Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Guias e Ondas - TI0053

Avaliação Parcial 2

Discente: Lucas de Souza Abdalah
Matrícula: 385472
Docente: Dr. Sérgio Antenor

Fortaleza, 19 de junho de 2019

Sumário

Problemas

Questão 1

Uma linha de transmissão sem perdas com $C = C_1 \times 10^{-11} F/m$ e $L = L_1 \times 10^{-7} H/m$, tem d m de comprimento e uma carga Z_L. Se uma fonte ideal de tensão fornece $100V$ na entrada da linha e opera numa frequência de $f_1 MHz$ a $f_2 MHz$, determine as curvas da corrente de entrada da linha e a corrente na carga em função da frequência (intensidade e fase).

Dados para resolução: $C_1 = 5$; $L_1 = 2$; $d = 28$; $Z_L = 60\Omega$; $f_1 = 42MHz$; $f_2 = 44MHz$.

Solução:

Impedância (Z_0)

A impedância pode ser calculada através da Indutância (L) e da Capacitância (C), com a equação (1), de modo que:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-11}}} \tag{1}$$

$$\boxed{Z_0 = 63,25\Omega}$$

Coeficiente de Reflexão (Γ_L)

Já o coeficiente de reflexão é dado pela relação entre Z_L e Z_0 da equação (2):

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{60 - 63,25}{60 + 63,25} \tag{2}$$

$$\boxed{\Gamma_L = -0,0263}$$

Constante de Fase (β)

A constante de fase é dada pela relação de ω, L e C, em (3):

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi \cdot f \ \sqrt{2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-11}} \tag{3}$$

$$\boxed{\beta \approx 1.99 \cdot 10^{-8} \cdot f \ rad/m}$$

Coeficiente de Reflexão da Fonte (Γ_S)

O coeficiente Γ_S é dado pela equação (4) que relaciona uma exponencial complexa e Γ_L

$$\Gamma_S = \Gamma_L e^{-\jmath 2d\beta} = (-0,0263)e^{-\jmath 2 \cdot 28 \cdot 1,99 \cdot 10^{-8} \cdot f} \tag{4}$$

$$\boxed{\Gamma_S \approx -0,0263 \ e^{-\jmath 1,113 \cdot 10^{-6} \cdot f}}$$

Tensão (V^+)

Para traçar as curvas das correntes de entrada de linha e da carga, temos que obter a tensão V^+, assumindo uma fonte ideal, tem-se:

$$V^+ = \frac{V_{in}}{1 + \Gamma_S} = \frac{100}{1 + \Gamma_S} \tag{5}$$

Corrente de Entrada da Linha (I_S)

A corrente é calculada por:

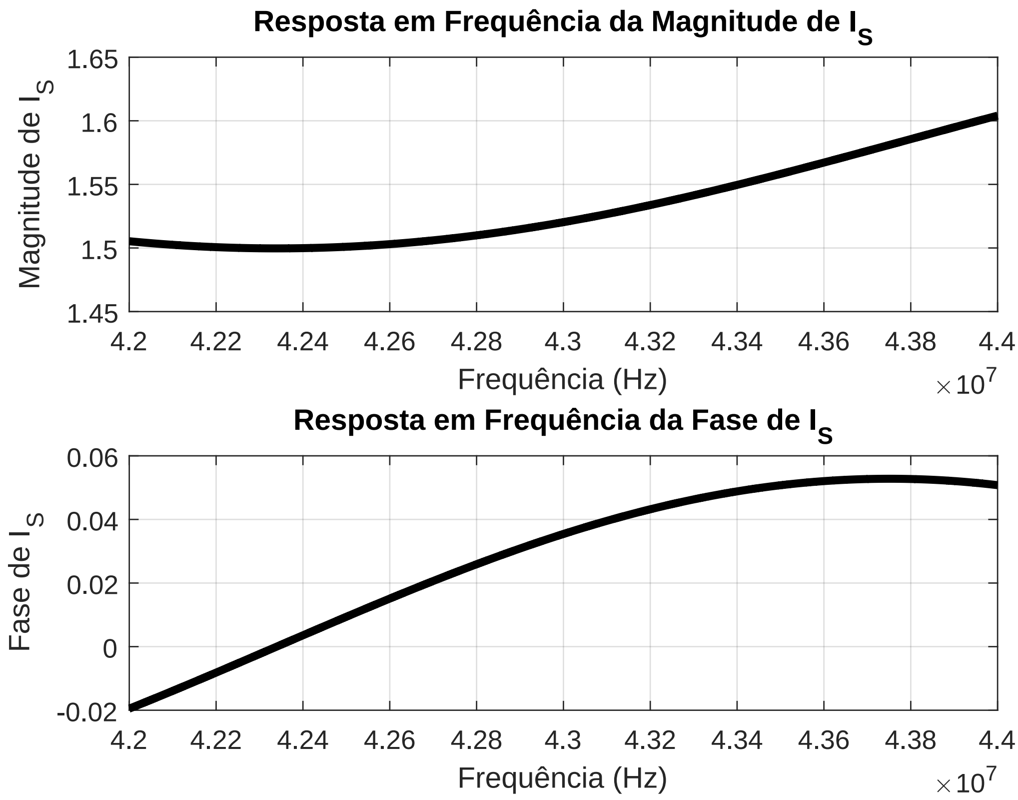
$$I_S = \frac{V^+}{Z_0}(1 - \Gamma_S) \tag{6}$$

