



Fundamentos em Pesquisa Operacional – 2023/2

Lista de exercícios

Prof. Peng Yaohao

Questão 1. Defina brevemente os seguintes conceitos:

- (a) Pesquisa Operacional
- (b) Função objetivo
- (c) Custo de oportunidade
- (d) Otimização
- (e) Análise de sensibilidade
- (f) Preço sombra
- (g) Custo reduzido
- (h) Restrição de não-negatividade
- (i) Problema dual
- (j) Variável artificial (*dummy*)
- (k) Vetor gradiente
- (l) Árvore geradora mínima
- (m) Ciência de dados
- (n) Aprendizado de máquinas

Questão 2. Para as expressões de \mathbf{X} abaixo, calcule $-\mathbf{X}$:

- (a) $X = 2a - b$
- (b) $X = -c - \frac{1}{d}$
- (c) $X = (3e + f - 2g) \cdot (-h^2 - i)$

Questão 3. Para os seguintes valores de \mathbf{z} , obtenha as formas fatoradas de z e \sqrt{z} :



- (a) $z = 32$
- (b) $z = 125$
- (c) $z = 128$
- (d) $z = 243$

Questão 4. Reescreva as expressões abaixo colocando o termo **a** em evidência:

- (a) $2a - 5a$
- (b) $2a - 5$
- (c) $3a^3 + a^2 - 17a$
- (d) $(4a^2 - 5a) \cdot (2a + 1)$

Questão 5. Assinale as seguintes alternativas em Certo (**C**) ou Errado (**E**)

- (a) () $1 + 1 = 2$
- (b) () $1 + 1 \leq 2$
- (c) () $\frac{0}{a} = \frac{a}{0}$
- (d) () $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$
- (e) () $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$
- (f) () $\sqrt{a^2} = a$
- (g) () $(a+b)^n = a^n + b^n$
- (h) () $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- (i) () $\log_a(x) = c \leftrightarrow a^c = x = a^{\log_a(x)}$
- (j) () $\log_a(x+y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Questão 6. Realize as seguintes operações matriciais:

- (a) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 16 \\ 20 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 1 & 7 \\ 16 & 0 & -8 \end{bmatrix}$
- (b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 10 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$



$$(c) \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 12 \\ -6 & 1 & -2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 14 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$(d) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix}$$

Questão 7. Escalone as seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Questão 8. Resolva os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



(d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questão 9. Esboce o gráfico das seguintes retas:

- (a) $y = 2x + 3$
- (b) $y = 5x$
- (c) $y = 4$
- (d) $y = -x - 2$
- (e) $y = x$

Questão 10. Calcule as seguintes distâncias:

- (a) Ponto (1,2) ao ponto (4,6)
- (b) Ponto (-3,1) ao ponto (2,-5)
- (c) Ponto (3,0) à reta $y = 4x - 2$
- (d) Reta $3y = 8x + 1$ à origem do plano cartesiano

Questão 11. Forneça a expressão algébrica das retas que passam pelos seguintes pontos:

- (a) (1,2) e (2,2)
- (b) (0,0) e (1,1)
- (c) (0,7) e (4,3)
- (d) (0,-1) e (3,2)
- (e) (1,3) e (4,0)

Questão 12. Forneça a expressão algébrica de uma reta paralela e uma ortogonal a cada uma das retas a seguir:

- (a) $y = x$



- (b) $y = -x$
- (c) $4y = 5x - 9$
- (d) $-2y = 3x - 8$

Questão 13. Calcule a interseção das seguintes retas:

- (a) $x = 2$ e $y = 5$
- (b) $x - y = -1$ e $2x + y = 2$
- (c) $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$
- (d) $2x + 3y = 1$ e $3x + 4y = 1$
- (e) $x + y = 1$ e $x - y = -5$

Questão 14. (O tempo não para) Responda às seguintes questões de matemática básica em menos de 10 segundos:

