

Exercício 1 Em cada um dos itens abaixo responda se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique sua resposta, isto é, no caso de ser verdadeira esboce as idéias de uma demonstração e se for falsa dê um contra-exemplo:

- () Cada ponto da reta \mathbb{R} pode ser representado por uma dízima periódica.
- () Se $x \geq 0$ e $x \leq 0$, então $x = 0$.
- () Se $z \in \mathbb{N}$ e $x < y$, então $xz < yz$.
- () Se $z \in \mathbb{R}$ e $x \leq y$, então $xz \leq yz$.
- () $\sqrt{x^2} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- () Se $x > y$, então $|x - y| = x - y$.
- () Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $|x + y| = |x| + |y|$.
- () Se a e b são números irracionais então $a + b$ também será um número irracional.
- () Se a e b são números irracionais então $a \cdot b$ também será um número irracional.
- () Se a e b são números racionais então $a + b$ também será um número racional.
- () Se a e b são números racionais então $a \cdot b$ também será um número racional.
- () Se a é um número racional e b é um número irracional então $a + b$ é um número irracional.
- () Se a é um número racional e b é um número irracional então $a \cdot b$ é um número racional.
- () Se a é um número racional e b é um número irracional então $a \cdot b$ é um número irracional.
- () Se (a, b) são as coordenadas cartesianas de um ponto que pertence a uma reta que tem coeficiente angular $\frac{3}{2}$, então o ponto $(a + 2, b + 3)$ também pertencerá a esta reta.
- () Se duas retas são perpendiculares e nenhuma delas é paralela ao eixo Oy , então o produto de seus coeficientes angulares é -1 .
- () A reta que contém os pontos $(1, -1)$ e $(2, 2)$ é paralela à reta de equação $x - 3y = 7$.
- () A representação geométrica do gráfico da função $y = x^2 + 1$ é simétrico em relação ao eixo dos Ox .
- () A representação geométrica do gráfico da equação $x^2 - y^2 = 1$ é simétrico em relação à reta $y = x$.
- () A representação geométrica do gráfico da função $y = x^2 + 1$ é uma parábola.
- () O maior diâmetro da elipse $2x^2 + y^2 = 2$ ocorre na direção horizontal.
- () O vértice da parábola $y = 2 - x^2$ é ponto $(0, 2)$.
- () O domínio da função f , cuja lei de associação é $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$, é o intervalo $[0, 2)$.
- () A imagem da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4 - x^2$, para $x \in \mathbb{R}$, é o intervalo $(-\infty, 4]$.
- () O subconjunto do plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; , x^2 + y^2 = 1, \text{ com } y \geq 0\}$ é a representação geométrica do gráfico de uma função da variável x .

() A imagem da função $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é toda a reta \mathbb{R} .

() A equação $\sin(2x) = 2$, para $x \in \mathbb{R}$, é satisfeita para infinitos valores distintos de x .

() A equação $[\sin(x) + \cos(x)]^2 - 1 = \sin(2x)$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

() $\sqrt{4} = \pm 2$.

() $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

() $\frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{C}$

() $\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$

() $x^2 = 4$ implica que $x = \pm 2$.

Exercício 2 O número $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

Exercício 3 A divisão áurea de um segmento de comprimento l é a divisão deste em duas partes na qual a menor está para a maior assim como a maior está para o todo. Se l é racional, deduza que as partes (da divisão áurea) são irracionais. Se l é irracional, é possível deduzir algo? Sugestão: Fórmula de Báskara.

Exercício 4 (a) Se $x \geq 0$ e $x \leq y$, mostre que $x^2 \leq y^2$.

(b) Mostre que a afirmação anterior é falsa se considerarmos x, y quaisquer números reais.

(c) Se $0 \leq x \leq y$, justifique se $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Exercício 5 Mostre que quaisquer que sejam os números reais x e y , temos que

$$x^3 < y^3 \text{ se e somente se } x < y.$$

Exercício 6 Seja $a \in (0, 1)$. Determine $r > 0$ de modo que $(a - r, a + r) \subset (0, 1)$.

Exercício 7 Sabemos que para todo a, b real tem-se $|a + b| \leq |a| + |b|$. Como consequência deste fato mostre que $||a| - |b|| \leq |a - b|$ e que $||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.

Exercício 8 Dê exemplo de números reais a e b tais que $|a + b| < |a| + |b|$. O que se pode dizer a respeito dos sinais desses números?

Exercício 9 O número $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

Exercício 10 A divisão áurea de um segmento de comprimento l é a divisão deste em duas partes na qual a menor está para a maior assim como a maior está para o todo. Se l é racional, deduza que as partes (da divisão áurea) são irracionais. Se l é irracional, é possível deduzir algo? Sugestão: Fórmula de Báskara.

Exercício 11 Encontre o conjunto solução, fornecendo suas respostas na forma de intervalos, para as seguintes desigualdades:

- | | | |
|-------------------------------------|---|------------------------|
| a) $ 1 - 3x < 5$ | b) $ x^2 + 3 > 3$ | c) $x^2 < 9$ |
| d) $x^2 > -1$ | 5) $x^2 < 6x - 5$ | e) $x^3 > 27$ |
| f) $\frac{x-6}{x+2} \geq 0$ | g) $\frac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0$ | h) $\frac{8}{x} < x-2$ |
| i) $\frac{3}{x-2} < \frac{1}{2x+1}$ | j) $\frac{x^2}{x-2} - 1 \geq \frac{x^2+3}{x^2-4}$ | k) $x^2 + 2x + 2 > 0$ |

l) Forneça uma função cujo domínio seja a resposta da letra e)

Exercício 12 Determine a equação geral das retas do plano xOy :

- a) que possua coeficiente angular -2 e que contém o ponto $(3, -1)$.
 b) perpendicular à reta do plano xOy , que tem equação geral dada por $5x - 2y = 2$ e que contém o ponto $(-2, 3)$.
 c) tangente a circunferência que tem centro no ponto $(0, 0)$ e raio 1 , no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercício 13

- a) Encontre a distância do ponto $(1, -2)$ à reta do plano xOy , que tem equação geral dada por $3x - 2y = 0$.
 b) Mostre que o segmento de reta ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.

Exercício 14 Encontre a representação geométrica do gráfico de cada um dos conjuntos soluções das seguintes equações ou inequações:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------|
| a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ | b) $x^2 + y^2 - 10y + 25 = 0$ | c) $x^2 + y^2 < 1$ |
| d) $x^2 + y^2 \geq 1$ | e) $x = -\sqrt{1 - y^2}$ | f) $x^2 + y^2 < -1$ |

Exercício 15 Um canhão é colocado na origem de um sistema de coordenadas xOy . Suponha que as coordenadas de um projétil atirado pelo canhão satisfaz as seguintes equações $x = 50t$ metros e $y = 50t - t^2$ metros, depois de t segundos do lançamento. Mostre que a trajetória do projétil é uma parábola. A que distância do canhão o projétil vai atingir o chão? Qual a altura máxima que o projétil atingirá após o disparo do canhão?