Ao utilizar o resultado da equação (5) na equação (6), é possível observar o comportamento da corrente na entrada da linha. O código segue em anexo no apêndice.

$$I_S = \frac{V_{in}(1 - \Gamma_S)}{Z_0(1 + \Gamma_S)} = \frac{100[1 - (-0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6}\cdot f})]}{63,25[1 + (-0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6}\cdot f})]}$$

$$\boxed{I_S \approx 1,58\frac{(1 + 0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6}\cdot f})}{(1 - 0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6}\cdot f})} A}$$

Figura 1: Resposta em Frequência da Entrada da Linha (I_S).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Corrente na Carga (I_L)

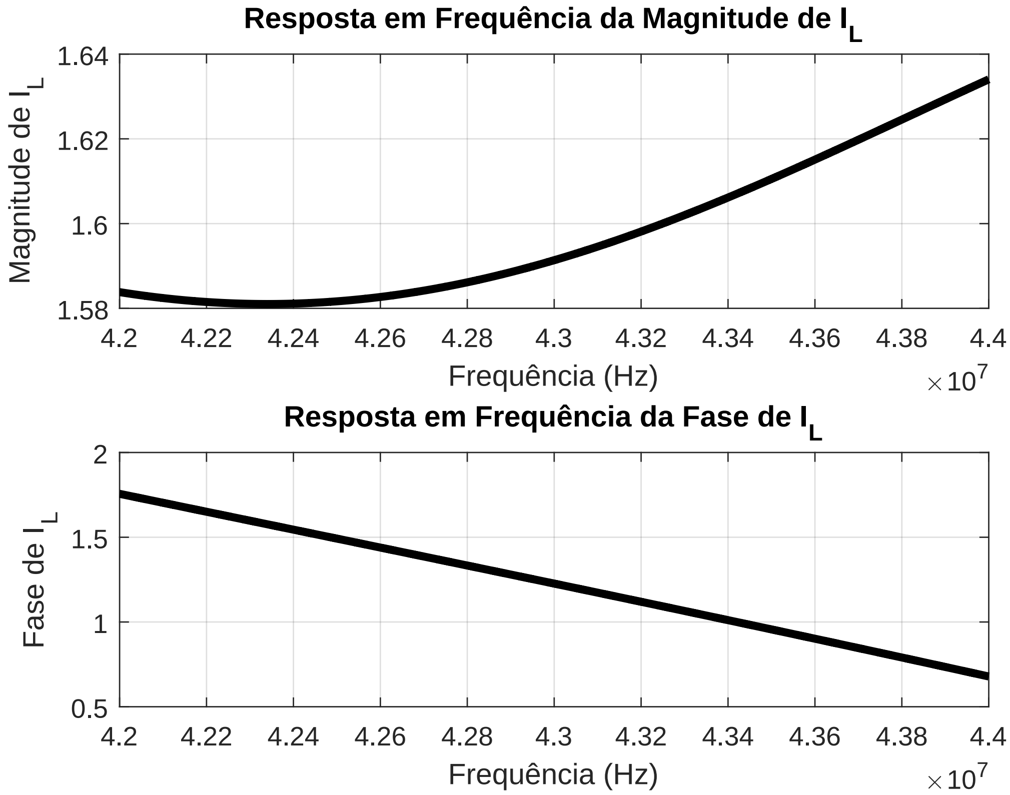
Ao utilizar o resultado da equação (5) na equação (7), é possível observar o comportamento da corrente na carga. O código segue em anexo no apêndice.

