

# Predição de Variáveis Complexas no Modelo de Sznajd

Vítor Amorim Fróis

## Abstract

O presente projeto utiliza Aprendizado de Máquina para prever variáveis complexas no modelo de Sznajd em Redes Complexas: o Tempo de Consenso e a Frequência de Troca de Opinião. Ao utilizar medidas topológicas para caracterização de redes e consequentemente como features, podemos prever as variáveis com alta acurácia. Ao explorar a convergência entre estrutura e dinâmica de redes, esse projeto responde dúvidas relacionadas aos mecanismos de polarização em interações sociais.

## 1 Introdução

A interação entre componentes de um sistema que possuem regras simples leva a formação de padrões complexos e características como emergência, livre de escala e heterogeneidade. Fenômenos emergentes são presentes em sistemas complexos e caracterizados pelo resultado espontâneo da interação entre os milhares de componentes que constituem o sistema. Um grande exemplo de emergência ocorre durante a noite do sudeste asiático, quando vagalumes da região piscam de acordo ajustam a frequência do piscar de suas luzes de acordo com os vizinhos mais próximos, até que o efeito seja estendido por todo o sistema, de forma que os indivíduos pisquem em sincronia [?].

No contexto de dinâmicas sociais, isto é, modelos matemáticos que buscam reproduzir o comportamento humano em redes, a emergência pode ser caracterizada como um fenômeno relacionado a polarização [?]. Aqui e no restante do relatório, definimos polarização como a fragmentação de opiniões, um estado contrário ao consenso. Diversos estudos mostram que a polarização pode ter profunda influência no âmbito político [?, ?]. Dessa forma, é de suma importância estudar a polarização para evitar que cenários de discórdia se repitam.

A física estatística desenvolveu ferramentas para o estudo de sistemas de muitas partículas interagentes, os quais são adaptados com facilidade para o estudo de dinâmicas sociais. Ernt Ising encontrou a solução exata para um modelo de paramagneto, representando materiais que podem alcançar dois estados conflitantes e buscam um estado de mínima energia. O modelo recebeu o nome de Ising e pode ser considerado como um modelo para simples opiniões, onde há uma transição de fase entre os estados de polarização e consenso. O modelo de Sznajd foi inspirado pelo primeiro modelo e busca explorar como opiniões semelhantes são necessárias para influenciar outros. Já o modelo votante ilustra como a maioria pode influenciar vizinhos, explorando por sua vez como a ordem emerge a partir da opinião maioria.

- Sistemas complexos
- Polarização e motivação política
- ising  $\rightarrow$  sznajd, voter e q-voter
- topologia pode influenciar na formação de consenso, além disso seria ótimo estudar sistemas complexos com ferramentas como ML
- alguns resultados com o modelo de sznajd
- vamos comparar diferentes abordagens e dinâmicas

## 2 Materiais e Métodos

### 2.1 Geração de Redes Aleatórias

Seis diferentes topologias das redes foram examinadas. As redes Erdős–Rényi, Barabási–Albert linear, Barabási–Albert não linear com  $\alpha = 0.5$  and  $\alpha = 1.5$ , Watts–Strogatz e Waxman  $\sim[?, ?]$ . Essas topologias buscam abordar diferentes estruturas que sociedades reais possam admitir, considerando a presença de hubs, comunidades e *small-world*. Ou seja, como as redes geradas por esses modelos apresentam diferentes propriedades que podem ser controladas através de seus parâmetros, poderemos gerar um banco de dados com exemplos de topologias diferentes. Assim, os efeitos de propriedades topológicas no processo dinâmico podem ser verificados, visto que muitas propriedades, como distância entre os vértices ou nível de centralidade, sofrerão variações nas bases geradas. Essa variação é importante para oferecermos exemplos diferentes aos modelos de aprendizado que usaremos na fase de predição das variáveis dinâmicas. Para cada uma dessas redes, 100 instâncias foram criadas visando diminuir efeitos da aleatoriedade na construção do modelo.

#### 2.1.1 Erdos-Renyi (ER)

O modelo de Erdos-Renyi (ER) é um dos mais estudados e detalhados na teoria dos grafos. É formado ao ligar  $N$  nós entre as possíveis arestas com probabilidade  $p$ . Apesar de não representar com fidelidade cenários do mundo real, possui apelo matemático por possuir características bem definidas.

#### 2.1.2 Small-World de Watts e Strogatz

Diversas redes do mundo real exibem a propriedade *small-world*, isto é, a maioria dos vértices podem ser alcançados pelo restante a partir de um pequeno número de arestas. Essa propriedade é muito comum em redes sociais.

