



Árvore Vermelho-Preto

Prof. Jose J. Camata

Prof. Marcelo Caniato

Profa. Bárbara Quintela

camata@ice.ufjf.br

marcelo.caniato@ice.ufjf.br

barbara@ice.ufjf.br

Tópicos

1. Introdução
2. Propriedades
3. Inserção
4. Exemplos

Introdução

- Também chamada de árvore rubro-negra
- É uma árvore balanceada, mas menos balanceada que a AVL
 - Melhor que a AVL em inserções e remoções
- É uma representação binária para um tipo de árvore conhecida como 2-3-4, criada por Rudolf Bayer em 1972
- Usada na estrutura de dados `map` da STL
- Muito usada em aplicações de tempo real

Introdução

- A estrutura do nó possui um novo bit de informação, que designa a cor (**vermelho** ou **preto**) do nó

ESTRUTURA DO NÓ

NoVP

- info // valor armazenado
- esq // filho esquerdo
- dir // filho direito
- pai // ponteiro p/ o pai
- cor // cor do nó

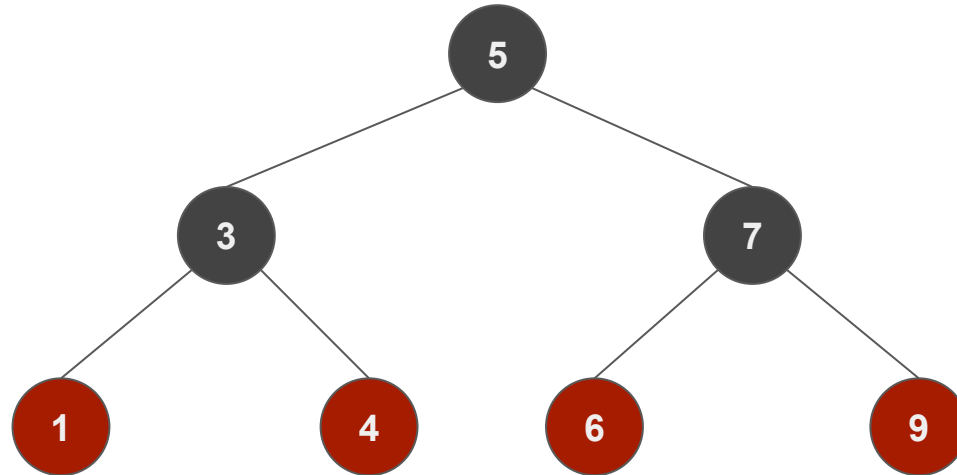
Propriedades

- A árvore vermelho-preto é uma árvore binária de busca que deve atender, necessariamente, aos critérios abaixo

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (**altura negra**)

