



PROJECT WORK - FINAL REPORT

STUDENT NAME: JOÃO VITOR DE OLIVEIRA FRAGA

STUDENT NUMBER: 537377

STUDENT NAME: ABRAÃO DE CARVALHO ALBUQUERQUE

STUDENT NUMBER: 538286

CONTENTS

TASK 1 - SYSTEM MODELLING	2
TASK 2 - SYSTEM ANALYSIS	8
TASK 3 - SYSTEM CONTROL	12

TASK 1 - SYSTEM MODELLING

Considere o sistema de dois tanques dispostos como mostrado na Figura [Consider the two tanks system arranged as shown in Figure] 1.

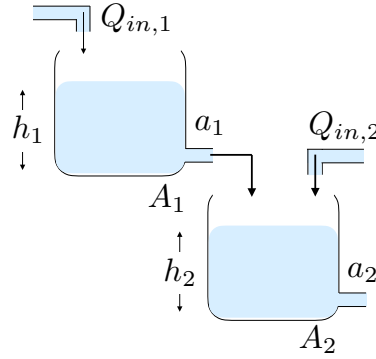


Figure 1: Sistema de dois tanques para o tarefa [Two-tank system for task 1].

As vazões volumétricas $Q_{in,1}$ e $Q_{in,2}$ representam as entradas do sistema, enquanto a variável medida (saída) é o nível de fluido h_2 no segundo tanque. As áreas dos dois tanques são A_1 e A_2 , enquanto a_1 e a_2 são as áreas dos orifícios indicadas na Figura 1. A vazão $Q_{in,2}$ é uma segunda entrada ao sistema que pode representar uma possível perturbação para o segundo tanque. O fluido é perfeito (sem tensões de cisalhamento, sem viscosidade, sem condução de calor) e sujeito apenas à gravidade³. Os tanques estão cheios de água (fluido incompressível) e a pressão externa é constante (pressão atmosférica) [The volumetric flow rates $Q_{in,1}$ and $Q_{in,2}$ represent the inputs to the system, while the measured variable (output) is the fluid level h_2 in the second tank. The areas of the two tanks are A_1 and A_2 , while a_1 and a_2 are the areas of the orifices indicated in Figure 1. The fluid is perfect (no shear stresses, no viscosity, no heat conduction), and subject only to gravity³. The tanks are filled with water (incompressible fluid), and the external pressure is constant (atmospheric pressure)].

1. Obtenha um modelo de espaço de estados do sistema, onde $x_1(t) = h_1(t)$ e $x_2(t) = h_2(t)$ são variáveis de estado, $u(t) = [Q_{in,1}(t), Q_{in,2}(t)]$ é o vetor das entradas e $y(t) = h_2(t)$ é a saída [Obtain a state-space model of the system, where $x_1(t) = h_1(t)$ and $x_2(t) = h_2(t)$ are state variables, $u(t) = [Q_{in,1}(t), Q_{in,2}(t)]$ is the input vector and $y(t) = h_2(t)$ is the output].

Resposta:

As equações de conservação de massa para os tanques são:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} \left(Q_{in,1} - a_1 \sqrt{2gh_1} \right)$$

³ A vazão é dada pela lei de Torricelli [The flow rate is given by the Torricelli law]: $q_i(t) = a_i \sqrt{2gh_i(t)}$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} \left(a_1 \sqrt{2gh_1} + Q_{in,2} - a_2 \sqrt{2gh_2} \right)$$

Quando substituímos $h_1(t) = x_1(t)$ e $h_2(t) = x_2(t)$, ficamos com as seguintes equações:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_1} \left(u_1 - a_1 \sqrt{2gx_1} \right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{A_2} \left(a_1 \sqrt{2gx_1} + u_2 - a_2 \sqrt{2gx_2} \right)$$

Dessa maneira, a representação do nosso sistema em espaço de estado é dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 \sqrt{2g}}{A_1} & 0 \\ \frac{a_1 \sqrt{2g}}{A_2} & -\frac{a_2 \sqrt{2g}}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Já a equação de saída é dada simplesmente por:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