$$I_L = \frac{V^+}{Z_0}e^{-\jmath d\beta}(1 - \Gamma_L) \tag{7}$$

$$I_L = \frac{V_{in}e^{-\jmath d\beta}(1 - \Gamma_L)}{Z_0(1 + \Gamma_S)} = \frac{100e^{-\jmath 28\cdot 1,99\cdot 10^{-8} f}(1 + 0,0263)}{63,25(1 - 0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6}\cdot f})}$$

$$\boxed{I_L \approx 1,62\frac{e^{-\jmath 55,7\cdot 10^{-8} f}}{1 - 0,0263\ e^{-\jmath 1,113\cdot 10^{-6} f}}}$$

Figura 2: Resposta em Frequência da Entrada da Linha (I_L).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Questão 2

Uma carga Z_L está conectada a uma linha de transmissão sem perdas com Z_0. Usando a Carta de Smith determine: a) Γ; b) TOE; c) a admitância da carga Y_L; d) a impedância a $x_1\lambda$ da carga; e) a localização de $V_{máx}$ e V_{min} em relação à carga, se a linha tiver m comprimento de d λ; f) a impedância de entrada da linha.

Dados para resolução: $Z_L = (50 - \jmath 50)\Omega$; $Z_0 = 50\Omega$; $x_1 = 0,45$; $d = 0,7$.

Solução:

a)

Impedância Normalizada ($\bar{Z}_L$)

Para calcular o coeficiente de reflexão, é necessário obter a impedância normalizada de carga, dada a impedância da LT:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 - \jmath 50}{50} \tag{8}$$

$$\boxed{\bar{Z}_L = 1 - \jmath}$$

Módulo do Coeficiente de Reflexão ($|\Gamma|$)

Utilizando os procedimentos que envolvem a carta de Smith, podemos obter $|\Gamma|$ traçando uma reta do centro da carta à $\bar{Z}_L$. Em seguida, o tamanho dessa reta é utilizada nas escalas de referência, na parte inferior da carta, de acordo com o parâmetro desejado.

$$\boxed{|\Gamma| \approx 0,44}$$

Fase do Coeficiente de Reflexão (θ)

Já a fase é dada pelo prolongamento da reta já traçada e observando a escala que circula a carta.

$$\boxed{\theta \approx -64^o}$$

Coeficiente de Reflexão (Γ)

Utilizando os valores obtidos na carta, temos que:

$$\boxed{\Gamma = |\Gamma|e^{\jmath\theta} \approx 0,44e^{-\jmath 64^o}}$$

b)

Taxa de Onda Estacionária (TOE)

A Taxa de Onda Estacionária, do inglês *Stationary Wave Ratio*(SWR), é obtida de modo semelhante ao módulo do Coeficiente de Reflexão $|\Gamma|$, utilizando as escalas de referência.

$$\boxed{TOE \approx 2,6}$$

c)

Admitância da Carga (Y_L)

Ao observar uma circunferência traçada a partir do centro da carga, em relação à impedância normalizada $\bar{Z}_L$. Em seguida, o ponto obtido após rotacionar 180^o nesta circunferência, é a admitância normalizada da carga.

$$\bar{Y_L} \approx 0,5 + \jmath 0,5$$

Utilizando a impedância característica, é possível obter a admitância de fato.

$$Y_L = \bar{Y_L} \cdot Z_0 = (0,5 + \jmath 0,5) \cdot 50$$

$$\boxed{Y_L \approx 25 + \jmath 25}$$

d)

Impedância da Carga a $0,45\lambda$ da carga

Utilizando novamente o prolongamento da reta traçada para $\bar{Z}_L$, é possível observar o ponto de início associado à impedância Z_{in}:

$$\boxed{l_0 = 0,338\lambda}$$

O caminho de $0,45\lambda$ em direção ao gerador é traçado, de modo que a projeção do ponto obtido na circunferência já traçada resulta em $\bar{Z_{in}}$:

$$l_{in} = 0,338\lambda + 0,45\lambda = 0,788\lambda$$

De modo que, utilizando a impedância característica e a impedância normalizada obtida na projeção, é encontrado Z_{in}:

$$Z_{in} = \bar{Z_{in}} \cdot Z_0 = (0,65 + \jmath 0,75) \cdot 50$$

$$\boxed{Z_{in} \approx 32,5 + \jmath 37,5}$$

e)

Localização de $V_{máx}$ e V_{min}

Dado que a impedância é localizada no inferior da carta, a distância $d_{máx}$ para $V_{máx}$ é dada por:

$$d_{máx} = 0,5\lambda - l_0 + 0,25\lambda = 0,5\lambda - 0,338\lambda + 0,25 = 0,412\lambda \tag{9}$$

$$\boxed{d_{máx} = 0,412\lambda}$$

Já a distância d_{min} da carga para V_{min} é dada por:

$$d_{min} = 0,5\lambda - l_0 = 0,5\lambda - 0,338\lambda = 0,162\lambda \tag{10}$$

$$\boxed{d_{min} = 0,162\lambda}$$

Impedância de Entrada na Linha (Z_{ent})