- (a) Se um lápis e um caderno custam juntos R\$ 22.00 e o caderno custa R\$ 20.00 a mais que o lápis, quanto custa o caderno?
- (b) A população de uma colônia de germes dobra a cada minuto. Se essa colônia leva 30 minutos para ocupar uma área formada por um quadrado de lado 10 cm, quantos minutos levaria para ocupar uma área formada por um quadrado de lado 5 cm?
- (c) Numa assembleia composta por 100 políticos, sabe-se que pelo menos um dos políticos é honesto e que, dados quaisquer dois políticos, pelo menos um dos dois é desonesto. Quantos políticos na assembleia eram desonestos?
- (d) Um comerciante comprou um produto por R\$ 7.00, vendeu-o por R\$ 8.00, recomprou esse produto por R\$ 9.00 e vendeu-o novamente por R\$ 10.00. Qual foi o seu lucro?
- (e) Flindossélia irá distribuir 56 biscoitos para seus dez bichinhos de estimação: cada cachorro recebe 6 biscoitos e cada gato recebe 5 biscoitos. Quantos gatos e cachorros há no grupo?
- (f) Ziegmundsson passou na confeitaria e comprou cinco *donuts* e três *croissants*; caso optasse por comprar três *donuts* e cinco *croissants*, gastaria R\$ 20.00 a menos. Qual é a diferença entre os preços unitários do *donut* e do *croissant*?



- (g) Em uma fileira com x moedas, se fosse virada uma das moedas de coroa para cara, o número de caras e coroas seria igual; se fosse virada uma das moedas de cara para coroa, o número de coroas seria o dobro do número de caras. Qual é o valor de x ?
- (h) Um grupo de escoteiros caminhou de sua cabana até a lagoa a uma velocidade média de 6 km/h e fez o caminho de volta a uma velocidade média de 2 km/h, levando uma hora a mais do que na ida para realizar o trajeto de volta. Qual é a distância entre a cabana e a lagoa?
- (i) Quatro trabalhadores pintam uma parede de área x em 2, 3, 4 e 6 horas, respectivamente. Quanto tempo levaria para que os quatro pintem uma parede de área x ao mesmo tempo?
- (j) Numa confraternização de fim de ano, 10 de 11 empregados da equipe compareceram e dividiram igualmente brigadeiros entre si. Caso o 11º funcionário estivesse presente, cada um receberia um brigadeiro a menos e sobraria um para o chefe como prova de gratidão. Quantos brigadeiros foram divididos na festa?
- (k) O ingresso para a apresentação de um grupo de *stand-up* custa R\$ 20.00, e as cadeiras das três primeiras fileiras do auditório custam o dobro. No primeiro dia do show, a receita de bilheteria foi de R\$ 7200.00; no segundo dia do show, o preço da quarta fileira também dobrou, gerando uma receita de R\$ 7600.00. Assumindo que o auditório ficou cheio nos dois dias e que todas as fileiras possuem o mesmo número de cadeiras, quantas cadeiras há no auditório?

Questão 15. (Imagem & Ação) Para cada uma das situações abaixo, formule um problema de programação linear, especificando a forma funcional da função objetivo e o significado das variáveis de decisão (no mínimo 4) e das restrições (no mínimo 3):

- (a) Maximização do alcance da marca de uma empresa.
- (b) Maximização da felicidade na UnB.
- (c) Maximização da satisfação em uma rota de turismo.
- (d) Minimização das horas de estudo para a obtenção de SS em FPO.
- (e) Minimização de calorias ingeridas em uma semana.
- (f) Minimização do *stress* no relacionamento.
- (g) Otimização de uma carteira de ações.
- (h) Otimização da grade de disciplinas do semestre que vem.



(i) Otimização da atribuição de tarefas num projeto corporativo.

