UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Matemática e Estatística

Autora: Profa. Larissa Rodrigues Damiani
Colaboradores: Prof. Angel Antonio Gonzalez Martinez
Profa. Christiane Mazur Doi

Professora conteudista: Larissa Rodrigues Damiani

Doutora e mestra em Ciências pelo programa de Engenharia Elétrica – Microeletrônica da Universidade de São Paulo (USP). Bacharel em Engenharia Elétrica – modalidade Eletrônica (ênfase em Telemática) pela Universidade Santa Cecília. Professora titular da UNIP desde 2015, atuando como docente, principalmente, em cursos do Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET). Integrante da Comissão de Qualificação e Avaliação de Cursos (CQA) da UNIP desde 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D158m   Damiani, Larissa Rodrigues.

Matemática e Estatística / Larissa Rodrigues Damiani. – São Paulo: Editora Sol, 2025.

248 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Matemática. 2. Funções. 3. Estatística. I. Título.

CDU 519.2

U521.33 – 25

Prof. João Carlos Di Genio
Fundador

Profa. Sandra Rejane Gomes Miessa
Reitora

Profa. Dra. Marilia Ancona Lopez
Vice-Reitora de Graduação

Profa. Dra. Marina Ancona Lopez Soligo
Vice-Reitora de Pós-Graduação e Pesquisa

Profa. Dra. Claudia Meucci Andreatini
Vice-Reitora de Administração e Finanças

Profa. M. Marisa Regina Paixão
Vice-Reitora de Extensão

Prof. Fábio Romeu de Carvalho
Vice-Reitor de Planejamento

Prof. Marcus Vinícius Mathias
Vice-Reitor das Unidades Universitárias

Profa. Silvia Renata Gomes Miessa
Vice-Reitora de Recursos Humanos e de Pessoal

Profa. Laura Ancona Lee
Vice-Reitora de Relações Internacionais

Profa. Melânia Dalla Torre
Vice-Reitora de Assuntos da Comunidade Universitária

UNIP EaD

Profa. Elisabete Brihy
Profa. M. Isabel Cristina Satie Yoshida Tonetto

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. M. Deise Alcantara Carreiro
Profa. Ana Paula Tôrres de Novaes Menezes

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Fernanda Felix
Kleber Souza

Sumário

Matemática e Estatística

APRESENTAÇÃO

A disciplina Matemática e Estatística tem como objetivo apresentar fundamentos matemáticos para a interpretação, a modelagem e o equacionamento de problemas associados ao cotidiano e ao mundo da tecnologia, além de avaliar os resultados obtidos. Entre esses fundamentos matemáticos, serão abordados tópicos introdutórios de estatística, área esta voltada à coleta, organização e interpretação de conjuntos de dados.

Ao longo do conteúdo, serão mostradas aplicações e técnicas relativas a diversos métodos matemáticos úteis à área tecnológica que, certamente, contribuirão para desenvolver o raciocínio lógico-matemático e o pensamento crítico dos leitores.

Diversos temas relevantes para cursos de tecnologia, como as linguagens de programação, os sistemas de bancos de dados, a gestão de finanças, a eletrônica aplicada ao hardware computacional e a ciência de dados, usam fundamentos matemáticos em suas implementações. Estar familiarizado com tais conceitos é, portanto, de grande valia para o entendimento desses temas.

Esperamos que tenha uma boa experiência de leitura e que se sinta motivado a conhecer mais sobre o mundo da matemática aplicada a problemas cotidianos e do mundo tecnológico.

Boa leitura!

INTRODUÇÃO

A matemática está presente em tudo ao nosso redor, mesmo que, às vezes, possa passar despercebida. Sempre que utilizamos computadores, como um notebook ou um smartphone, os circuitos eletrônicos dessas máquinas realizam diversas operações lógicas e aritméticas, de forma a processar corretamente informações e, assim, executar as tarefas que solicitamos. Ao lidarmos com finanças, precisamos compreender sistemas de proporcionalidade, cálculos de taxas e funções matemáticas. As edificações à nossa volta foram construídas mediante diversos cálculos de áreas e de volumes e com base nas propriedades dos materiais. Isso evidencia que o desenvolvimento científico das mais diversas áreas requer muitos recursos matemáticos.

Ao ler este livro-texto, esperamos que você compreenda e reconheça a relevância do conteúdo da disciplina para sua vida cotidiana e para sua vida profissional. Além disso, almejamos que você, como tecnólogo, seja capaz de aplicar as técnicas aqui abordadas.

Este livro-texto foi dividido em quatro unidades. Na primeira unidade, recordaremos conceitos de matemática básica, revisando temas como expressões algébricas, proporções, regras de três e porcentagens. Além disso, também abordaremos a teoria de conjuntos, a fim de conhecermos as principais definições, os operadores, as relações e os conjuntos numéricos.

Na segunda unidade, trabalharemos com funções afim (funções constantes e de 1º grau), destacando os conceitos envolvidos e algumas de suas aplicações. Também veremos as funções quadráticas, com análise de gráficos, estudo de coeficientes, cálculos de raízes e cálculos de vértices de parábolas.

Na terceira unidade, partiremos para o estudo de situações que empregam exponenciais e logaritmos, passando por diversas definições e propriedades, conhecendo também suas funções. Além disso, estudaremos as matrizes e os determinantes, que têm ampla aplicação na resolução de problemas que envolvem sistemas de equações lineares.

Na quarta unidade, trataremos da estatística descritiva, abordando os conceitos básicos, as distribuições de frequências, as medidas de tendência central (como média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (como desvio-padrão e coeficiente de variação). Tais temas são especialmente relevantes para o nosso primeiro contato com a área de ciência de dados, que tem como fundamento os conceitos estatísticos.

Bom estudo!

Unidade I

1 REVISÃO DE CONCEITOS DE MATEMÁTICA BÁSICA

No primeiro capítulo, iniciaremos nossos estudos recordando alguns conceitos que você, provavelmente, já conhece e utiliza no dia a dia, sendo eles: expressões algébricas, proporções, regras de três e porcentagens. Alguns detalhes, no entanto, podem ter sido esquecidos, assim, os revisaremos ao longo do texto.

1.1 Expressões algébricas

Você provavelmente já se perguntou por que, nas aulas de matemática, sempre estamos procurando o tal do x. Ao contrário do que muitos pensam, a inserção de letras em expressões matemáticas não tem o propósito de complicar o raciocínio, e, sim, de organizá-lo. Sempre que desconhecemos um valor de interesse, podemos utilizar uma letra, como x, para representá-lo.

Nesse contexto, expressões algébricas são expressões matemáticas que utilizam letras ou quaisquer símbolos não numéricos em sua composição, além de numerais e operadores aritméticos. Esse tipo de expressão é capaz de traduzir situações cotidianas para a linguagem matemática. As expressões algébricas são a base das equações e das funções que estudaremos ao longo deste livro-texto.

Alguns exemplos de expressões algébricas podem ser observados na tabela a seguir. Veja que, sempre que um número é desconhecido, é utilizada uma letra para sua representação. Essas letras, tal como apresentadas na tabela, representam variáveis e podem assumir valores numéricos adequados em dado contexto.

Tabela 1 – Algumas expressões algébricas que traduzem a linguagem cotidiana para a linguagem matemática

Linguagem cotidiana	Linguagem matemática
O dobro de um número	$2x$
O triplo de um número	$3x$
Um número acrescido de 5 unidades	$x + 5$
Metade de um número	$\frac{x}{2}$
O triplo do quadrado de um número	$3x^2$
O quádruplo do quadrado de um número decrescido de 2 unidades	$4x^2-2$

Vamos resolver um exemplo, a seguir, que faz uso de expressões algébricas e que esclarece o conceito de variável.

Exemplo de aplicação

Para organizar um evento corporativo, o diretor da área de tecnologia de uma empresa dividiu o time de desenvolvedores de software em 12 equipes, cada uma com o mesmo número de integrantes. Cada equipe ficará responsável por uma atividade específica do evento. Para coordenar o trabalho dessas equipes, 6 gestores foram posteriormente designados. Sabe-se que, dos funcionários envolvidos, apenas o diretor não participará do evento e que não há participantes externos. Nesse cenário, faça o que se pede a seguir.

A) Encontre a expressão algébrica que descreve a quantidade total de participantes do evento.

B) Se cada equipe for composta por 5 desenvolvedores, determine o total de participantes.

C) Se cada equipe for composta por 8 desenvolvedores, determine o total de participantes.

D) Se o número total de participantes for 150, determine o número de desenvolvedores que devemos ter em cada equipe.