2. Dado $a_1 = a_2 = 0.1 \text{ m}^2$, $A_1 = 20 \text{ m}^2$, $A_2 = 20 \text{ m}^2$, encontre o equilíbrio estado (\bar{x}_1, \bar{x}_2) obtido com uma entrada constante $\bar{u} = [1, 0] \text{ m}^3/\text{s}$, aproximando a aceleração da gravidade como $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ [Given $a_1 = a_2 = 0.1 \text{ m}^2$, $A_1 = 20 \text{ m}^2$, $A_2 = 20 \text{ m}^2$, find the equilibrium state (\bar{x}_1, \bar{x}_2) obtained with a constant input $\bar{u} = [1, 0] \text{ m}^3/\text{s}$, approximating gravity acceleration as $g \approx 10 \text{ m/s}^2$].

Resposta:

Para o primeiro tanque, ficamos com:

$$0 = \frac{1}{A_1} \left(\bar{u}_1 - a_1 \sqrt{2g\bar{x}_1} \right)$$

$$1 - 0.1\sqrt{20\bar{x}_1} = 0$$

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{1}{0.1\sqrt{20}} \right)^2 = 5 \text{ m}$$

Já para o segundo tanque:

$$0 = \frac{1}{A_2} \left(a_1 \sqrt{2g\bar{x}_1} - a_2 \sqrt{2g\bar{x}_2} \right)$$

$$0.1\sqrt{20 \times 5} - 0.1\sqrt{20\bar{x}_2} = 0$$

$$\bar{x}_2 = 5 \text{ m}$$

Dessa maneira, o estado de equilíbrio é definido por:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (5, 5) \text{ m}$$

3. Determine o sistema linearizado $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ em torno do estado de equilíbrio [\[Determine the linearised system \$\(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\)\$ around the equilibrium state\]](#) (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Resposta:

Para linearizar o sistema em torno do estado de equilíbrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , utilizamos a expansão em série de Taylor das equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -\frac{a_1\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{\bar{x}_1}}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{1}{A_1}(u_1 - \bar{u}_1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{a_1\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{\bar{x}_1}}(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{a_2\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{\bar{x}_2}}(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{1}{A_2}(u_2 - \bar{u}_2)$$

Dessa maneira, tendo os valores e substituindo-os, ficamos com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{200} & 0 \\ \frac{1}{200} & -\frac{1}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \times 10^{-3} & 0 \\ 5 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

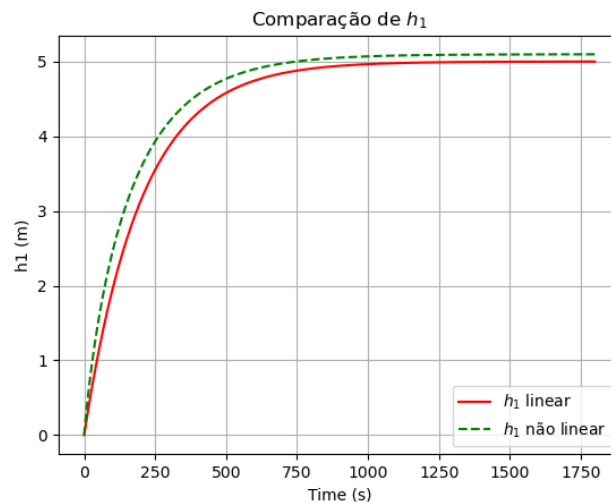
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Na linguagem de programação de sua escolha, simule a resposta de dois sistemas a entrada ao degrau de amplitude A de sua escolha e discuta seus resultados [In the programming language of your choice, simulate the two systems response to a input step of amplitude A of your choice and discuss your results].

Resposta:

Figure 2:



Fonte: Elaborado pelo autor.