Sendo $d = 0,7$, precisamos percorrer $0,7\lambda$ na carta, de modo que a projeção deste ponto na circunferência traçada é a impedância na entrada de linha.

$$\bar{Z}_{ent} \approx 0,4 + \jmath 0,2 \tag{11}$$

Utilizando a impedância característica, temos:

$$Z_{ent} = \bar{Z}_{ent} \cdot Z_0 = (0,4 + \jmath 0,2) \cdot 50$$

$$\boxed{Z_{ent} = 20 + \jmath 10}$$

Questão 3

Uma linha de transmissão sem perdas com Z_0 tem d m de comprimento e opera em $f_1 MHz$. A velocidade de propagação na linha é de $v_1 \cdot 10^8 m/s$. Se a linha está terminada por uma carga Z_L, use as expressões analíticas para obter: a) as posições do 1^o máximo e do 1^o mínimo; b) a impedância de entrada da linha. Comprove usando a carta a Smith.

Dados para resolução: $Z_0 = 65\Omega$; $d = 10$; $f_1 = 26$; $v_1 = 2$; $Z_L = (45 - \jmath 50)\Omega$.

Solução:

a)

Coeficiente de Reflexão (Γ_L)

É dado pela relação entre Z_L e Z_0 como exposto na equação (2).

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(45 - \jmath 50) - 65}{(45 - \jmath 50) + 65} = \frac{-20 - 50\jmath}{110 - 50\jmath} \approx \frac{53,9e^{\jmath 68,2^o}}{120,8e^{-\jmath 24,5^o}}$$

$$\boxed{\Gamma_L \approx 0,45e^{\jmath 92,6^o}}$$

Constante de Fase (β)

Já a constante de fase é calculada, tal que:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 26 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^8} \tag{12}$$

$$\boxed{\beta \approx 0,817 \ rad/m}$$

Localização de $d_{máx}$ e d_{min}

Observando os pontos de impedância máxima e mínima na linha, tem-se os locais de tensão, máxima e mínima, como utilizado na questão anterior. Porém, com as equações de (13):

$$\begin{cases} d_{max} = \dfrac{\theta_{R_L}}{2\beta} \\ d_{min} = \dfrac{\theta_{R_L} + \pi}{2\beta} \end{cases} \tag{13}$$

Observe que θ_{R_L} nesta relação é dado em radianos, de modo que é necessário convertê-lo antes de efetur as operações.

$$\theta_{R_L} = \frac{92,7^o \cdot \pi}{180^o} = 1.62 \text{ rad}$$

Logo, aplicada a relação:

$$\boxed{d_{max} = \frac{1,61}{2 \cdot 0,817} = 0,99\ m}$$

$$\boxed{d_{min} = \frac{1,61 + \pi}{2 \cdot 0,817} = 2,91\ m}$$

Carta de Smith

Calculando a impedância normalizada de acordo com a equação (8).

$$\bar{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{45 - \jmath 50}{65} = 0,7 - \jmath 0,8$$

$$\boxed{\bar{Z_L} \approx 0,7 - \jmath 0,8}$$

Traçando o prolongamento da reta que passa pelo ponto $\bar{Z_L}$, é encontrado:

$$\boxed{l_0 = 0,369\lambda}$$

Dado que a distância calculada em metros é obtida por (14).

$$d_n = d\lambda \cdot \frac{v}{f} \tag{14}$$

Logo, d_{max} e d_{min} calculados são:

$$d_{max} = (0.25 - 0.369)\lambda = -0,119 \cdot \frac{2 \cdot 10^8}{26 \cdot 10^6} = -0,9154m \tag{15}$$

$$d_{min} = [0.5 + (-0,119)]\lambda = 0,381 \cdot \frac{2 \cdot 10^8}{26 \cdot 10^6} = 2.9308m \tag{16}$$

Possível observar nas medidas apenas uma pequena diferença de alguns milímetros.

b)

Impedância de Entrada da Linha (Z_{ent})

Para obter essa impedância é necessário utilizar a equação (17).

