Discrete Fourier Transform

Programming Assignment 4

Vítor Hugo Magnus Oliveira - 00341650

1.

(1) only the real components

(2) only the imaginary components

A DFT de uma imagem com valores reais tem uma propriedade chamada simetria Hermitiana. Isso significa que o conjugado complexo da DFT em uma certa frequência é igual à DFT no negativo dessa frequência. Ao reconstruir uma imagem usando apenas os componentes reais ou apenas os componentes imaginários da DFT, essa simetria leva a cópias espelhadas. A simetria faz com que partes da imagem sejam espelhadas ao redor do centro. Se somarmos as imagens (1) e (2), cancelamos a cópia espelhada e temos como resultado a imagem original do cameraman.

A escuridão na imagem reconstruída usando apenas os componentes imaginários pode ser atribuída à magnitude tipicamente menor e à diferente distribuição de energia nos componentes imaginários em comparação aos componentes reais.

2.

(a)

(b)

(c)

(d) As imagens são idênticas. A implementação da DFT e IDFT foi feita utilizando multiplicação de matrizes em numpy. Desse modo, é possível realizar a operação rapidamente e até mesmo usar a imagem do cameraman em seu tamanho original.

A multiplicação de matrizes é possível devido à propriedade de separabilidade da DFT. Essa propriedade permite que a DFT 2D seja calculada como duas DFTs 1D: primeiro ao longo das colunas (direção Y) e depois ao longo das linhas (direção X). Desse modo a DFT 2D não é calculada diretamente, que exigiria um somatório duplo.

No primeiro passo, a imagem é multiplicada pela matriz de exponenciais complexos que representa a transformação ao longo da direção Y. Essa matriz de tamanho N×N codifica as frequências ao longo das colunas, assim cada coluna da imagem do domínio espacial é transferida para o domínio da frequência. Depois, o resultado é multiplicado por outra matriz de exponenciais complexos, de tamanho M×M, que aplica a transformação ao longo da direção X, convertendo as linhas para o domínio da frequência.

Essa mesma lógica funciona para a IDFT.

DFT:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} = \sum_{x=0}^{M-1} \boxed{(\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-2\pi i\frac{vy}{N}})} \cdot e^{-2\pi i\frac{ux}{M}}$$

IDFT:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1} \boxed{(\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{-2\pi i\frac{vy}{N}})} \cdot e^{-2\pi i\frac{ux}{M}}$$

3.

(a) (b)

(c) Obtemos o mesmo resultado. Isso pois o termo DC acumula as intensidades de todos os pixels da imagem, ou seja, o seu valor é a intensidade de todos os pixels multiplicado pelo número de pixels. Se subtrairmos a média da intensidade das imagens de todos os pixels, o valor acumulado no DC será 0 se realizarmos a operação de DFT. Logo, podemos afirmar que as operações realizadas em (a) e (b) são equivalentes.

4.

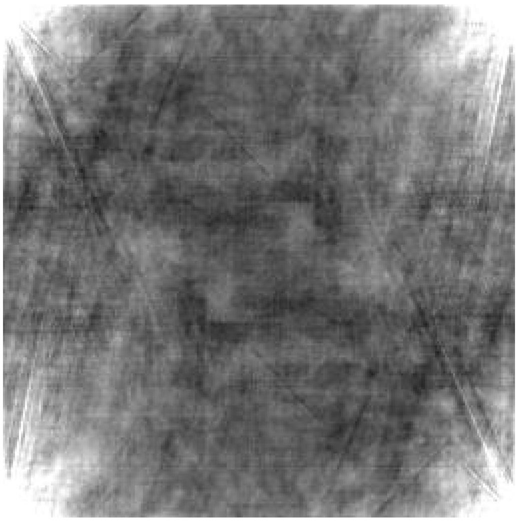
(a)

(b)

As imagens (a) e (b) são iguais: A imagem do cameraman em que metade dos pixels são pretos, que juntos formam um tabuleiro de xadrez. Os resultados são iguais porque aplicar o comando fftshift ao espectro de uma imagem desloca o componente de frequência zero para o centro do espectro, o que é matematicamente equivalente a multiplicar a imagem no domínio espacial por $(-1)^{(x+y)}$. Essa multiplicação desloca a origem da imagem no domínio espacial, resultando na mesma transformação no domínio da frequência que o fftshift.

(c) O domínio frequência será totalmente alterado, já que estamos calculando a transformação de fourier de uma imagem em que os pixels estão organizados de uma forma diferente. Imagem com fftshift:

5.



(a)

(b)

A imagem (b), reconstruída pela informação do espectro de fase, dá muito mais informação da forma da imagem original do que o resultado obtido em (a). Isso se deve pois o espectro de fase armazena a direção dos vetores no plano complexo, mas não a magnitude dele. Essa informação é crucial para recuperarmos a forma da imagem. Entretanto, o espectro de amplitude possui somente as magnitudes dos vetores, o que não garante uma reconstrução das arestas.