Resolução

A) Como não sabemos a quantidade de desenvolvedores de software em cada equipe, podemos chamar esse valor de x. Dessa forma, conseguimos descrever matematicamente a situação por meio de uma expressão algébrica. De acordo com o enunciado, temos 12 equipes com x desenvolvedores cada e ainda devemos adicionar os 6 gestores.

Portanto, a expressão algébrica que descreve a quantidade total de participantes do evento é a seguinte:

$$12x+6$$

Note que nenhuma operação aritmética parece estar explicitamente indicada no termo 12x. Mesmo assim, lembre-se de que temos uma multiplicação entre a parte numérica e a parte literal, ou seja, doze vezes x.

B) O item B pede para calcularmos o total de participantes, supondo que cada equipe seja composta por 5 desenvolvedores. Perceba que encontramos, agora, um valor numérico para x. Nesse contexto, a variável x assumirá o valor 5 e é possível calcularmos o número total de participantes do evento, que chamaremos de q, utilizando a expressão algébrica que definimos no item A. O cálculo é mostrado a seguir.

$q = 12x + 6$

$q = 12 \cdot 5 + 6$

$q = 60 + 6$

$q = 66$

Portanto, com 5 desenvolvedores em cada equipe, teremos um total de 66 participantes no evento.

C) O item C pede para calcularmos o total de participantes, supondo que cada equipe seja composta por 8 desenvolvedores. Agora, encontramos outro valor numérico de interesse para x. Nesse contexto, a variável x assumirá o valor 8. O cálculo do número de participantes q do evento é mostrado a seguir.

$q = 12 \cdot 8 + 6$

$q = 96 + 6$

$q = 102$

Portanto, com 8 desenvolvedores em cada equipe, teremos um total de 102 participantes no evento.

D) O item D traz um possível número total de participantes, que é 150. Dessa vez, não foi trazido um valor para x (que representa o número de desenvolvedores em cada equipe), mas sim para q (que representa o número total de participantes do evento).

Nessa situação, costumamos chamar x de incógnita. Não sabemos, a princípio, por qual valor devemos substituir x, como nos casos anteriores. O que sabemos é o número total de participantes (q = 150). Com esse dado, podemos montar uma equação de forma a calcular o número de desenvolvedores em cada equipe que satisfaça tal equação.

$q = 12x + 6$

$150 = 12x + 6$

$12x + 6 = 150$

$12x = 150 - 6$

$12x = 144$

$$x = \frac{144}{12}$$

$x = 12$

Portanto, para um total de 150 participantes, devemos ter 12 desenvolvedores de software em cada equipe.

Vimos, no exemplo anterior, x sendo chamado de variável nos itens B e C e de incógnita no item D. Por mais que, muitas vezes, encontremos esses termos sendo utilizados como sinônimos, é interessante sabermos que eles são essencialmente diferentes.

Como variável, x pode assumir qualquer valor dentro de determinado contexto. Por exemplo, na equação $y = 2x$, podemos substituir o x por 2, o que leva y ao valor 4 (já que $2 \cdot 2 = 4$). Se substituirmos x por 3, y deve valer 6 (já que $2 \cdot 3 = 6$). Temos, nesse caso, uma lei matemática que caracteriza uma função, em que y está em função de x (funções matemáticas serão discutidas com profundidade mais à frente). Note que, de fato, *variamos* o valor assumido por x, o que leva também a uma variação no valor assumido por y.

Como incógnita, x não pode assumir valores independentes, pois ele precisa ser calculado de forma a resolver a situação em que está inserido. Se tivermos $2x = 16$, por exemplo, não podemos simplesmente substituir x por diversos números: precisamos calcular o seu valor para que a igualdade $2x = 16$ seja verdadeira. Nesse caso, x é necessariamente igual a 8 (já que $2 \cdot 8 = 16$). Temos, aqui, apenas uma equação, que nada mais é do que uma igualdade entre expressões algébricas que contêm, pelo menos, uma incógnita.

1.1.1 Manipulando os termos de uma equação

Caso você tenha sentido qualquer dificuldade para encontrar o valor de x no item D do exemplo anterior, é possível que tenha esquecido as regras de manipulação de termos em uma equação. Vamos recordar algumas regras básicas. Para isso, consideraremos a equação a seguir.

$$2x + 1 = 3$$

Nosso objetivo é determinar o valor de x para que a igualdade seja verdadeira. Logo, precisamos isolar x.

De forma simplificada, costumamos dizer apenas que o +1 passa para o outro lado da equação e troca de sinal. Na prática, esse pensamento está correto, mas isso ocorre como consequência da aplicação da mesma operação a ambos os lados da igualdade.

O procedimento original, portanto, é somar –1 em ambos os lados da equação. Se somarmos a mesma quantidade em ambos os lados da igualdade, conforme exposto a seguir, não alteramos a igualdade original.

$$2x + 1 + (-1) = 3 + (-1)$$

$$2x + 1 - 1 = 3 - 1$$

Veja, no lado esquerdo da equação, que $+1-1 = 0$, de forma que podemos cancelar o +1 com o –1. Logo:

$$2x + \cancel{1} - \cancel{1} = 3 - 1$$

Assim, chegamos a:

$$2x = 3 - 1$$

Fazendo o cálculo da subtração, do lado direito da equação, temos que:

$$2x = 2$$

O passo final para isolarmos x é passar o 2 que multiplica para o outro lado dividindo, mas vamos fazer isso de forma detalhada. Queremos eliminar o 2 do lado esquerdo da equação. Isso pode ser feito se multiplicarmos ambos os lados por meio (1/2), de forma a não alterarmos a equação, conforme demostramos a seguir.

$$2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Nessa etapa, podemos cancelar o 2 de cima com o 2 de baixo. Isso pode ser feito nos dois lados da equação.

$$\cancel{2}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = \cancel{2} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

Com isso, ficamos com a situação a seguir.

$$x \cdot 1 = 1$$

Chegamos, finalmente, ao seguinte resultado:

$$x = 1$$

Vamos, agora, partir de outra equação, exposta a seguir.

$$6x - 1 = 11$$

Em vez de partirmos de operações iguais aplicadas aos dois lados da igualdade, vamos tomar os atalhos que costumeiramente utilizamos. O primeiro passo será passar o termo –1 para a direita, trocando o seu operador de subtração pelo de sua operação inversa, a adição. Desse modo, temos o seguinte.

$$6x = 11 + 1$$

$$6x = 12$$

Podemos, agora, levar o numeral 6, que multiplica a incógnita x, para o lado direito da equação, também trocando a multiplicação pela sua operação inversa, que é a divisão. Desse modo, conseguimos isolar a incógnita e conhecer o seu valor numérico, que é 2.

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

Observação

Podemos, livremente, inverter a posição das expressões algébricas que compõem a equação. Desse modo, dizer que $x = 8y$ é equivalente a falar que $8y = x$.

Lembrete

Uma equação pode ser definida como uma igualdade entre expressões algébricas que contêm, pelo menos, uma incógnita.

1.1.2 Termos algébricos

Segundo Wagner (2011), um termo algébrico é o produto de um número, denominado coeficiente, por potências de expoentes racionais de variáveis, denominadas partes literais. Monômio, por sua vez, é um tipo de termo algébrico composto por um coeficiente e uma parte literal cujos expoentes são naturais. Para simplificar o entendimento, vamos nos referir a esse tema apenas como termos algébricos.

Pode parecer que estamos lidando com algo complicado quando lemos as definições anteriores, mas não se preocupe: você verá que, com a análise de exemplos, tudo fará sentido.

Ao analisarmos um termo algébrico, como 2x, vemos que ele é composto pelo coeficiente 2 e pela parte literal x. Lembre-se de que não há uma operação aritmética explicitamente indicada, mas temos uma multiplicação entre o coeficiente e a parte literal, ou seja, duas vezes x. Em alguns casos, a parte literal pode conter mais de uma variável, como ocorre em 4xy. Agora, temos o coeficiente 4, com a parte literal xy.

Vejamos, na tabela a seguir, alguns exemplos de termos algébricos com a separação do coeficiente e da parte literal que os compõem.

Tabela 2 – Alguns termos algébricos com seus respectivos coeficientes e suas respectivas partes literais

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$3x$	3	x
$\frac{3x}{2}$	$\frac{3}{2}$	x
yz	1	yz
$-z^3$	-1	z^3
$-\frac{5ab}{3}$	$-\frac{5}{3}$	ab

Pela observação da tabela anterior, podemos destacar os casos a seguir.