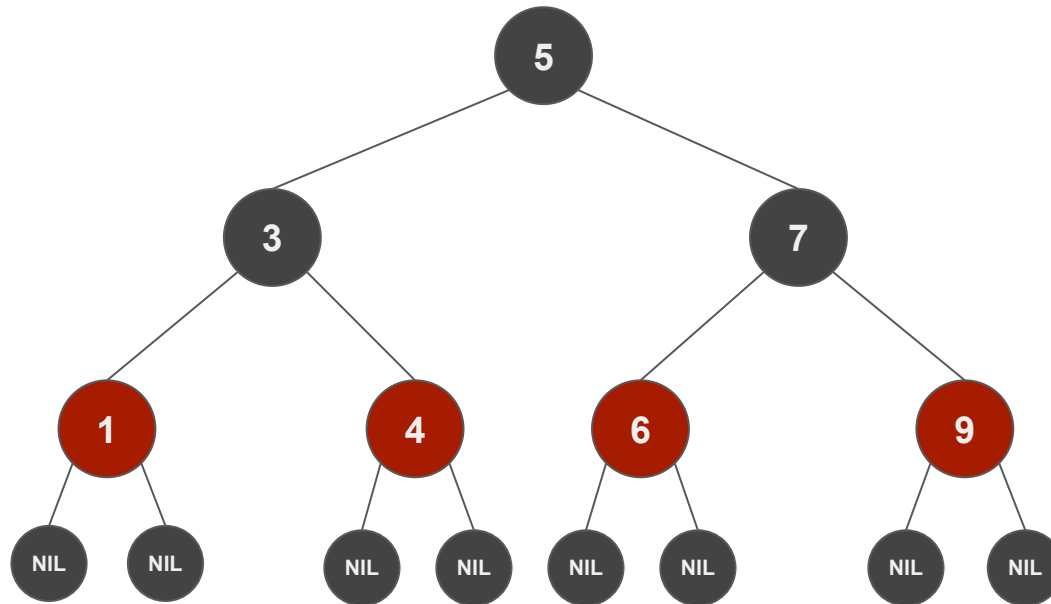
Formas de representação

- Com o NIL oculto



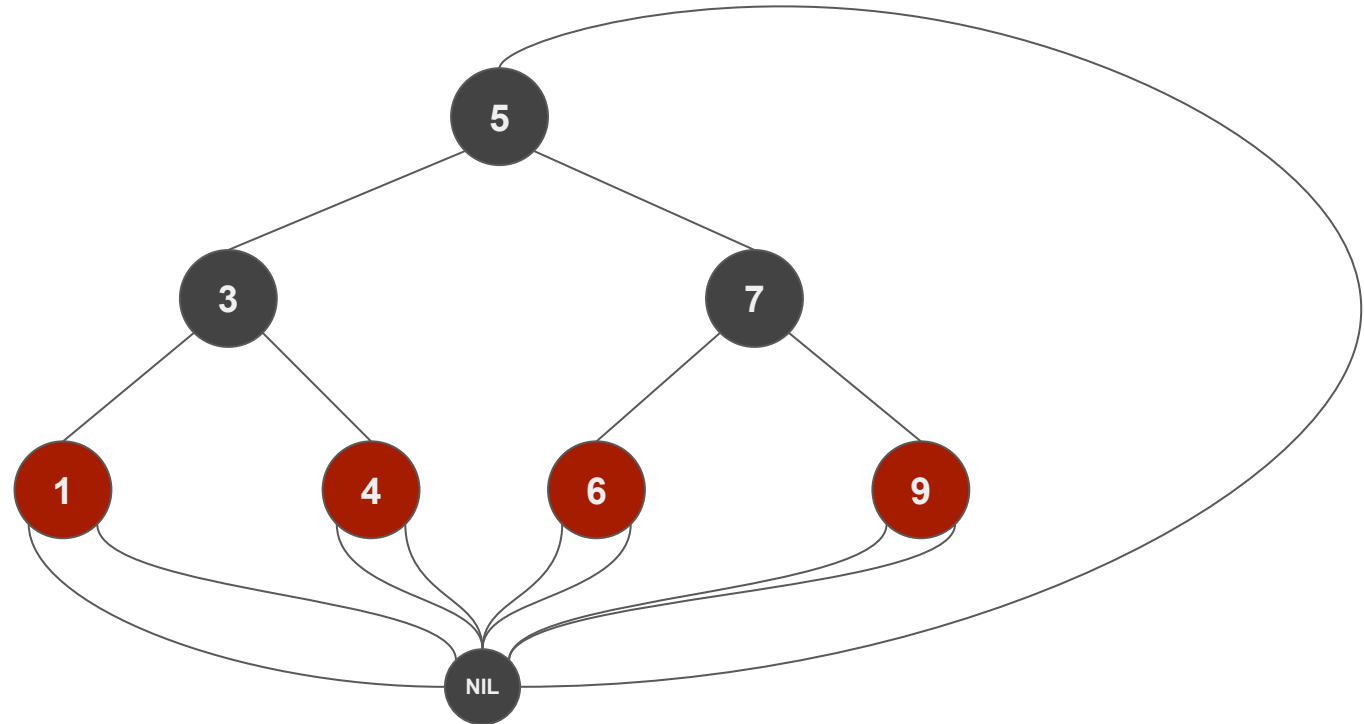
Formas de representação

- Com o NIL explícito



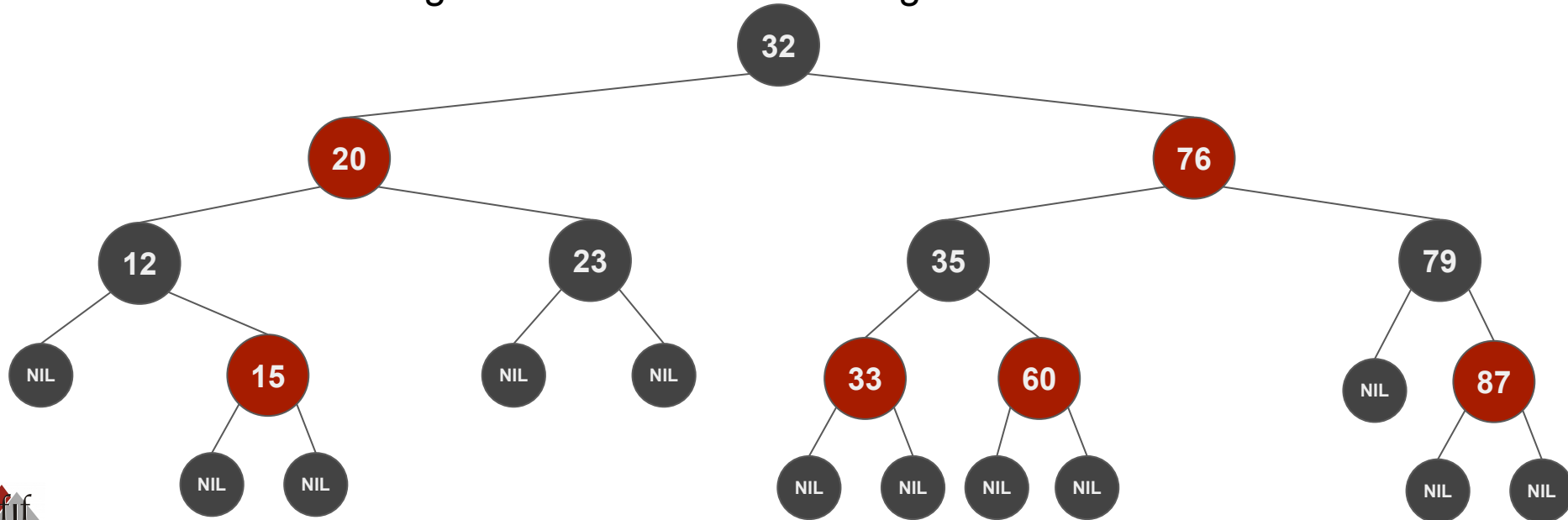
Formas de representação

- Com um nó sentinela



Altura negra

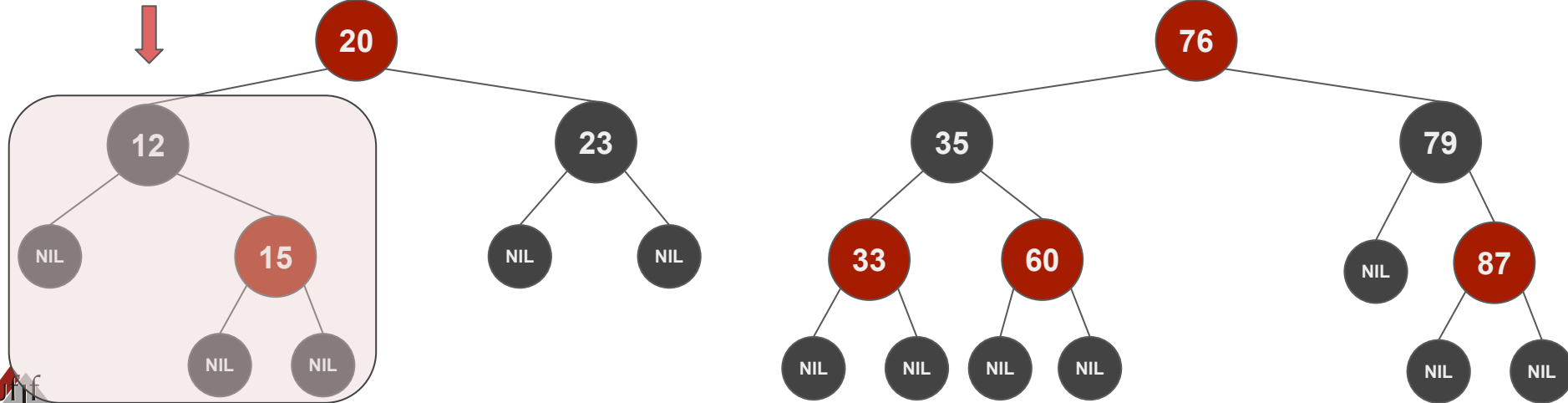
- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz



Altura negra

- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz

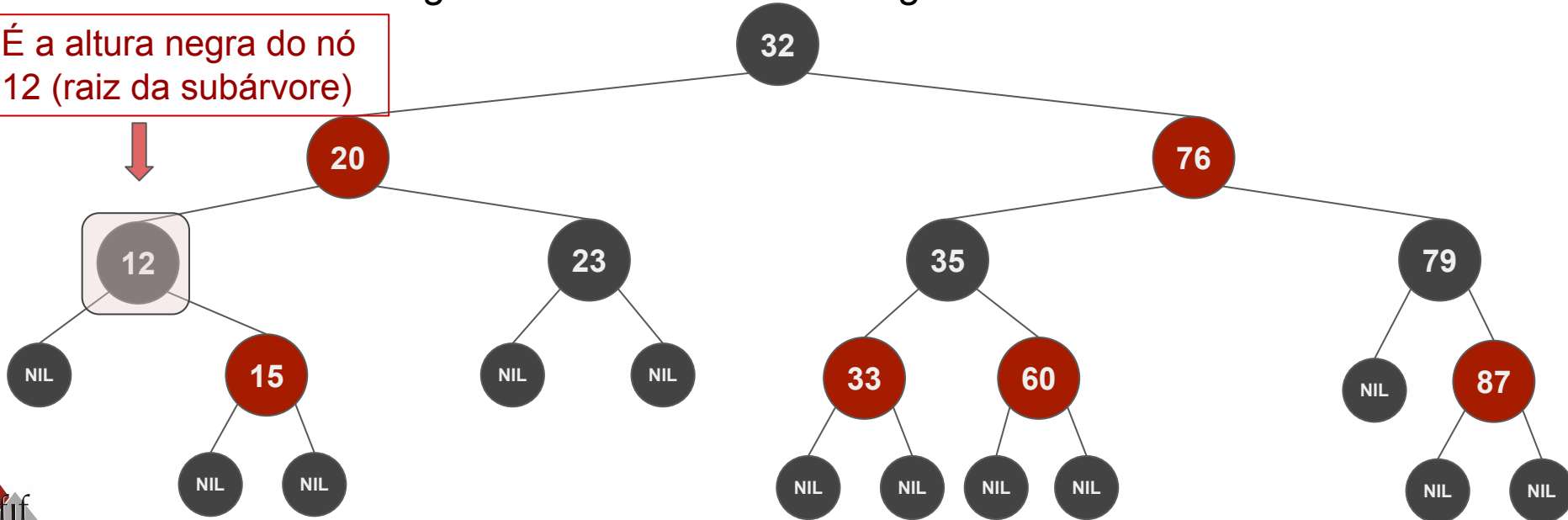
Qual é a altura negra desta subárvore?



Altura negra

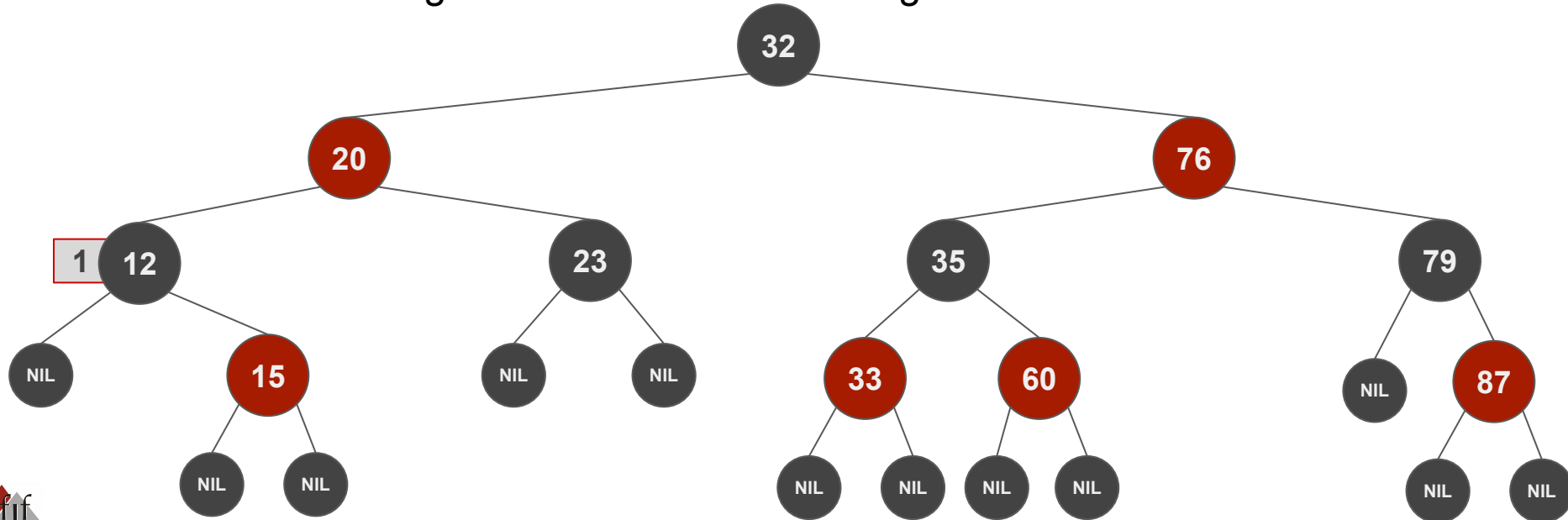
- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz

É a altura negra do nó 12 (raiz da subárvore)