Outra propriedade muito relevante em redes é a presença de *loops* de tamanho três: se  $i$  está conectado a  $j$  e  $k$ , há uma grande probabilidade que  $j$  e  $k$  estejam conectados por sua vez. As redes ER possuem característica de pequeno mundo, porém não apresentam muitos triângulos. De forma contrária, é fácil construir redes com abundância de loops, mas é difícil garantir a presença de características de pequeno mundo.

O modelo mais popular que uniu as duas características foi desenvolvido por Watts e Strogatz e recebeu o nome de modelo *small-world* de Watts-Strogatz (WS). Para construí-lo, comece com uma grade triangular e realize a reconexão de cada aresta presente com probabilidade  $p$ . Para  $p \approx 0$ , a rede original é mantida, enquanto que para  $p \approx 1$  há uma rede aleatória.

#### 2.1.3 Redes Livre de Escala de Barabási e Albert

Barabási e Albert demonstraram que a distribuição do grau de inúmeros sistemas do mundo real é caracterizada por uma distribuição assimétrica. Nessas redes, alguns vértices são altamente conectados enquanto outros possuem poucas conexões. Uma característica muito importante dessa rede é a existência de *hubs*, vértices que são conectados a uma fração significativa do total da rede. A construção das redes Barabási-Albert inicia com um conjunto de vértices e iterativamente adiciona arestas de forma que os vértices mais conectados possuam maior chance de formar novas arestas.

#### 2.1.4 Redes Geográficas

A maioria das redes complexas mora em um espaço abstrato, onde a posição dos vértices não tem um sentido particular. Em algumas redes, porém, a posição dos vértices pode ter importante impacto, como por exemplo, no caso de redes de transporte rodoviário, aéreo e redes neuronais. Esses exemplos recebem o nome de redes geográficas. Uma maneira simples de gerar redes geográficas é distribuir  $N$  vértices em um espaço abstrato e conectá-los com uma probabilidade que decai de acordo com a distância entre eles.

## 2.2 Simulação de Monte Carlo do modelo de Sznajd

O modelo de *spin* de Ising é um dos modelos mais utilizados na mecânica estatística~[?]. No artigo [?] é proposto o modelo de Sznajd, uma adaptação de Ising para descrever dinâmicas de opinião em uma comunidade.

O modelo original segue uma simulação estocástica implementando o fenômeno de validação social nos agentes  $S_i, i = 1, 2, \dots, N$  com opiniões  $O = \{-1, +1\}$ . A cada passo, dois vizinhos são selecionados e o sistema é atualizado de acordo com as seguintes regras dinâmicas:

- Se  $S_i S_{i+1} = 1$ , então os vizinhos  $S_{i-1}$  e  $S_{i+2}$  recebem a opinião do par  $S_i, S_{i+1}$
- Se  $S_i S_{i+1} = -1$ , então  $S_{i-1} = S_{i+1}$  e  $S_{i+2} = S_i$

O modelo original foi proposto para um sistema unidimensional. % No entanto, a dinâmica foi modificada de forma incluir uma rede complexa~[?]. % Nesse trabalho será utilizada a adaptação apresentada em [?] para implementação do modelo de Sznajd em redes com duas opiniões. Considere uma rede de  $N$  pessoas, com opiniões  $O = \{-1, +1\}$  inicialmente distribuídas de forma aleatória. Cada indivíduo é uma variável dinâmica binária  $s(x, t) = O$  de grau  $k_x$ , em que  $x = 1, \dots, N$ . Uma iteração  $t$  de uma sequência de iterações até o consenso é descrita abaixo:

- Uma dupla de nós vizinhos  $i$  e  $j$  é escolhida aleatoriamente
- Se  $s(i, t) \neq s(j, t)$  a iteração termina
- Se  $s(i, t) = s(j, t)$ , a união dos vizinhos de  $i$  e  $j$  recebe a opinião de  $i$ .

### 2.2.1 Variáveis dinâmicas de interesse

O **tempo de consenso**, definido como o período necessário para que o sistema alcance um estado estacionário, é uma métrica crucial na análise da dinâmica de consenso, bem como a **frequência da troca de opinião**. Durante a simulação, registramos tanto o tempo de consenso quanto a frequência de troca de opinião como indicadores-chave do comportamento do sistema. O histograma de ambas variáveis aleatórias são exibidos abaixo com a estimativa de densidade correspondente. Se faz necessária a utilização da escala log para visualização devido ao aspecto de cauda longa das distribuições.