- Há casos em que o coeficiente é uma fração, como em $\frac{3x}{2}$
- Há casos em que o coeficiente não aparece explicitamente, mas ele vale 1, como em $yz = 1yz$
- Há casos em que o coeficiente é um número negativo, como em $-\frac{5ab}{3}$

É útil sabermos diferenciar o coeficiente da parte literal quando realizamos operações aritméticas e lidamos com funções matemáticas. Apenas podemos somar ou subtrair termos que sejam semelhantes, ou seja, que apresentam a mesma parte literal.

Uma expressão algébrica pode ser composta por mais de um termo. Nesse caso, eles estarão conectados por operadores de adição ou subtração, sendo que a expressão pode ser chamada de polinômio. Na tabela seguinte, vemos alguns exemplos de contagem de termos de expressões.

Tabela 3 – Expressões algébricas com a contagem de termos

Expressão algébrica	Número de termos
$ax + b$	2
ax^2+bx+c	3
$5xyz$	1
$-\frac{5ab}{3}+2$	2
$5x^4+3x^2-9x+10$	4

No exemplo a seguir, lidaremos com uma expressão algébrica cujos termos podem ser simplificados por apresentarem a mesma parte literal.

Exemplo de aplicação

1) O perímetro de um polígono é definido como a soma dos comprimentos de seus lados. Encontre uma expressão algébrica que represente o perímetro do triângulo da figura a seguir, em que x representa um número real maior do que 1.

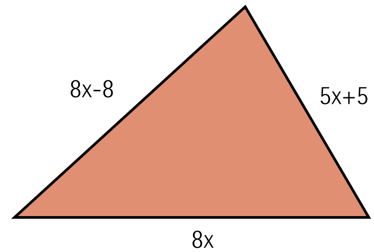


Figura 1 – Triângulo

Resolução

Para representarmos algebricamente o perímetro, que chamaremos de P, devemos somar as medidas dos três lados do triângulo representado na figura. Temos, portanto, a expressão a seguir.

$$P = (8x - 8) + (5x + 5) + 8x$$

Nesse caso, podemos retirar os parênteses para agrupar os termos semelhantes, que são os termos cuja parte literal é a mesma.

$$P = 8x - 8 + 5x + 5 + 8x$$

Note que, até essa etapa, a expressão algébrica que caracteriza P tem 5 termos. Três deles têm parte literal x (que são os termos 8x, 5x e 8x), enquanto dois são constantes, ou termos independentes (que são os termos –8 e 5). Podemos, portanto, reduzir a expressão a um binômio (polinômio de dois termos), conforme vemos a seguir.

$$P = 21x - 3$$

Logo, a expressão algébrica 21x – 3 representa o perímetro do triângulo da figura anterior.

Veja que, no enunciado, colocamos a restrição de x ser maior do que 1, pois, sem ela, a medida 8x – 8 poderia valer 0, o que não tem sentido para a medida de um lado do triângulo.

No próximo exemplo, vamos montar uma equação que descreve uma situação apresentada em linguagem cotidiana. Essa capacidade de “tradução” é muito valiosa para o desenvolvimento do nosso pensamento computacional, já que computadores executam internamente apenas operações lógico-matemáticas, por meio de seus circuitos digitais.

2) A soma de um número natural com o seu sucessor resulta em 511. Qual é esse número?

Resolução

Vamos chamar de x o número que, a princípio, desconhecemos. Ele será a incógnita do nosso problema, pois x representa um valor específico que ainda não sabemos qual é. Por número natural, entendemos que esse número é inteiro e não negativo.

Quanto ao sucessor, devemos pegar o valor x e acrescentar a ele uma unidade. Sabemos, por exemplo, que o sucessor de 10 é 11, certo? Se o nosso número é chamado de x, basta adicionarmos 1 unidade a ele. Temos, portanto, em linguagem matemática, o que segue.

Número natural: x

Sucessor de x: x+1

Com esses dados, já podemos montar uma equação que descreve a situação do enunciado. Vamos traduzir para a linguagem matemática a frase: a soma de um número natural com o seu sucessor resulta em 511. Nossa equação ficará do modo a seguir.

$$x + (x + 1) = 511$$

Vamos, agora, isolar o x para, dessa forma, descobrir o valor desconhecido. Podemos, nesse caso, retirar os parênteses e agrupar os termos semelhantes. É importante lembrar que, sempre que passamos um termo de um lado da equação para o outro, devemos inverter a operação, de forma a sempre manter a igualdade entre a expressão à esquerda do símbolo de igualdade e a expressão à direita do símbolo de igualdade.

$$x + x + 1 = 511$$

$$2x + 1 = 511$$

$$2x = 511 - 1$$

$$2x = 510$$

$$x = \frac{510}{2}$$

$$x = 255$$

Portanto, o número natural que satisfaz à situação do enunciado é o número 255, visto que ele, quando somado ao seu sucessor (256), resulta em 511.

Saiba mais

O palestrante Terry Moore apresentou, em uma conferência TED Talk, uma pequena palestra intitulada “Why is ‘x’ the unknown?” em que aborda o motivo pelo qual o *x* foi adotado como o padrão nos livros de matemática. No link a seguir, é possível assistir à palestra com legendas em português.

WHY IS ‘x’ the unknown. 2012. 1 vídeo (3 min.). Publicado pelo canal Ted. Disponível em: https://tinyurl.com/mubcfhyc. Acesso em: 4 set. 2024.

1.2 Razões e proporções

Segundo Castanheira (2008), podemos definir razão, no contexto da matemática, como o quociente entre dois números. Por exemplo, a razão entre 1 e 2 pode ser expressa na forma de fração como ½. Essa mesma razão pode ser expressa na forma decimal como 0,5 (basta dividir 1 por 2 e chegamos a 0,5).

Uma proporção, por sua vez, pode ser definida como a igualdade entre razões. A proporção pode ser expressa como mostrado a seguir, em que $x \neq 0$ e $z \neq 0$ (lembre-se de que não existe divisão por 0, daí a restrição). Podemos ler essa proporção como “w está para x, assim como y está para z”.

$$\frac{w}{x} = \frac{y}{z}$$

Nesse caso, chamamos as variáveis de termos da proporção. Na igualdade, w é o 1º termo, x é o 2º termo, y é o 3º termo e z é o 4º termo. O 1º e o 4º termos (w e z) são chamados de extremos, e o 2º e o 3º termos (x e y) são chamados de meios. Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos (Castanheira, 2008). Daí, costumamos utilizar a técnica de multiplicação em cruz. Nesse caso, ficamos com:

$$xy = wz$$

Para utilizarmos um exemplo numérico, vamos considerar os termos 4, 2, 16 e 8. Assim, montando a igualdade entre razões, chegamos a:

$$\frac{4}{2} = \frac{16}{8}$$

$$2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$$

$$32 = 32$$

Obtemos, portanto, termos proporcionais. Note que, ao realizarmos a divisão entre 4 e 2, chegamos ao resultado 2. Ao realizarmos a divisão entre 16 e 8, também chegamos ao resultado 2. Isso também evidencia que temos igualdade entre razões e, portanto, temos proporcionalidade.

Em uma situação contextualizada de proporcionalidade, podemos nos deparar com:

- Grandezas diretamente proporcionais.
- Grandezas inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais são aquelas em que o aumento (ou a diminuição) de uma grandeza resulta, de forma proporcional, no aumento (ou na diminuição) da outra. Por exemplo, supomos que você vai a uma papelaria comprar canetas. Podemos pensar na relação entre as grandezas valor da compra e número de itens adquiridos. Quanto mais canetas você decidir comprar, maior será o valor de sua compra, concorda? Temos, portanto, uma relação diretamente proporcional entre o valor da compra e o número de itens comprados.

Grandezas inversamente proporcionais são aquelas em que o aumento (ou a diminuição) de uma grandeza resulta, de forma proporcional, no processo inverso na outra. Por exemplo, supomos que você está dirigindo um automóvel em uma estrada, em velocidade constante. Vamos, agora, pensar na relação entre as grandezas velocidade do seu veículo e tempo de trajeto, ou seja, o tempo que levará para você chegar ao seu destino. Quanto maior for a velocidade, menor será o tempo de trajeto. Quanto menor for a velocidade, maior será o tempo até o destino. Logo, temos uma relação inversamente proporcional entre velocidade e tempo de trajeto.

Saber identificar quando grandezas proporcionais se relacionam de forma direta ou inversa é essencial para trabalharmos com o tópico que recordaremos na próxima seção: a regra de três.