Altura negra

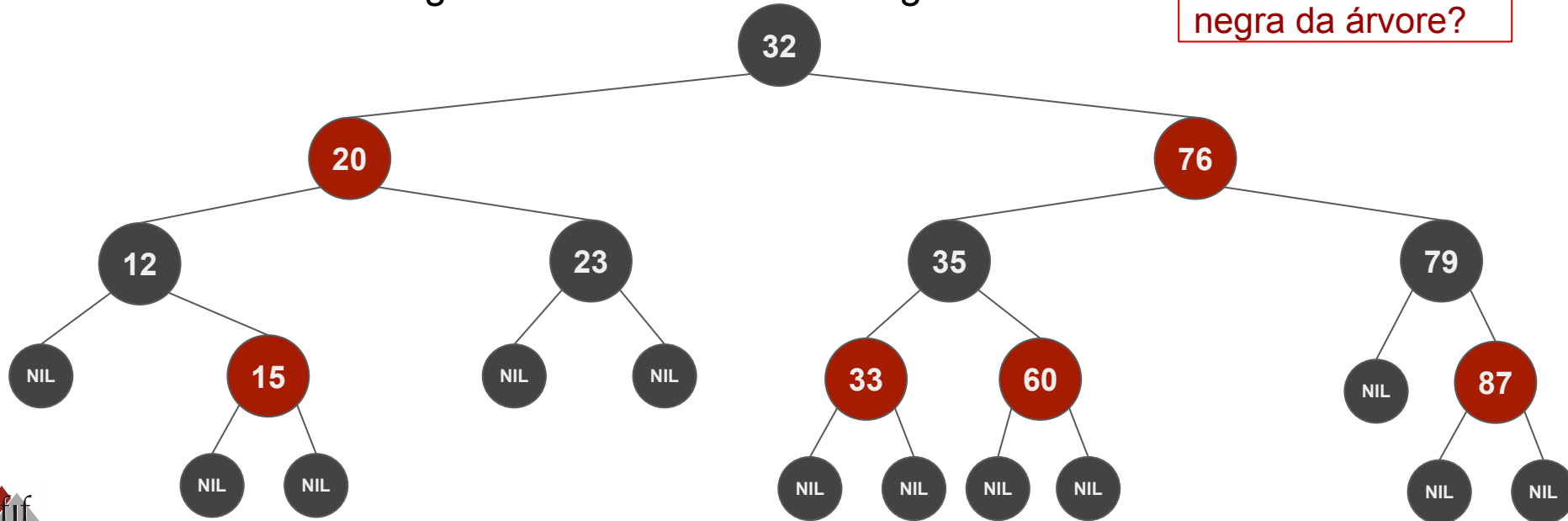
- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz



Altura negra

- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz

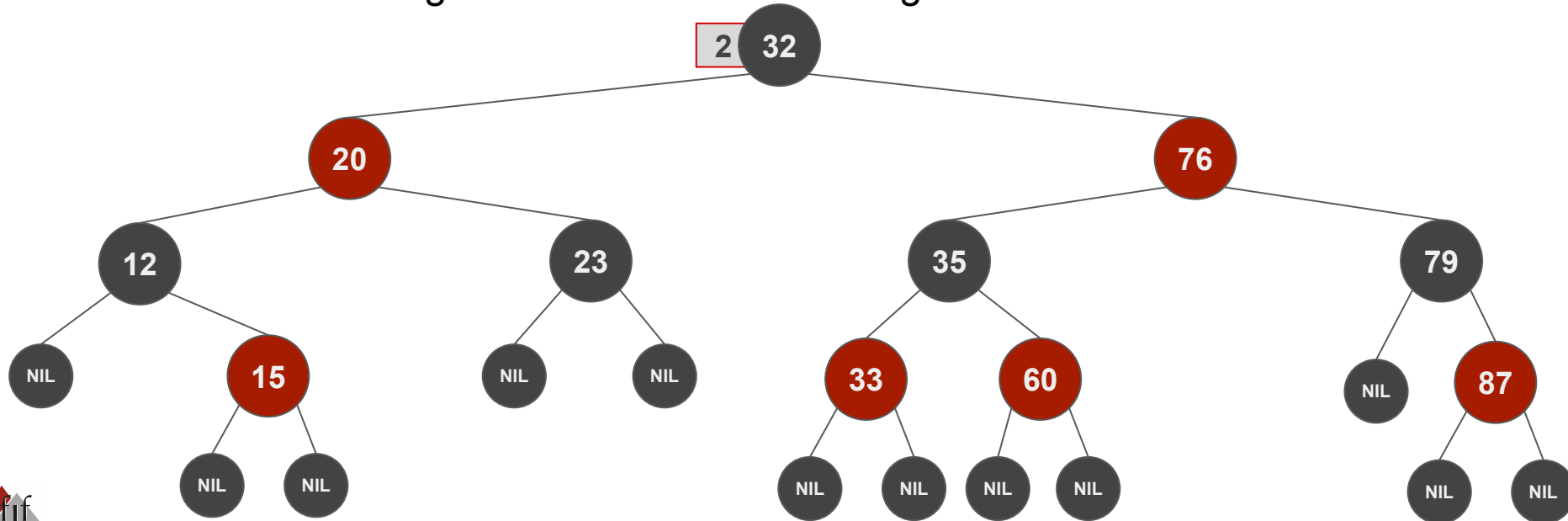
Qual é a altura negra da árvore?



Altura negra

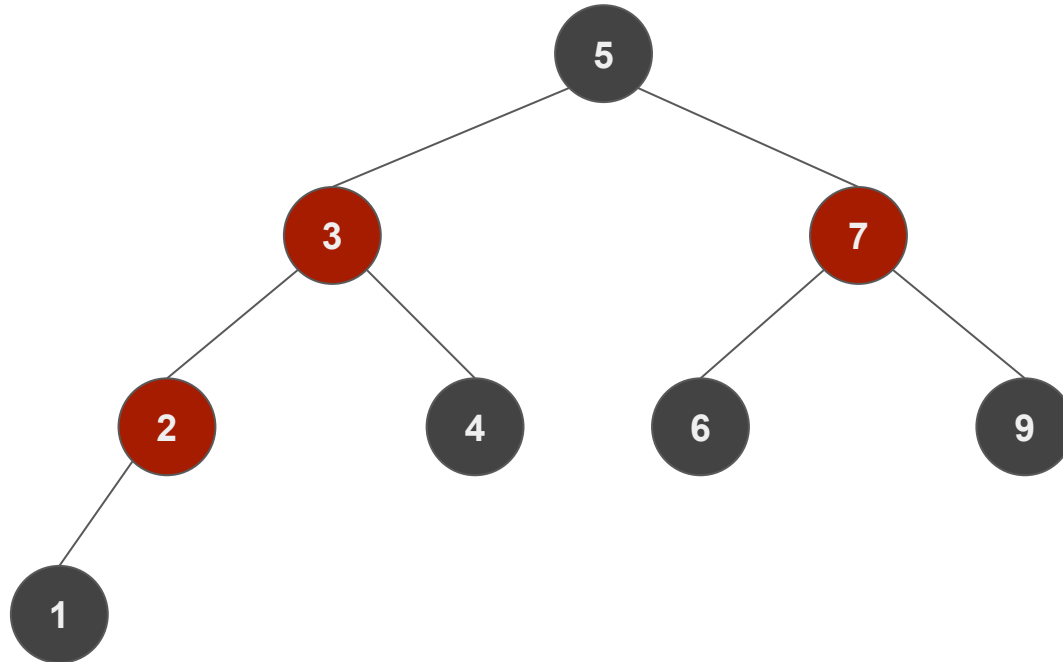
Note que **qualquer** caminho partindo da raiz até alguma folha tem exatamente 2 nós pretos

- Número de nós pretos em qualquer caminho de um nó x até uma folha, excluindo o nó x
 - A altura negra da árvore é a altura negra da raiz



Exemplos

- A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

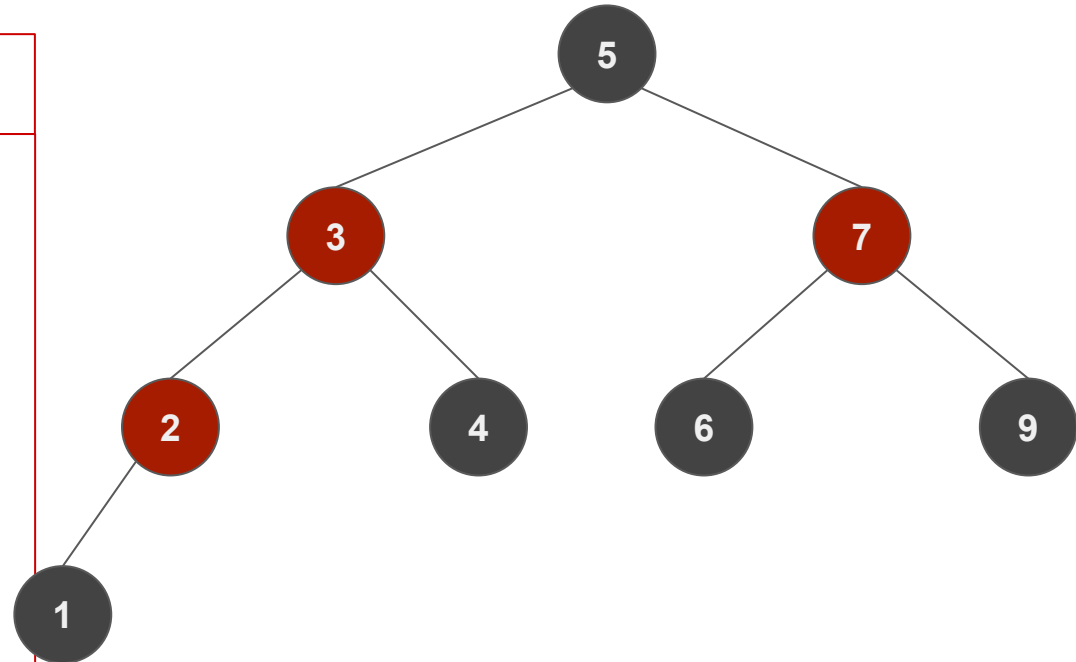


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (**altura negra**)