Questão 16. Transforme os seguintes problemas de programação matemática em um problema de programação linear na forma canônica:

(a)

$$\begin{aligned}\text{Minimizar : } & Z = -2x_1 + \frac{3}{4}x_2 - 12x_3 \\ \text{Sujeito a : } & x_1 - 5x_3 + 12 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 = 12 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq -27 \\ \text{Tal que : } & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{Minimizar : } & Z = 2x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a : } & 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + x_2 = 8 \\ \text{Tal que : } & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{Maximizar : } & Z = 3x_1^2 + 5e^{-x_2} \\ \text{Sujeito a : } & x_1^2 + e^{-x_2} \leq 10 \\ & e^{-x_2} \leq 8 \\ \text{Tal que : } & x_1, x_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\text{Maximizar : } & Z = 3\cos^2(x_1) + 5\sin^2(x_2) \\ \text{Sujeito a : } & 9\cos^2(x_1) \leq 8 \\ & 8\cos^2(x_1) + 4\sin^2(x_2) \leq 108 \\ & 3\sin^2(x_2) \leq 6 \\ \text{Tal que : } & x_1, x_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$



(e)

$$\text{Minimizar : } Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a : } x_1 + 3x_2 = 7$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\text{Tal que : } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0$$

Questão 17. (*There's no spoon*) Uma empresa de energéticos utiliza em sua fórmula duas substâncias compradas de laboratórios terceirizados - ativina e baratol - os quais contêm dois dos principais ingredientes ativos da bebida: extrato de guaraná e taurina. A fim de otimizar o custo de produção, a empresa deseja saber quantas doses de cada ingrediente deve incluir em cada lata da bebida, para atingir as quantidades mínimas de 48 gramas por lata de extrato de guaraná e 12 gramas de taurina. Pelos seus severos efeitos colaterais, a vigilância sanitária exige que a quantidade de taurina por lata não deve ultrapassar o limite de 20 gramas. Sabendo que cada dose de ativina custa R\$ 0.06 e contribui com 8 gramas de extrato de guaraná e 1 grama de taurina, enquanto que cada dose de baratol custa R\$ 0.08 contribui com 6 gramas de extrato de guaraná e 2 gramas de taurina, responda aos itens abaixo:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 18. (V de Vuvuzela) A empresa Quinquilharias S/A produz dois tipos de apetrecho: vuvuzelas e máscaras de Guy Fawkes. O processo de montagem para cada um dos objetos requer duas pessoas, os quais levam os seguintes tempos para a montagem:



Objeto	Montador 1	Montador 2
Vuvuzela	6 minutos	2 minutos
Máscara de Guy Fawkes	3 minutos	4 minutos

Os montadores trabalham em regime regular de 8 horas por dia, de modo que não receberão pelo dia de trabalho caso tenham trabalhado menos de 7 horas e meia. Considerando que o mercado está disposto a comprar toda a produção da Bagulhos S/A e que a empresa auferir um lucro de R\$ 2.00 por unidade de vuvuzela e R\$ 1.00 por máscara de Fawkes, responda aos itens abaixo:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Quantas unidades de cada objeto devem ser produzidas por dia? Interprete.
- (c) Quanto tempo deve trabalhar cada montador por dia? Interprete.
- (d) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (e) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 19. (Ao infinito e além) Uma fornecedora de material esportivo produz para-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto que na linha 2 o para-quedas requer 3 horas e a asa-delta, 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa e que o lucro pela venda de cada para-quedas é de R\$ 60.00 e para cada asa-delta é de R\$ 40.00, responda aos itens abaixo:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 20. (O que não mata, engorda) Um gerente de uma empresa de gastronomia e nutrição contrata você para otimizar os custos de produção satisfazendo algumas



exigências nutricionais. A empresa fornece *lasagnas* e *burritos*, os quais custam R\$ 10.00 e R\$ 16.00 cada, respectivamente. Cada *lasagna* fornece uma unidade nutricional (UN) de proteína e 2 UNs de carboidrato, enquanto que cada *burrito* fornece 2 UNs de proteína e 5 UNs de carboidrato. Sabendo que o lanche precisa conter, no mínimo, 40 UNs de proteína e 50 UNs de carboidrato, responda aos itens abaixo:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 21. (Windows Millenium) Uma empresa com somente três empregados os quais fazem dois diferentes tipos de janelas artesanais: Janelas de estrutura com madeira e janelas com estrutura de alumínio. A receita da empresa é de 60 reais por janela de madeira e 30 reais por janela de alumínio. Astrogildo faz apenas janelas de madeira e consegue fazer 6 janelas por dia, Bosgonildo faz janelas de alumínio e consegue fazer 4 janelas por dia. Costrovildo forma e corta o vidro para as janelas e consegue fazer 48 metros quadrados de vidro por dia. Cada janela de madeira necessita de 6 metros quadrados de vidro e cada janela de alumínio necessita de 8 metros quadrados de vidro. A empresa deseja saber quantas janelas de cada tipo deve produzir por dia para maximizar o total recebido.