1.3 Regra de três

Em uma situação na qual existe proporcionalidade entre duas grandezas e em que um dos quatro termos da proporcionalidade é desconhecido, podemos calculá-lo pela técnica denominada regra de três simples. A palavra simples indica que apenas duas grandezas se relacionam entre si na situação. Nesse caso, precisamos conhecer e apresentar três valores da proporção para que o quarto valor seja calculado.

Vamos, a seguir, acompanhar um exemplo de regra de três simples que envolve duas grandezas diretamente proporcionais entre si.

Exemplo de aplicação

1) Em uma pequena confecção de cortinas, são produzidas 35 peças em 7 horas. Em 27 horas de trabalho, quantas cortinas serão produzidas?

Resolução

Primeiramente, vamos analisar o tipo de proporcionalidade envolvida entre as grandezas tempo de trabalho e número de peças da confecção mencionada no enunciado. Quanto mais tempo de trabalho, maior o número esperado de cortinas produzidas. Temos, portanto, grandezas diretamente proporcionais.

Podemos dispor essa situação em uma tabela, conforme mostrado a seguir:

Tabela 4 – Disposição das grandezas do exemplo

	1ª grandeza (tempo, em horas)		2ª grandeza (n. de peças)	
1º caso	7	↓	35	↓
2º caso	27		x	

Na tabela, posicionamos as duas grandezas em duas colunas (qual delas você considera como a 1ª grandeza não é relevante no todo). Para as linhas, temos dois casos envolvendo as grandezas. Um deles (escolhido como 1º caso) é conhecido: sabemos que em 7 horas, são produzidas 35 cortinas. No 2º caso, conhecemos um dos valores envolvidos (27 horas de trabalho), mas desconhecemos o outro, que chamamos de x. Nessa situação, x assume o papel de incógnita do problema. As setas indicam o sentido de crescimento dos valores de cada grandeza. Para a grandeza tempo, observamos crescimento do 1º para o 2º caso (mostrado com uma seta para baixo). Para a grandeza n. de peças, também esperamos que haja crescimento do 1º para o 2º caso, já que temos grandezas diretamente proporcionais.

Para grandezas diretas, a razão entre dois valores de uma grandeza é proporcional à razão entre dois valores da outra grandeza. Temos, portanto, a seguinte proporção, que mantém a disposição dos valores da tabela:

$$\frac{7}{27} = \frac{35}{x}$$

$$7x = 27 \cdot 35$$

$$x = \frac{27 \cdot 35}{7}$$

$$x = 135$$

Logo, com 27 horas de trabalho na confecção, espera-se que sejam produzidas 135 cortinas.

Em vez de montarmos a proporção, como fizemos anteriormente, é possível pegarmos um atalho: podemos multiplicar em cruz os próprios valores da tabela. Desse modo, chegaríamos diretamente à equação a seguir.

$$7x = 27 \cdot 35$$

Agora, vamos acompanhar um exemplo que envolve duas grandezas inversamente proporcionais.

2) Em um escritório de contabilidade, 12 funcionários são capazes de gerar 50 relatórios durante um expediente de 9 horas. Com 36 funcionários, quantas horas seriam necessárias para gerar esses mesmos 50 relatórios, mantidas as devidas proporções?

Resolução

Vamos, primeiramente, definir quais grandezas estão envolvidas no cálculo. No 1º caso, temos 12 funcionários gerando 50 relatórios em 9 horas. No 2º caso, temos 36 colaboradores gerando 50 relatórios em x horas. Como o número de relatórios é o mesmo nos dois casos (mantém-se constante), a proporcionalidade ocorre entre as grandezas n. de funcionários e tempo de trabalho. Quanto maior o número de funcionários, menor o tempo necessário de trabalho para produzir estes 50 relatórios. Temos, portanto, grandezas inversamente proporcionais.

Dispomos a situação em estudo na tabela a seguir:

Tabela 5 – Disposição das grandezas do exemplo

	1ª grandeza (n. de funcionários)		2ª grandeza (tempo, em horas)	
1º caso	12	↓	9	↑
2º caso	36		x	

Posicionamos as duas grandezas como duas colunas (escolhemos colocar n. de funcionários como 1ª grandeza). Para as linhas, temos os dois casos envolvendo as grandezas. Um deles (escolhido como 1º caso) é conhecido: sabemos que 12 funcionários produzem os relatórios em 9 horas. No 2º caso, conhecemos um dos valores envolvidos (36 funcionários), mas desconhecemos o outro, que chamamos de x. As setas indicam o sentido de crescimento dos valores de cada grandeza. Para a grandeza n. de funcionários, observamos crescimento do 1º para o 2º caso (demonstrado com uma seta para baixo). Para a grandeza tempo de trabalho, esperamos que haja crescimento do 2º para o 1º caso, já que, com um número maior de funcionários, o tempo de trabalho é reduzido. As setas em sentidos opostos ilustram as grandezas inversamente proporcionais da situação.

Para grandezas inversas, a razão entre dois valores de uma grandeza é proporcional ao inverso da razão entre os dois valores da outra grandeza. Temos, na prática, que trocar o posicionamento dos valores de uma dessas grandezas e, aí sim, podemos construir a proporção, conforme mostramos na sequência.

$$\frac{12}{36} = \frac{x}{9}$$

Nesse caso, invertemos o posicionamento dos valores da 2ª grandeza (é como se reposicionássemos os valores no esquema para fazer com que as setas apontem na mesma direção). A forma de resolver matematicamente a proporção será a mesma do exemplo anterior, ou seja, multiplicando em cruz.

$$\frac{12}{36}=\frac{x}{9}$$

$$36x=12\cdot 9$$

$$x=\frac{108}{36}$$

$$x=3$$

Portanto, com 36 funcionários, esperamos que 50 relatórios sejam produzidos em 3 horas.

Em vez de invertermos a posição dos valores de uma das grandezas e montarmos a proporção, como fizemos anteriormente, podemos pegar um atalho: em vez de multiplicarmos os valores da tabela em cruz, como fazemos com grandezas diretamente proporcionais, podemos multiplicar os valores em linha (ou seja, valores que participam do mesmo caso se multiplicam entre si). Desse modo, chegaríamos diretamente à equação a seguir.

$$36x=12\cdot 9$$

1.4 Porcentagem

Segundo Alberto (2008), podemos definir porcentagem como a centésima parte de uma grandeza. Na prática, temos uma razão cujo denominador é 100, comumente chamada de taxa percentual, utilizada em cálculos de proporcionalidade. O termo por cento e seu sinal correspondente, %, significam por uma centena. Se temos x%, podemos reescrever essa taxa percentual como uma razão na forma de fração ou na forma decimal, conforme mostramos a seguir.

$$x\%=\frac{x}{100}=0{,}01x$$

Vemos, constantemente, no noticiário e no nosso cotidiano, situações que envolvem porcentagens. Antes de começarmos a fazer cálculos, vamos aprender a interpretar as situações apresentadas a seguir.

Situação 1: 15% dos eleitores votaram nulo

Nessa situação, a cada grupo de 100 eleitores, 15 votaram nulo, independentemente da quantidade total de eleitores. Vemos que 15% é a taxa percentual, que lemos como quinze por cento. Essa taxa também pode ser expressa pela razão $\frac{15}{100}$ (na forma de fração) ou por 0,15 (na forma decimal).

Situação 2: o preço do feijão aumentou 10% em relação ao ano passado

Nessa situação, a taxa percentual indica acréscimo no preço: a cada R$ 100,00 gastos com feijão no ano passado, gastaremos R$ 110,00 (100+10) neste ano para adquirir a mesma quantidade.

Situação 3: o vendedor ofereceu desconto de 25% na compra

Nessa situação, a taxa percentual indica diminuição no preço a ser pago pela compra: a cada R$ 100,00 que gastaríamos com o preço original, gastaremos apenas R$ 75,00 (100 – 25 = 75) após aplicado o desconto.

De acordo com Jacques (2010), para conseguirmos lidar com cálculos financeiros, precisamos saber manipular porcentagens de forma proficiente. Isso é especialmente relevante para profissionais de tecnologia da informação que atuarão como gestores. Por isso, vamos aprender diferentes técnicas para lidar com cálculos percentuais. Como já trabalhamos com proporcionalidades, podemos utilizar regra de três simples para realizar esses cálculos, assim como algumas regras práticas.

Lembrete

A regra de três simples pode ser utilizada em situações nas quais existe proporcionalidade entre duas grandezas e um dos quatro termos da proporcionalidade é desconhecido. Ao apresentar três valores da proporção, o quarto valor pode ser calculado.