Exercício 16 Determine os vértices e o eixo de cada uma das parábolas abaixo e encontre as respectivas representações geométricas (gráficos):

- | | | |
|--------------|---------------|------------------------|
| a) $y^2 = x$ | b) $y = -x^2$ | c) $y^2 - 4x - 4y = 0$ |
|--------------|---------------|------------------------|

Exercício 17 Classifique as funções abaixo em constante, afim, polinomial, racional, qualquer

- a) $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2$, para $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = x^{-3}$, para $x \in \mathbb{R}$ c) $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x^2 + 1}$, para $x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = 3 - 2x$, para $x \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = c$, para $x \in \mathbb{R}$ f) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x^2}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercício 18

- a) Existe alguma simetria na representação geométrica do gráfico de uma função par? Qual? e da representação do gráfico de uma função ímpar?
b) Mostre que dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos encontrar uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é uma função par, e uma função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é uma função ímpar, tal que $f(x) = g(x) + h(x)$, para $x \in \mathbb{R}$.
c) Quais das seguintes funções abaixo são pares e quais são ímpares:

- a) $f(x) = x^3$, para $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = |x|$, para $x \in \mathbb{R}$ c) $f(x) = x(x^3 - x)$, para $x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = x^4 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ f) $f(x) = \text{tg}(x)$, para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Exercício 19 Consideremos as funções $[x] = \text{maior inteiro menor ou igual a } x$ e $\{x\} = \text{distância de } x \text{ ao inteiro mais próximo}$. Encontre a representação geométrica do gráfico das seguintes funções:

- a) $f(x) = \{x\}$, para $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = [x]$, para $x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = x - [x]$, para $x \in \mathbb{R}$ d) $f(x) = \frac{1}{4}\{4x\}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercício 20 Verifique quais das funções abaixo são periódicas e nos casos em que forem periódicas encontrar o seu período fundamental:

- a) $f(x) = \text{sen}(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(\pi x)$, para $x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = [x]$, para $x \in \mathbb{R}$ d) $f(x) = 3 \cos(x + 2)$, para $x \in \mathbb{R}$

Exercício 21

1) Converta de graus para radianos:

- a) 15° b) 105° c) 135° d) 630°

2) Converta de radianos para graus:

- a) $\frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{7\pi}{15}$ c) $\frac{25\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{5}$

Exercício 22 Um ponto se move de tal modo que a razão de suas distâncias a dois pontos fixos é uma constante $c \neq 1$. Mostre que o lugar geométrico desses pontos é uma circunferência.

Exercício 23

a) Calcule a área da região limitada pelo plano xOy , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas $y = 3x$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ e $y = 0$.

b) Se $h \neq 0$, calcule o valor do quociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para as seguintes funções:

- i) $f(x) = x^2 + x$, para $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = 3x + 5$, para $x \in \mathbb{R}$
iii) $f(x) = \sin(x)$, para $x \in \mathbb{R}$ iv) $f(x) = x^3$, para $x \in \mathbb{R}$

Exercício 24

a) Quando uma função é injetora? Como caracterizar a injetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?

b) Quando uma função é sobrejetora? Como caracterizar a sobrejetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?

c) Quando uma função é bijetora? Como caracterizar a bijetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?

Exercício 25 Em cada um dos itens abaixo diga se a função é injetora, sobrejetora, bijetora:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 5x + 1$, para $x \in \mathbb{R}$
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 4$, para $x \in \mathbb{R}$
c) $f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, dada por $f(x) = \cos(x)$, para $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
d) $f: [0, \infty) \rightarrow [4, \infty)$, dada por $f(x) = x^2 + 4$, para $x \in \mathbb{R}$
e) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \tan(x)$, para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
g) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 4$, para $x \in \mathbb{R}$

Exercício 26

a) Seja $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ uma função que admite função inversa. Então f^{-1} é igual a $\frac{1}{f}$? justifique sua resposta.

b) Quais as funções do Exercício 25. admitem função inversa? quando admitir, encontrar a lei de associação da função inversa.

Exercício 27 Durante uma noite um homem de 1,80 metros de altura estava parado, ao nível da rua, perto de um poste de iluminação de 4,50 metros que está aceso. Exprima o comprimento de sua sombra como função da distância que ele está do poste.

Exercício 28 Dois homens saem, no mesmo instante, numa caminhada do mesmo ponto por caminhos retilíneos e perpendiculares. Um anda a velocidade de 2 km/h e o outro a 3 km/h. Exprima a distância entre eles como função do tempo que eles caminharam.

Exercício 29 Um reservatório contém um líquido, não homogêneo, em equilíbrio, e cuja densidade aumenta linearmente com a profundidade, h , valendo ρ_0 na superfície e ρ_1 no fundo do reservatório. Encontre a função que descreve a densidade do líquido ρ , em função da profundidade h (isto é, $\rho = \rho(h)$).

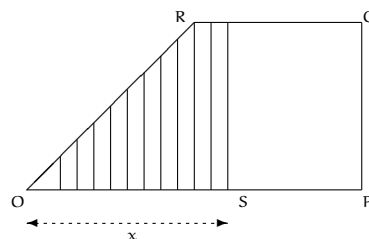
Exercício 30 Um objeto é lançado, verticalmente, e sabe-se que no instante t segundos, sua altura é dada por $h(t) = 4t - t^2$ quilômetros, para $t \in [0, 4]$.

a) encontre a representação geométrica do gráfico da função $h = h(t)$.

b) Qual a altura máxima atingida pelo objeto? Em que instante essa altura é atingida?

Exercício 31

Na figura ao lado, $OPQR$ é um trapézio tal que $\overline{OP} = 10$ cm, $\overline{PQ} = \overline{QR} = 5$ cm. A partir de um ponto S , pertencente ao lado OP , traça-se uma perpendicular a esse lado. Sendo $\overline{OS} = x$, a área A da região sobreada na figura ao lado pode ser obtida como uma função de x , isto é, $A = A(x)$. Encontre essa função.

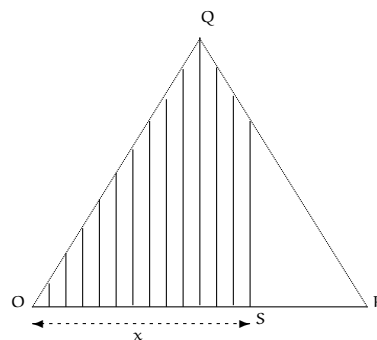


Exercício 32 Entre os retângulos de perímetro (isto é, soma dos lados) $2p$ qual terá maior área?

Exercício 33 Um arame de 10 cm de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado, e o outro, a formar uma circunferência. De que modo deverá ser cortado o fio para que a soma das áreas das regiões limitadas pelo quadrado e pela circunferência acima seja a maior possível?

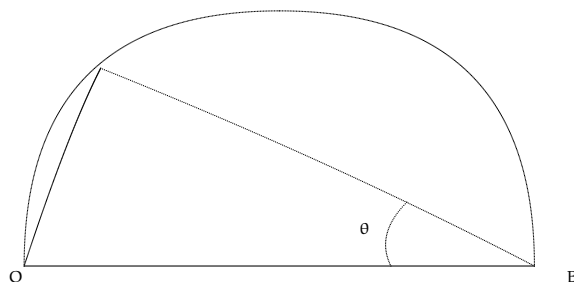
Exercício 34

Na figura ao lado, OPQ é um triângulo isósceles cuja base, OP , mede 10 cm e cuja altura, relativa à base OP , também mede 10 cm. A partir de um ponto S , pertencente ao lado OP , traça-se uma perpendicular a esse lado. Sendo $\overline{OS} = x$, a área da região sobreada ao lado pode ser descrita como uma função de x , isto é, $A = A(x)$. Encontre a função $A = A(x)$.