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_S}{1 - \Gamma_S} \tag{17}$$

Então, é necessário obter o coeficiente Γ_S, de acordo com a (4). (Novamente, convertendo o ângulo de Γ_L em radianos)

$$\Gamma_S = \Gamma_L e^{-\jmath 2d\beta} = (0,45e^{\jmath 1,62})e^{-\jmath 2\cdot 10\cdot 0,817} = 0,45e^{\jmath 1,62} \cdot e^{-\jmath 16,34} \approx 0,45e^{-\jmath 14,72}$$

$$\boxed{\Gamma_S \approx -0,248 - \jmath 0,376}$$

$$Z_{ent} = 65\frac{1 + (-0,248 - \jmath 0,376)}{1 - (-0,248 - \jmath 0,376)} = 65\frac{0.752 - \jmath 0,376}{1,248 + \jmath 0,376}$$

$$\boxed{Z_{ent} \approx 30,53 - \jmath 28,77\Omega}$$

Utilizando a carta de Smith novamente, é necessário girar um comprimento de onda completo em direção ao gerador, de modo a calcular qual a distância percorrida em metros:

$$0,5\lambda = 0,5\frac{v}{f} = 0,5\frac{2\cdot 10^8}{26\cdot 10^6} = 3.846m$$

Sendo o comprimento da LT 10m, temos que a distância percorrida é:

$$d_{ent} = 10m - 3,846 = 6,1540m$$

De modo que a foi percorrido para chegar em l_{ent}:

$$= \frac{d_{ent}}{\frac{v}{f}}\lambda = 0,8\lambda$$

$$l_{ent} = 0,369\lambda + 0,8\lambda = 1\lambda + 0,069\lambda$$

São duas voltas completas na carta e resultando em

$$\boxed{l_{ent} = 0.438\lambda}$$

Marcando a projeção na carta, obtém-se:

$$\bar{Z_{ent}} = 0,42 - \jmath 0,36$$

Por fim, temos Z_{ent} próximo ao obtido de forma numérica.

$$Z_{ent} = \bar{Z_{ent}} \cdot Z_0 = (0,42 - \jmath 0,36)\cdot 65$$

$$\boxed{Z_{ent} = 27,3 - \jmath 23,4\Omega}$$

Questão 4

Uma rede de casamento, utilizando um elemento reativo em série com um comprimento d de uma LT, é utilizada para casar uma carga Z_L em uma LT com Z_0 operando a $f_1 GHz$. Determine o comprimento completo de linha d e o valor do elemento reativo se: a) um capacitor em série for utilizado; b) um indutor em série for utilizado.

Dados para resolução: $Z_L = (80 - \jmath 90)\Omega$; $Z_0 = 50\Omega$; $f_1 = 2,4$.

Solução:

Impedância Normalizada ($\bar{Z_L}$)

Obtendo a impedância normalizada de acordo com a equação (8).

$$\bar{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{80 - \jmath 90}{50}$$

$$\boxed{\bar{Z_L} = 1,6 - \jmath 1,8}$$

Capacitor em Série (C)

Ao rotacionar o compasso no sentido anti-horário até atingir a circunferência unitária, obtém-se um valor de impedância $\bar{Z_K}$:

$$\bar{Z_K} = 1 + \jmath 1,5$$

Para não haver reflexão basta que: $\bar{Z_K} + \bar{Z_C} = 1$, consequentemente $\bar{Z_C} = -\jmath 1,5$, resultando em:

$$Z_C = \bar{Z_C} \cdot Z_0 = -\jmath 1,5 \cdot 50$$

$$\boxed{Z_C = -\jmath 75}$$

Dado que a impedância do capacitor é calculada como:

$$Z_C = \frac{1}{\jmath \omega C} \tag{18}$$

$$C = \frac{1}{\jmath \omega Z_C} = \frac{1}{\jmath \cdot (2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^9) \cdot (-\jmath 75)} = 8,842 \cdot 10^{-13} F$$

$$\boxed{C \approx 0,9\ pF}$$

Já o comprimento dado por:

$$d = l_c - l_0 = 0,176\lambda - 0,302\lambda = -0,126\lambda = 0,374\lambda m \tag{19}$$

Indutor em Série (L)