No exemplo a seguir, veremos três formas de calcular quantidades com base em uma taxa percentual conhecida.

Exemplo de aplicação

1) Uma fábrica emprega, no total, 1.500 pessoas. Dessas, 30% têm nível superior completo. Qual é o número de funcionários com diploma superior na fábrica?

Resolução 1

Vamos usar uma regra de três para resolver a situação. Pelo enunciado, sabemos que 1.500 pessoas representam o total de funcionários dessa fábrica. Em taxa percentual, costumamos alegar que essas 1.500 pessoas representam 100% dos funcionários. Apenas uma parte desse total, 30% no caso, tem nível superior, mas ainda desconhecemos quanto, em número de funcionários, tal percentual representa. Vamos chamar de x o número de funcionários com nível superior.

Esquematizamos essa situação a seguir:

Tabela 6 – Disposição das grandezas do exemplo

	1ª grandeza (n. de funcionários)		2ª grandeza (taxa %)	
1º caso (total)	1500	↑	100	↑
2º caso (nível superior)	x		30	

Assim, uma coluna está dedicada a valores absolutos (no contexto, trata-se do número de funcionários) e a outra está dedicada a valores percentuais. No 1º caso, temos que o todo (100%) corresponde à contagem de 1.500 funcionários. No 2º caso, conhecemos a taxa de 30%, mas desconhecemos a parte de interesse. Montando a proporção, temos:

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{30}$$

$$100x = 1500 \cdot 30$$

$$100x = 45000$$

$$x = \frac{450\cancel{00}}{1\cancel{00}}$$

$$x = 450$$

Calculamos que 30% de 1.500 são 450. Logo, 450 funcionários da fábrica mencionada no enunciado têm nível superior.

Resolução 2

Agora, vamos expressar diretamente a taxa percentual na forma de fração. Já compreendemos que o intuito da questão é calcular quanto vale 30% de 1.500. Vamos expressar essa taxa como uma fração, conforme mostramos a seguir.

$$30\% = \frac{30}{100}$$

Para o cálculo desejado, basta que multipliquemos essa fração pela quantidade total de funcionários, ou seja, pela quantidade que representa 100% da nossa situação.

$$\frac{30}{100} \cdot 1500 = 450$$

Note que, se lermos o operador de multiplicação como de, nós simplesmente escrevemos em linguagem matemática a seguinte sentença: trinta por cento de mil e quinhentos. Chegamos, como esperado, ao mesmo lugar: 30% de 1.500 funcionários são 450 funcionários.

Resolução 3

Também podemos expressar diretamente a taxa percentual na forma decimal. Logo, temos o que segue:

$$30\% = 0{,}01 \cdot 30 = 0{,}3$$

Podemos, simplesmente, multiplicar a taxa, já em sua forma decimal, pela quantidade total de funcionários: $0{,}3 \cdot 1500 = 450$.

No próximo exemplo, veremos como calcular a taxa percentual que uma quantidade representa em relação a outra. Proporemos duas soluções para o problema.

2) Uma avaliação foi aplicada com o intuito de conferir uma certificação em metodologias ágeis para profissionais de tecnologia. 2.205 profissionais realizaram a avaliação, mas 245 deles foram reprovados. Qual é a porcentagem de profissionais reprovados nessa avaliação?

Resolução 1

Nesse problema, precisamos calcular qual taxa percentual 245 representa em relação a um total de 2.205 profissionais. Podemos, novamente, montar uma regra de três para descrever a situação. Uma das formas de esquematizar a situação é a mostrada na tabela a seguir.

Tabela 7 – Disposição das grandezas do problema

	1ª grandeza (n. de profissionais)		2ª grandeza (taxa %)	
1º caso (total)	2.205	↑	100	↑
2º caso (reprovados)	245		x	

Logo, ficamos com:

$$\frac{2205}{245} = \frac{100}{x}$$

$$2205x = 245 \cdot 100$$

$$x = \frac{24500}{2205}$$

$$x = 11{,}11\%$$

Calculamos que 245 representam cerca de 11,11% de 2.205. Portanto, a taxa de reprovação na avaliação foi de 11,11%.

Resolução 2

Quando necessitamos calcular uma taxa percentual a partir de dois valores absolutos, podemos usar a seguinte regra prática: divida a parte pelo todo e multiplique o resultado obtido por 100. Vejamos:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} \cdot 100 = x\%$$

Na nossa situação, a parte corresponde a 245 profissionais, de um total de 2.205 ("todo"). Ao multiplicarmos essa razão por 100, já expressamos o resultado em taxa percentual. Logo, temos o que segue.

$$\frac{245}{2205} \cdot 100 = 11{,}11\%$$

No próximo exemplo, usaremos as porcentagens em acréscimo e desconto no preço de uma mercadoria. Vamos utilizar técnicas já vistas anteriormente.

3) Uma loja de informática vendia um processador, inicialmente, por R$ 1.600,00. Devido à grande demanda, esse item teve seu preço acrescido de 20%. Algum tempo depois, em uma liquidação, o novo preço sofreu desconto de 20%. Qual é o preço do processador após a aplicação do desconto?

Resolução

Vamos avaliar, na tabela a seguir, o que aconteceu com o preço do processador ao longo do tempo.

Tabela 8 – Evolução do preço do processador

Inicialmente	Após acréscimo de 20%	Após desconto de 20%
Preço: R$ 1.600,00	$\frac{20}{100} \cdot 1600 = 320$ $1600 + 320 = 1920$ Preço: R$ 1.920,00	$\frac{20}{100} \cdot 1920 = 384$ $1920 - 384 = 1536$ Preço: R$ 1.536,00

O preço inicial do processador é de R$ 1.600,00, de acordo com o enunciado. Vimos que 20% de 1.600 é 320. Como esses 20% são de acréscimo, somamos o resultado ao preço inicial e obtemos R$ 1.920,00 (que representam 120% de 1.600). Na última etapa, calculamos 20% novamente, mas, dessa vez, em relação a 1.920, que é o preço vigente do processador. O cálculo resultou em 384, que foi descontado de 1.920. Logo, o preço final do processador é R$ 1.536,00 (que representa 80% de 1.920).

Note que não retornamos ao preço original de R$ 1.600,00, pois o resultado de 20% de 1.600 é diferente do resultado de 20% de 1.920.

Para fixarmos o que vimos, vamos resolver mais um exemplo, a seguir.

4) Em um escritório de consultoria, há 80 computadores. O número de máquinas com processador Intel corresponde a 60% do total. Dos demais computadores, 75% têm processador AMD e o restante utiliza processador ARM. Em relação ao número total de computadores desse escritório, qual é o percentual de máquinas com processador ARM?

Resolução

O objetivo do problema é calcularmos o percentual de computadores que utilizam processador ARM. Sabemos que, do total de computadores (80, que representam 100% das máquinas), 60% têm processador Intel. Logo, sobram 40% para os demais processadores (AMD e ARM). Desses 40% restantes, 75% têm processador AMD e, portanto, 25% têm processador ARM. Resumidamente, começamos calculando quantos computadores temos em 25% de 40% de 80:

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 80 = 8$$

Agora, sabemos que, no escritório com total de 80 computadores, 8 deles têm processador ARM. Eles representam a seguinte taxa percentual em relação ao total:

$$\frac{8}{80} \cdot 100 = 10\%$$

Portanto, os computadores com processador ARM representam 10% do total de computadores do escritório.

2 CONJUNTOS

Ao longo do capítulo 2 do nosso livro-texto, estudaremos os conjuntos, uma poderosa ferramenta matemática.

A teoria de conjuntos é o ramo da matemática que estuda coleções de elementos e seus relacionamentos. É um campo extremamente versátil, pois permite modelar diversas situações, como veremos nos exemplos apresentados ao longo do capítulo. Vamos começar fazendo duas definições básicas, mas muito importantes, que se referem a conjunto e elemento.

- **Elemento**: é o nome dado a cada item que faz parte de um conjunto.

- **Conjunto**: é uma coleção de elementos que possuem alguma característica em comum.

Geralmente, o nome de um conjunto é representado por uma letra maiúscula, mas isso varia dependendo da aplicação. Podemos citar os exemplos a seguir.

- **Conjunto A das faces de uma moeda**: A = {cara, coroa}.

- **Conjunto B das regiões do Brasil**: B = {Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste, Sul}.

O conjunto A tem 2 elementos (cara e coroa), sendo que ambos representam faces de uma moeda. O conjunto B tem 5 elementos, sendo que cada um deles representa uma região do Brasil.