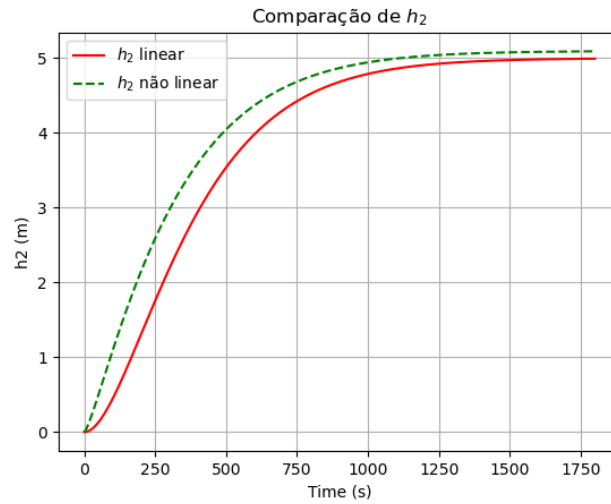
Na Fig. 2 conseguimos analisar a comparação entre a altura de h_1 para o modelo linear e não linear, onde podemos inferir algumas coisas a partir da imagem:

- O modelo linear apresenta uma resposta mais lenta quando comparamos com o modelo não linear;
- Os dois modelos convergem para o mesmo valor de espaço estacionário, no entanto, o modelo não linear atinge o valor final mais rapidamente;
- Além disso, quando rodamos o código e calculamos o erro, temos um erro de apenas 1.90%, sendo um valor extremamente pequeno.

Na Fig. 3 conseguimos analisar a comparação entre a altura de h_2 para o modelo linear e não linear, onde podemos inferir algumas coisas a partir da imagem:

- Os dois primeiros tópicos levantados na comparação de h_1 também são válidos para esse caso;
- O erro percentual após rodarmos o código é de 1.93%, que apesar de ser um erro maior do que o visto em h_1 , ainda é um erro pequeno.

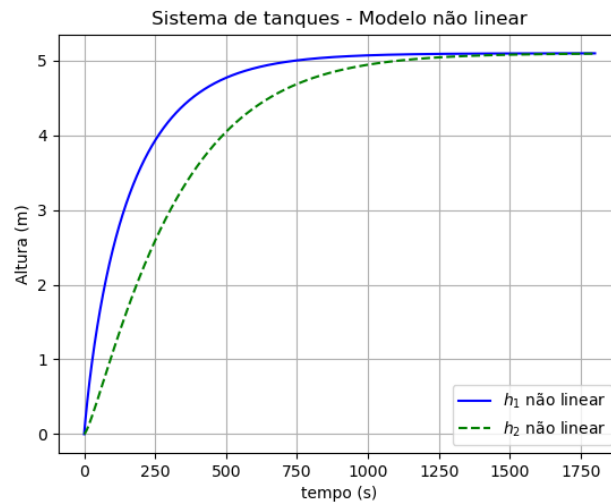
Figure 3:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após isso, vamos analisar como é o comportamento do sistema original não linear, que está na Fig 4.

Figure 4:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conseguimos inferir que o tanque 1, referente a h_1 , enche mais rapidamente que o tanque 2, referente a h_2 , isso ocorre pois o tanque 1 tem um fluxo direto de entrada, enquanto o tanque 2 depende da saída do tanque 1.

Com isso, podemos então verificar que o modelo linear apresenta uma boa aproximação para análise em torno do ponto de equilíbrio. Contudo, a simplicidade de tal modelo pode levar a resultados indesejáveis, dependendo do nível de precisão necessário. Segue o [código do Project Work 1 no GitHub](#).

TASK 2 - SYSTEM ANALYSIS

1. Considering the transfer function that describes the input-output system, plot the response of the system of a step input of amplitude A , defined based on your system.

