Prova 1 de Teoria Espectral de Matrizes

Vítor Amorim Fróis

Lista 1

Exercício 1

Lista 1 – Questão 1

a) equivalência de normas: existe um par de números reais C_1, C_2 ~~[illegible]~~ $0 \leq C_1 \leq C_2$ t.q. $\forall x$

$$C_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C_2 \|x\|_b$$ dizemos que $\|\cdot\|_b$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes

1) considere $\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_1$ (transitividade)

Considere as normas a e a' equivalentes a l_1 por C_1, C_2 e C_1', C_2'. Obtemos

$$\begin{aligned} C_1 \|x\|_1 &\leq \|x\|_a \leq C_2 \|x\|_1 \\ C_1' \|x\|_1 &\leq \|x\|_{a'} \leq C_2' \|x\|_1 \end{aligned} \Rightarrow \frac{C_1'}{C_1'} \|x\|_a \leq \|x\|_{a'} \leq \frac{C_2'}{C_2} \|x\|_a$$

Assim, a e a' são equivalentes se também são equivalentes a l_1.

2) consideramos $\|x\|_1 = 1$

a equivalência é trivial para $x = 0$. Assim, fazemos

$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_a \leq C_2 \|x\|_1$ dividido por $\|x\|_1$, onde $u = x / \|x\|_1$

e obtemos $C_1 \leq \|u\|_a \leq C_2$

3) Toda norma $\|\cdot\|_a$ é contínua em $\|\cdot\|_1$

para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ t.q.

$$\|x - x'\|_1 < \delta \Rightarrow \big| \|x\|_a - \|x'\|_a \big| < \varepsilon$$

4) Máximo e mínimo de $\|\cdot\|_a$ na esfera unitária

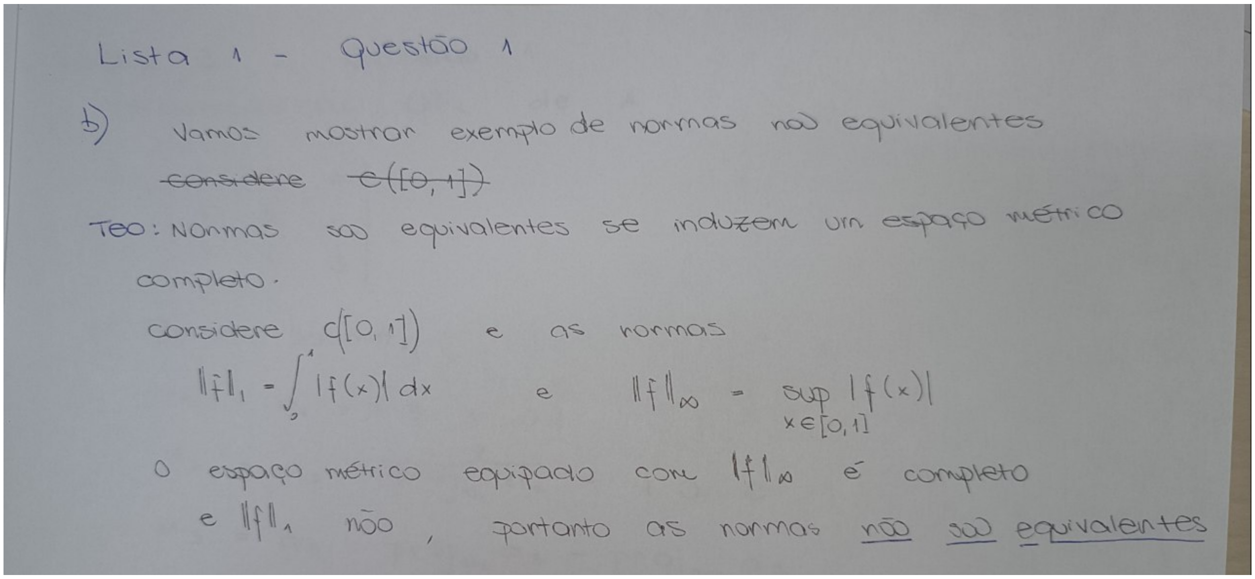
Pelo teorema de Weierstrass, uma função contínua (3) em um conjunto compacto $\{$(esfera) $u \ \forall \ \|u\|_1 = 1\}$ atinge valores máximos e mínimos. Assim, tome

$$C_1 = \min_{\|u\|_1 = 1} \|u\|_a \quad \text{e} \quad C_2 = \max_{\|u\|_1 = 1} \|u\|_a$$

segue que $C_2 \geq C_1 \geq 0$ $(u \neq 0 \ ? \ \|u\|_1 = 1)$

e por fim $C_1 \leq \|u\|_a \leq C_2$

como mostrado em (2)



Lista 1 - Questão 1

b) Vamos mostrar exemplo de normas não equivalentes

~~considere~~ ~~C([0,1])~~

Teo: Normas são equivalentes se induzem um espaço métrico completo.

considere $C([0,1])$ e as normas

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ e $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

O espaço métrico equipado com $\|f\|_\infty$ é completo e $\|f\|_1$ não, portanto as normas não são equivalentes

Exercício 7

Utilizando os pares (v_i, λ_i), podemos escrever $Av_i = v_i\lambda_i$. Passando para forma matricial obtemos

$$AV = \Sigma V$$

onde V é uma matriz de autovetores e Σ uma matriz diagonal de autovalores. Assim, $A = V\Sigma V^{-1}$.