Exercício 35

Na figura ao lado está representada uma semi-circunferência cujo diâmetro, OB , tem valor igual à $b > 0$. A cada valor do ângulo θ (como na figura) corresponde um, e somente um, triângulo retângulo inscrito na semi-circunferência. Encontre a função $A = A(\theta)$ que nos fornece a área do triângulo obtido quando o ângulo é θ .



Exercício 36 Em cada um dos itens abaixo determine os domínios máximos de f e g . Determine também as imagens de f e g . Verifique se a imagem de f está contida no domínio de g e, neste caso, encontre $h = g \circ f$. Encontre também a imagem de h .

(a) $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$

(b) $g(x) = 2 + x^2$ e $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $g(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(d) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ e $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $g(x) = 1 - x^2$ e $f(x) = \sin x$

(f) $g(x) = x^3$ e $f(x) = \sqrt{x}$

(g) $g(x) = \ln(x)$ e $f(x) = 1 - x^2$

(h) $g(x) = e^x$ e $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(i) Qual a definição do domínio de $h = g \circ f$?

(j) Qual o domínio de $h = g \circ f$ nos itens de (a) até (g)?

Exercício 37 Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são ambas pares, verifique que $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções pares. Mostre também que, se f e g são ambas ímpares, então $f \circ g$ e $g \circ f$ são ímpares. O que se pode dizer das composições $f \circ g$ e $g \circ f$ se f for par e g for ímpar?

Exercício 38 Para cada uma das funções g dadas abaixo, encontre f tal que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in D_g$.

(a) $g(x) = \frac{1}{x}$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$

(b) $g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}$

(c) $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}$

(d) $g(x) = x^2 - 2x$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$

(e) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$

Exercício 39 *Faça o gráfico das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$, juntos para identificar os valores de x para os quais $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ e confirme algebricamente.*

Exercício 40 *Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero em função do comprimento x do triângulo.*

Exercício 41 *Expresse o comprimento da aresta de um cubo em função do comprimento da diagonal d . Depois, expresse a área da superfície e o volume do cubo em função do comprimento da diagonal.*

Exercício 42 *Para que uma curva seja simétrica em relação ao eixo x , o ponto (x, y) deverá estar na curva se, e somente se, o ponto $(x, -y)$ também estiver na curva. Explique por que uma curva simétrica em relação ao eixo x não é o gráfico de uma função a não ser que a função seja $y = 0$.*

Exercício 1 (F) *Os irracionais correspondem a dízimas não periódicas.*

(V) *Por absurdo com $x \neq 0$.*

(F) *Para $z = 0 \in \mathbb{N}$.*

(F) *Para $z = -1$.*

(F) *Temos $\sqrt{x^2} = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

(V) *Por definição, $\begin{cases} |x - y| = x - y & \text{se } x - y > 0, \text{ ié, } x > y. \\ |x - y| = y - x & \text{se } x - y < 0, \text{ ié, } x < y. \end{cases}$*

(F) *Para $x = -3$ e $y = -1$.*

(F) *Note que $a = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e $b = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, então $a + b \in \mathbb{Q}$.*

(F) *Para $a = b = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, temos $a.b \in \mathbb{Q}$.*

(V) *Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{k}{l}$ com $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, então*

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl} \in \mathbb{Q}.$$

Já que $ml + kn \in \mathbb{Z}$.

(V) *Análogo ao anterior.*

(V) *Sejam $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{I}$ e suponha $a + b \in \mathbb{Q}$. Então*

$$a + b = \frac{l}{k} = b + \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{ln - mk}{nk} \in \mathbb{Q}$$

Já que $(ln - km), nk \in \mathbb{Z}$. O que é um absurdo, pois $b \in \mathbb{I}$.

(F) *Para $1 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.*

(V) *Análogo ao item acima.*

(V) Se (a, b) pertencem à reta com coeficiente angular $\frac{3}{2}$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{3a}{2} + c = b$, donde $c = b - \frac{3a}{2}$. Então note que,

$$\frac{(a+2)3}{2} + c = \frac{3a+6}{2} + \frac{2b-3a}{2} = \frac{2b+6}{2} = b+2.$$

Portanto $(a+2, b+2)$ pertence à reta.

(V) Se duas retas são perpendiculares e nenhuma delas é paralela ao eixo Oy , então o produto de seus coeficientes angulares é -1 . Como nenhuma delas é paralela ao eixo y , então o seu ângulo θ com o eixo x está em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e não é nulo, logo, o seu coeficiente angular é $\text{tg}(\theta) \neq 0$. Assim, o coeficiente angular da outra reta é

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\theta)} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\text{tg}(\theta)}.$$

Logo, o produto dos seus coeficientes angulares é -1 .

(F) Duas retas são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular. Note que se $(1, -1)$ e $(2, 2)$ pertencem a reta $R: y = ax + b$ então temos $a \cdot 1 + b = -1$ e $a \cdot 2 + b = 2$ donde $a = 3$ e $b = -4$ que possui coeficiente angular 3 , enquanto a reta $S: x - 7 = 3y$, ou seja, $S: \frac{x-7}{3} = y$ possui coeficiente angular $\frac{1}{3}$.

(F) Note que $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ logo a representação geométrica do gráfico da parábola $y = x^2 + 1$ é simétrica com relação ao eixo Oy .

(V) Observe que os pontos do gráfico da equação $y^2 - x^2 = 1$ satisfazem $y^2 = x^2 + 1$. Assim se (a, b) são tais que $b^2 = a^2 + 1$ temos também que $(-b)^2 = (-a)^2 + 1$, logo o ponto $(-a, -b)$ também pertence ao gráfico da equação $y^2 - x^2 = 1$ sendo assim simétrico ao eixo $y = x$.

(V) É uma parábola com concavidade para cima e sem raízes reais.

(F) Dividindo a equação por 2 temos $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, ou seja, $\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Como $\sqrt{2} > 1$ seu maior eixo é na vertical.

(V) O vértice é dado por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, assim para $y = 2 - x^2$ o vértice é $\left(\frac{0}{-2}, \frac{-8}{-4}\right) = (0, 2)$.

(V) Devemos ter que $\frac{x}{2-x} > 0$ e $2-x \neq 0$. Assim $x \neq 2$ e $\frac{x}{2-x} > 0$ quando numerador e denominador possuem o mesmo sinal, $2-x \geq 0$ quando $x \leq 2$, logo $\frac{x}{2-x} > 0$ no intervalo $[0, 2]$ como $x \neq 2$ o domínio da função é o intervalo $[0, 2)$.

(V) A imagem da função $h(x) = x^2$ é o conjunto $[0, +\infty)$, assim a imagem de $g(x) = -x^2$ é o intervalo $(-\infty, 0]$ donde segue que a imagem de $f(x) = 4 - x^2$ é o subconjunto $(-\infty, 4]$.