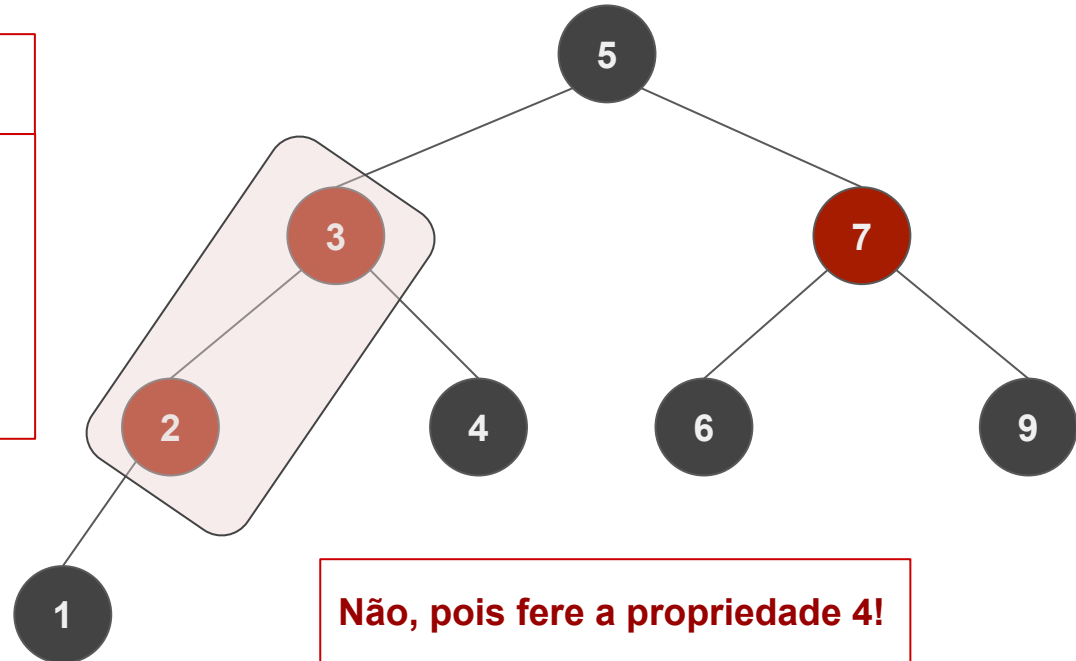


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (altura negra)



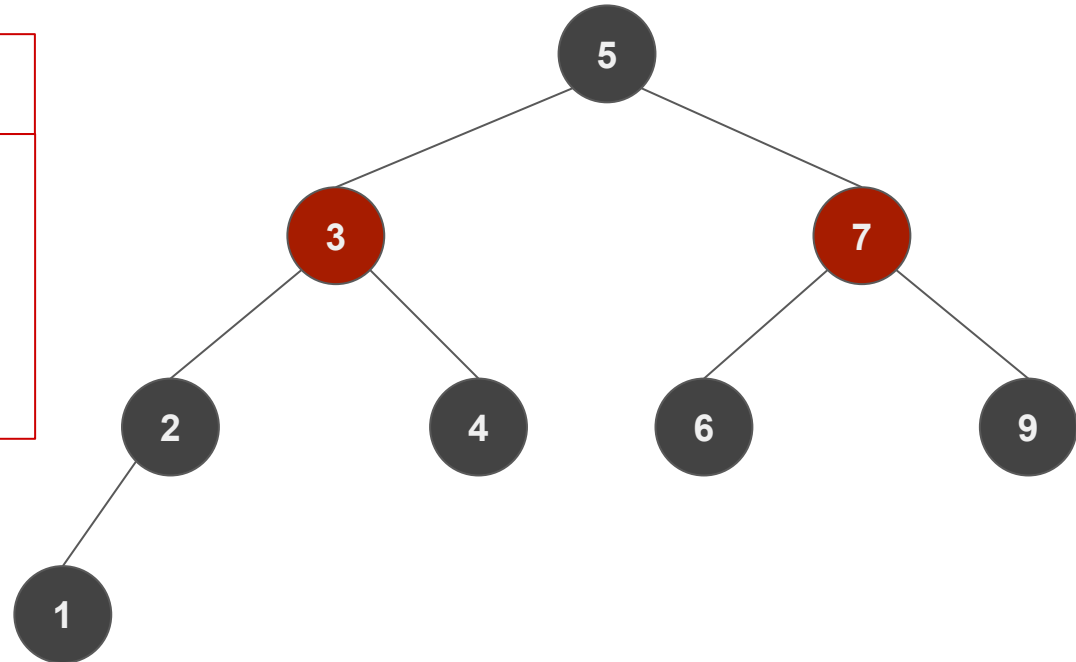
Não, pois fere a propriedade 4!

Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (*altura negra*)

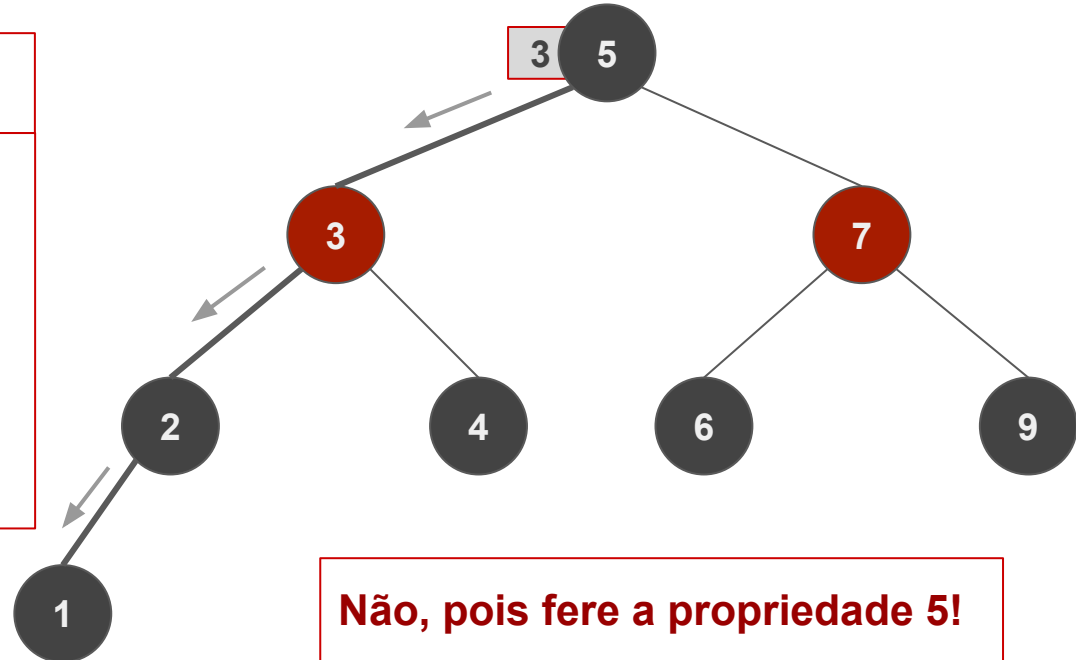


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. **Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós pretos (altura negra)**



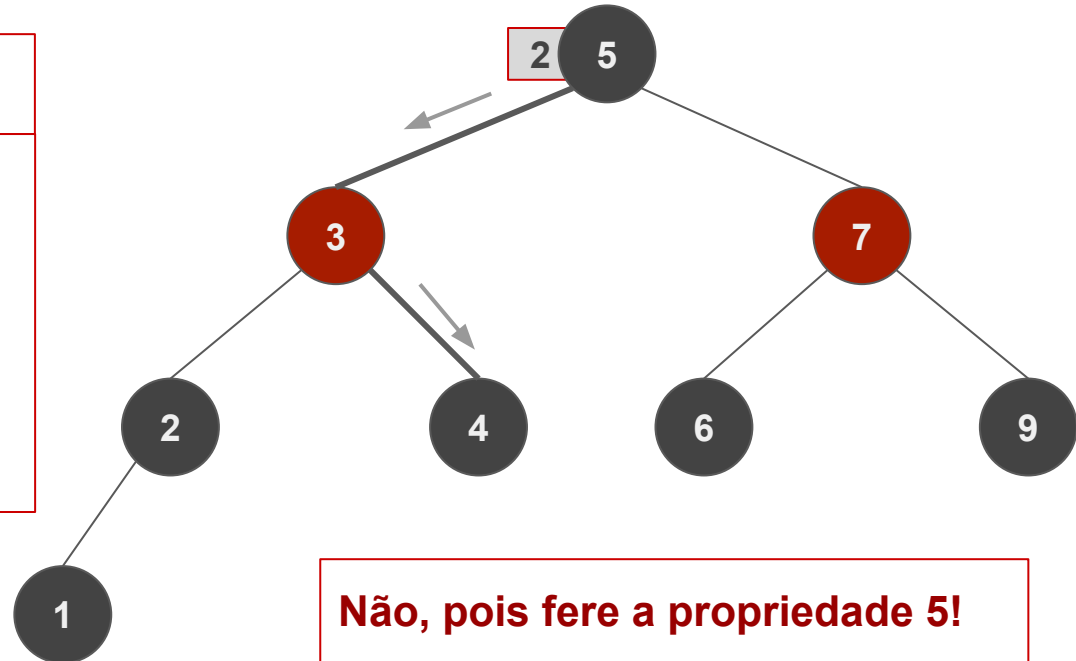
Não, pois fere a propriedade 5!

Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. **Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós pretos (altura negra)**

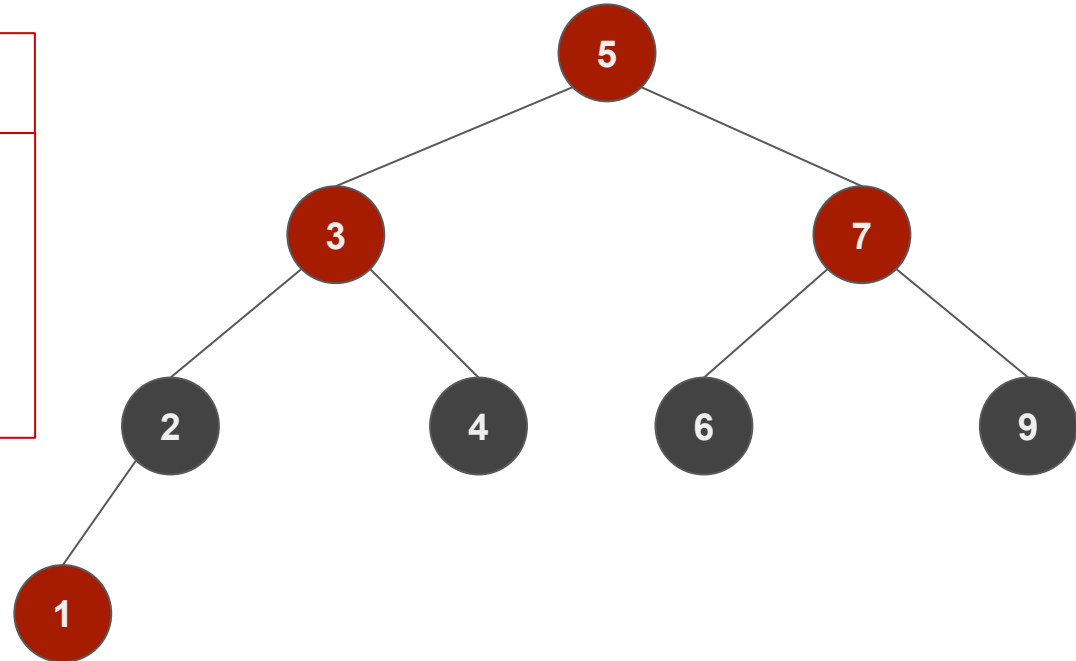


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (*altura negra*)

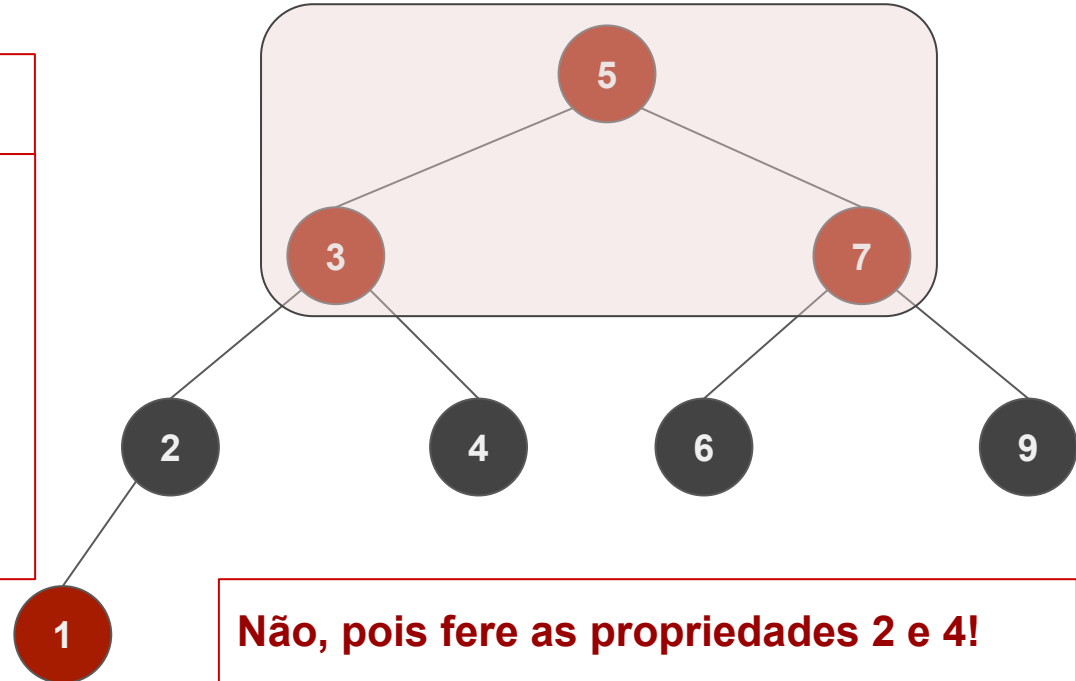


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (altura negra)



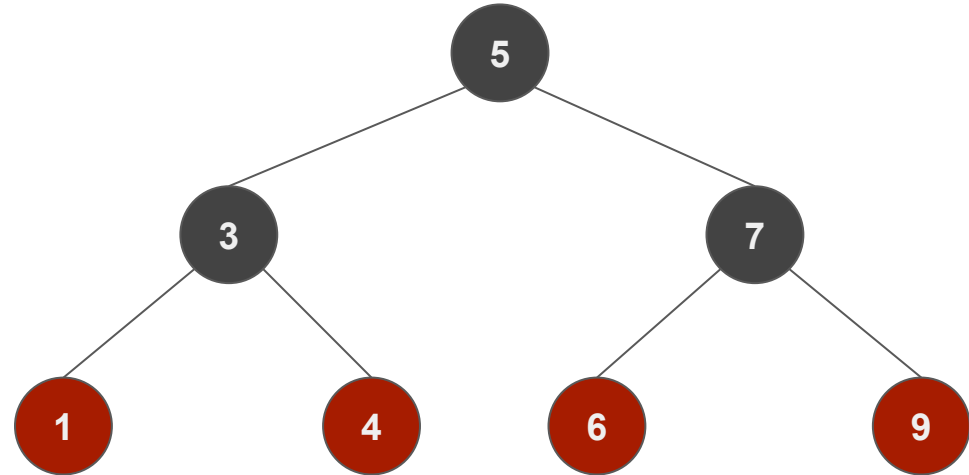
Não, pois fere as propriedades 2 e 4!

Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (*altura negra*)

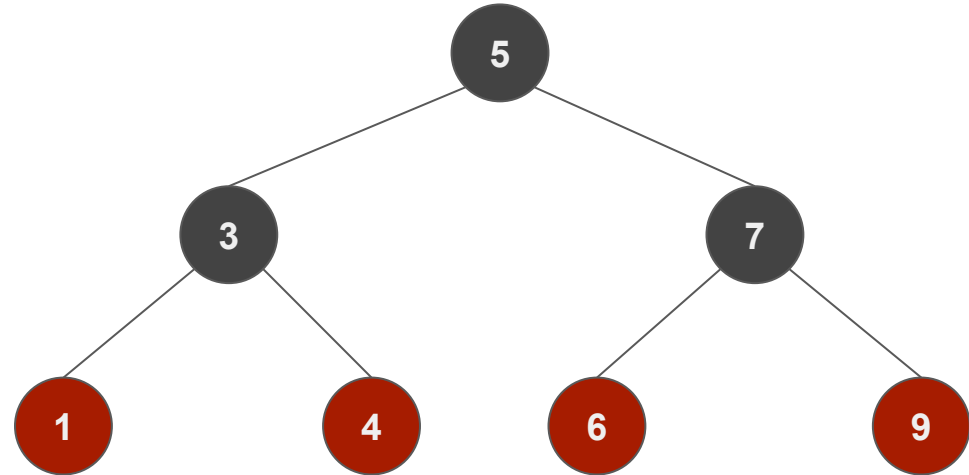


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (**altura negra**)



Sim! Note que os nós NIL estão ocultos, portanto a propriedade 3 não está sendo infringida.

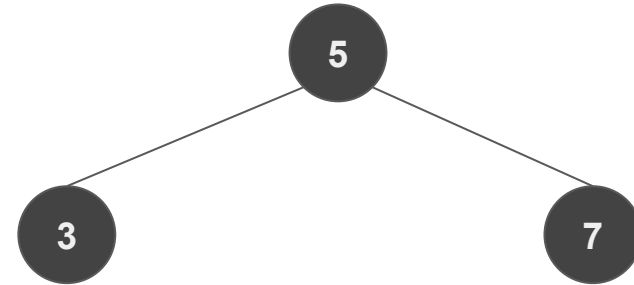


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (**altura negra**)

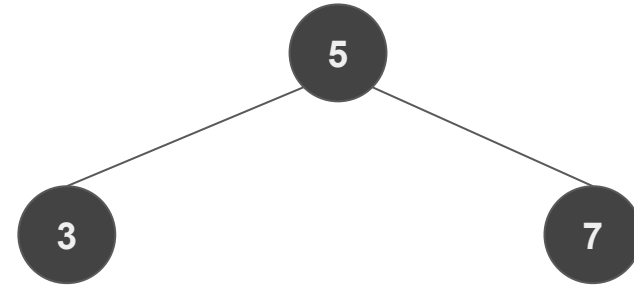


Exemplos

➤ A árvore a seguir é uma árvore vermelho-preto?

