicializa o fator de array
66 for zn = z_nulos
67     AF = AF .* (exp(1j * pi * cosd(theta)) - zn); % Atualiza o fator de

```

```

        array
68 end
69
70 % Normalização do padrão de radiação
71 AF_magnitude = abs(AF) / max(abs(AF)); % Normaliza a magnitude do fator
        de array
72
73 % Gráfico polar do padrão de radiação
74 figure;
75 polarplot(deg2rad(theta), 20*log10(AF_magnitude), 'LineWidth', 1.5); %
        Gráfico polar
76 title('Padrão de Radiação com Nulos em 30^\circ, 90^\circ e 150^\circ');
        % Título
77 rlim([-40 0]); % Limite radial em dB
78 grid on;
79
80 % Salvando o gráfico
81 saveas(gcf, 'padrao_radiacao_nulos_N4.png'); % Salva o gráfico como
        imagem

```

Listing 1: Código de Simulação do Método de Schelkunoff

Referências

Referências

- [1] Antenna Theory, “Zeros in the Array Factor,” Available: <https://www.antenna-theory.com/arrays/weights/zeros.php>.
- [2] SlideShare, “Schelkunoff Polynomial Method for Antenna Synthesis,” Available: <https://fr.slideshare.net/slideshow/schelkunoff-polynomial-method-for-antenna-synthesis/59634764>.
- [3] MathWorks, “Schelkunoff Polynomial Method,” Available: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/101218-schelkunoff-polynomial-method>.
- [4] P. K. Singhal, A. Pandey, and S. K. Sharma, “Schelkunoff Polynomial Method for Synthesis of Linear Array Antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 3, pp. 1024–1030, 2007.
- [5] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 3rd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2005.
- [6] ECE 5318, “Chapter 6: Antenna Arrays,” University of Houston, Available: <https://courses.egr.uh.edu/ECE/ECE5318/LongPwrPtsCh6B.pdf>.