(V) Note que $x^2 + y^2 = 1$ equivale a $y^2 = 1 - x^2$, ou seja, $|y| = \sqrt{1 - x^2}$, como $y \geq 0$ temos $y = \sqrt{1 - x^2}$. Portanto é o gráfico de uma função em x .

(V) A imagem da função $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ é a imagem da função $\tan(x)$ que é toda a reta.

(F) A função $g(x) = \sin(x)$ assume valores no intervalo $[-1, 1]$, em particular, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$, ou seja, a equação $\sin(2x) = 2$ não é satisfeita para nenhum valor de x .

(V) Note que $[\sin(x) + \cos(x)]^2 - 1 = \sin^2 x + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - 1 = 1 + 2\sin(x)\cos(x) - 1 = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.

(F) $\sqrt{4} = 2$, já que $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função e não pode ter 2 respostas. (Ver definição de função.) Então $\sqrt{x} \geq 0$ para todo x por convenção, apesar de $(-2)^2 = 4$.

(F) $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7 = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

(F) Para $A = 1$ e $B = C = 2$ temos $\frac{A \cdot B}{C} = 1 \neq \frac{1}{2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{C}$.

(F) Teste para $A = 1$ e $B = C = 3$.

(V) A função $y = x^2$ intercepta a função $y = 4$ quando $x = 2$ e quando $x = -2$. Faça os gráficos.

Exercício 2 Racional uma vez que,

$$x = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{-1} + 2\sqrt{2} = -3.$$

Exercício 3 Sejam a, b as partes do segmento, com $a < b$. Então

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow a^2 + ab = b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Resolvendo pela Fórmula de Bháskara, vem

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e como $a, b > 0$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

que é um número irracional. Então $a = xb$. Agora como $l = a + b$, vem

$$l = a + b = x \cdot b + b = (1 + x)b = \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b = \phi \cdot b$$

Se l é racional, como ϕ é irracional, vem b irracional. Agora fazendo o argumento análogo com $b = \frac{1}{x}a$, vem $l = \left(1 + \frac{1}{x}\right)a$, concluindo que a é irracional.

Agora se l é irracional, nada podemos concluir, pois de $l = \phi b$, como ϕ é irracional, b pode ser tanto racional quanto irracional.

Exercício 4 (a) Observe que $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ e uma vez que $y \geq x \geq 0$ temos $x + y \geq 0$ e $y - x \geq 0$ donde vem $(y - x)(y + x) \geq 0$, ou seja, $y^2 - x^2 \geq 0$, isto é, $y^2 \geq x^2$.

(b) Basta tomar $x = -5$ e $y = 1$, temos $y \geq x$ entretanto $x^2 = 25 \geq 1 = y^2$.

(c) Note que para $x = 0$ e $y = 0$, vale $\sqrt{x} = 0 = \sqrt{y}$. Suponhamos que $x > 0$ ou $y > 0$. Mostrar $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ é equivalente à provar que $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$. Temos que

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \geq 0,$$

pois $y - x \geq 0$ e $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$.

Exercício 5 Note que

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2).$$

Agora note que

$$y^2 + yx + x^2 = y^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + x^2 = \left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0.$$

Logo,

$$x^3 < y^3 \Leftrightarrow y^3 - x^3 > 0 \Leftrightarrow (y - x)(y^2 + yx + x^2) > 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow x < y.$$

Exercício 6 Como $a \in (0, 1)$, escolha $r = \min\{a, 1 - a\} > 0$. Mostremos que $(a - r, a + r) \subseteq (0, 1)$. Tome $x \in (a - r, a + r)$. Como $r \leq a, 1 - a$, temos

$$x > a - r \geq a - a = 0,$$

e

$$x < a + r \leq a + (1 - a) = 1,$$

logo, $x \in (0, 1)$.

Exercício 7 *Mostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$ é equivalente à provar que $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$. Temos que*

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|.$$

E para a outra desigualdade, temos

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b| \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Portanto, $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$.

Exercício 8 *Para $a = 1$ e $b = -3$ temos $|a + b| = |1 + (-3)| = |-2| = 2 < 4 = |a| + |b|$.*

Exercício 9 *Veja Exercício 2.*

Exercício 10 *Veja Exercício 3.*

Exercício 11 (a) $I = (-\frac{4}{3}, 2)$.

(b) $I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(c) $I = (-3, 3)$.

(d) $I = (-\infty, +\infty)$.

(5) $I = (1, 5)$.

(e) $I = (3, \infty)$

(f) $I = (-\infty, -2) \cup [6, +\infty)$.

(g) $I = (-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

(h) $I = (-2, 0) \cup (4, \infty)$.

(i) $I = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 2)$.

(j) $I = (-2, -1] \cup (2, \infty)$.

(k) $I = (-\infty, \infty)$.

(l) *A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ tem domínio $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$.*

Exercício 12 (a) *Como o coeficiente angular é -2 , então é da forma $y = -2x + b$. Agora como $(3, -1)$ está nessa reta temos $-1 = -2 \cdot (3) + b$ donde vem que $b = 5$. Portanto, a reta procurada é $y = -2x + 5$.*

(b) *O coeficiente angular da reta $5x - 2y = 2$ é $\frac{5}{2}$ e assim o da reta procura é $-\frac{2}{5}$, como o ponto $(-2, 3)$ pertence à reta temos $3 = -\frac{2}{5} \cdot (-2) + b$ donde vem que $b = \frac{11}{5}$ e portanto $y = -\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$ ou ainda $5y - 2x = 11$.*

(c) Primeiro note que a reta procurada é perpendicular à reta passando pelos pontos $(0,0)$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ que é a reta $y = x$, assim seu coeficiente é -1 . Como ela passa no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos $\frac{\sqrt{2}}{2} = -(\frac{\sqrt{2}}{2}) + b$ donde $b = \sqrt{2}$ e assim sua equação é $y = -x + \sqrt{2}$.

Exercício 13 (a) Usando a fórmula da distância de um ponto à reta, vem

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 + 4|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

Exercício 14

Exercício 15 Como $x = 50t$, então $t = \frac{x}{50}$. Substituindo em y , vem

$$y = 50t - t^2 = 50 \left(\frac{x}{50} \right) - \left(\frac{x}{50} \right)^2 = x - \frac{1}{2500}x^2,$$

que descreve uma parábola $y = ax^2 + bx + c$, para $a = -\frac{1}{2500}$, $b = 1$ e $c = 0$. O projétil atinge o chão quando $y = 0$, logo,

$$0 = x - \frac{1}{2500}x^2 = x(1 - \frac{1}{2500}x),$$

assim, $x = 0$ (que não interessa, pois é a posição inicial), ou $\frac{1}{2500}x = 1$, assim, $x = 2500$. Portanto, o projétil atinge o chão à uma distância de 2500m do canhão. Por fim, como o trajeto é uma parábola com concavidade para baixo, então a altura máxima é o y do vértice da parábola, logo,

$$h_{\max} = -\frac{1^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2500} \cdot 0}{4 \cdot \frac{-1}{2500}} = \frac{1}{\frac{4}{2500}} = \frac{2500}{4} = 625.$$

Portanto, a altura máxima é 625m.

Exercício 16 (a) $x = y^2$ diz que x está em função de y e x é sempre positivo, logo, é uma parábola com a concavidade para a direita, o seu vértice é $(0,0)$, e o seu eixo de simetria é $y = 0$.