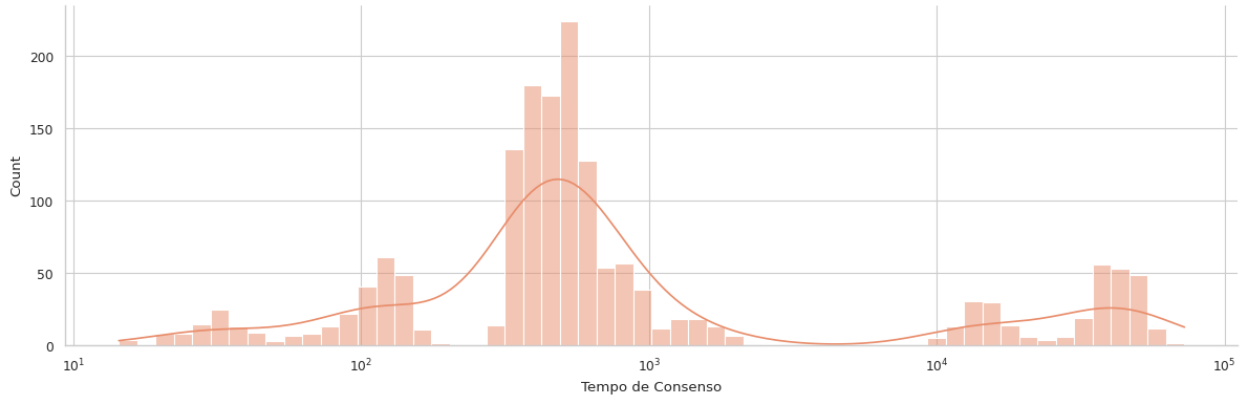


Figure 1: Histograma do Tempo de Consenso na escala logarítmica

### 2.2.2 Inicialização dos nós

Os parâmetros para as redes e o modelo foram fixados para proporcionar um patamar conciso durante os testes com os algoritmos de aprendizado de máquina. Ao fixar esses parâmetros é possível focar no impacto de outras variáveis na análise. Dessa forma, as simulações contarão com as redes com um número de nós fixo, a saber,  $N = 1000$ , além de uma porcentagem de nós com opiniões positivas  $p = 0, 2$ .

Além disso, adotamos três abordagens distintas de inicialização para os nós com opiniões positivas nas simulações. Primeiramente, a inicialização aleatória, atribuindo aleatoriamente opiniões positivas aos nós.

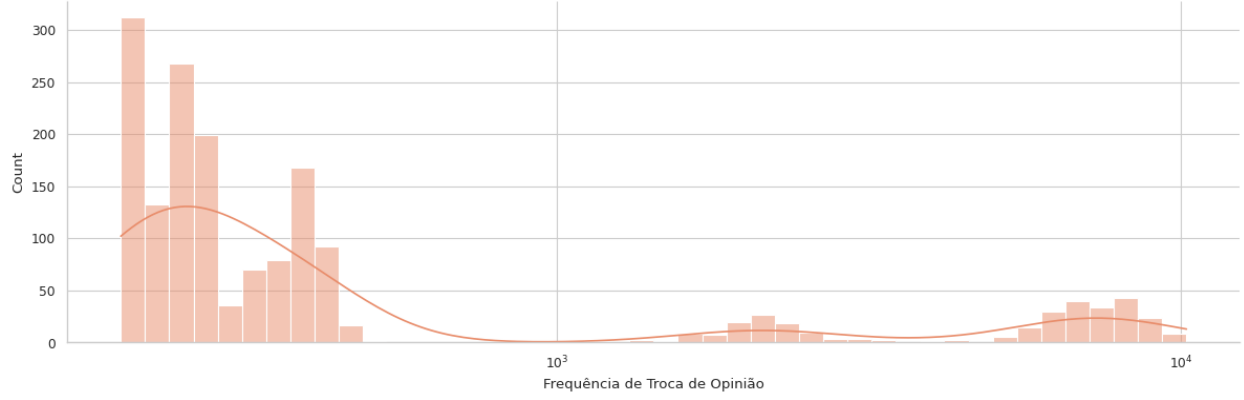


Figure 2: Histograma da Frequência de Troca de Opinião na escala logarítmica

Em seguida, adotamos a estratégia de inicialização inversa, na qual os nós com menor grau receberão opiniões positivas. Por fim, aplicaremos a inicialização direta, na qual os nós mais influentes na rede receberão opiniões positivas. É de suma importância simular o sistema com diferentes inicializações, possibilitando analisar como a importância das *features* são influenciadas em cada caso e compreender melhor como situações de consenso podem ser favorecidas.

