1a. Lista de Exercícios SMA 0354 - Cálculo II - Curso Coordenado - **2021.2**

Comentários sobre as listas e monitorias: ver no edisciplinas.
Atenção: As discussões nas aulas complementam as listas na parte conceitual. Participem e anotem além dos exercícios e contas.

Somas de Riemann

Exercício 1 *Para as funções abaixo, encontre uma fórmula para a Soma de Riemann obtida dividindo-se o intervalo $[a,b]$ dado em n subintervalos de comprimentos iguais e usando o extremo direito de cada subintervalo. Então, tome o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para calcular a área sob a curva no intervalo $[a,b]$:*

a) $f(x) = 1 - x^2,\ [a,b] = [0,1]$ *b)* $f(x) = x^2 + 1,\ [a,b] = [0,3]$
c) $f(x) = x + x^2,\ [a,b] = [0,1]$ *d)* $f(x) = x^2 - x^3,\ [a,b] = [-1,0]$

Exercício 2 *Se $f(x) = \sqrt{x} - 2,\ x \in [1,6]$, escreva a soma de Riemann com $n = 5$, considerando $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ como sendo o ponto médio do subintervalo.*

Exercício 3 *Expresse o limite abaixo como uma integral definida no intervalo $[a,b]$ dado:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1+x_i}\Delta x, \quad [a,b] = [1,5]$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}, \quad [a,b] = [0,1]$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{27i^3 - 18n^2 i}{n^3}, \quad [a,b] = [0,3]$

Integrais Indefinidas

Exercício 4 *Usando a técnica por substituição, encontre as integrais indefinidas:*

a) $\displaystyle\int \frac{8\,x^2}{x^3+2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\,\sqrt{x-4}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int (2\,x+3)^{11}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{t^5+2\,t}{\sqrt{t^6+6\,t^2}}\,dt$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2\,z^2}{z^3+5} - \frac{3\,z}{z^2-10}\right) dz$ *f)* $\displaystyle\int \left[\sqrt{4\,t} + \cos(2\,t)\right] dt$ *g)* $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{-\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$ *h)* $\displaystyle\int \left(2\,z^2-3\right)^5 zdz$

i) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ *j)* $\displaystyle\int e^{\cos(x)}\sin(x)\,dx$ *k)* $\displaystyle\int \sin(x)\tan(\cos(x))\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{(ln(x))^4}{x}\,dx$

m) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$

Exercício 5 *Utilizando a técnica por integração por partes na integral indefinida, resolva:*

a) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\,e^{3\,x}dx$ *c)* $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(3x)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int e^x\ \cos(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int e^x\ \operatorname{sen}(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{e^x}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$ *j)* $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)\,dx$ *k)* $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen}(x)\,dx$

l) Como ficaria esta técnica para $\displaystyle\int x^2 g(x)dx$*? Aplique o método e reescreva.*

Integrais Definidas

Exercício 6 *Encontrar o valor das integrais definidas:*

a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} |x+1|\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ c) $\displaystyle\int_{7}^{12} dx$ d) $\displaystyle\int_{1}^{0} t^2\left(t^{\frac{1}{3}}-\sqrt{t}\right)dt$

e) $\displaystyle\int_{3}^{2} \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\left(1-v^2\right)^2}\,dv$ h) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,e^x\,dx$

i) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{sen}(x)\,e^{[\cos(x)+1]}\,dx$ k) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\,2^x\,dx$ l) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,(2\,x+3)^{99}\,dx$

m) Quantas destas integrais você tem certeza que é a área de uma região? O que precisaria analisar? Explique rapidamente algumas delas.

n) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx$. *O resultado foi um valor negativo? Se sim, encontre o erro e explique geometricamente. Se não, confira que de fato usou a teoria corretamente. (Dica: Verifique as condições para existência de uma integral definida.)*

Exercício 7 *Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a\,,b]$. Qual é uma primitiva de v?*
(a) A diferença $x(b) - x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser utilizado para calcular o deslocamento de uma partícula?
Definamos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$ por $\displaystyle\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{dt}$.
(b) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, para $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
(c) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, para $t \geq 0$. Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

Exercício 8 *Seja $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.*

1. *Mostre que se f é uma função par, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

2. *Mostre que se f é uma função ímpar, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

3. *Explique os itens anteriores geometricamente.*

Exercício 9 *Estude a paridade das funções que aparecem no integrando das integrais definidas abaixo e depois calcule-as:*

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2+4\right)dx$ (b) $\displaystyle\int_{-17\pi/4}^{17\pi/4}\left[\operatorname{sen}\left(x^3\right)-x^7\cos(x)\right]dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{17}}{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^4+1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh\left(x^3-x\right)}dx$

Exercício 10 *Sendo* $f:[0,9]\to\mathbb{R}$ *contínua, calcule* $\displaystyle\int_{-3}^{3} x f(x^2)dx$.