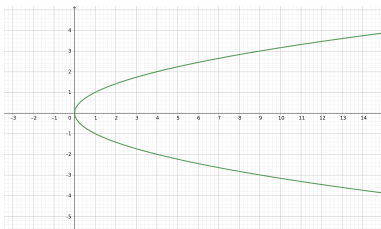


Figura 1: Exercício 16 Item (a)

- (b) $y = -x^2$ diz que y está em função de x e y é sempre negativo, logo, é uma parábola com a concavidade para baixo, o seu vértice é $(0,0)$ e o eixo de simetria é $x = 0$.

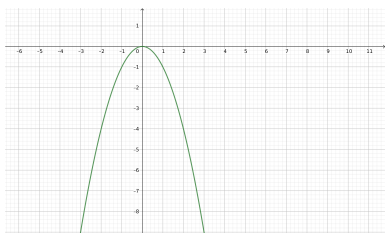


Figura 2: Exercício 16 Item (b)

- (c) $y^2 - 4x - 4y = 0$ pode ser escrito como $x = \frac{1}{4}y^2 - y$. Logo, como x está em função de y e o coeficiente de y^2 é positivo, então é uma parábola deitada para a direita. Ela corta o eixo y em $x = 0$, logo,

$$0 = \frac{1}{4}y^2 - y = y \left(\frac{1}{4}y - 1 \right),$$

assim, $y = 0$ ou $y = 4$. O vértice dessa parábola (lembrando que x está em função de y) é

$$\left(-\frac{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0}{4 \cdot \frac{1}{4}}, -\frac{(-1)}{2 \cdot \frac{1}{4}} \right) = (-1, 2).$$

O eixo dessa parábola deve ser paralela ao eixo x e passar pelo ponto $(-1, 2)$, logo, o eixo de simetria é a reta $y = 2$.

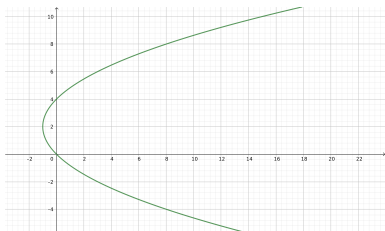


Figura 3: Exercício 16 Item (c)

Exercício 17 (a) *Polinomial.*

(b) *Racional.*

(c) *Racional.*

(d) *Afim.*

(e) *Constante.*

(f) *Qualquer.*

Exercício 18 (a) Para função f par, temos que $f(x) = f(-x)$, ou seja, ela é simétrica em relação ao eixo y . Agora de uma função f ímpar, temos $f(-x) = -f(x)$. Assim, os pontos do gráfico de f satisfazem

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = -(x, f(x)),$$

ou seja, o gráfico de f é simétrico em relação à origem $(0, 0)$.

(b) Como motivação, vamos supor que já existam tais funções g e h , com g par e h ímpar, tais que $f(x) = g(x) + h(x)$. Como vale para todo x , trocando x por $-x$, vem

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

Assim, temos um sistema

$$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x). \end{cases}$$

Somando as duas equações, vem

$$f(x) + f(-x) = 2g(x),$$

e subtraindo as duas equações, vem

$$f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

E de fato, tomando g e h dessa forma, vem que g é par, h é ímpar e $g(x) + h(x) = f(x)$.

(c) Vamos verificar cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = x^3$ é ímpar, pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

(b) $f(x) = |x|$ é par, pois $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

(c) $f(x) = x(x^3 - x)$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)((-x)^3 - (-x)) = -x(-x^3 + x) = x(x^3 - x) = f(x).$$

(d) $f(x) = x^4 + x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x).$$

(e) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ é ímpar, pois

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

(f) $f(x) = \text{tg}(x)$ é ímpar, pois

$$f(-x) = \text{tg}(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{cos}(-x)} = \frac{-\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} = -\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} = -\text{tg}(x) = -f(x).$$

Exercício 19 (a) Dado x real, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Note que se $x \leq \frac{2n+1}{2}$, então $\{x\} = x - n$, e se $x \geq \frac{2n+1}{2}$, então $\{x\} = n+1 - x$. Logo, no intervalo $[n, \frac{2n+1}{2}]$, o gráfico é a reta $x - n$ (que passa por $(n, 0)$ e $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$), e em $[\frac{2n+1}{2}, n+1)$, o gráfico é a reta $n+1 - x$ (que passa por $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$ e devia passar por $(n+1, 0)$, mas este ponto é completado pelo próximo n).

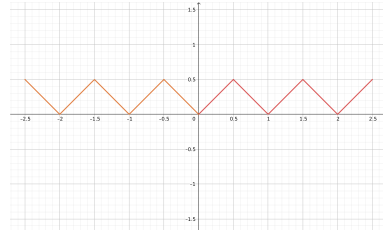


Figura 4: Exercício 19 Item (a)

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Assim, $[x] = n$. Logo, no intervalo $[n, n+1)$, o gráfico é a função constante n . E em $n+1$, ela tem um salto para a função constante $n+1$.

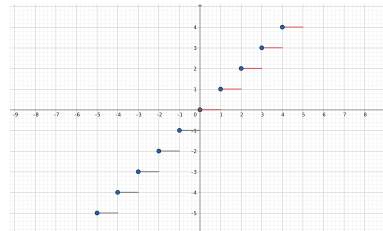


Figura 5: Exercício 19 Item (b)

(c) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$, logo, $[x] = n$, assim, $x - [x] = x - n$, que é a parte decimal de x . Portanto, o gráfico são segmentos de retas inclinadas periódicas.

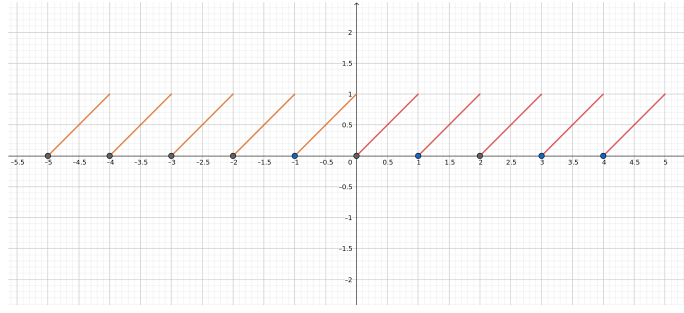


Figura 6: Exercício 19 Item (c)

(d) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Divida o intervalo $[n, n+1)$ em quatro sub-intervalos de mesmo comprimento, a saber,

$$[n, \frac{4n+1}{4}), [\frac{4n+1}{4}, \frac{2n+1}{2}), [\frac{2n+1}{2}, \frac{4n+3}{4}), [\frac{4n+3}{4}, n+1).$$

Se x está no primeiro, então $4x$ está em $[4n, 4n+1)$, logo, caímos no caso do item (a), que o gráfico é um triângulo, e o mesmo ocorre nos demais três sub-intervalos. Então em $[n, n+1)$, $\{4x\}$ são quatro triângulos de altura $\frac{1}{2}$. Assim, $\frac{1}{4}\{4x\}$ são quatro triângulos de altura $\frac{1}{8}$.