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Uma empresa concorrente também passou a produzir janelas de madeira, forçando a empresa a reduzir o preço da janela de madeira. Como a solução ótima do PPL formulado muda se o lucro da janela de madeira cai de 60 reais para 40 reais? E se para 20 reais?
- (d) Astrogildo está considerando reduzir suas horas de trabalho, o que acabaria diminuindo a produção de janelas de madeira que ele faz por dia. Como a solução ótima se alteraria caso ele produzisse apenas 5 janelas por dia?
- (e) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.



Questão 22. (Segura essa, concorrência) A empresa Ranimilbus precisa decidir o número de notebooks e de tablets que ela deve produzir em suas fábricas. A pesquisa de *marketing* indicou que, por mês, são vendidos no máximo 40 notebooks e 10 tablets. O número máximo de horas de trabalho disponíveis é de 500 por mês. Um notebook requer 20 horas de trabalho enquanto um tablet requer 10 horas de trabalho. Cada notebook vendido rende um lucro de 120 reais enquanto um tablet vendido rende um lucro de 80 reais. Sabendo que um dono de uma loja de eletrodomésticos, que enfrenta periódicos surtos de loucura, concordou em comprar todos os produtos produzidos pela Ranimilbus se as quantias produzidas não ultrapassarem os valores observados pela pesquisa de *marketing*, responda aos itens abaixo:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 23. (Forever Alone) Um estudante dispõe de duas opções de entretenimento em seu tempo livre: ir ao cinema ou ir ao clube. Esse estudante decide que deve fazer no mínimo 4 novas amizades e atingir no mínimo 20 pontos de diversão mediante essas duas opções de atividade recreativa, gastando o menos possível. Uma sessão de cinema custa R\$ 14.00 e rende ao estudante 1 amizade nova e 7 pontos de diversão, enquanto que um dia no clube custa R\$ 20.00, lhe rendendo 2 amizades novas e 6 pontos de diversão. Com base nessas informações, responda aos seguintes itens:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 24. (Ocupa e resiste) Uma oficina de artesanato fabrica bijuterias com sucatas e oferece dois produtos: pulseiras por R\$ 50.00 a unidade e colares por R\$ 75.00 a unidade. Cada pulseira exige quatro tampas de garrafa, quatro bitucas de



cigarro e oito caroços de azeitona; enquanto que cada colar exige oito bitucas de cigarro e vinte caroços de azeitona. A oficina dispõe de doze tampas de garrafa, vinte bitucas de cigarro e cinquenta caroços de azeitona para a montagem das bijuterias. Considerando que há demanda por toda a “produção” dessa oficina, responda aos seguintes itens:

- (a) Formule o problema de programação linear.
- (b) Resolva pelo método gráfico e interprete os resultados.
- (c) Qual(is) restrição(ões) limita(m) o problema? Calcule os preços-sombra associados a cada restrição e interprete os resultados.
- (d) Caso a solução ótima contenha valores não-inteiros, resolva o problema novamente como um problema de programação inteira.

Questão 25. Transforme os seguintes problemas de programação linear para a forma padrão:

(a)

$$\begin{aligned}\text{Maximizar :} \quad & Z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a :} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ \text{Tal que :} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{Minimizar :} \quad & Z = -2x_1 + \frac{3}{4}x_2 - 12x_3 \\ \text{Sujeito a :} \quad & x_1 - 5x_3 + 12 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 = 12 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq -27 \\ \text{Tal que :} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$



(c)

$$\text{Maximizar : } Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a : } x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\text{Tal que : } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0$$