SOLUTION

Como resultado do sistema linearizado do último projeto, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \times 10^{-3} & 0 \\ 5 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E para encontrar a função de transferência usamos a equação abaixo:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1)$$

Para essa equação resultar com apenas um termo a matriz B precisaria ter dimensão 1×2 , para isso ser satisfeito iremos desconsiderar a coluna referente a variável h_1 , e teremos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Com isso, temos que a função de transferência é:

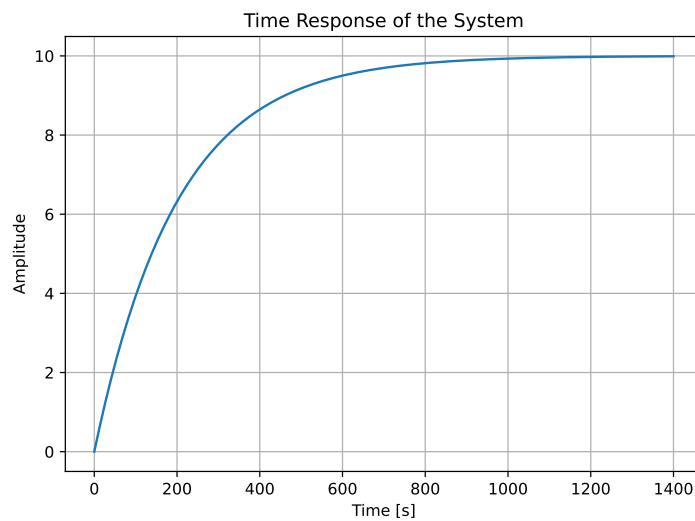
$$G(s) = \frac{0.05s + 0.25 \times 10^{-3}}{(s + 5 \times 10^{-3})^2}$$

Segue o gráfico da resposta do sistema ao degrau no tempo:

Observa-se que a amplitude do valor em regime estacionário, sem a escolha prévia de um valor para A no degrau unitário, aproxima-se de 10. Para determinar o valor de A que conduza o sistema ao resultado desejado de $5m$, deve-se dividir o valor esperado pela amplitude em regime estacionário do sistema anteriormente mencionado. Dessa forma, obtém-se:

$$A = 0.5004$$

A seguir, apresenta-se o gráfico correspondente ao resultado esperado:



Fonte: Elaborado pelo autor.

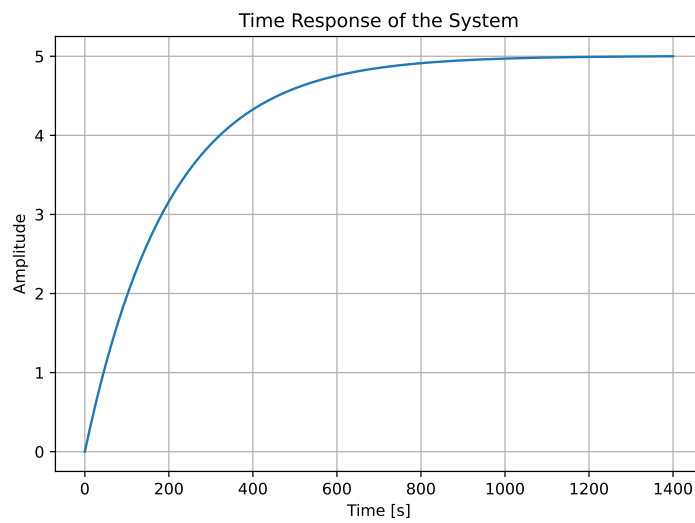
2. By means of the time-response plot, find if possible:

- the steady-state value.
- the % overshoot of the final value.
- the rise time.
- the settling time.

SOLUTION

O valor estacionário após de executar o código, foi de, aproximadamente, 5.00. A porcentagem de superação foi de 0%, pois que o sistema é criticamente amortecido, como veremos no item a seguir. O T_r foi de, aproximadamente, 438.83s. O T_s foi próximo de 778.37s.