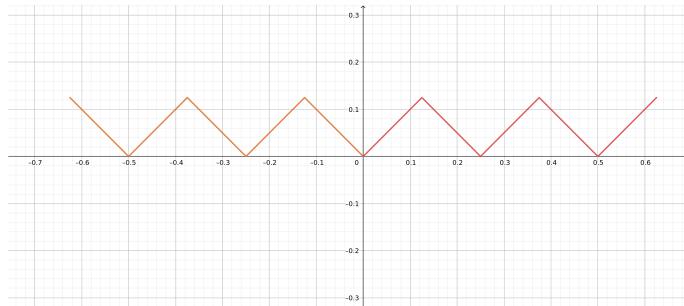


Figura 7: Exercício 19 Item (d)

Exercício 20 (a) Como um período T deve valer para todo x , em particular, deve valer para $x = 0$, logo,

$$\sin(2 \cdot 0) = \sin(2(0 + T)) \Rightarrow 0 = \sin(2T) \Rightarrow 2T = 0 + 2n_1\pi \text{ ou } 2T = \pi + 2n_2\pi,$$

com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$T = n_1\pi \text{ ou } T = \frac{\pi}{2} + n_2\pi.$$

Como T deve ser o menor possível, poderíamos considerar $T = \frac{\pi}{2}$, mas note que isto não é um período para f , pois para $x = \frac{\pi}{4}$, temos

$$f(x + T) = \sin(2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})) = \sin(2\frac{6\pi}{8}) = \sin(\frac{6\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1,$$

mas

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Logo, o segundo menor é $T = \pi$. Este de fato é um período para f , pois

$$f(x + T) = \operatorname{sen}(2(x + \pi)) = \operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \operatorname{sen}(2x) = f(x).$$

Portanto, f é periódica e o seu período fundamental é π .

- (b) Pelo mesmo raciocínio, se T é um período, em particular, vale para $x = 0$, logo, devemos ter

$$0 = \operatorname{sen}(T) + \operatorname{sen}(\pi T) \Rightarrow \operatorname{sen}(T) = -\operatorname{sen}(\pi T),$$

logo, no círculo trigonométrico vemos que $T = -\pi T + 2n_1\pi$ ou $T = \pi T - \pi + 2n_2\pi$, para $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Resolvendo para T , vem

$$T = \frac{2n_1\pi}{\pi + 1} \text{ ou } T = \frac{\pi - 2n_2\pi}{\pi - 1}.$$

Assim, como T deve ser o menor possível positivo, vem

$$T = \frac{\pi}{\pi + 1} \text{ ou } T = \frac{\pi}{\pi - 1}.$$

Mas para $x = \frac{\pi}{2}$, não vale $f(x + T) = f(x)$, para nenhum dos dois T . Portanto, f não é periódica. Um outro jeito de provar que não existe tal T envolve derivada. Suponha, por absurdo, que tal T existe. Derivando a igualdade

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(x + T) + \operatorname{sen}(\pi(x + T))$$

duas vezes em relação à x , vem

$$-\operatorname{sen}(x) - \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) = -\operatorname{sen}(x + T) - \pi^2 \operatorname{sen}(\pi(x + T)).$$

Somando as duas igualdades, vem

$$(1 - \pi^2) \operatorname{sen}(\pi x) = (1 - \pi^2) \operatorname{sen}(\pi(x + T)) \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi(x + T)).$$

Na primeira equação, isso implica que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + T)$, logo, T é um período para $\operatorname{sen}(x)$, e como o período fundamental de $\operatorname{sen}(x)$ é 2π , então $T = 2k\pi$. Mas por outro lado, $\operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi x + \pi T)$ diz que $\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(y + \pi T)$, então novamente, πT é um período para $\operatorname{sen}(y)$, logo, $\pi T = 2k'\pi$, assim, $T = 2k'$. Temos uma contradição, pois $2k'$ é racional e $2k\pi$ é irracional.

- (c) f não é periódica. De fato, suponha, por absurdo, que exista um período $T > 0$ para f . Então existe um único inteiro n tal que $n \leq T < n + 1$. Assim,

$$[0] = [0 + T] \Rightarrow 0 = [T] \Rightarrow 0 = n.$$

Portanto, $0 \leq T < 1$. Agora considere $x = 1 - \frac{T}{2}$. Note que $0 < x < 1$, assim, $[x] = 0$. Mas

$$[x + T] = \left[1 - \frac{T}{2} + T\right] = \left[1 + \frac{T}{2}\right] = 1,$$

pois $1 < 1 + \frac{T}{2} < 2$. Logo, T não é período para f . Portanto, f não é periódica.

(d) Note que $T = 2\pi$ é um período para f , pois

$$f(x + 2\pi) = 3\cos((x + 2\pi) + 2) = 3\cos((x + 2) + 2\pi) = 3\cos(x + 2) = f(x).$$

Agora se T é um período para f , em particular, para $x = -2$, vale

$$f(-2) = f(-2 + T) \Rightarrow 3\cos(-2 + 2) = 3\cos(-2 + T + 2) \Rightarrow 1 = \cos(T),$$

logo, $T = 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, logo, o menor positivo é $T = 2\pi$.

Exercício 21 (1) (a)

(b)

(c)

(d)

(2) (a)

(b)

(c)

(d)

Exercício 22 Sejam (a_0, b_0) e (a_1, b_1) os dois pontos do enunciado. Dado um (x, y) nas condições do enunciado, temos

$$\frac{\sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2}}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}} = c,$$

ou seja,

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = c^2[(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2],$$

e desenvolvendo,

$$x^2 - 2a_0x + a_0^2 + y^2 - 2b_0y + b_0^2 = c^2x^2 - 2a_1c^2x + c^2a_1^2 + c^2y^2 - 2b_1c^2y + c^2b_1^2.$$

Agora agrupando os termos em comum, vem

$$(c^2 - 1)x^2 - 2(a_1c^2 - a_0)x + (c^2 - 1)y^2 - 2(b_1c^2 - b_0)y + c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2 = 0.$$

Como $c^2 - 1 \neq 0$, pois $c \geq 0$ e $c \neq 1$, podemos dividir por $c^2 - 1$ e obter

$$x^2 - 2\frac{a_1c^2 - a_0}{c^2 - 1}x + y^2 - 2\frac{b_1c^2 - b_0}{c^2 - 1}y + \frac{c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2}{c^2 - 1} = 0.$$

Completando quadrados, vem

$$\left(x - \frac{a_1c^2 - a_0}{c^2 - 1}\right)^2 + \left(y - \frac{b_1c^2 - b_0}{c^2 - 1}\right)^2 = \frac{c^2[(a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2]}{(c^2 - 1)^2},$$

que é a equação de uma circunferência de centro

$$\left(\frac{a_1 c^2 - a_0}{c^2 - 1}, \frac{b_1 c^2 - b_0}{c^2 - 1} \right),$$

e raio

$$\sqrt{\frac{c^2[(a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2]}{(c^2 - 1)^2}} = \frac{c}{|c^2 - 1|} \sqrt{(a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2}.$$