Exercício 11 *Se* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é uma função* w*-periódica e integrável em qualquer intervalo limitado da reta, mostre que*

$$\int_0^w f(x)\,dx = \int_a^{a+w} f(x)\,dx$$

para cada $a\in\mathbb{R}$ *e para um real* w *fixados.*

Exercício 12 *Verifique que para todo natural* $n>1$*, temos* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t)\,\mathrm{dt} = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(t)\,\mathrm{dt}$.

Exercício 13 *Relembre: Quais as condições para uma função ser integrável?*
Determine se a função f *é integrável no intervalo* $[a,b]$.

a) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ *e* $[a,b]=[-1,2]$

b) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{para } x=0\,, \\ -\sin(x)/x & \text{para } x\in(0\,,1] \end{cases}$ *e* $[a,b]=[0,1]$

c) $f(x)=\begin{cases} 1/x^2 & \text{para } |x|\le 1,\ x\ne 0\,, \\ 3 & \text{para } x=0 \end{cases}$ *e* $[a,b]=[-1,1]$

Exercício 14 *Determine o maior domínio de definição da função cuja lei é dada por:*

a) $F(x)=\displaystyle\int_0^x t^2\,dt$ *b)* $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^x 1/t^2\,dt$

c) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, *onde* $f(t)=\begin{cases} t & \text{para } t\in[-2,0]\,, \\ e^{-t} & \text{para } t>0 \end{cases}$

d) $F(x)=\int_8^{x^2} e^{2t+2}\,dt$

Teorema Fundamental do Cálculo

Exercício 15 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar a expressão da função* $f':A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, onde* $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por:*

a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \left(t^2+1\right)^{10}\,dt$ *b)* $f(x)=\displaystyle\int_x^0 \sqrt{u^2+4\,u}\,du$ *c)* $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x t\,\operatorname{sen}(t)\,dt$

d) $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^3} \cos^{\frac{1}{3}}(t)\,dt$ *e)* $f(x)=\displaystyle\int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} \sqrt{t^2+1}\,dt$ *f)* $f(x)=\displaystyle\int_0^{4\,x} \operatorname{sen}^{10}(t)\,dt$

Aplicações do teorema do valor médio (TVM) para integrais

Exercício 16 *Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor médio das funções* f *e determine* $c\in(a,b)$*, tal que* $f(c)=$ *valor médio da função* f *no intervalo* $[a,b]$*:*

a) $f(x)=3\,x$ *e* $[a\,,b]=[1\,,2]$.
b) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *e* $[a\,,b]=[-\pi\,,\pi]$.
c) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *e* $[a\,,b]=[0\,,\pi]$.
d) $f(x)=x^2-2\,x$ *e* $[a\,,b]=[0\,,2]$.

Mudança de variáveis para integral definida

Exercício 17 *Nos casos abaixo aplique o Teorema da Mudança de Variáveis para Integral (***T.M.V.I***) para resolver as seguintes integrais.*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u^3+1)^2}\,du$ c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} t(t^2+1)^{80}\,dt$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\sin(t)\,dt$ e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(z)\,dz$ f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{senh}^3(t)\,dt$

Exercício 18 *Suponha que a função $f : [-2\,,0] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[-2\,,0]$ e que $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 3$. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x-2)\,dx$.*

Exercício 19 *Suponha a funçao $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[-1\,,1]$ e que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{dt} = 5$. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} f(2\,x-1)\,\mathrm{dx}$.*

Exercício 20 *Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $\int_{-4}^{2} f(x)dx = 12$, encontre $\int_{0}^{2} f(2-3x)dx$.*

Cálculo de áreas de regiões planas

Exercício 21 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das seguintes funções e retas abaixo:*

a) $f(x) = x^2\,, x = 2\,, x = 4$ e $y = 0$ b) $f(x) = x\,\sqrt{4-x^2}\,, x = 0\,, x = 2$ e $y = 0$

c) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|\,,\ x = -2\pi,\ x = 2\pi$ e $y = 0$ d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\,, x = -2\,\pi\,, x = 2\,\pi$ e $y = 0$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{10-x^2}}\,, x = 2$ e $y = 0$

f) Como você calcularia o item a), se trocássemos somente $y = 0$ por $y = 1$? Explique geometricamente.