## 2.3 Caracterização de Redes

Buscamos caracterizar cada rede  $i$  utilizando um vetor de features derivado de sua estrutura e denotado por  $X_i = \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}\}$ , em que  $X_{ik}$  é a  $k$ -ésima métrica da rede  $i$ . Assim, foram utilizadas diversas medidas, incluindo o coeficiente de *clustering*, *closeness centrality*, *betweenness centrality*, *average shortest path lenght*, coeficiente de correlação de Pearson do grau, *information centrality*, *approximate current flow betweenness centrality* e *eigenvector centrality*, Entropia de Shannon e segundo momento do grau. Tais medidas, usadas coletivamente aqui, fornecem *insights* valiosos sobre a topologia, conectividade, eficiência, influência e organização em redes complexas [?].



Figure 3: *Heatmap* utilizando correlação de Spearman entre as features. É possível observar alta colinearidade entre diversas medidas.

Podemos dividir as métricas descritas acima entre três grandes grupos, sendo eles medidas de centralidade (*closeness centrality*, *betweenness centrality*, *average shortest path length*, *information centrality*, *approximate current flow betweenness centrality* e *eigenvector centrality*), de transitividade (*clustering*) e de conectividade (Assortatividade, Entropia de Shannon e segundo momento do grau). Podemos obter um *heatmap* entre as features obtidas para as redes geradas utilizando a correlação de Spearman, uma medida que quantifica a colinearidade entre duas variáveis. Ao analisar o *heatmap*, vemos que há grande correlação linear entre diversas feautres, principalmente aquelas que pertencem aos mesmos grupos. Esse resultado é importante pois quando há informação mútua entre variáveis, o grau de influência no resultado de modelos de Aprendizado de Máquina é diminuído.

A seguir, realizamos uma revisão das métricas de rede mais importantes para compreensão desse trabalho.

### 2.3.1 Closeness Centrality

Em redes, quanto mais próximo a outros um vértice está, maior a sua importância na rede. Assumindo que as interações entre nós seguem o caminho mais curto, a *Closeness Centrality* de um nó  $u$  é definida como o recíproco da distância do caminho mais curto entre  $u$  e os outros  $n - 1$  nós da rede  $v = 1, \dots, n$ .

$$CC(u) = \frac{n - 1}{\sum_v d(u, v)}$$

Onde  $d(u, v)$  é a distância do caminho mais curto entre  $v$  e  $u$ . Quanto maior o valor de *Closeness*, maior a importância do vértice na rede. Para caracterizar a rede foi utilizada o *Closeness* médio dos nós.

### 2.3.2 Coeficiente de Clustering

Uma maneira simples de caracterizar a presença de *loops* de tamanho três é através do coeficiente de *Clustering*.

$$C = 3 \frac{\text{\#triângulos}}{\text{\#triades}}$$

O fator 3 leva em conta que cada triângulo pode ser parte de três triplas diferentes, cada uma com um vértice sendo o principal e garante que  $C \in [0, 1]$ .

### 2.3.3 Entropy de Shannon

Entropia é um conceito chave em termodinâmica, mecânica estatística e teoria da informação e está relacionada fisicamente com a quantidade de desordem e informação presentes em um sistema. Na teoria da informação, entropia descreve quanta aleatoriedade está presente em um evento aleatório. Esse conceito pode ser aplicado para o estudo de redes complexas ao calcular a entropia da distribuição do grau. Essa medida prevê uma média de heterogeneidade da rede e pode ser definida como

$$H = - \sum_k P(k) \log P(k)$$

O valor máximo de entropia é obtido para uma distribuição uniforme quando todos os vértices possuem o mesmo grau e está relacionada com a robustez e resiliência da rede.

### 2.3.4 Assortatividade

Uma característica muito importante em redes é a presença de conexões homogêneas. Podemos nos perguntar, por exemplo, quão provável é a conexão entre nós similares. A assortatividade mede a similaridade de conexões no grafo com respeito ao grau do nó. Quando vértices de alto grau tendem a se conectar com vértices de alto grau, a rede é assortativa. Por outro lado, se os vértices de alto grau se conectam com vértices de baixo grau a rede é disassortativa.

\cite newman assortativity mixing

O cálculo da assortatividade é feito através do Coeficiente de Correlação de Pearson  $r$ . Caso  $r > 0$ , a rede é assortativa; se  $r < 0$ , a rede é disassortativa; para  $r = 0$  não existe relação entre o grau dos vértices.