Exercício 23 (a) A área de um setor circular de ângulo θ de uma circunferência de raio r é dada por

$$\frac{\theta \cdot r^2}{2}.$$

Seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\text{tg}(\theta) = 3$ (A saber, $\theta = \arctan(3)$, que é aproximadamente 1,107). Note que a área da região esquerda é a área da região direita. Agora, a área da região direita é

$$\frac{\theta \cdot 3^2}{2} - \frac{\theta \cdot 2^2}{2} = \frac{5}{2}\theta.$$

Assim, a área é

$$5\theta = 5\arctg(3) \cong 5 \cdot 1,107 = 5,535.$$

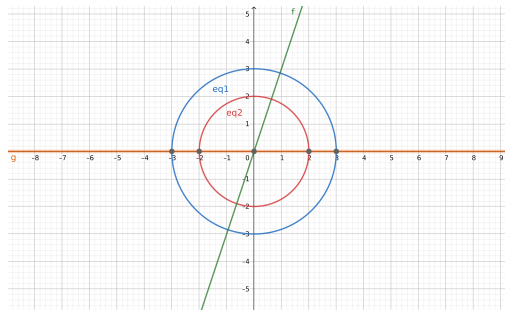


Figura 8: Exercício 23 Item (a)

(b) [(i)]

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h} \\ &= \frac{x^2+2hx+h^2+x+h-x^2-x}{h} \\ &= \frac{2hx+h^2+h}{h} \\ &= 2x + h + 1 \end{aligned}$$

[(ii)]

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)+5-(3x+5)}{h} \\ &= \frac{3x+3h+5-3x-5}{h} \\ &= \frac{3h}{h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

[(iii)]

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} \\ &= \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)}{h}\end{aligned}$$

[(iv)]

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= 3x^2+3xh+h^2\end{aligned}$$

Exercício 24 (a) Uma função f é injetora se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Assim, f é injetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, no máximo, um único ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em, no máximo, um único ponto.

(b) Uma função f é sobrejetora se para todo y no contra-domínio, existe um x no domínio tal que $f(x) = y$. Assim, f é sobrejetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, pelo menos, um ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em, no mínimo, um ponto.

(c) Uma função f é bijetora se f é injetora e sobrejetora. Geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em um único ponto.

Exercício 25 (a) É bijetora, pois

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 5x + 1 = 5y + 1 \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y,$$

e cada $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = \frac{y-1}{5}$, vem

$$f(x) = 5\frac{y-1}{5} + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

(b) Não é injetora, pois $f(-1) = 5 = f(1)$, e não é sobrejetora, pois -1 não é assumido por nenhum x , pois $f(x) \geq 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Não é injetora, pois $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = f(\frac{3\pi}{2})$. Mas é sobrejetora, basta fazer a interpretação no círculo trigonométrico.

(d) É bijetora, pois

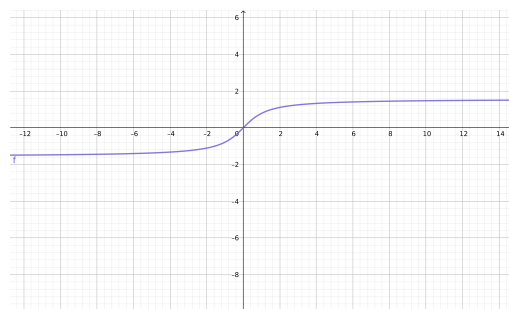
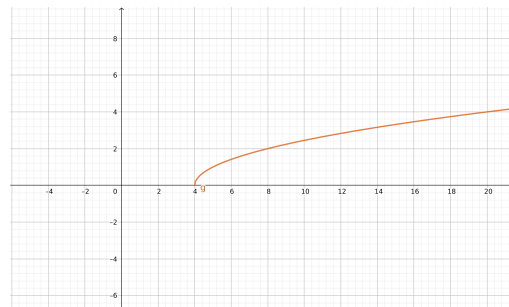
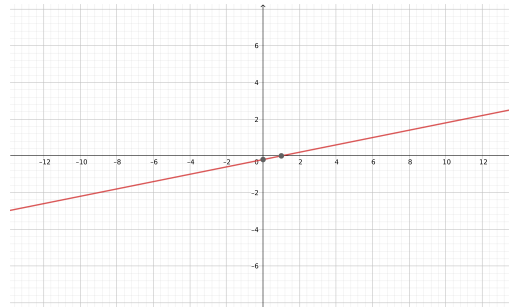
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 4 = y^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2} = |y|,$$

mas $y \geq 0$, então $|y| = y$, daí, $x = y$, e dado $y \in [4, \infty)$, tomando $x = \sqrt{y-4} \in [0, \infty)$, vem

$$f(x) = (\sqrt{y-4})^2 - 4 = y - 4 + 4 = y.$$

(e) É bijetora, basta fazer a interpretação geométrica no círculo trigonométrico.

- (f) É injetora, pelo mesmo argumento do item (d), mas não é sobrejetora, pois -1 não é imagem de nenhum ponto.
- (h) As funções que possuem, são apenas as funções bijetoras. Para fazer o gráfico da inversa, fazer o gráfico da função e refletir em relação à reta $y = x$. As inversas dos itens a), d) e e), são respectivamente dadas abaixo:



Exercício 26 (a) Nem sempre, por exemplo, a inversa de $f(x) = x$ é $g(x) = x$, que é diferente de $\frac{1}{x}$.

(b) O item (a) admite inversa $g(x) = \frac{x-1}{5}$, o item (d) admite inversa $g(x) = \sqrt{x-4}$ e o item (e) admite inversa $g(x) = \arctg(x)$.

Exercício 27 Sejam d a distância que o homem está do poste e s o comprimento de sua sombra. Fazendo semelhança de triângulos, obtemos

$$s = \frac{2}{3}d.$$

Exercício 28 Como ambos saem do mesmo ponto, podemos considerar este ponto como a origem do plano cartesiano. O homem que anda à 2km/h está no tempo $x = 0$ em $y = 0$, e no tempo $x = 1$ está em $y = 2$, e como o seu caminho é uma reta, então é dada por $y = 2x$. Analogamente, o homem que anda à 3km/h tem o seu percurso descrito pela reta $y = 3x$. Dado um instante $x \geq 0$, o primeiro homem está em $(x, 2x)$ e o segundo está em $(x, 3x)$, logo, sua distância é

$$d = \sqrt{(x-x)^2 + (2x-3x)^2} = \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

pois $x \geq 0$.

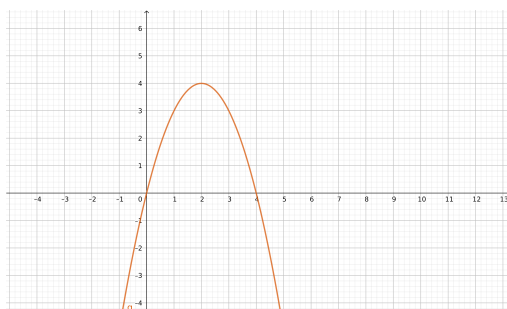
Exercício 29 Como a densidade ρ aumenta linearmente com a profundidade h , então basta termos dois pontos para encontrar esta reta. Seja x a profundidade do reservatório. Sabemos que na superfície, ou seja, $h = 0$, temos densidade $\rho = \rho_0$, e no fundo, para $h = x$, temos densidade $\rho = \rho_1$. Logo, o coeficiente angular desta reta é

$$m = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x - 0} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}.$$

Assim, $\rho = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + q$, e como para $h = 0$ temos $\rho = \rho_0$, então $q = \rho_0$. Portanto,

$$\rho(h) = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + \rho_0.$$

Exercício 30 (a) Representa uma parábola, com concavidade para baixo, que corta o eixo x em $(0,0)$ e em $(4,0)$.