g) Qual a diferença entre c) e d)? Explique geometricamente.

h) Os resultados de c) e d) têm alguma relação o resultado de $\displaystyle\int_{-2\,\pi}^{2\,\pi} sen(x)dx$. Explique geometricamente.

i) A igualdade $\displaystyle\left|\int_{-2\,\pi}^{\pi} sen(x)dx\right| = \int_{-2\pi}^{\pi} |sen(x)|dx$ é verdadeira?? Qual destas expressões representa a área entre a função seno e o eixo x, com $-2\pi \leq x \leq \pi$.

j) Por que a área entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leq x \leq b$ é dada por $\displaystyle\int_{a}^{b} |f(x)-g(x)|dx$? Explique geometricamente. Como fica essa integral no item d), ou seja, quem são f e g?

k) Uma integral definida por dar zero? Se sim, ela pode ser interpretada como área de alguma região? Exemplifique e interprete geometricamente.

Exercício 22 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas abaixo:*

a) $y = x^2$ e $y = 4\,x - x^2$ b) $y = \cos(x)\,, y = \cos^2(x)\,, x = 0$ e $x = \pi$

Exercício 23 *Calcule a área da região limitada do plano xOy, que está à direita do eixo Oy e à esquerda da parábola* $x = 2\,y - y^2$.

Exercício 24 *Calcule a área da região limitada abaixo do gráfico da função f (e acima do eixo x), nos seguintes casos:*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & para \quad x \in [0\,,1]\,, \\ 2-x & para \quad x \in [1\,,2] \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & para \quad x \in [0\,,1]\,, \\ -(x-1)\,(x-4) & para \quad x \in [1\,,4] \end{cases}$

Exercício 25 *Considere a região* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, a \geq b > 0\}$. *Encontre a área da região E.*

Exercício 26 *Desenhe o subconjunto A, do plano xy, e calcule sua área nos seguintes casos:*
(a) A é o subconjunto limitado do plano xy, delimitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, *pelo eixo x e pelo gráfico de* $y = x^3$.
(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ *e pelo gráfico de* $y = \sqrt{x}$.
(c) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, *tais que* $0 \leq y \leq 9 - x^2$.
(d) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, *tais que* $1 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq \dfrac{x}{1+x^2}$.
(e) Se você resolveu a área do item (a) com uma integral em dx agora refaça-o com uma integral equivalente em dy. Repense os outros itens com integral em dy, para ver se facilitaria ou complicaria. Similarmente: se você encontrou a área resolvendo integral em dy, refaça o exercício calculando com integral em dx.

Exercício 27 *Seja* $x_o \in \mathbb{R}$ *o ponto máximo da função* $f(x) = x^2\,e^{-x}$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Calcule a área do conjunto limitado* $A = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq x_o \;\; e \;\; 0 \leq y \leq x^2\,e^{-x}\right\}$.

Frações parciais

Exercício 28 *Use decomposição em frações parciais para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{16\,x+69}{x^2-x-12}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2-10\,x-60}{x^3+x^2-12\,x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{-3\,x^3+x^2+2\,x+3}{x^4+x^3}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2-5\,x+4}{x^3-x^2+x-1}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\,(x+1)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4\,x^2+6\,x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-9}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-x^2}dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(4-x)}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)}\,dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^2+x+2}\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x}{(x-2)(x-4)}\,dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{x^4+5x^3+20x+16}{x(x^2+4)^2}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{4x^3-x}{x^2-x-30}\,dx$ (q) $\displaystyle\int \frac{8-t^3}{(t-3)\,(t+1)^2}\,dt$ (r) $\displaystyle\int \frac{6-z^2}{2z^2+z-21}\,dz$

(s) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3z^2+1}{(z+1)\,(z-5)^2}\,dz$ (t) $\displaystyle\int \frac{2+w^4}{w^3+9w}\,dw$ (u) $\displaystyle\int \frac{8+t+6t^2-12t^3}{(3t^2+4)\,(t^2+7)}\,dt$

Exercício 29 *No seguinte exercicio verifique que:* $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 0$.

$$\int \frac{16-4x+5x^2-x^3}{x^5+8x^3+16x}\,dx = \cdots = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+4}dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Agora, responda as seguintes perguntas:

1. *Como se resolve estas três últimas integrais acima? E se a constante E fosse uma constante não nula? Como você resolveria a última integral?*

2. *E se fossem integrais do tipo:* $\displaystyle\int \left(\frac{3}{2x+1} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{2x+3}{(2x^2+x+1)} \right) dx$*? Como você resolveria? (Faça um resumo do método.)*

Integração por substituição trigonométrica

Exercício 30 *Faça substituição trigonométrica e então calcule a integral:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int 3x^5\sqrt{16-x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{z^5}{(9z^2-25)^{\frac{3}{2}}}\,dz$ (f) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-4t^2}}{t^2}\,dt$ (h) $\displaystyle\int \frac{w^5}{\sqrt{8w^2+1}}\,dw$ (i) $\displaystyle\int \frac{2}{(x-3)^6\sqrt{-x^2+6x-5}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{(z+1)^2(2z^2+4z-34)^{\frac{3}{2}}}\,dz$ (k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4y^2-16y+19}}{(y-2)^6}\,dy$ (l) $\displaystyle\int \frac{e^{12t}}{\sqrt{4e^{6t}-1}}\,dt$

Exercício 31 *Resolva as seguintes integrais trigonométricas:*

(a) $\displaystyle\int \sin(5x)\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(2x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^6(x)\cos^3(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin^7(x)}{\cos^4(x)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin^8(3z)\cos^5(3z)\,dz$

(g) $\displaystyle\int \sec^6(3y)\tan^2(3y)\,dy$ (h) $\displaystyle\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\,dx$ (i) $\displaystyle\int \csc^6\left(\frac{1}{4}w\right)\cot^4\left(\frac{1}{4}w\right)\,dw$

(j) $\displaystyle\int \frac{\sec^4(2t)}{\tan^9(2t)}\,dt$ (k) $\displaystyle\int \frac{2+7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz$ (l) $\displaystyle\int \left[9\sin^5(3x)-2\cos^3(3x)\right]\csc^4(3x)\,dx$

Exercício 32 *Desenvolvendo outras habilidades: Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional (ou seja, como divisão de polinômios) e então calcule a integral:*

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-3\cos(x)}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(t)}{\tan^2(t)+3\tan(t)+2}\,dt$

Cálculo de volume por integral simples

Exercício 33 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo-x da região do plano-xOy delimitada pelos gráficos das funções* $f(x)=x^2$ *e* $g(x)=\sqrt{x}$.

Exercício 34 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se a região*

$$A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \ e \ x^2\le y\le 1\right\},$$

em torno do eixo-y.

Exercício 35 *As seções transversais de um certo sólido, por planos perpendiculares ao eixo-x, são círculos, cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas no plano-xOy definidas pelas equações* $y = x^2$ *e* $y = 8 - x^2$*. Encontre seu volume.*

Exercício 36 *Para* $a > 0$ *fixado, temos que a base de um certo sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

Cada seção plana do sólido por planos perpendiculares ao eixo-x é um quadrado com um lado sobre a base do sólido. Calcule o seu volume. Faça o mesmo quando a base desde sólido é o círculo

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2\right\}.$$

Exercício 37 *A base de um certo sólido é a região do plano-xOy delimitada pelo eixo-x, pela curva dada por* $y = \operatorname{sen}(x)$ *e pelas retas* $x = 0$ *e* $x = \pi/2$*. Cada seção plana do sólido perpendicular ao eixo-x é um triângulo equilátero com um lado na base do sólido. Encontre o volume do sólido.*

Exercício 38 *Em cada um dos itens abaixo, esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Além disso, usando o método das cascas cilíndricas, determine o volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo indicado.*

(a) $y = \sqrt{x}\,, x = 4\,, y = 0$ *e o eixo-y*	(b) $y = x^2\,, y^2 = 8\,x$ *e o eixo-y*
(c) $y^3 = x\,, y = 3,\ x = 0$ *e o eixo-x*	(d) $x^2 = 4\,y\,, y = 4\,,$ *e o eixo-x*
(e) $y = \sqrt{x+4}\,, y = 0\,, x = 0$ *e o eixo-x*	(f) $16y = x^2\,, y^2 = 2\,x$ *e o eixo-y.*

Refaça o item (a) rotacionando a região em torno da reta:

(g) $y = -1,$	(h) $y = 2,$
(i) $x = 2,$	(j) $x = -1.$

O volume é o mesmo nos casos (g) e (h)? Explique.
(k) Quais dos itens (g), (h), (i) e (j) poderiam ser feitos com o método de seções transversais? Resolva um destes casos por este método.