Existem diversas formas de representar um conjunto e seus elementos. As principais delas são as apresentadas a seguir (Oliveira, 2016):

- **Entre chaves por extenso**: nessa representação, listamos os elementos entre chaves separados por vírgula.

- **Entre chaves por propriedade**: nessa representação, temos a apresentação de uma propriedade que determina que tipo de elemento pertence àquele conjunto. A utilização de propriedades é útil para descrevermos conjuntos com número elevado de elementos.

- **Graficamente**: nesse tipo de representação, utilizamos diagramas de Venn-Euler. Tais diagramas dispõem os conjuntos como figuras geométricas fechadas, e pode haver a lista de seus elementos dentro da área da figura.

Para entendermos melhor, vamos representar um conjunto de diferentes formas, no exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

A União Astronômica Internacional considera, em 2024, a existência de oito planetas no Sistema Solar. Represente o conjunto S, que reúne esses planetas, das formas indicadas a seguir.

A) Por extenso.

B) Utilizando uma propriedade.

C) Graficamente.

Resolução

A) Por extenso, temos o que segue:

S = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno}

Nesse caso, listamos os elementos entre chaves, separados entre si por vírgula. A ordem na qual os elementos aparecem é irrelevante.

B) Utilizando uma propriedade, temos o que segue.

S = { x | x é um planeta do Sistema Solar}

Expressamos, dessa vez, a propriedade em comum aos elementos do conjunto. Costumamos chamar de x uma variável que assume elementos correspondentes à propriedade, ou seja, x é um elemento genérico do conjunto S. Devemos ler a barra | como tal que. A leitura completa fica assim: "o conjunto S é formado por elementos x, tal que x é um planeta do Sistema Solar".

C) Graficamente, temos o que se mostra na figura a seguir:

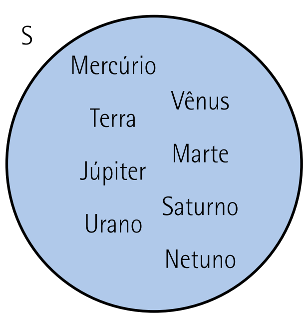


Figura 2 – Representação gráfica do conjunto S

Nesse caso, indicamos o nome do conjunto próximo a uma figura geométrica fechada, seja um círculo, seja um polígono fechado qualquer. A lista de elementos foi posicionada na área do círculo. Muitas vezes, os diagramas de Venn-Euler apenas expressam a relação entre diferentes conjuntos dentro de uma situação, não havendo listagem de elementos.

Observação

A ordem dos elementos que pertencem a um conjunto não importa. Você pode organizá-los do jeito que achar melhor. A repetição de elementos também é irrelevante, pois cada um será considerado apenas uma vez.

2.1 Relações

As relações fazem comparações entre conjuntos, ou entre um elemento e um conjunto. Veremos, a seguir, as relações de pertinência, de igualdade e de inclusão.

2.1.1 Relação de pertinência

A pertinência é um tipo de relação entre um elemento e um conjunto. Ela indica a existência ou a ausência de um elemento em um conjunto. Para isso, são utilizados dois símbolos de operadores relacionais:

- $\in$, que significa "pertence";
- $\notin$, que significa "não pertence".

Veremos, a seguir, alguns exemplos e suas interpretações.

- $1 \in A$. Lemos: "1 pertence a A", ou seja, o elemento 1 pertence ao conjunto A.
- $3 \notin A$. Lemos: "3 não pertence a A", ou seja, o elemento 3 não pertence ao conjunto A.
- $2 \in \{1, 2, 3\}$. O elemento 2 pertence ao conjunto formado pelos elementos 1, 2 e 3.
- $4 \notin \{1, 2, 3\}$. O elemento 4 não pertence ao conjunto formado pelos elementos 1, 2 e 3.
- $6 \in \{x \mid x \text{ é número par}\}$. O elemento 6 pertence ao conjunto dos números pares.
- $9 \notin \{x \mid x \text{ é número primo}\}$. O elemento 9 não pertence ao conjunto dos números primos.
- $9 \notin \{x \in N \mid 4 \leq x \leq 8\}$. O elemento 9 não pertence ao conjunto dos números naturais entre 4 e 8.
- $8 \notin \{x \in N \mid x > 8\}$. O elemento 8 não pertence ao conjunto dos números naturais maiores do que 8.

Vamos reforçar a leitura da definição do conjunto do penúltimo item. O símbolo N representa, na matemática, o conjunto de todos os números naturais, ou seja, números inteiros não negativos. Após a barra, encontramos um intervalo de restrição para os elementos desse conjunto. Então, $x \in N \mid 4 \leq x \leq 8$ pode ser lido como: "x pertence ao conjunto dos números naturais, tal que x é maior ou igual a 4 e menor ou igual a 8". Nesse caso, seria fácil reescrever o conjunto por extenso: {4, 5, 6, 7, 8}. Portanto, o elemento 9 não pertence ao conjunto em questão.

Também vamos reforçar a leitura do conjunto do último item. Temos, agora, um conjunto que contém elementos naturais, mas maiores do que 8. Podemos reescrever o conjunto por extenso. No entanto, nesse caso, precisamos adicionar reticências para indicar que a lista de elementos é infinita, fazendo assim: {9, 10, 11, 12, ...}. Logo, o elemento 8 não pertence ao conjunto em questão.

2.1.2 Relação de igualdade

A relação de igualdade também estabelece uma comparação entre dois conjuntos. Consideramos que existe uma relação de igualdade entre conjuntos quando suas listas de elementos são exatamente iguais. Por exemplo, considere os conjuntos A e B, mostrados a seguir.

$A = \{x \in N \mid x \text{ é ímpar}\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11,...\}$

Nesse caso, dizemos que A = B, pois mesmo que os conjuntos tenham sido representados de formas diferentes, eles remetem à mesma lista de elementos.

Considere, agora, os conjuntos C e D, mostrados a seguir.

$C = \{x \in N \mid x \text{ é par}\}$

$D = \{2, 4, 6\}$

As listas de elementos dos dois conjuntos não são iguais, mesmo que haja elementos em comum. Podemos dizer que C é diferente de D, ou seja, $C \neq D$.

2.1.3 Conjunto universo e relação de inclusão

O conjunto universo, geralmente denominado U, é o conjunto que tem todos os elementos de um contexto. Definido o universo, todos os conjuntos do contexto seriam conjuntos integrantes de U, e todos os elementos pertencem a U.

Nesse contexto, um subconjunto é um conjunto que integra outro. O diagrama da figura seguinte mostra o relacionamento entre um conjunto universo U com seus dois subconjuntos: A e B.

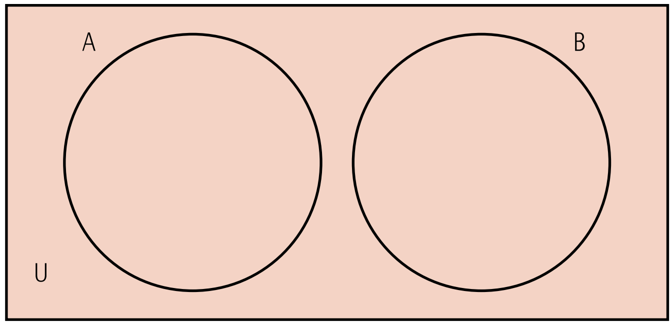


Figura 3 – Um conjunto universo U que tem dois subconjuntos (A e B)

Nesse caso, costumamos dizer que “A está contido em U”, assim como “B está contido em U”. Essa relação entre os conjuntos é o que chamamos de relação de inclusão. Existem quatro principais símbolos de operadores relacionais que podemos utilizar nesse contexto (Oliveira, 2016). Eles estão elencados, a seguir.

- $\subset$, que significa “está contido em”.
- $\not\subset$, que significa “não está contido em”.
- $\supset$, que significa “contém”.
- $\not\supset$, que significa “não contém”.

Sobre a disposição da figura anterior, podemos estabelecer diversas relações verdadeiras, como as indicadas a seguir.

- $A \subset U$. Lemos: “A está contido em U”, ou seja, A é subconjunto de U.
- $B \subset U$. Lemos: “B está contido em U”, ou seja, B é subconjunto de U.
- $A \not\subset B$. Lemos: “A não está contido em B”, ou seja, A não é subconjunto de B nesse contexto.
- $B \not\subset A$. Lemos: “B não está contido em A”.
- $U \supset A$. Lemos: “U contém A”, ou seja, no universo existe um subconjunto chamado A.
- $U \supset B$. Lemos: “U contém B”, ou seja, no universo existe um subconjunto chamado B.
- $A \not\supset U$. Lemos: “A não contém U”.
- $B \not\supset U$. Lemos: “B não contém U”.