PROPRIEDADES

1. Cada nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. Cada folha (NIL) é **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus filhos são **pretos**
5. Todo caminho até as folhas possui o mesmo número de nós **pretos** (**altura negra**)



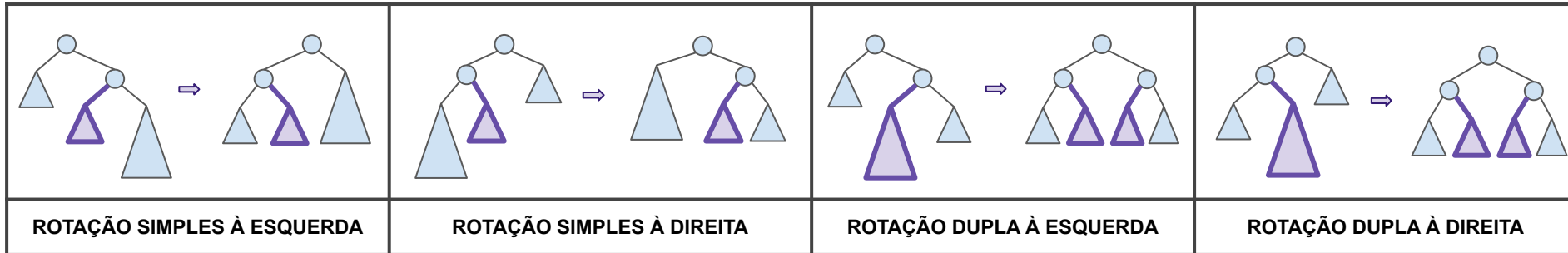
Sim! Apesar de não haver nó vermelho nesta árvore, isso não infringe a propriedade 1.

Inserção

- A inserção segue o mesmo procedimento da árvore binária de busca
 - Inserção como folha no local onde deveria se encontrar o nó
 - O nó é marcado como vermelho
- Pode ocorrer quebra de alguma propriedade da árvore
 - Na prática, apenas as propriedades 2 e 4 podem ser feridas
 - Propriedade 1: todo nó continuará sendo vermelho ou preto
 - Propriedade 3: a cor da folha (NIL) não tem como ser alterada
 - Estas duas propriedades estão atreladas à estrutura básica da árvore
 - Propriedade 5: como o nó inserido é marcado como vermelho, a altura negra não se altera
 - O rebalanceamento também é feito de modo a garantir a propriedade

Inserção

- A quebra de alguma das propriedades pode levar a duas possibilidades para o balanceamento
 - Troca de cores
 - Rotação
 - As mesmas da árvore AVL



Inserção

➤ Caso 1

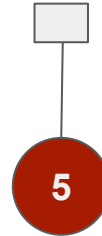
- Árvore vazia

- Nó é raiz, portanto deve ser preto (Propriedade 2)

 Ponteiro para a raiz



**ANTES DA
INSERÇÃO**



**APÓS A
INSERÇÃO**



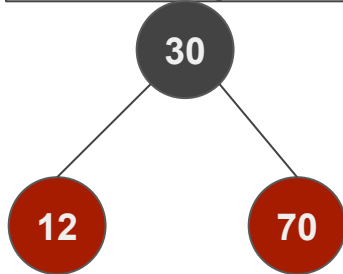
**APÓS O
BALANCEAMENTO**



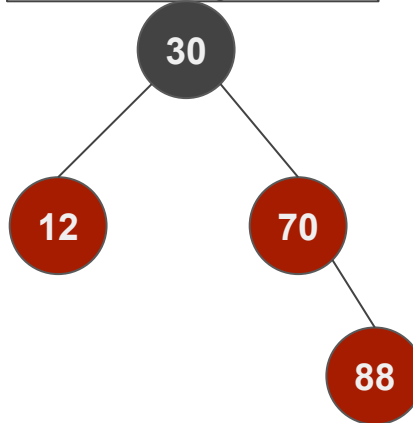
Inserção

- Caso 2
 - Pai é vermelho e tio é vermelho
 - Pai vermelho fere a Propriedade 4
 - Recolore pai, tio e avô

ANTES DA
INSERÇÃO

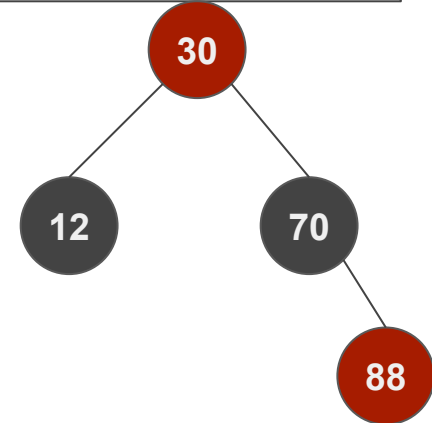


APÓS A
INSERÇÃO



Se 30 for a raiz, também
precisa ser **preto**

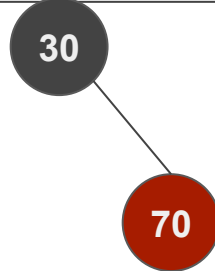
APÓS O
BALANCEAMENTO



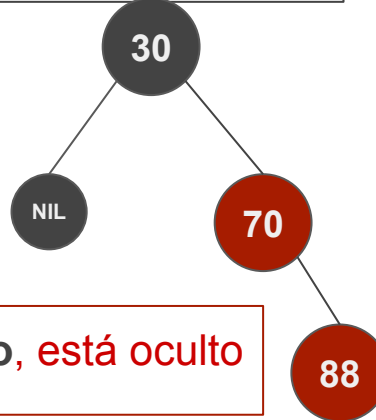
Inserção

- Caso 3
 - Pai é vermelho e tio é preto
 - Pai vermelho fere a Propriedade 4
 - Aplica rotação

ANTES DA
INSERÇÃO



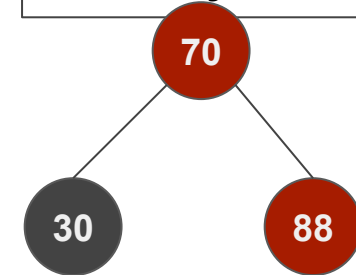
APÓS A
INSERÇÃO



Lembre-se que o NIL, que é preto, está oculto

Falta recolorir!

APÓS A
ROTAÇÃO



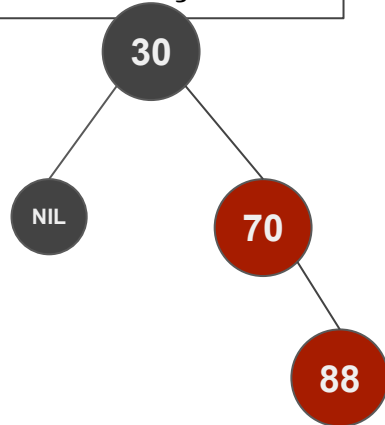
Inserção

- Caso 3
 - Pai é vermelho e tio é preto
 - Pai vermelho fere a Propriedade 4
 - Aplica rotação
 - Após a rotação, recolorir os nós
 - Quais nós? Depende da rotação!
 - Rotação simples \Rightarrow recolore pai e avô
 - Rotação dupla \Rightarrow recolore nó e avô

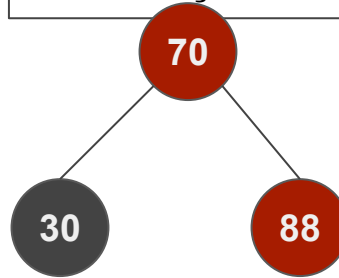
Inserção

- Caso 3
 - Rotação simples à esquerda
 - Recolore pai e avô
 - Análogo para a direita

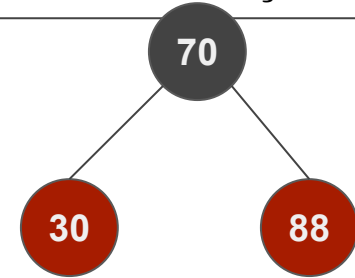
**ANTES DA
ROTAÇÃO**



**APÓS A
ROTAÇÃO**



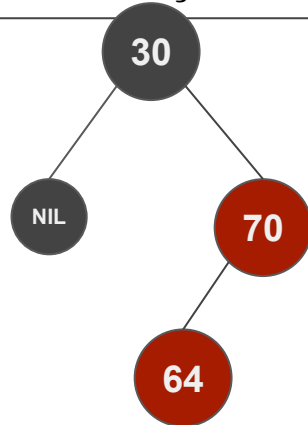
**APÓS A
RECOLORAÇÃO**



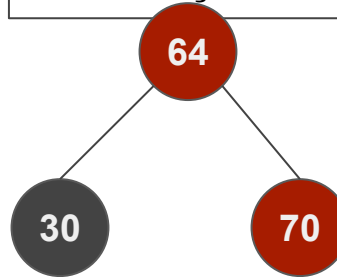
Inserção

- Caso 3
 - Rotação dupla à esquerda
 - Recolore nó e avô
 - Análogo para a direita