Os vetores formam uma base ortonormal, portanto $V^{-1} = V^T$ e escrevemos $A = V\Sigma V^T$.

Qualquer matriz A pode ser escrita como $A = MN = \sum_{i=1}^{n} m_i n_i$. De forma semelhante, $A = MN = \sum_{i=1}^{n} v_i \sigma_i v_i^T$ e finalmente obtemos

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_1 v_2^T + ... + \lambda_n v_n v_n^T$$

Exercício 8

Vamos mostrar que $f(A) = Pf(D)P^{-1}$ quando A tem decomposição espectral $A = PDP^{-1}$ e f possui expansão via série de Taylor.

Podemos escrever

$$f(A) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}A + \frac{f''(0)}{2!}A^2 + \frac{f'''(0)}{3!}A^3 + ...$$

e de forma mais compacta,

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n A^n$$

onde o coeficiente $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Os componentes da série são independentes.

Lembrando que $A = PDP^{-1}$, escrevemos $A^n = PD^nP^{-1}$. Por indução,

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Dessa forma,

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P(D^n) P^{-1} = P\big(\sum_{n=0}^{\infty} C_n D^n\big) P^{-1} = P f(D) P^{-1}.$$

Lista 2

Exercício 1

Lista 2 - Questão 1

Decomposição QR de A

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Gram - Schmidt.

$$u_1 = a_1 = |3 \quad 4 \quad 0|$$

$$u_2 = a_2 - \overbrace{\text{proj}_{u_1} a_2}^{0} = |0 \quad 0 \quad 1|$$

$$u_3 = a_3 - \underbrace{\text{proj}_{u_2} a_3} - \text{proj}_{u_1} a_3$$

$$= a_3 - 0 - \frac{4}{5} u_1 = |-12/25 \quad \cancel{9}/25 \quad 0|$$

$$e_i = u_i / \|u_i\|$$

$$e_1 = |3 \quad 4 \quad 0| / 5 = |3/5 \quad 4/5 \quad 0|$$

$$e_2 = u_2$$

$$e_3 = |-12/5 \quad 9/25 \quad 0| / 3/5 = |-4/5 \quad 3/5 \quad 0|$$

$$Q = \begin{vmatrix} 3/25 & 0 & -4/5 \\ 4/25 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} e_1 a_1 & e_1 a_2 & e_1 a_3 \\ 0 & e_2 a_2 & e_2 a_3 \\ 0 & 0 & e_3 a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{vmatrix}$$

Lista 2 - Questão 1

c) Método de Givens

① $a = 3$ $\quad b = 4$ $\quad \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ $\quad c = 3/5$ $\quad s = -4/5$

$$G_1 = \begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \quad G_1 A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

② $a = 0$ $\quad b = 1$ $\quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ $\quad c = 0$ $\quad s = -1$

$$G_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} , \quad G_2 G_1 A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{vmatrix}$$

e por fim, escrevemos

$$A = \underbrace{\begin{vmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{vmatrix}}_{R}$$

Lista 3

Exercício 4

$$A = U\Sigma V^T$$

Qualquer matriz A pode ser escrita como $A = MN = \sum_{i=1}^{n} m_i n_i$. Considere $M = U\Sigma$ uma matriz formada pelos vetores $u_i\sigma_i$ e $N = V^T$. Segue $A = MN = \sum_{i=1}^{n} u_i\sigma_i v_i^T$ e finalmente obtemos

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_1 v_2^T + ... + \sigma_n u_n v_n^T$$

Exercício 5

Interpretando Transformações Lineares via SVD

Considere a matriz $\mathbf{A}$ como uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, temos que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{U}(\overbrace{\Sigma(\underbrace{\mathbf{V}^\top\mathbf{x}}_{\text{projeção}})}^{\text{escala}}))}_{reconstrução}$$

- $\mathbf{V}^\top\mathbf{x}$: Projeção do vetor $\mathbf{x}$ na base $\mathbf{v}_i$.
- $\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}$: Escala cada coeficiente por $\sqrt{\lambda_i}$
- $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}$: $\mathbf{y}$ é combinação linear dos $\mathbf{u}_i$ com coeficientes $\sqrt{\lambda_i}\mathbf{v}_i^\top\mathbf{x}$

Visualizando Transformações

O código completo está no Google Colab

```
U, S, Vt = np.linalg.svd(A, full_matrices=False)
```

```
scatter2d(circle)
```