(d)

$$\text{Minimizar : } Z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{Sujeito a : } -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 4$$

$$\text{Tal que : } x_1, x_2 \geq 0$$

(e)

$$\text{Minimizar : } Z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{Sujeito a : } 4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

$$\text{Tal que : } x_1, x_2 \geq 0$$

Questão 26. (Aspirina sabor Bacon) Suponha que um nutricionista aconselha o consumo diário de pelo menos 40 unidades de vitamina A e 50 unidades de vitamina B, receitando assim dois alimentos: arnica - o qual possui 2 unidades de vitamina A e 3 unidades de vitamina B; e copaíba - que possui 4 unidades de vitamina A e 2 unidades de vitamina B. Cada unidade de arnica custa R\$ 3.00 e cada unidade de copaíba custa R\$ 2.50.

(a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.

(b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo



reduzido).

- (c) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (d) Formule o problema dual

Questão 27. (Que bonita a sua roupa) Uma empresa de artigos de couro fabrica dois tipos de produtos: malas e mochila. As malas são vendidas com um lucro de R\$ 50.00 por unidade e o lucro unitário por mochila é igual a R\$ 40.00. As quantidades de horas necessárias para confeccionar cada produto, assim como o número total de horas disponíveis em cada departamento são apresentados na tabela a seguir:

Departamento	Capacidade (horas por dia)	Horas (Mala)	Horas (Mochila)
Corte	300	2	0
Tingimento	540	0	3
Costura	440	2	2
Embalagem	300	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$

- (a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.
- (b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (c) Sabendo que atualmente a empresa produz diariamente 120 unidades de malas e 30 unidades de mochilas, em quanto o planejamento ótimo aumenta o lucro em relação ao existente?
- (d) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (e) Formule o problema dual

Questão 28. (Willy Wonka da depressão) Uma fábrica produz canhões e manteiga em três máquinas X, Y e Z. A fabricação de manteiga requer 10 horas na máquina X, 5 horas na máquina Y e 1 hora na máquina Z. A exigência da fabricação de canhões é de 6 horas, 10 horas e 2 horas nas máquinas X, Y e Z, respectivamente. As contribuições para o lucro da manteiga e do canhão são R\$ 23.00 por unidade e R\$ 32.00 por unidade, respectivamente. No planejamento do próximo período, a capacidade disponível das máquinas X, Y e Z são 2500 horas, 2000 horas e 500 horas, respectivamente.



- (a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.
- (b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (c) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (d) Formule o problema dual

Questão 29. (Gênio do trabalho duro) Um estudante de FPO pretende tirar SS com o mínimo esforço possível, e pretende encontrar uma estratégia ótima entre refazer os exercícios de sala e resolver os exercícios indicados nas referências bibliográficas. Esse estudante decidiu que irá se dedicar não mais que 2.7 horas para os estudos nessa disciplina, e avalia que cada exercício de sala exige 4 “unidades de esforço”, enquanto que cada exercício dos livros exige 5 “unidades de esforço”. A resolução de cada exercício de sala exige 0.3 hora, as folhas de 0.5 caderno e a tinta de 0.6 caneta, enquanto que a resolução de cada exercício de livro exige 0.1 hora, as folhas de 0.5 caderno e a tinta de 0.4 caneta. Sabendo que o estudante está disposto a comprar no mínimo 6 canetas e exatamente 6 cadernos:

- (a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.
- (b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (c) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (d) Formule o problema dual

Questão 30. (*La garantia soy yo*) Uma empresa deseja investir em bens de capital para incrementar a sua produtividade, podendo escolher entre fabricantes de maquinário de três países distintos: EUA, China e Alemanha. A máquina norte-americana exige a supervisão de 1 engenheiro e consome 2 kWh de energia por segundo; a máquina chinesa também exige apenas 1 engenheiro como supervisor, mas consome 3 kWh de energia por segundo; por fim, a máquina alemã exige 2 engenheiros supervisores e consome 12 kWh de energia por segundo. A empresa compradora conta com uma equipe fixa de 12 engenheiros, de modo que todos devem ser alocados para supervisionar alguma máquina (ou seja, nenhum engenheiro pode ficar ocioso, tampouco a empresa pode contratar novos engenheiros); ademais, o limite máximo de consumo de energia é de



48 kWh por segundo. Sabendo que a máquina norte-americana gera 3 unidades de produtividade a mais, a máquina chinesa gera 2 unidades de produtividade **a menos**, e a máquina alemã gera 6 unidades de produtividade a mais.