Ao rotacionar o compasso no sentido horário até atingir a circunferência unitária, obtém-se um valor de impedância $\bar{Z_K}$:

$$\bar{Z_K} = 1 - \jmath 1,5$$

Para não haver reflexão basta que: $\bar{Z_K} + \bar{Z}_l' = 1$, consequentemente $\bar{Z}_L' = \jmath 1,5$, resultando em:

$$Z_l' = \bar{Z_L}' \cdot Z_0 = \jmath 1,5 \cdot 50$$

$$\boxed{\bar{Z_l}' = \jmath 75}$$

Dado que a impedância do indutor é calculada como:

$$Z_l' = \jmath\omega L \tag{20}$$

$$l = \frac{Z_l'}{\jmath\omega} = \frac{\jmath 75}{\jmath \cdot (2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^9)} = 4,973 \cdot 10^{-9}$$

$$\boxed{L \approx 5,0\ nH}$$

Já o comprimento dado por:

$$d = l_l - l_0 = 0,320\lambda - 0,302\lambda = 0,018\lambda m \tag{21}$$

Questão 5

Projete duas redes de casamento uma pior toco paralelo em averto e a outra por toco paralelo em curto para casar uma carga Z_L com um LT com impedância de Z_0. Supondo agora que a carga mudou para $Z_L = Z_1$, determine o coeficiente de reflexão visto na rede casamento. Entrega as cartas de Smith utilizadas.

Dados para resolução: $Z_L = (50 + \jmath 100)\Omega$; $Z_0 = 75\Omega$; $Z_1 = (50 - \jmath 100)\Omega$

Solução:

Impedâncias Normalizadas ($\bar{Z_L}$)

Calcula-se a impedância normalizada $\bar{Z_L}$ de acordo com a equação (8).

$$\bar{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 + \jmath 100}{75} \tag{22}$$

$$\boxed{\bar{Z_L} \approx 0,7 + \jmath 1,3}$$

Marcando o ponto obtido na carta de Smith, é possível observar que:

$$l_0 = 0,159\lambda m$$

Capacitor (Z_C) e Indutor (Z_l')

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na questão anterior, obtém-se a impedância normalizada de Capacitor ($\bar{Z_C}$) e de Indutor($\bar{Z_l}$):

$$\bar{Z_C} = 1 - \jmath 1,6$$
$$\bar{Z_l'} = 1 + \jmath 1,6$$

Marcando os pontos na carta, obtém-se:

$$l_C = 0,321\lambda m$$

$$l_l = 0,178\lambda m$$

Para encontrar o valor de d_C, toma-se que:

$$d_c = l_c - l_0 = 0,321\lambda m - 0,159\lambda m = 0,162\lambda m$$

$$\boxed{d_c = 0,162\lambda m}$$

Toco Paralelo em Aberto

O valor de I_{TOCO} é o valor do ponto conjugado de Z_C normalizado, consequentemente:

$$ds_{aberto} = l_{toco} = l_l = 0,178\lambda$$

$$\boxed{ds_{aberto} = 0,178\lambda m}$$

Toco Paralelo em Curto

Já para o paralelo em curto, tem-se que:

$$ds_{curto} = l_{toco} - 0,25\lambda = l_l - 0,25\lambda = 0,178\lambda - 0,25\lambda = -0,072\lambda = 0,428\lambda m$$

$$\boxed{ds_{curto} = 0,428\lambda m}$$

Rede de Casamento

Para calcular o coeficiente de reflexão, deve-se tomar os dados de $\bar{Z}_1$ como referência.

$$\bar{Z}_1 = \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{50 - \jmath 100}{75} \tag{23}$$

$$\boxed{\bar{Z}_1 \approx 0,7 - \jmath 1,3}$$

Ao marcar o ponto na carta de Smith, seguimos o procedimento utilizado na segunda questão para obter $|\Gamma|$ e θ, de modo que $\Gamma = |\Gamma| e^{\jmath\theta}$.
Utilizando o a distância nas escalas inferiores da carta de Smith é possível ver que:

$$|\Gamma| \approx 0,62$$

E estendendo a reta que passa pelo ponto $\bar{Z}_1$, obtém-se o ângulo de reflexão.

$$\theta \approx -65,5^o$$

Por fim, para termos o casamento temos esse coeficiente de reflexão:

$$\boxed{\Gamma \approx 0,62e^{-\jmath 65,5^o}}$$

Questão 6

Medidas são realizadas na frequência de $f Hz$ sobre uma linha de transmissão de l_0 km. Os resultados das medições mostram que a impedância característica é Z_0 Ω, a atenuação é de α_l Np e o deslocamento de fase entre a entrada e a saída é de β_l. Determine R, L, G e C por km de linha; a velocidade de fase e a potência dissipada ao longo da linha sabendo que a potência de entrada é P_{in} W e que há casamento de impedância entre carga e linha.
Dados para resolução: $f = 44K$; $l_0 = 1,9$; $Z_0 = 50\underline{/22^0}\Omega$; $\alpha_l = 0,02$; $\beta_l = 16^0$; $P_{in} = 17$.