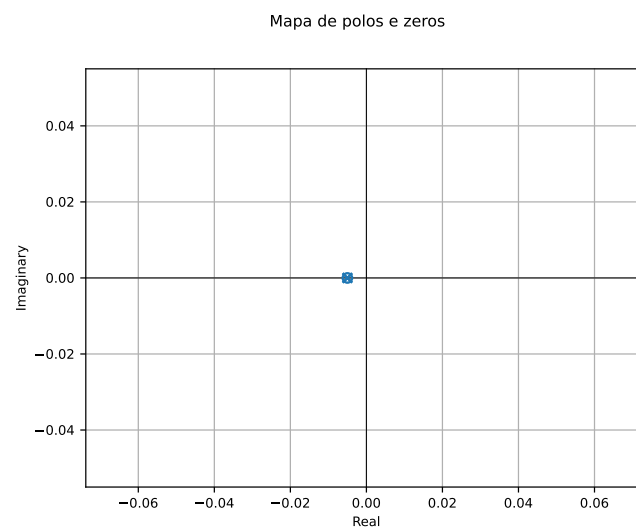
3. Identify the poles and zeros of the linearized model (in the open-loop configuration). Plot the pole-zero map. Analyze the stability of the system by studying the map. Discuss the effect of poles and zeros on the process response and the important information you obtain from the map.



Fonte: Elaborado pelo autor.

SOLUTION

Calculando os polos e zeros, temos que $p_1 = p_2 = z_1 = -0.05$. Segue o gráfico com a posição deles. O sistema é estável, já que todos os polos estão do lado negativo do eixo real.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Define the possible manipulated (input) and controlled (output) variables and the corresponding properties of controllability and observability of the system.

SOLUTION

Por definição do sistema, nos temos apenas uma entrada efetiva Q_1 , já que Q_2 é zero, e temos duas possíveis variáveis de saída, porém nosso sistema só tem acesso h_2 , logo ela será a escolhida. Com isso, podemos caracterizar o sistema como SISO. A variável h_2 será usada para observar o estado do sistema e a partir dela controlaremos a entrada Q_1 para que se adeque a um comportamento esperado.

Segue o [código do Project Work 2 no GitHub](#).

TASK 3 - SYSTEM CONTROL

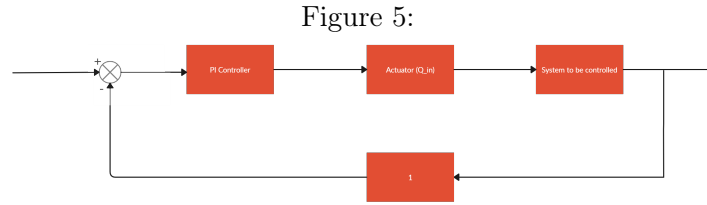
O objetivo da terceira tarefa do projeto trabalho é projetar um compensador para o sistema dinâmico de dois tanques [The objective of the second task of the project work is to analyse the dynamic two-tank system developed in the first task].

Neste caso, você deve [In this case, you must]:

1. Definir o diagrama de blocos simplificado para o sistema de controle de nível, identificando os blocos para o transmissor de nível, o atuador e o sistema a ser controlado [Define a simplified block diagram for the level control loop, by identifying the blocks for the level transmitter, the actuator and the system to be controlled].

Resposta:

Desenhando seu diagrama de blocos ficamos com a seguinte imagem:



Fonte: Elaborado pelo autor.

O atuador será a válvula do sistema e o sistema a ser controlado se refere a função de transferência do sistema. Uma pequena mudança desse Project Work em relação ao anterior é a atualização da função de transferência, onde ela será definida em:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \times 10^{-3} & 0 \\ 5 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E para encontrar a função de transferência usamos a equação abaixo:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

Para essa equação resultar com apenas um termo a matriz B precisaria ter dimensão 1×2 , para isso ser satisfeito iremos desconsiderar a coluna referente a variável h_2 , e teremos:

$$B = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A diferença em relação ao project work anterior é a escolha da coluna de \mathbf{B} . Com isso, temos que a função de transferência do nosso problema é:

$$G(s) = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{(s + 5 \times 10^{-3})^2}$$

2. Projetar um controlador para obter um erro de estado estacionário de resposta ao degrau de 10% sem afetar a resposta transitória do sistema de forma apreciável [Design a controller to obtain a step-response steady-state error of 10% without affecting the system's transient response appreciably].

