Trabalho 4

01) Deve-se encontrar combinaçõees possíveis de icógnitas $x1, x2...x7 \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$\sum_{j=1}^{7} x_j = 40$ e $x_j \geq j$

Assim, $x_1 + x_2... + x7 = 40$

Já que $x_j \geq j$, podemos efetuar uma troca de variáveis

$x_n = y_n + n$, onde $y_n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$y_1 + 1 + y_2 + 2 + y_3 + 3 + y_4 + 4 + y_5 + 5 + y_6 + 6 + y_7 + 7 = 40$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 40 - 28$

$\sum_{j=1}^{7} y_j = 12$

A partir da equação acima é possível montar um sistema bola-traço, onde as bolas serão unidades, que somadas totalizarão 12 e os traços serão sinais de soma. O número de $+$ é $j - 1$

$|||||||||||| + + + + + +$

De quantas maneiras é possível organizar esse sistema? É uma combinação com repetição, portanto:

$$\frac{(12+6)!}{12!6!} = 18564 \text{ combinações}$$

02) a) Para dois elementos de $\mathbb{Z}_{15}$ a, b, caso $(a \times b)M_{15} = 0$, a e b são não invertíveis. Assim, o elemento 0 é não-invertível em todos conjuntos, assim como 3 e 5 para o caso de $\mathbb{Z}_{15}$.

Exemplo: $(3 \times 5)M_{15}$

$$(15)M_{15} = 0$$

b) $(xy)M_d = (xz)M_d$

Por tentativa e erro, encontramos que para $x = 5; y = 1; z = 7$ a equação se satisfaz. Basta que x seja um elemento **não invertível** do conjunto.

$(5 \times 1)M_d = (5 \times 7)M_d$

$5M_{15} = 35M_{15}$

c) Para não haver solução, não pode haver classe de equivalência. Observe que

$(0 \times x)M_{15} = 0$ sempre é válido. Portanto, para a equação nunca possuir soluções, é necessário que $a = 0$ e $b \neq 0$

Exemplo: $(a \times_{15} x) = b$

$(0 \times_{15} x) = 3$ Para qualquer x a equação é falsa

d) Para haver mais de uma solução deve haver classe de equivalência entre os termos. Para

$a = 6; b = 3$, sempre que $xM_{15} = 3$, a equação se satisfaz.

Exemplo: $\exists x \in \mathbb{Z}_{15}$ tal que $6 \times_{15} x = 3$

$6 \times 3 = 18 = 3$

$6 \times 8 = 48 = 3$

$6 \times 13 = 78 = 3$

e) a) Os elementos não invertíveis de $\mathbb{Z}_{13}$ são números que diante de uma operação de multiplicação resultam em 13. Como o termo d é **primo,** não existem números que satisfaçam a pedida além de 0.

Exemplo: $(0 \times x)M_{15}$

$(0)M_{15} = 0$

Assim, o único elemento não invertível de $\mathbb{Z}_{13}$ é 0.

e) b) $(xy)M_d = (xz)M_d$**,** com $x \neq 0$

Não existem soluções, dado que para resolver a equação, x precisa ser um não invertível de $\mathbb{Z}_{13}$. O único elemento não invertível do conjunto é 0, mas como explicitado no enunciado, não se deve considerar o 0.

e) c) Novamente, não há solução possível quando a é nulo e $b \neq 0$. Assim, para $a = 0; b = 7$, não existem soluções em $\mathbb{Z}_{15}$

Exemplo: $(a \times_{15} x) = b$

$(0 \times_{15} x) = 7$ Para qualquer x a equação é falsa

e) d) Para haver mais de uma solução, um dos coeficientes deve ser não invertível. Já que no conjunto $\mathbb{Z}_{13}$ o único elemento não nulo é 0, como demonstrado em ***e)a),*** a solução possível, infinita e única para o problema é $a = b = 0$.

Exemplo: $0 \times 3 = 0$

$0 \times 9 = 0$

$0 \times 3141527 = 0$