2ª Lista de Exercícios - SME0812 Modelos Lineares

Exercício 1. Calcule o determinante e a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} a\mathbf{I} & b\mathbf{I} \\ c\mathbf{I} & d\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

onde a, b, c e d são escalares e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem m.

Exercício 2. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Exercício 3. Mostre que o determinante de uma matriz ortogonal é +1 ou -1.

Exercício 4. Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

Exercício 5. Prove que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

Exercício 6. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $p \times n$ qualquer.

(a) Prove que $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$.

(b) Mostre que $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ é não negativa definida.

Exercício 7. Considere o modelo de medidas repetidas

$$\begin{aligned} X_{i1} &= \mu + \epsilon_{i1} \\ X_{i2} &= \mu + \alpha + \epsilon_{i2}, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

onde X_{i1} e X_{i2} são medidas no i-ésimo indivíduo, antes e depois da aplicação de um tratamento, respectivamente. Admitindo que $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2})^\top$, $i = 1, \ldots, n$ são vetores aleatórios independentes com $\mathrm{E}(\epsilon_{ij}) = 0$ e $\mathrm{Var}(\epsilon_{ij}) = \sigma_j^2$ e $\mathrm{Cov}(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}) = \rho\sigma_1\sigma_2$, construa a matriz de variâncias e covariâncias de $(\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n)^\top$ e escreva-a utilizando a notação do produto de Kronecker.

Exercício 8. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz simétrica $n \times n$. Prove que existe $\mathbf{D}$, matriz diagonal, tal que $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top\mathbf{D}\mathbf{y}$.

Exercício 9. Se $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida, prove que existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top\mathbf{y}$.

Exercício 10. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ com $r(\boldsymbol{\Sigma}) = n$, determine a distribuição de $\mathbf{Y}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$.

Exercício 11. Seja $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I})$. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica de posto completo, calcule $\mathrm{E}(\mathbf{Y}^\top\mathbf{A}\mathbf{Y})$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}^\top\mathbf{A}\mathbf{Y})$.

Exercício 12. Sejam $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{B}$ uma matriz de constantes $q \times p$ e $\mathbf{b}$ um vetor de constantes $q \times 1$. Usando funções geradoras de momentos, prove que $\mathbf{Y} = \mathbf{BX} + \mathbf{b}$ tem distribuição $N_q(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top)$.

Exercício 13. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2, determine a esperança de

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_n)^2.$$

Exercício 14. Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, mostre que $\overline{Y}$ e $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes.

Exercício 15. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ com $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^\top$, determine a variância de

$$(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \ldots + (Y_{n-1} - Y_n)^2.$$

Exercício 16. Seja $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$. Prove que se $\mathbf{Y}^\top\mathbf{Y} = Q_1 + Q_2$ onde $Q_1 = \mathbf{Y}^\top\mathbf{A}\mathbf{Y}$ e $Q_1 \sim \chi^2_a$ então $Q_2 \sim \chi^2_{n-a}$.

Exercício 17. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ com $\mathbf{Y} = (Y_2, Y_2, Y_3)^\top$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \mu, \mu)^\top$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de a para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.