Introdução a Análise de Sobrevivência
1º Semestre/2024

1ª Lista de Exercícios - Resolução

Suponha que o tempo até o óbito de pacientes submetidos a transplante de rim (em dias) segue uma distribuição log-logística, com função de sobreviência dada por

$$S(t) = \frac{1}{1 + \lambda t^{\alpha}}, t \geq 0.$$

Se $\alpha = 1,5$ e $\lambda = 0,001$,
(a) Encontre a probabilidade de sobrevivência nos dias 50, 100 e 150.

Resolução
$S(50) = 0,7388$, $S(100) = 0,5$ e $S(150) = 0,3524$.

(b) Encontre o tempo mediano de vida dos pacientes após o transplante.

Resolução
O tempo mediano, t_M é tal que $P(T > t_M) \leq 0,5$. Pelo item a) deste exercício, temos que $S(100) = 0,5$. Logo, $t_M = 100$.

(c) Mostre que a função de taxa de falha é inicialmente crescente e depois descrescente com o tempo. Encontre o ponto em que a taxa de falha muda de crescente para decrescente.

Resolução
A função de taxa de falha é dada por

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}, \tag{1}$$

em que

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt} = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha - 1}}{(1 + \lambda t^{\alpha})^2}.$$

Assim, substituindo em (1), temos que

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha - 1}}{(1 + \lambda t^{\alpha})^2}(1 + \lambda t^{\alpha}) = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha - 1}}{(1 + \lambda t^{\alpha})}.$$

A primeira derivada de $\lambda(t)$ é dada por:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1+\lambda t^{\alpha}) - (\lambda\alpha t^{\alpha-1})\lambda\alpha t^{\alpha-1}}{(1+\lambda t^{\alpha})^2}.$$

Seja t^* tal que $\frac{d\lambda(t)}{dt}$ avaliada em t^* seja igual a zero. Com algumas contas, temos que $t^* = 62,996$. Ainda, $\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}$ avaliada em $t = t^*$ é $-0,167$ e $\lambda(t^*) = 0,00793$. Logo, o ponto $(62.996, 0.00793)$ é o ponto em que a taxa de falha muda de crescente para decrescente.

(d) Encontre o tempo médio de vida dos pacientes após o transplante (você pode consultar o livro do Klein e Moeschberger, pg. 38).

Resolução

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\lambda^{-1/\alpha}\pi}{\alpha sen(\pi/2)} = 241,84 \text{ dias}.$$