Observação

Considerando um conjunto A, é correto afirmarmos que $A \subset A$. Isso significa que um conjunto é sempre considerado subconjunto dele mesmo.

Lembrete

A relação de pertinência é uma relação entre elemento e conjunto. As relações de igualdade e de inclusão ocorrem entre conjuntos.

2.2 Conjuntos vazio e unitário

Um conjunto vazio, cuja representação é $\emptyset$ ou { }, é um conjunto que não tem elementos. Uma propriedade contraditória qualquer pode ser utilizada em sua definição (Dante; Viana, 2019). Preste atenção no conjunto A, mostrado a seguir.

$$A = \{x \in N \mid x < 0\}$$

Não existem números naturais menores do que 0. Logo, o conjunto A não tem elementos. Nesse caso, o conjunto A é um conjunto vazio, ou seja, $A = \emptyset$.

Um conjunto unitário é um conjunto que tem apenas um elemento. Se tivermos $B = \{3\}$ e $C = \{a\}$, tanto B quanto C serão conjuntos unitários, pois cada um deles abriga apenas um elemento.

Observação

Considerando um conjunto A, é correto afirmarmos que $\emptyset \subset A$. Isso significa que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

2.3 Operações entre conjuntos

As operações entre conjuntos diferem das relações que vimos anteriormente. Em uma relação, apenas fazemos comparações entre conjuntos. Agora, veremos operações capazes de resultar em um novo conjunto a partir de outros já existentes. Estudaremos as seguintes operações: união, interseção, diferença e complementar.

Saiba mais

As operações entre conjuntos são fundamentais para entender as operações em bancos de dados. Embora a aplicação direta das operações entre conjuntos seja mais evidente em bancos de dados relacionais, muitos bancos de dados NoSQL oferecem funcionalidades que permitem operações semelhantes, adaptadas às suas arquiteturas específicas.

Para saber mais sobre o tema, consulte o livro:

RAMAKRISHNAN, R.; GEHRKE, J. *Sistemas de gerenciamento de banco de dados*. Porto Alegre: AMGH, 2011. E-book.

2.3.1 União

A operação de união entre dois conjuntos A e B resulta em um conjunto formado por todos os elementos de A e por todos os elementos de B. O símbolo que representa o operador de união é o $\cup$. Podemos definir o conjunto A $\cup$ B da forma expressa a seguir (Dante; Viana, 2019).

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

A definição anterior nos diz que a união entre os conjuntos A e B resulta em um conjunto formado por elementos x, tal que x pertence a A ou x pertence a B. Desse modo, x representa os elementos que participam exclusivamente do conjunto A, os elementos que participam exclusivamente do conjunto B e, também, os elementos que participam de ambos os conjuntos.

Graficamente, A $\cup$ B será composto pelos elementos que pertencem às regiões destacadas no diagrama da figura seguinte. Note que os subconjuntos do universo foram desenhados com uma região central de sobreposição entre eles. Essa região abriga os elementos comuns a ambos os conjuntos.

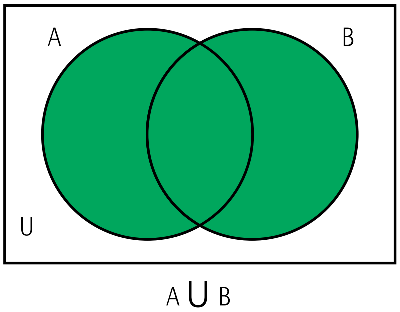


Figura 4 – União entre os conjuntos A e B

Veja os exemplos a seguir:

- {1, 2, 3} ∪ {4, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- {1, 2, 3} ∪ {3, 4, 5} = {1, 2, 3, 4, 5}
- {2, 3} ∪ {2, 3} = {2, 3}
- {2} ∪ {2, 3, 4} = {2, 3, 4}
- {2} ∪ ∅ = {2}

Lembrete

Neste livro-texto, estamos utilizando o símbolo U para representar conjunto universo. Já o símbolo ∪ representa o operador de união entre conjuntos.

2.3.2 Interseção

Conforme já abordamos, os conjuntos que participam de um contexto podem ter elementos em comum. Se considerarmos dois conjuntos A e B, a operação de interseção entre eles resulta em um conjunto formado apenas pelos elementos que pertencem tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B. O símbolo que representa o operador de interseção é o ∩. Podemos definir o conjunto A ∩ B da forma exposta a seguir (Dante; Viana, 2018).

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

A definição anterior nos diz que a interseção entre os conjuntos A e B resulta em um conjunto formado por elementos x, tal que x pertence a A e x pertence a B. Desse modo, x representa os elementos em comum entre os conjuntos A e B.

Graficamente, A ∩ B será composto pelos elementos que pertencem à região destacada no diagrama da figura seguinte. Você se lembra da região de sobreposição entre os conjuntos A e B? Para a operação de interseção, essa é a única região de interesse, já que ela abriga os elementos comuns entre os dois conjuntos.

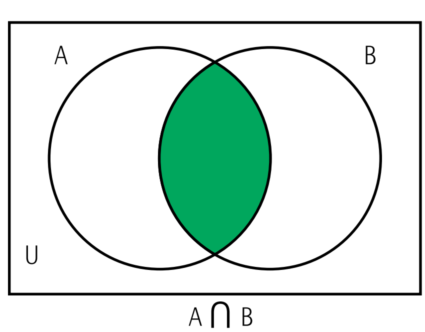


Figura 5 – Interseção entre os conjuntos A e B

Veja os exemplos a seguir:

- $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$
- $\{2, 3\} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\}$
- $\{2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$
- $\{2\} \cap \emptyset = \emptyset$

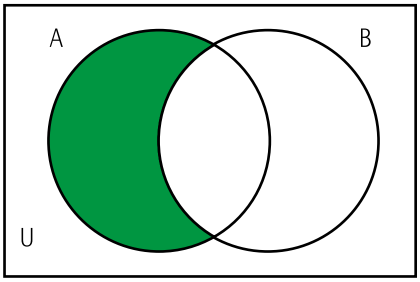
2.3.3 Diferença

Considerando o conjunto A e o conjunto B, a operação de diferença entre A e B, expressa como A – B (lemos: "A menos B"), resulta em um conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Podemos definir o conjunto A – B da forma a seguir (Dante; Viana, 2018).

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A definição anterior nos diz que a diferença entre os conjuntos A e B resulta em um conjunto formado por elementos x, tal que x pertence a A e x não pertence a B. Desse modo, x representa apenas os elementos exclusivos do conjunto A.

Graficamente, A – B será composto pelos elementos que pertencem à região destacada no diagrama da figura seguinte.



A – B

Figura 6 – Diferença entre A e B

Veja os exemplos a seguir:

- $\{1, 2, 3\} - \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

- $\{2, 3\} - \{2, 3\} = \emptyset$
- $\{2\} - \{2, 3, 4\} = \emptyset$
- $\{2\} - \emptyset = \{2\}$

Para realizarmos a operação de diferença, podemos, primeiro, considerar de forma completa os elementos do primeiro conjunto e, depois, excluir os elementos que são comuns ao segundo conjunto. Como exemplo, vamos resolver, passo a passo, o segundo exemplo mostrado anteriormente: $\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\}$.

Primeiro, consideramos por completo o primeiro conjunto, ou seja, $\{1, 2, 3\}$. Agora, procuramos os elementos dele que também fazem parte do conjunto $\{3, 4, 5\}$, e notamos que o elemento 3 é comum a eles. Esse elemento deve ser excluído da solução. Logo, o conjunto solução dessa operação é o $\{1, 2\}$.

Observação

A operação de diferença entre conjuntos não é comutativa, o que significa que a troca da ordem de seus operandos afeta o resultado (assim como acontece com a operação aritmética de subtração). Observe os exemplos a seguir.