- (a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.
- (b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (c) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (d) Formule o problema dual

Questão 31. (A revolução não será televisionada) As alternativas de publicidade para uma empresa incluem, televisão, rádio e propagandas em jornal. Os custos associados a cada opção e as estimativas para a cobertura de audiência são apresentadas a seguir:

	Televisão	Jornal	Rádio
Custo unitário por propaganda	R\$ 2000.00	R\$ 600.00	R\$ 300.00
Ganho em audiência	100000	40000	18000

O jornal local limita o número de anúncios semanais de uma única empresa em dez. Por outro lado, a fim de equilibrar a publicidade entre os três tipos de mídias, nada mais do que a metade do número total de anúncios deve ocorrer no rádio, e pelo menos 10% deve ocorrer na televisão. O orçamento de publicidade semanal é de R\$ 18200.00.

- (a) Formule o problema de programação linear e coloque-o na forma padrão.
- (b) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (c) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (d) Formule o problema dual

Questão 32. (Todos os caminhos levam a Roma) Considere o seguinte problema



de programação linear:

$$\text{Minimizar : } Z = 2x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

$$\text{Sujeito a : } x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$\text{Tal que : } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a) Resolva pelo método Simplex e interprete os resultados (solução ótima e custo reduzido).
- (b) Faça a análise de sensibilidade. Quais são os preços-sombra associados a cada restrição? Quais restrições apresentam folga?
- (c) Resolva o problema dual pelo método Simplex e compare o resultado com os itens anteriores

Questão 33. (Pronto-socorro) O administrador chefe de um hospital local precisa determinar um horário para auxiliares de enfermagem. Durante o dia, varia a necessidade de auxiliares de enfermagem trabalhando. Por conveniência, o administrador dividiu o dia em 12 períodos de duas horas.

O período mais calmo do dia ocorre de 0:00h (meia-noite) às 6:00h, que começa à meia-noite e requer um mínimo de 40, 30 e 40 auxiliares, respectivamente. A demanda para auxiliares de enfermagem aumenta continuamente durante os próximos quatro períodos do dia, começando com o período de 6:00 às 8:00h, um mínimo de 60, 60, 70, e 80 auxiliares para estes quatro períodos, respectivamente. Depois de 14:00h a demanda por auxiliares diminui até o anoitecer. Para os cinco períodos de duas horas que começam às 14:00h e terminam à meia-noite, são requeridos 80, 70, 70, 60, e 50 auxiliares, respectivamente. Cada auxiliar de enfermagem se apresenta ao serviço no começo de um dos períodos relatados e trabalha oito horas sucessivas (o que é requerido no contrato das auxiliares).

As auxiliares de enfermagem têm um salário padronizado, mas quando trabalham à noite (entre as 22:00h e 06:00h) ganham adicionais noturnos. Cada duas horas trabalhadas à noite acrescentam ao salário-base 25%. Ou seja, uma auxiliar de enfermagem que começa a trabalhar às 16h trabalha até meia-noite e ganha 25% a mais do seu salário e uma outra que começa a trabalhar às 22h tem 100% a mais de salário.

Para evitar que o salário chegasse a dobrar, o administrador-chefe determinou que



nenhuma auxiliar começasse exatamente às 22h. o administrador quer determinar um quadro de horário para as auxiliares de enfermagem que satisfaça às exigências mínimas do hospital ao longo do dia, minimizando a folha de pagamento do hospital. Assumindo isonomia de salários, formule o problema de programação inteira.