Exercício 39 *Seja* R *a região do plano-xOy delimitada pela parábola de equação* $x = y^2$ *e pela reta* $x = 9$*. Para cada um dos itens abaixo, determine o volume do sólido que tem a região* R *como base, sabendo-se que a secção relativa ao eixo-x é*
(a) *um quadrado.*
(b) *um retângulo de altura igual a* 2*.*
(c) *um semicírculo.*
(d) *um quarto de círculo.*
(e) *um triângulo equilátero.*
(f) *um triângulo, cuja altura é igual a* $1/4$ *do comprimento da sua base.*
(g) *um trapézio com base inferior no plano-xOy, cuja base superior tem comprimento igual à metade do comprimento da sua base inferior e o comprimento da altura é igual a* $1/4$ *da sua base inferior.*
(h) *um paralelogramo, com base no plano-xOy e cuja altura é igual a duas vezes o comprimento de sua base.*

Integrais Impróprias

Exercício 40 *Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:*

(a)	$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$	(b)	$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$	(c)	$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	(d)	$\displaystyle\int_0^\infty e^{2x}dx$
(e)	$\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}$	(f)	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$	(g)	$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}dx,\ s>0$	(h)	$\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-sx}dx,\ s>0$
(i)	$\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}dt,\ s>0$	(j)	$\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt,\ s>0$	(k)	$\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$	(l)	$\displaystyle\int_1^\infty \ln x dx$
(m)	$\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{st} sen t dt,\ s>0$	(n)	$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2}dx$	(o)	$\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln\lvert x\rvert}{x}dx$	(p)	$\displaystyle\int_1^\infty \ln^2 x\, dx.$

Exercício 41 *Verifique para quais valores de α a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge e para quais diverge.*

Exercício 42 *Determine todos os números naturais n para os quais a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty x^n \ln x dx$ é convergente.*

Exercício 43 *Seja f uma função integrável em $(-t,t)$, para todo $t>0$. Definimos a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$. Dizemos que a integral* **converge** *se ambas parcelas do lado direito da igualdade convergirem. Caso contrário ela* **diverge**.
Se ambas parcelas forem ∞ (ou $-\infty$), ou se uma delas for convergente e a outra ∞ (ou $-\infty$), escrevemos $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \infty$ (resp. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = -\infty$).
Se, por exemplo, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \infty$ e $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = -\infty$, o que podemos dizer sobre $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$??
Identifique quais integrais abaixo convergem e quais divergem.

$$(a)\ \int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx \quad (b)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad (c)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx \quad (d)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Exercício 44 *Se f é contínua em $(x_0,b]$ então $\displaystyle\int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{a\to x_0^+}\int_a^b f(x)dx$. De modo análogo, se f é contínua em $[a,x_0)$ então $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{b\to x_0^-}\int_a^b f(x)dx$. No caso do limite existir dizemos que a integral converge. Com estas definições verifique se as integrais abaixo convergem ou não:*

$$(a)\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx \quad (b)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \quad (c)\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (d)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+2x^2+x} \quad (f)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}.$$

Exercício 45 *Teste a convergência das integrais abaixo:*

(a) $\displaystyle\int_3^\infty e^{-2x}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3}$ (c) $\displaystyle\int_8^\infty x^{-4/3}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty senx\ dx$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}dx$ (f) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{xlnx}$ (g) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(lnx)^2}dx$ (h) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}cosx\ dx$

(i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$ (j) $\displaystyle\int_0^\infty |x|cos\, x^2dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x}cosx\, dx$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx$ (n) $\displaystyle\int_0^e \ln x dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+4x+1}{x^4-3x+2}dx$ (p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

(q) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x^2-18}dx$ (r) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}(x+1)dx$ (s) $\displaystyle\int_0^\infty 4x^3e^{-x^4}dx$ (t) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{cosx}{\sqrt{senx}}dx$

Exercício 46 *Use o critério da comparação ou comparação por limite para decidir se as integrais abaixo convergem ou divergem:*

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{cos^2x}{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1+cosx}{\sqrt{|x|^3}}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-0.05}{x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}dx$ (g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^3-3x-1}{\sqrt{|x|^7}}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{cos\, x+2}dx.$