(b) A altura máxima é o y do vértice, que é dada por

$$h_{\max} = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = -\frac{16}{-4} = 4,$$

e o seu instante é o x do vértice, que é dada por

$$t_0 = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2.$$

Exercício 31 Seja T a projeção ortogonal do ponto R no segmento OP . Se S está entre O e T , podemos fazer semelhança de triângulos para obter que a altura do triângulo sombreado é x e, daí, a área é

$$A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Agora, se S está entre T e P , então a área A é a soma da área do triângulo ORT , que é $\frac{25}{2}$, com a área do retângulo sombreado, que é $5 \cdot (x - 5)$. Portanto,

$$A(x) = 5x - 25 + \frac{25}{2} = 5x - \frac{25}{2}.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 5x - \frac{25}{2}, & 5 < x \leq 10. \end{cases}$$

Exercício 32 Sejam a e b a medida dos lados do retângulo. Como o seu perímetro é $2p$, então $2a + 2b = 2p$, logo, $a + b = p$. A sua área é dada por

$$A = a \cdot b = a \cdot (p - a) = pa - a^2.$$

Logo, sendo uma parábola com concavidade para baixo, a área máxima ocorre para a sendo o x do seu vértice, logo,

$$a = -\frac{p}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{2},$$

assim,

$$b = p - a = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto, o retângulo é um quadrado com lado medindo $\frac{p}{2}$.

Exercício 33 Coloquemos este fio no eixo x , de modo que a extremidade esquerda seja $x = 0$ e a extremidade direita seja $x = 10$. Seja x a posição do corte feito. Sem perda de generalidade, usemos o primeiro segmento, de comprimento x , para formar o quadrado de lado l , e o segundo segmento, de comprimento $10 - x$, para formar a circunferência de raio r . Assim,

$$4l = x \Rightarrow l = \frac{x}{4},$$

logo, o quadrado delimita uma área

$$A_q(x) = l^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Agora

$$2\pi r = 10 - x \Rightarrow r = \frac{10 - x}{2\pi},$$

logo, a circunferência delimita uma área

$$A_c(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \left(\frac{10 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{100 - 20x + x^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Assim, a soma das áreas é

$$A(x) = A_q(x) + A_c(x) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Note que é uma parábola com concavidade para cima, logo, o máximo ocorre em $x = 0$ ou $x = 10$. Mas

$$A(0) = \frac{25}{\pi}$$

e

$$A(10) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)10^2 - \frac{5}{\pi}10 + \frac{25}{\pi} = \frac{25}{4}.$$

Como $\pi < 4$, então $\frac{25}{\pi} > \frac{25}{4}$. Portanto, a área máxima ocorre para $x = 0$. Usamos o fio inteiro para a circunferência.

Exercício 34 Se $0 \leq x \leq 5$, então podemos fazer semelhança de triângulos para concluir que a altura do triângulo sombreado é $2x$. Logo,

$$A(x) = \frac{x \cdot (2x)}{2} = x^2.$$

Agora, se $5 < x \leq 10$, então a área sombreada é a soma da área do triângulo esquerdo, que é 25, com a área sombreada no triângulo direito, que é

$$25 - \frac{(10 - x)(20 - 2x)}{2} = 25 - \frac{2x^2 - 40x + 200}{2} = -x^2 + 20x - 75.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 5, \\ -x^2 + 20x - 50, & 5 < x \leq 10. \end{cases}$$

Exercício 35 Seja h a medida da altura do triângulo inscrito. Assim, a altura divide o segmento OB em dois segmentos, de medida m e n , respectivamente. Note que usando a definição de tangente para o ângulo direito, vem

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{h}{n}.$$

Agora, o ângulo da esquerda é $90^\circ - \theta$, logo, usando a definição de tangente, vem

$$\frac{h}{m} = \operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)}.$$

Logo,

$$b = m + n = h \operatorname{tg}(\theta) + \frac{h}{\operatorname{tg}(\theta)} = h \left(\operatorname{tg}(\theta) + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} \right) = h \left(\frac{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}{\operatorname{tg}(\theta)} \right)$$

Portanto,

$$h = \frac{b \operatorname{tg}(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}.$$

Assim,

$$A(\theta) = \frac{b \cdot \frac{b \operatorname{tg}(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}}{2} = \frac{b^2 \operatorname{tg}(\theta)}{2(\operatorname{tg}^2(\theta) + 1)}.$$

Exercício 36

- | | | | |
|-----|---|---|--|
| (a) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R},$ | $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R},$ | $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{R}$ |
| (b) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = [2, +\infty),$ | $\operatorname{Dom}(f) = [0, +\infty)$
$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty),$ | $\operatorname{Im}(h) = [2, +\infty)$ |
| (c) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\},$
$\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R} - \{0\},$ | $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\},$ | $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$ |
| (d) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = (0, 1],$ | $\operatorname{Dom}(f) = [0, +\infty)$
$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty),$ | $\operatorname{Im}(h) = (0, 1]$ |
| (e) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = (-\infty, 1],$ | $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(f) = [-1, 1],$ | $\operatorname{Im}(h) = [0, 1]$ |
| (f) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R},$ | $\operatorname{Dom}(f) = [0, +\infty)$
$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty),$ | $\operatorname{Im}(h) = [0, +\infty)$ |
| (g) | $\operatorname{Dom}(g) = (0, +\infty),$
$\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R},$ | $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 1],$ | $\operatorname{Im}(h) \text{ não existe}$ |
| (h) | $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R},$
$\operatorname{Im}(g) = (0, +\infty),$ | $\operatorname{Dom}(f) = [-1, 1]$
$\operatorname{Im}(f) = [0, 1],$ | $\operatorname{Im}(h) = [1, e]$ |

Exercício 37

Exercício 38

- (a) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ e $D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$
- (b) $g^{-1}(x) = \frac{3}{x-2} - 1$ e $D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$
- (c) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} - 1$ e $D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}$
- (d) $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$ e $D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\}$
- (e) $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$ e $D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\}$

Exercício 39

Exercício 40 Se x é o lado do triângulo equilátero, então o seu perímetro é $3x$. Agora a sua altura é $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, logo, a sua área é

$$\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}.$$

Exercício 41 Seja a a aresta do cubo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que a diagonal da face da base mede $\sqrt{2}a$ e, conseqüentemente, a diagonal mede $d = \sqrt{3}a$. Portanto, a aresta em função do comprimento da diagonal é

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}d = \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Assim, a área da superfície é

$$6 \cdot a^2 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2 = 6 \cdot \frac{3}{9}d^2 = 2d^2,$$

e o volume do cubo é

$$a^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27}d^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}d^3.$$

Exercício 42 Se uma curva simétrica em relação ao eixo x é gráfico de uma função f , então $(x, f(x))$ está na curva se, e somente se, $(x, -f(x))$ está na curva. Agora, dado x no domínio da f , $(x, f(x))$ e $(x, -f(x))$ estão no gráfico, mas como um ponto x só tem uma imagem, devemos ter

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Portanto, f é a função nula.