Resposta:

Para projetarmos um controlador PI, primeiro precisamos achar a constante K_{po} , que é definida como:

$$K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{(5 \times 10^{-3})^2} = \frac{2.5 \times 10^{-4}}{2.5 \times 10^{-5}} \therefore K_{po} = 10$$

Agora, sabemos que a função de transferência de um controlador PI é dada por

$$G_{PI} = \frac{K_{pi}T_i s + K_{pi}}{T_i s}$$

Para definir os valores de K_{pi} e de T_i , usamos as seguintes equações:

$$K_{pi} = \frac{1 - e(\infty)}{e(\infty)K_{po}} = \frac{1 - 0.1}{0.1 \times 10} = \frac{0.9}{1} \therefore K_{pi} = 0.9$$

Já para definir a constante de tempo integral T_i , que é fundamental para garantir que o controlador PI corrija o erro de estado estacionário sem comprometer a estabilidade do sistema, é necessário primeiramente achar o polo dominante do sistema, que é igual a $p_{dom} = -5 \times 10^{-3}$.

Para garantir que o termo integral no controlador PI não interfira excessivamente na resposta transitória do sistema, definimos $T_i = \frac{2.5}{|p_{dom}|}$. Essa escolha garante que o termo integral responda a uma taxa próxima a duas vezes a constante de tempo natural do sistema dominado por p_{dom} . Dessa forma, o controlador PI pode eliminar o erro de estado estacionário com uma velocidade proporcional à dinâmica do sistema, minimizando o risco de oscilações e overshoot excessivo.

No período de teste, usamos no denominador os valores de 1 e 2, no entanto a resposta transitória era muito modificada, o valor de 2.5 foi o mais ideal que achamos.

Realizando o calculo de T_i ficamos com:

$$T_i = \frac{2}{5 \times 10^{-3}} = 500$$

A partir disso, é possível então definir a função de transferência do controlador PI que é:

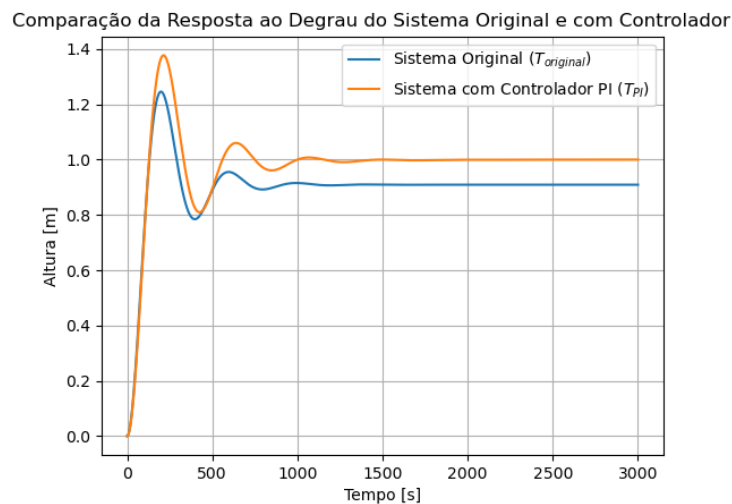
$$G_{PI} = \frac{450s + 0.9}{500s}$$

3. Simular o sistema com e sem controle usando a linguagem de programação de sua escolha [[Simulate the system with and without control using the programming language of your choice](#)].

Resposta:

Quando rodamos o código para comparar a resposta do sistema com e sem controlador, obtemos o seguinte gráfico:

Figure 6:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Onde o gráfico azul corresponde a resposta do sistema sem controlador em malha fechada, e o laranja é a resposta do sistema com o controlador PI em malha fechada.

4. Comentar suas escolhas e os resultados [[Comment your choices and the results](#)].

Resposta:

Durante o processo foi alterado diversos valores para o controlador até chegar aos usados. Infelizmente, mesmo com o controlador o overshoot ainda foi grande, significando que apesar do sucesso na simulação, o controlador pode ser melhorado.

Segue o [código do Project Work 3 no GitHub](#).