Questão 34. (Roupa suja se lava em casa) Uma empresa de *buffets* foi contratada pela organização de um congresso científico, para prover uma certa quantidade de guardanapos por dia durante os sete dias do congresso. Todos os guardanapos utilizados durante o congresso devem possuir o símbolo do evento, forçando a empresa a comprar guardanapos novos pelo preço unitário de R\$ 1.20. A demanda diária de guardanapos é dada pela tabela abaixo:

Dia	Demanda
1	2400
2	1200
3	1400
4	2000
5	1800
6	1400
7	2200

O gerente operacional da empresa conhece uma lavanderia que oferece o serviço de lavar guardanapos em duas modalidade: O serviço tradicional recolhe os guardanapos ao final de um dia e o retorna após três dias a tempo de ser utilizado no congresso, cobrando para isso R\$ 0.30 por guardanapo lavado; por outro lado, o serviço *turbo* cobra R\$ 0.60 por guardanapo lavado, recolhendo-os ao final do dia e entregando-os já no início do próximo dia. Com base nessas informações, formule o problema de programação inteira.

Questão 35. (Cadeia de valor global) Uma franquia internacional fabricante de muambas possui três centros de fabricação localizados em Taiwan, em Vietnã e nas Filipinas. A produção deve ser entregue para três localidades distintas: Paraguai, Bolívia e Burkina Faso. Considerando os custos de transporte unitários, a capacidade de produção das fábricas e a demanda dos centros consumidores ilustrados na tabela abaixo, formule o problema de programação matemática de modo a minimizar os custos de transporte.



Fábrica/Destino	Paraguai	Bolívia	Burkina Faso	Capacidade
Taiwan	25	20	30	2000
Vietnã	30	25	25	3000
Filipinas	20	15	23	1500
Demanda	2000	2000	1000	—

Questão 36. (Funcionário do mês) Uma empresa pretende promover alguns de seus funcionários a diretores, fundamentando sua escolha visando maximizar a produtividade de cada funcionário no cargo atribuído. Há oito vagas em aberto em quatro departamentos distintos, quais sejam:

- I. Departamento de estratégia, inovação, *marketing*, competitividade, “arte da guerra”, excelência, credibilidade, eficiência, eficácia, ESG, *Analytics 5.0*, proatividade sinérgica e pensamentos fora da caixa: 3 vagas;
- II. Super-Departamento de ergonomia, liderança e motivação: 1 vaga;
- III. Departamento de integr(ação) social: 2 vagas;
- IV. Departamento de finanças e orçamento: 2 vagas.

As informações pessoais dos candidatos e seus respectivos índices de produtividade em cada atividade seguem como abaixo (por exemplo, Bederatzi teria 13 de produtividade no departamento de integr(ação) social):

Funcionário	Formação	Tempo na empresa	Produtividade no departamento			
			I	II	III	IV
Wahid	Administração	16 meses	25	13	4	5
Shnayim	Economia	18 meses	11	5	−8	13
Mbohapy	Administração	6 meses	15	8	9	−6
Ceithir	Contabilidade	4 meses	6	6	14	1
Ammst	Economia	10 meses	3	−2	3	8
Gjashtë	Estatística	12 meses	2	−10	5	9
Dolughan	Contabilidade	14 meses	9	7	7	3
Isishiyagalombili	Relações Internacionais	8 meses	4	−5	−9	12
Bederatzi	Administração	7 meses	8	17	13	5
Kymmenen	Estatística	6 meses	5	3	4	7

Para a atribuição das tarefas, algumas ressalvas precisam ser levadas em consideração:

- O super-departamento de ergonomia, liderança e motivação só aceita administradores;



- O departamento de estratégia, inovação, *marketing*, competitividade, “arte da guerra”, excelência, credibilidade, eficiência, eficácia, ESG, *Analytics 5.0*, proatividade sinérgica e pensamentos fora da caixa pode receber no máximo um contador, e exige que todos os diretores tenham pelo menos 12 meses de tempo na empresa;
- Wahid e Shnayim são desafetos, e não podem ser alocados no mesmo departamento;
- O departamento de finanças e orçamento exige pelo menos um economista;
- Se um profissional de relações internacionais for alocado no departamento de integr(ação) social, então um estatístico também deverá ser alocado lá.

A partir das informações fornecidas, formule o problema de programação matemática que otimiza a alocação dos funcionários da empresa e encontre sua solução ótima com o auxílio computacional.