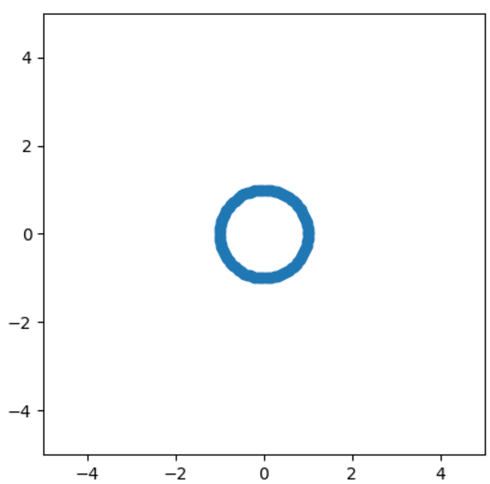


Figure 1: Círculo unitário original

```
scatter2d(Vt @ circle)
```

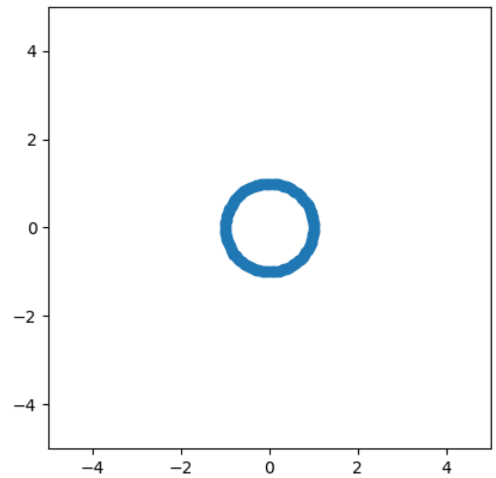


Figure 2: Círculo após projeção

```
scatter2d(np.diag(S) @ Vt @ circle)
```

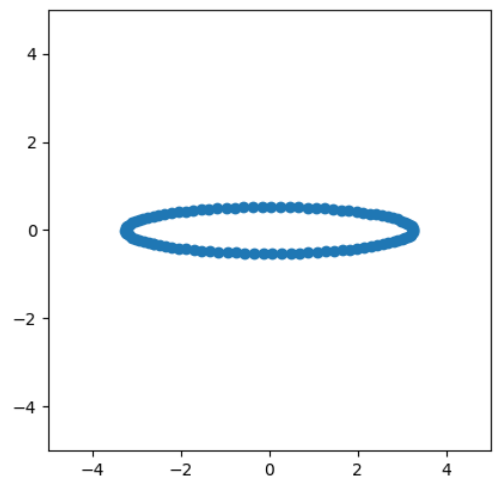


Figure 3: Círculo após escala

```
scatter3d(U @ np.diag(S) @ Vt @ circle)
```

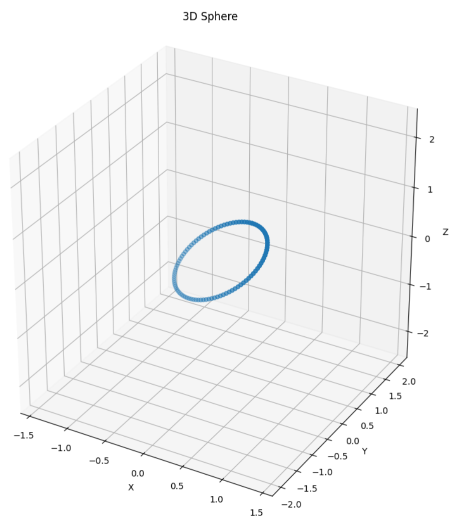


Figure 4: Círculo reconstruído no R^3

Exercício 8

Prova de Teoria Espectral 23/04

Vítor Fróis

Lista 3 - Questão 8

A melhor aproximação de posto k, A_k, p/ a matriz A é dada por $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ com U, V provenientes do SVD t.q. $A = U \Sigma V^T$ onde A_k minimiza $\| A - A_k \|_F$.

Para isso, vamos mostrar que qualquer outra matriz B de posto k resulta em

$$\| A - A_k \|_F \leq \| A - B \|_F$$

Pela desigualdade de weyl,

$$\sigma_{i+j-1}(X + Y) \leq \sigma_i(X) + \sigma_j(Y)$$

Assim temos

$$\sigma_{i+k}(A) \leq \sigma_i(A - B) + \underbrace{\sigma_{k+1}(B)}_{0}$$

B tem posto, $\Rightarrow \sigma_{k+1}(B) = 0$

Usando $\sigma_{i+k}(A) \leq \sigma_i(A - B)$ escrevemos

$$\| A - A_k \|_F = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i(A)^2$$ pela definição da norma.

$$= \sum_{i=1}^{r-k} \sigma_{i+k}(A)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-k} \sigma_i(A - B)^2$$ utilizando a desigualda

$$\leq \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i(A - B)^2$$

$$\| A - A_k \| \leq \| A - B \|_F^2$$