

Variável Complexa

Primeira Lista de Exercícios

01. Resolva, nos complexos, as equações a seguir.

(a) $z^2 = -18$

(b) $z^2 - 5z + 9 = 0$

02. Escrevas cada um dos números complexos a seguir na forma normal, isto é, na forma $a + bi$.

(a) $(1 + i)^2$

(d) $\frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i}$

(b) $(1 - i)^2$

(e) $\frac{5+2i}{5-2i}$

(c) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

(f) $(2+i)(5+3i)(1-4i)$

03. Calcule os inversos dos seguintes números complexos. Expresse suas respostas na forma normal, isto é, na forma $a + bi$.

(a) i

(b) $\frac{i+1}{i-1}$

(c) $\frac{2+i}{1-i} + \frac{3+2i}{1+i}$

04. Seja n um inteiro. Mostre que

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se o resto da divisão de } n \text{ por } 4 \text{ é } 0; \\ i, & \text{se o resto da divisão de } n \text{ por } 4 \text{ é } 1; \\ -1, & \text{se o resto da divisão de } n \text{ por } 4 \text{ é } 2; \\ -i, & \text{se o resto da divisão de } n \text{ por } 4 \text{ é } 3. \end{cases}$$

05. Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, então $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

06. Determine o inverso de z se

(a) $z = 1 - 2i$

(b) $z = 3 + 4i$

(c) $z = -1 + i$

07. Sejam z e w números complexos quaisquer. Mostre que

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

08. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = |w| = 1$. Mostre que

$$|z^{-1} + w^{-1}| = |z + w|.$$

09. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$||z| - |w|| \leq |z + w|.$$

10. Sejam m e n inteiros positivos tais que tanto m quanto n podem ser escritos como a soma dos quadrados de dois inteiros. Mostre que mn também pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros.