

Variável Complexa

Quarta Lista de Exercícios

01. Calcule

(a) $\exp\left(\frac{5 + \pi i}{4}\right)$ (b) $\exp\left(\frac{7 + 3\pi i}{4}\right)$ (c) $\exp\left(\frac{-1 - 5\pi i}{6}\right)$

02. Em quais pontos a função $f(z) = \exp(\bar{z})$ é derivável?

03. Defina o seno e o cosseno complexos por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- (a) Mostre que essas funções são inteiras e determine suas derivadas.
- (b) Escreva essas funções na forma $u + iv$.
- (c) Mostre que essas funções são periódicas e determine seus períodos.
- (d) Encontre os zeros dessas funções.

04. A tangente complexa é definida por

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

- (a) Determine os pontos singulares de $\tan z$.
- (b) Calcule a derivada de $\tan z$.
- (c) Escreva $\tan z$ na forma $u + iv$.

05. Mostre que

(a) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

(b) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

(c) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2$

(d) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ se, e somente se, z é real.

(e) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

06. Defina o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico complexos por

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

(a) Mostre que essas funções são inteiras e determine suas derivadas.

(b) Escreva essas funções na forma $u + iv$.

07. Sejam z_1 e z_2 números complexos tais que $\operatorname{Re}(z_1) > 0$, $\operatorname{Re}(z_2) > 0$ e $\operatorname{Re}(z_1 z_2) > 0$.
Mostre que

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Aqui, \log denota o ramo principal do logaritmo.

08. Resolva as equações

(a) $e^z = -1$

(b) $e^z = 1 + i$

(c) $e^z = -i$

(d) $e^z = 3i$

09. Calcule $\arg_0 z$ e $\log z$, onde \log denota o ramo principal do logaritmo.

(a) $1 + i$

(b) $(1 + i)^4$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)^5$

10. Usando o ramo principal de z^{1+i} , calcule $(5i)^{1+i}$.