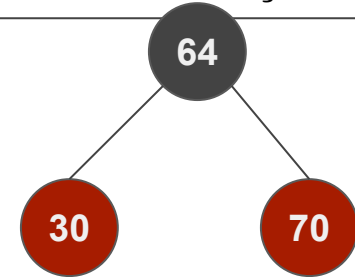
**ANTES DA
ROTAÇÃO**



**APÓS A
ROTAÇÃO**



**APÓS A
RECOLORAÇÃO**



Exemplo



Ponteiro para a raiz



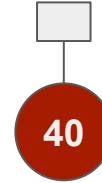
→ Inserir 40

Procedimento de
inserção é o mesmo da
árvore binária de busca

Exemplo



Ponteiro para a raiz



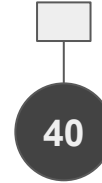
→ Inserir 40

1. Encontra a posição de inserção

Exemplo



Ponteiro para a raiz



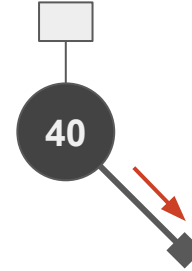
→ Inserir 40

1. Encontra a posição de inserção
2. Nó é raiz, colore como preto

Exemplo



Ponteiro para a raiz



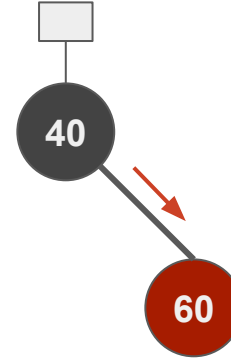
→ Inserir 60

1. Encontra a posição de inserção

Exemplo



Ponteiro para a raiz



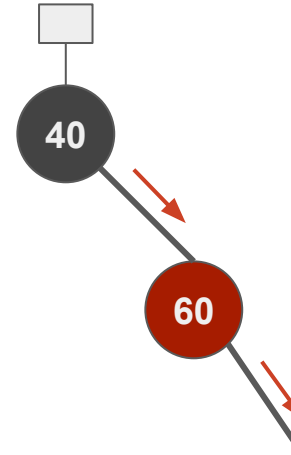
→ Inserir 60


1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**

Exemplo

→ Inserir 80

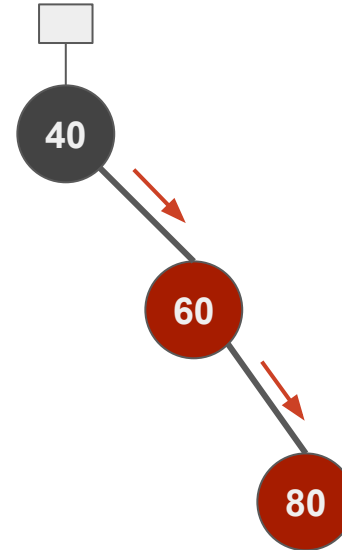
1. Encontra a posição de inserção



 Ponteiro para a raiz

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

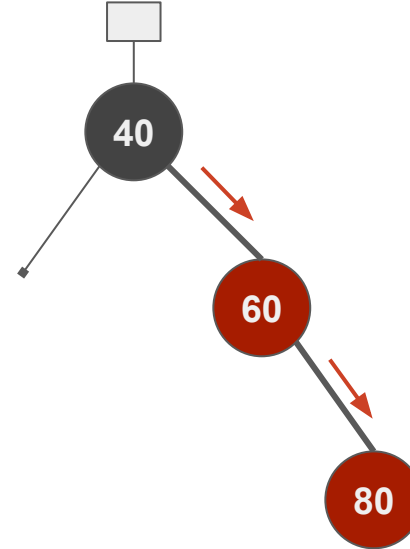


➡ Inserir 80

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como vermelho

Exemplo

 Ponteiro para a raiz



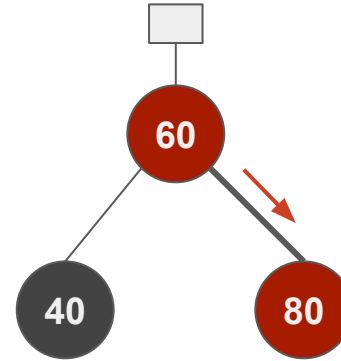
→ Inserir 80

1. Encontra a posição de inserção
2. Inse~~r~~e nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio preto

Exemplo



Ponteiro para a raiz



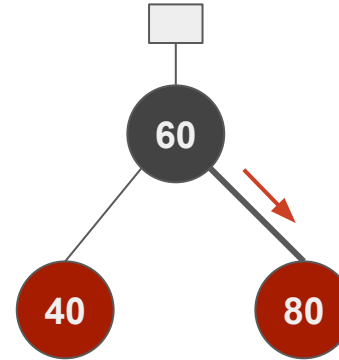
→ Inserir 80

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio preto
 - 3.2. Rotação simples à esquerda

Exemplo




Ponteiro para a raiz

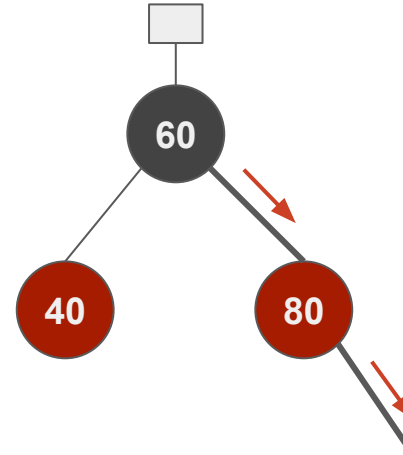


→ Inserir 80

1. Encontra a posição de inserção
2. Insele nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio preto
 - 3.2. Rotação simples à esquerda
 - 3.3. Recolore pai e avô

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

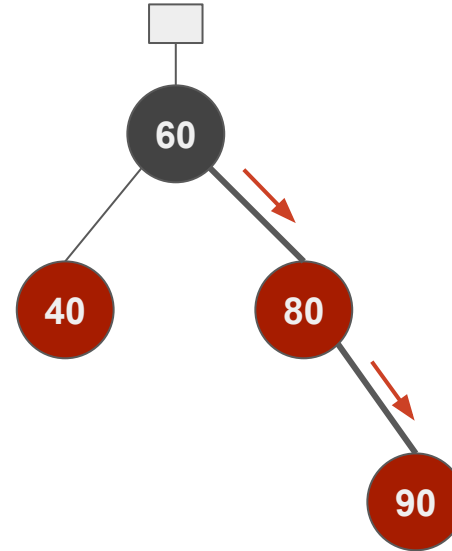


→ Inserir 90

1. Encontra a posição de inserção

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

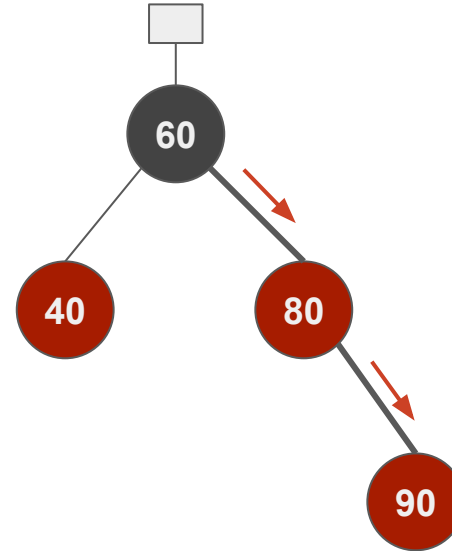


→ Inserir 90

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**

Exemplo

 Ponteiro para a raiz



→ Inserir 90

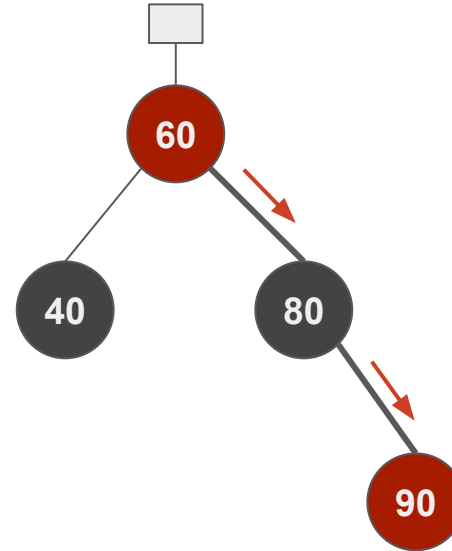
1. Encontra a posição de inserção
2. Inse~~r~~e nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio **vermelho**

Exemplo


 Ponteiro para a raiz

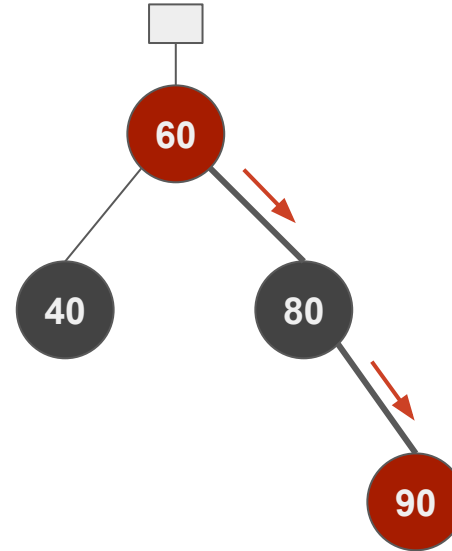
→ Inserir 90

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio **vermelho**
 - 3.2. Recolore pai, tio e avô



