Lista 3 - Decomposição SVD

**1. Troca de linhas e colunas.**
Considere uma matriz $A_{m\times n}$ cuja decomposição SVD é dada por:

$$A = U\Sigma V^T$$

a) O que acontece com as componentes $U$, $\Sigma$ e $V$ se trocarmos de posição duas colunas de $A$ (por exemplo, as duas primeiras colunas de $A$)?

b) O que acontece com as componentes $U$, $\Sigma$ e $V$ se trocarmos de posição duas linhas de $A$ (por exemplo, as duas primeiras linhas de $A$)?

**2. Posto de $A$.**
Considere uma matriz $A_{m\times n}$ cuja decomposição SVD é dada por:

$$A = U\Sigma V^T$$

a) Mostre que a quantidade de valores singulares não-nulos em $\Sigma$ é igual ao posto de $A$.

b) Mostre que, se uma matriz $A$ tem posto $r$, então $A^TA$ e $AA^T$ também têm posto $r$.

**3. Decomposição SVD da matriz transposta.**
Se uma decomposição em valores singulares da matriz $A_{m\times n}$ é

$$A = U\Sigma V^T,$$

encontre uma SVD para $A^T$. Como estão relacionados os valores singulares de $A$ e $A^T$?

**4. Decomposição em projeções.**
Considere uma matriz $A_{m\times n}$ de posto $r$ cujos valores singulares não nulos são $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, os vetores singulares à esquerda são $u_1, \ldots, u_m$ e os vetores singulares à direita são $v_1, \ldots, v_n$. Mostre que $A$ pode ser escrita como uma soma de projeções, ou de matrizes de posto 1:

$$A = \sigma_1 u_1 {v_1}^T + \cdots + \sigma_r u_r {v_r}^T$$

**5. Interpretação geométrica.**
Considere uma matriz $A_{3\times 2}$ e uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em que:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Considere também a circunferência de raio 1, representada por:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|\mathbf{x}\|_2 = 1\right\}$$

a) Sabendo que a matriz $A$ possui decomposição SVD na forma $A = U\Sigma V^T$, descreva a interpretação geométrica de cada operação da aplicação de $T$ em $\mathbf{x}$:

$$T(\mathbf{x}) = U\Sigma V^T\mathbf{x}$$

b) **[Matlab]** Faça um plot das formas geométricas resultantes da aplicação de $T$ na circunferência de raio 1 para a seguinte matriz $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1.4 & 1.4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e compare com a interpretação geométrica realizada no item anterior.

**6. Decomposição SVD de matrizes quadradas.**

Considere uma matriz quadrada $A_{n\times n}$. Sabemos que nem toda matriz $A$ possui uma diagonalização do tipo $A = PDP^T$ (com $P$ ortonormal e $D$ diagonal). No entanto, note que toda matriz $A$ admite uma decomposição SVD do tipo $A = U\Sigma V^T$ (com $U$ e $V$ ortonormais, e $\Sigma$ diagonal).

a) Suponha $A$ invertível com decomposição SVD na forma $A = U\Sigma V^T$. Encontre uma SVD para $A^{-1}$.

b) Mostre que, se $A$ é positiva definida e simétrica, então a decomposição SVD pode ser simplificada da forma $A = PDP^T$. Ou seja:

- os valores singulares de $A$ coincidem com os autovalores de $A$;
- os vetores singulares de $A$ coincidem com os autovetores de $A$;

e podemos fazer $D = \Sigma$ e $P = U = V$, obtendo $A = PDP^T$.

**7. Não-unicidade da decomposição SVD.**

Mostre, através de um exemplo, que a decomposição SVD de uma matriz pode não ser única.

**8. Aproximação com redução de posto.**

Seja $A$ uma matriz $m \times n$ de posto $r$, com valores singulares não nulos $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r > 0$. Sejam $u_1, \ldots, u_r$ os vetores singulares à esquerda de $A$, e $v_1, \ldots, v_r$ os vetores singulares à direita de $A$. A matriz $A$ pode ser representada por uma soma de matrizes de posto 1:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i {v_i}^T$$

Considere o conjunto de todas as matrizes $B_{m\times n}$ que podem ser formadas por somas parciais da somatória acima. Por exemplo, podemos escolher apenas 1 termo qualquer da somatória de $A$:

$$B = \sigma_i u_i {v_i}^T \qquad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

ou podemos escolher 2 termos quaisquer da somatória de $A$:

$$B = \sigma_i u_i {v_i}^T + \sigma_j u_j {v_j}^T \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, r\},\ i \neq j$$

ou podemos escolher qualquer outra combinação de termos, até totalizar $r$ termos.

Dentre todas as combinações possíveis, deseja-se encontrar a matriz $B$ de posto $k$, onde $k < r$, que seja a melhor aproximação possível de $A$ em termos da norma de Frobenius — isto é, que minimize $\|A - B\|_F$. Lembrando que a norma de Frobenius de uma matriz $M_{m\times n}$ pode ser definida como:

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {m_{ij}}^2} = \sqrt{\text{traço}(MM^T)}$$

onde o traço é a soma dos elementos da diagonal principal.

Assim, mostre que a melhor escolha para $B$ é dada pela soma dos primeiros $k$ termos da decomposição SVD de $A$, ou seja,

$$B \; = \; \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, u_i \, v_i^T,$$

mantendo apenas os $k$ maiores valores singulares $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ e descartando os demais. Em outras palavras, mostre que a melhor aproximação de $A$ de posto $k$ (dentre as possibilidades de $B$), em norma de Frobenius, é obtida ao truncar a decomposição SVD de $A$ nos $k$ primeiros termos.