Solução:

Fatores de Atenuação (α) e de Deslocamento de Fase (β)

O fator de atenuação é dado pode ser obtido, simplesmente, por:

$$\alpha = \frac{\alpha_l}{l_0} = \frac{0,02\ Np}{1,9\ km} \tag{24}$$

$$\boxed{\alpha = 0,01053\ Np/km}$$

Já para calcular o deslocamento de fase, é necessário expressar o ângulo $\beta_l = 16^o$ em radianos. Logo, $\beta_l = 0.2793\ rad$.

$$\beta = \frac{\beta_l}{l_0} = \frac{0.27925\ rad}{1,9\ km} \tag{25}$$

$$\boxed{\beta = 0,14698\ rad/km}$$

Admitância (Y) da Linha de Transmissão

É interessante escrever a equação do vetor de propagação, com o objetivo de expressar a equação em termos de R, L, G e C.

$$\gamma = (\alpha + \jmath\beta) = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + \jmath L\omega)(G + \jmath C\omega)} \tag{26}$$

Já a impedância Z_0 é representada por:

$$Z_0 = \frac{Z}{Y} = \sqrt{\frac{R + \jmath L\omega}{G + \jmath C\omega}} \tag{27}$$

$$Z_0 = \frac{Z}{Y} = \sqrt{\frac{R + \jmath L\omega}{G + \jmath C\omega}} \tag{28}$$

Calculando o módulo ao quadrado da impedância Z_0 na igualdade:

$$|Z_0|^2 = \left|\sqrt{\frac{R + \jmath L\omega}{G + \jmath C\omega}}\right|^2$$

$$|Z_0|^2 G + \jmath |Z_0|^2 C\omega = R + \jmath L\omega$$

Observando as partes reais e imaginárias da equação, podemos afirmar que a solução da equação é dada por (29).

$$\begin{cases} |Z_0|^2 G = R \\ |Z_0|^2 C = L \end{cases} \tag{29}$$

Consequentemente, fazemos a mesma operação para γ:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\jmath\beta - \beta^2 = RG + \jmath RC\omega + \jmath LG\omega - LC\omega^2$$

Novamente, observando as partes reais e imaginárias da equação, podemos afirmar que a solução da equação é dada por (31)

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - LC\omega^2 \\ 2\alpha\beta = (RC + GL)\omega \end{cases} \tag{30}$$

Introduzindo R e L nas equações associadas à γ:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - LC\omega^2 = (G^2 - C^2\omega^2)|Z_0|^2 \\ 2\alpha\beta = (RC + GL)\omega = (GC + GC)|Z_0|^2\omega \end{cases} \tag{31}$$

$$G^2 - C^2\omega^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|Z_0|^2}$$

$$GC = \frac{\alpha\beta}{|Z_0|^2\omega}$$

Para facilitar a notação e visualização do problema, tome que:

$$k_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|Z_0|^2} = -8,5969 \cdot 10^{-6} \tag{32}$$

$$k_2 = \frac{\alpha\beta}{|Z_0|^2\omega} = 2.2393 \cdot 10^{-12} \tag{33}$$

Desse modo, as expressões estão escritas de modo que todos variáveis são conhecidas. Consequentemente, as expressões podem ser escritas em função dos valores de k_1 e k_2:

$$G^2 - C^2\omega^2 = k_1 \tag{34}$$

$$G = \frac{k_2}{C} \tag{35}$$

Substituindo G da (35) na equação (35), temos:

$$\left(\frac{k_2}{C}\right)^2 - C^2\omega^2 = k_1$$

$$k_2^2 - C^4\omega^2 = k_1 C^2$$

$$C^4\omega^2 + k_1 C^2 - k_2^2 = 0 \tag{36}$$

Para analisar a equação biquadrada resultado das manipulações (36), podemos fazer $C^2 = q$, e obter as soluções plausíveis para o problema.

$$q^2\omega^2 + k_1 q - k_2^2 = 0$$

Onde a solução é dada pela fórmula de Bhaskara:

$$q = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4\omega^2 k_2^2}}{2\omega^2}$$

No nosso cenário, não faz sentido o parâmetro q ser negativo, já que observaremos a raiz dele visando o obter C, logo descartaremos as soluções negativas.