Exemplo

 Ponteiro para a raiz

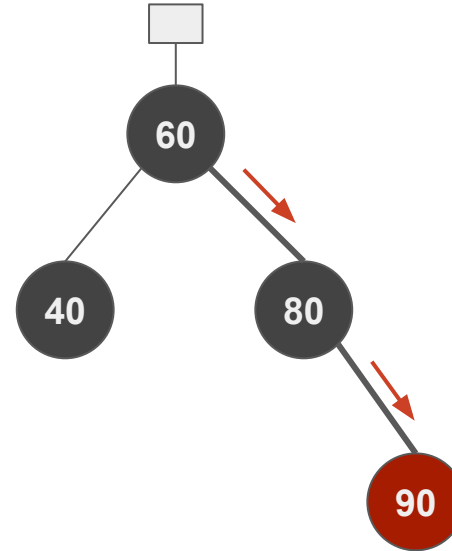


→ Inserir 90

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio **vermelho**
 - 3.2. Recolore pai, tio e avô
4. Propriedade 2 ferida
 - 4.1. Raiz **vermelha**

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

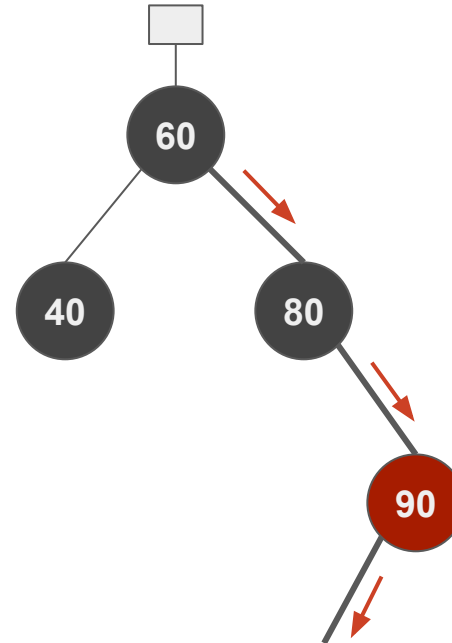


→ Inserir 90

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** + tio **vermelho**
 - 3.2. Recolore pai, tio e avô
4. Propriedade 2 ferida
 - 4.1. Raiz **vermelha**
 - 4.2. Recolore a raiz

Exemplo


 Ponteiro para a raiz

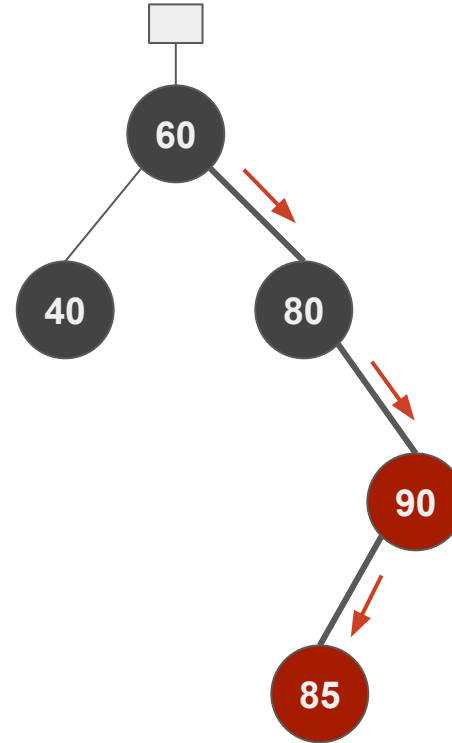


➡ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção

Exemplo


 Ponteiro para a raiz

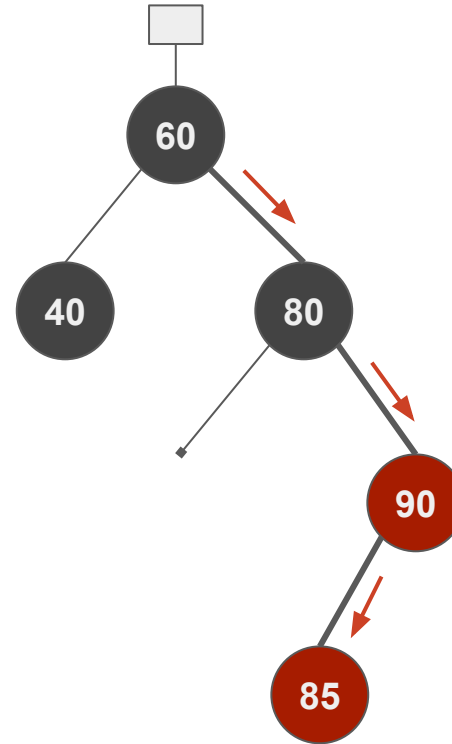


→ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

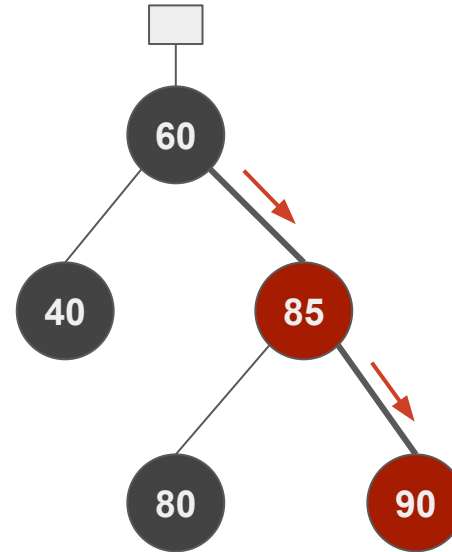


→ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção
2. Inse~~r~~e nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** e tio preto

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

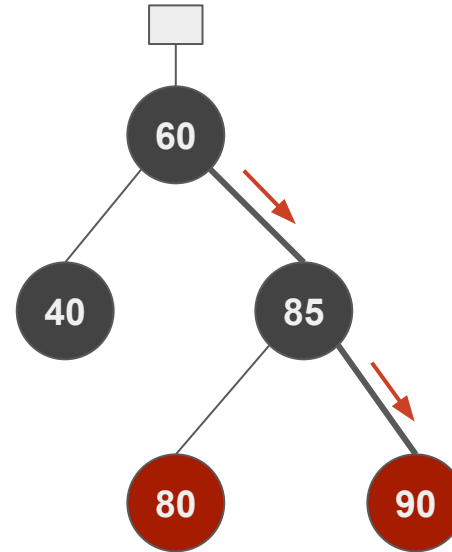


➡ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção
2. Inse~~r~~e nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** e tio preto
 - 3.2. Rotação dupla à esquerda

Exemplo

 Ponteiro para a raiz

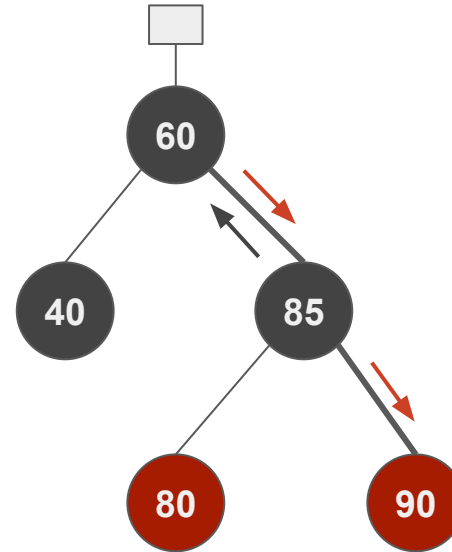


→ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção
2. Inse~~r~~e nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** e tio preto
 - 3.2. Rotação dupla à esquerda
 - 3.3. Recolore nó e avô

Exemplo

 Ponteiro para a raiz



→ Inserir 85

1. Encontra a posição de inserção
2. Insere nó como **vermelho**
3. Propriedade 4 ferida
 - 3.1. Pai **vermelho** e tio preto
 - 3.2. Rotação dupla à esquerda
 - 3.3. Recolore nó e avô
4. Continua verificando até a raiz

Análise

- A árvore vermelho-preto ocupa menos espaço por nó
 - Um bit de cor contra um inteiro para o fator de balanceamento da AVL
- Para entradas de dados aleatórios com sequências ordenadas, a árvore vermelho-preto é melhor que a AVL
 - É menos balanceada, mas realiza no máximo 1 rotação na remoção ($O(\log n)$ recolorações), enquanto a AVL realiza $O(\log n)$ rotações
 - Na inserção, é similar à AVL, executando no máximo 1 rotação e $O(\log n)$ recolorações
- A altura máxima de uma árvore vermelho-preto com n nós internos é de $2\log(n+1)$

Exercício

- Criar uma árvore vermelho-preto inserindo os elementos a seguir na ordem determinada:
 - 41, 38, 31, 12, 19, 8

Referências

- SZWARCFITER, Jayme Luiz; MARKENZON, Lilian. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos, cap. 5. LTC Editora, 1994.
- DROZDEK, Adam. Data Structures and Algorithms in C++, Fourth Edition, cap. 10. Cengage Learning, 2013.
- SOUZA, Jairo F. Notas de aula de Estrutura de Dados II. 2016.
Disponível em: http://www.ufjf.br/jairo_souza/ensino/material/ed2/