## 2.4 Aprendizado de Máquina

Nesse projeto assumimos que o tempo para alcançar consenso  $Y_i$  e a frequência de mudança de opinião  $C_i$  podem ser inferidos a partir do vetor de *features*  $X_i$ . A explicação abaixo foca na predição de  $Y_i$  mas também é válida para  $C_i$ .

$$Y_i = f(X_i) + \delta$$

Nosso objetivo é encontrar a função  $f$  que relaciona  $Y_i$  às métricas da rede. Trataremos predição de  $Y_i$  como um problema de regressão em que  $\delta$  é um termo que representa uma distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Esse termo representa a incerteza nos dados, que incluem as medidas que não foram incluídas no modelo e as flutuações aleatórias na simulação das redes e modelos.

### 2.4.1 Forward Selection (FS)

*Forward Stepwise Selection* é uma maneira eficiente para selecionar *features*, que começa com um modelo sem preditores e adiciona variáveis uma a uma, até que os preditores exigidos estejam no modelo. De modo particular, em cada passo é adicionado o melhor preditor ao modelo. Considerando a alta colinearidade entre as variáveis explicativas, o FS desempenha um papel muito eficiente ao selecionar a melhor variável em cada passo sem descartar suas correlações.

1. Considere o modelo nulo  $M_0$ , sem variáveis preditoras.
2. Para  $k = 0, \dots, p - 1$ :
  - a) Considere todos  $p-k$  modelos que adicionem uma variável ao modelo anterior  $M_k$
  - b) Escolha  $M_{k+1}$  como o melhor entre os  $p-k$  modelos
3. Escolha o melhor entre todos modelos  $M_0, \dots, M_p$  do passo 2 utilizando uma métrica como  $R^2$

### 2.4.2 Coeficiente de Determinação ( $R^2$ )

O coeficiente de determinação,  $R^2$ , é uma métrica usada para medir o quão bem um modelo de regressão se ajusta aos dados [?].

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

A fórmula é mostrada acima. Para cada amostra  $i$ ,  $y_i$  é o valor real,  $\hat{y}_i$  é o valor predito e  $\bar{y}$  é a média dos valores reais. Um valor de 1 significa que o modelo realiza predições perfeitas. De forma contrária, um valor igual ou menor a 0 indica que o modelo não possui habilidade de predição.

No entanto, quando adicionamos mais preditores ao modelo, o  $R^2$  pode aumentar mesmo que esses novos preditores não ajudem realmente a explicar a variação na variável dependente [?, ?]. Para lidar com isso, utilizaremos o  $R^2$  ajustado, que leva em consideração o número de preditores  $p$  e penaliza a inclusão daqueles que são irrelevantes. Esse ajuste fornece uma avaliação mais precisa de quão bem o modelo prevê o resultado. Isso garante uma avaliação mais confiável do desempenho do modelo. Na fórmula abaixo,  $n$  indica o número de amostras no conjunto.

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{(n - p - 1)}$$

### 2.4.3 Validação Cruzada

A fim de analisar os resultados utilizaremos o  $R^2$  no modelo de aprendizado de máquina, juntamente com técnicas descritas acima, como a validação cruzada e etapa de teste em um conjunto oculto de dados. Essa etapa busca garantir que o modelo foi capaz de generalizar com base nos dados de treinamento e consegue realizar boas previsões em dados novos.

A validação cruzada divide o conjunto de treinamento em  $k$ -folds de tamanho semelhante. O primeiro *fold* é tratado como conjunto de validação, e o modelo é treinado nos  $k-1$  folds restantes. A métrica de avaliação é então computada com as observações de validação e o valor é armazenado. Ao final das  $k$  iterações, o valor da métrica é a média de cada iteração.

### 2.4.4 Regressão Logarítmica

No problema abordado, ambas variáveis resposta assumem apenas valores não negativos. Dessa forma, podemos utilizar regressão não-linear ou logarítmica para alcançar resultados mais realistas. Para tanto, buscamos estimar os coeficientes  $\beta_1, \dots, \beta_p$  tal que

$$\log(Y_i) = X_i\beta + \delta$$

também pode ser escrito como

$$Y_i = e^{X_i\beta + \delta}$$

A imagem da função exponencial é  $[0, \infty)$ , garantindo que o valor estimado  $Y_i$  sempre será positivo.

## 3 Resultados

### 3.1 Análise Exploratória de Dados

### 3.2 tabela com os resultados

### 3.3 medidas mais importantes

## 4 Conclusão

- pq as medidas mais importantes sao importantes
- quais as diferencas entre as inicializacoes diferentes
- regressao poisson vs xgboost e redes neurais
- Comparacao q-voter