$$C = \left(\frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 + 4\omega^2 k_2^2}}{2\omega^2}\right)^{1/2} \tag{37}$$

$$C = \left[\frac{8,5969 \cdot 10^{-6} + \sqrt{(-8,5969 \cdot 10^{-6})^2 + 4(2\pi f)^2(2.2393 \cdot 10^{-12})^2}}{2(2\pi f)^2}\right]^{1/2}$$

$$C = \left(\frac{8,5969 \cdot 10^{-6} + 8,6856 \cdot 10^{-6}}{1,529 \cdot 10^{11}}\right)^{1/2}$$

$$C = \left(1,1303 \cdot 10^{-16}\right)^{1/2} = 1,063 \cdot 10^{-8}$$

$$\boxed{C \approx 11\ nF/km}$$

$$G = \frac{k_2}{C} = \frac{2,2393 \cdot 10^{-12}}{11 \cdot 10^{-9}}$$

$$\boxed{G \approx 0,21\ mS/km}$$

$$R = |Z_0|^2 G = |50|^2 (0,21 \cdot 10^-3)$$

$$\boxed{R \approx 0,51\ \Omega/km}$$

$$L = |Z_0|^2 C = |50|^2 (11 \cdot 10^-9)$$

$$\boxed{L \approx 27,5\ \mu H/km}$$

Velocidade de Fase (V_f)

A velocidade de fase é calculada de forma simples, em uma equação que relaciona ω e β:

$$V_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\ 44 \cdot 10^3}{0,14698} \tag{38}$$

$$\boxed{V_f \approx 1,88 \cdot 10^6\ km/s}$$

Potência Dissipada (P_{dis})

A potência dissipada pode ser encontrada utilizando apenas a intuitão, pois a potência dissipada é dada pela difrença entre a potência que entra na linha e a que sai.

$$P_{dis} = P_{in} - P_{out} \tag{39}$$

$$P_{out} = P_{in} e^{-2\alpha l_0} \tag{40}$$

Manipulando as expressões (39) e (40), a potência dissipada é:

$$P_{dis} = P_{in}(1 - e^{-2(0,01053)1.9}) = 17(1 - 0,9608)$$

$$P_{dis} = 17(3,92 \cdot 10^{-2}) \approx 0,67W$$

$$\boxed{P_{dis} = 0,67W}$$

Referências

[1] Sérgio Antenor de Carvalho. *Equações de Maxwell*, (2014).

[2] Sérgio Antenor de Carvalho. *Guias e Ondas*, (2012).

[3] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*, 3ª ed Bookman (2012).

[4] Sérgio Antenor de Carvalho. *Eletromagnetismo Computacional*, (2012).

Apêndice

Códigos para Gráfico de Resposta da Magnitude e da Fase

Corrente da Entrada

```
%% Corrente (I_S) de Entrada na Linha
f1=42e6; f2=44e6 ; n=1e6; % Dados da Frequencia
f=linspace(f1,f2,n); % Pontos do Espectro de Frequencia Discreto
V_in=100; Gamma_S=-0.0264*exp(-1j*(1.113)*(10^-6)*(f)); Z_0=63.25; % Para obter a corrente I_S
I_S=(V_in.*(1-Gamma_S))./(Z_0.*(1+Gamma_S)); % Calculo da Corrente
mag_I_S=abs(I_S); % Resposta em Magnitude da Corrente
arg_I_S=angle(I_S); % % Resposta em Fasse da Corrente
figure;
subplot(2,1,1);
a = plot(f,mag_I_S,'k');
a.LineWidth = 3.0;
title('Resposta em Frequencia da Magnitude de I_S')
xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Magnitude de I_S');
grid;
subplot(2,1,2);
b=plot(f,arg_I_S,'k');
b.LineWidth = 3.0;
title('Resposta em Frequencia da Fase de I_S')
xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Fase de I_S');
grid
```

Corrente da Carga

```
%% Corrente na Carga (I_L)
f1=42e6; f2=44e6 ; n=1e6; % Dados da Frequencia
f=linspace(f1,f2,n); % Pontos do Espectro de Frequencia Discreto
V_in=100; Gamma_L=-0.0264; Gamma_S=Gamma_L.*exp(-1j*(1.113)*(10^-6)*(f)); Z_0=63.25; % Para obter a corrente I_L
d=28; Beta=1.987e-8*f;
I_L=(V_in.*(exp(-1j*d.*Beta)).*(1-Gamma_L))./(Z_0.*(1+Gamma_S)); % Calculo da Corrente
mag_I_L=abs(I_L); % Resposta em Magnitude da Corrente
arg_I_L=angle(I_L); % % Resposta em Fasse da Corrente
figure;
subplot(2,1,1);
a = plot(f,mag_I_L,'k');
a.LineWidth = 3.0;
title('Resposta em Frequencia da Magnitude de I_L')
xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Magnitude de I_L');
grid;
subplot(2,1,2);
b=plot(f,arg_I_L,'k');
b.LineWidth = 3.0;
title('Resposta em Frequencia da Fase de I_L')
xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Fase de I_L');
grid
```