- $\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} = \{1\}$
- $\{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} = \{4\}$

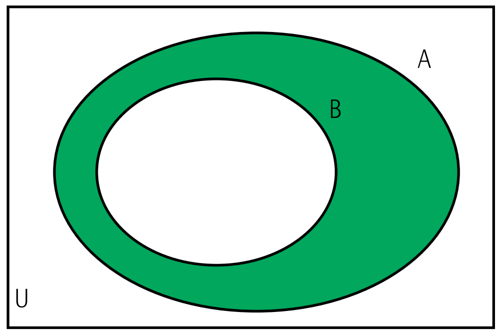
2.3.4 Complementar

Para a operação complementar ocorrer, é necessário que haja uma relação de inclusão entre dois conjuntos. Se tivermos B como subconjunto de A, ou seja, $B \subset A$, podemos achar o **complementar de** B **em relação a** A, que é expresso como $\complement_A^B$. Nesse caso, $\complement_A^B$ será o conjunto de elementos de A que não pertencem a B. Trata-se de uma diferença entre conjuntos (A – B), mas com a restrição da necessidade de inclusão entre eles. Podemos pensar na operação complementar como um caso particular da operação de diferença. Utilizaremos a definição matemática a seguir.

$$\complement_A^B = A - B \leftrightarrow B \subset A$$

Podemos ler essa definição assim: "o complementar de B em relação a A é igual a A menos B se, e somente se, B estiver contido em A".

Graficamente, C_A^B será composto pelos elementos que pertencem à região destacada no diagrama da figura seguinte, que representa uma situação na qual B atua como subconjunto de A.

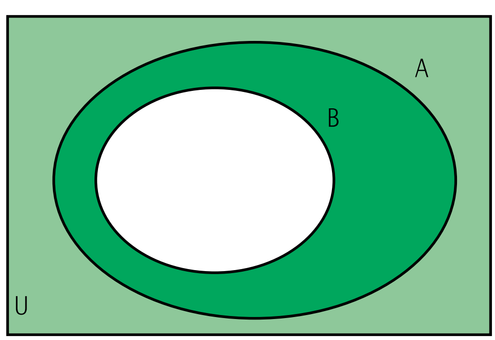


$C_A^B = A - B$

Figura 7 – Complementar do conjunto B em relação ao conjunto A

A operação complementar costuma ser utilizada em relação ao próprio universo do contexto. Utilizando a mesma disposição de conjuntos da figura anterior, temos que o complementar de B em relação ao universo U é dado por $B^C = C_U^B = U - B$.

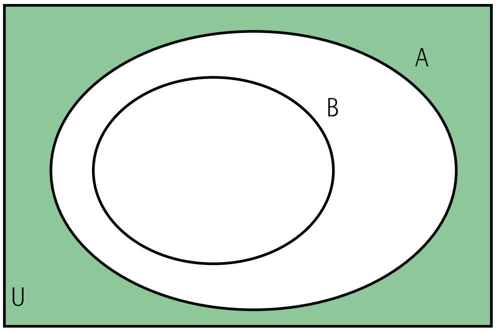
A notação B^C é uma forma reduzida de expressar o complementar de B em relação ao seu universo. A expressão gráfica dessa operação pode ser vista na figura seguinte.



$B^c = C_A^B = U - B$

Figura 8 – Complementar do conjunto B em relação ao seu universo

Nesse mesmo contexto, também podemos expressar o complementar de A em relação ao universo U, afinal, também é verdade que $A \subset U$. Podemos expressar essa operação como A^C, que resulta nos elementos existentes na região destacada na figura a seguir.



$$A^c = C_U^A = U - A$$

Figura 9 – Complementar do conjunto A em relação ao seu universo

Nos exemplos a seguir, trabalharemos com todas as operações entre conjuntos para fixarmos o entendimento desse tópico.

Exemplo de aplicação

1) Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 6, 9, 10\}$ e $C = \{2, 4, 5, 8, 9\}$. Encontre o conjunto resultante das operações mostradas a seguir.

A) $A \cup B$

B) $A \cap B$

C) $A \cup B \cup C$

D) $A \cap B \cap C$

E) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

F) $A - B$

G) $B - C$

H) $(A - B) \cup (B - C)$

I) A^C

J) C^C

Resolução

É interessante representarmos graficamente os conjuntos, pois apesar de isso não ser imprescindível, ficará mais fácil enxergarmos o relacionamento entre eles.

Considerando que os conjuntos fazem parte do mesmo universo U, temos o diagrama de Venn-Euler ilustrado a seguir, que mostra o relacionamento entre os conjuntos e a lista de elementos em cada região.

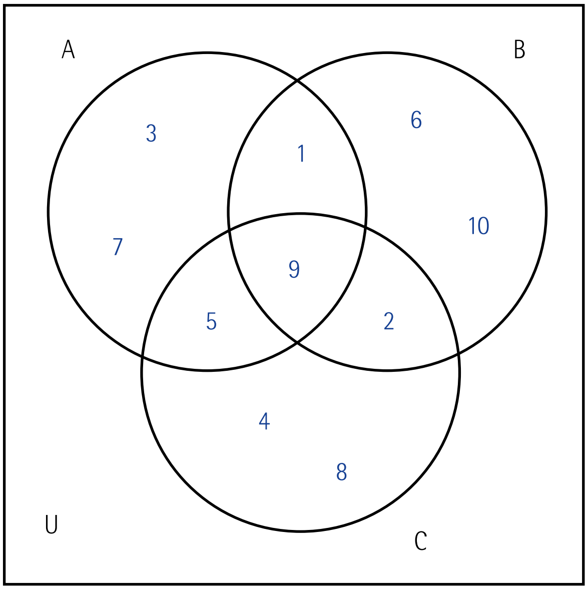


Figura 10 – Conjuntos A, B e C do universo U

Perceba que os conjuntos foram desenhados de forma sobreposta, considerando as interseções entre eles. Os elementos foram distribuídos de forma a ocupar a região adequada. O elemento 9, que pertente a A, B e C, foi posicionado na área central. O elemento 1, que pertence a A e a B, mas não pertence a C, foi posicionado na área de interseção entre A e B, mas fora da região central. Os elementos 3 e 7, que pertencem somente ao conjunto A, foram posicionados na área exclusiva de A. O mesmo raciocínio foi adotado para os outros elementos. Agora, vamos à resolução dos itens.

A) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

Consideramos todos os elementos de A, assim como todos os elementos de B.

B) $A \cap B = \{1, 9\}$

Pegamos apenas os elementos comuns entre A e B.

C) $A \cup B \cup C = U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Consideramos todos os elementos de A, todos os elementos de B e também todos os elementos de C. Nesse contexto, isso corresponde ao próprio conjunto universo.

D) $A \cap B \cap C = \{9\}$

Temos um conjunto unitário que contém o elemento que pertence tanto a A, quanto a B, quanto a C.

E) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{1, 2, 9\}$

Aqui, podemos resolver a expressão por partes, priorizando as operações que se encontram entre parênteses. Acompanhe, a seguir, a resolução passo a passo.

$(A \cap B) = \{1, 9\}$

$(B \cap C) = \{2, 9\}$

$\{1, 9\} \cup \{2, 9\} = \{1, 2, 9\}$

F) $A - B = \{3, 5, 7\}$

Primeiro, consideramos todos os elementos de A. Depois, descartamos aqueles que também pertencem a B.

G) $B - C = \{1, 6, 10\}$

Primeiro, consideramos todos os elementos de B. Depois, descartamos aqueles que também pertencem a C.

H) $(A - B) \cup (B - C) = \{1, 3, 5, 6, 7, 10\}$

A resolução por partes é expressa a seguir:

$(A - B) = \{3, 5, 7\}$

$(B - C) = \{1, 6, 10\}$

$\{3, 5, 7\} \cup \{1, 6, 10\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 10\}$

I) $A^C = U - A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Nesse caso, primeiro, consideramos todo o universo U. Depois, descartamos os elementos de U que pertencem a A. Essa operação equivale a U – A.

J) $C^c = U - C = \{1, 3, 6, 7, 10\}$

Primeiro, consideramos todo o universo U. Depois, descartamos os elementos que pertencem a C. Essa operação equivale a U – C.

2) Sobre as operações entre conjuntos, classifique cada afirmativa a seguir como verdadeira ou como falsa.

I – Se o conjunto A tem 5 elementos e o conjunto B tem 4 elementos, a interseção entre A e B terá necessariamente 4 elementos.

II – Se o conjunto A tem 5 elementos e o conjunto B tem 4 elementos, a união entre A e B terá necessariamente 9 elementos.

III – Sabe-se que $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, se o conjunto A tem 7 elementos e o conjunto B tem 11 elementos, a união entre A e B terá necessariamente 18 elementos.

IV – Sabe-se que A é subconjunto do universo U. Se $U = \emptyset$, então $A = \emptyset$.

Resolução

I – Afirmativa falsa.

Justificativa: não conhecemos os elementos de A nem os de B para afirmar algo sobre a quantidade de elementos que são comuns entre eles.

II – Afirmativa falsa.

Justificativa: não conhecemos os elementos de A nem os de B. Se houver qualquer elemento comum entre eles, a união entre esses conjuntos terá menos de 9 elementos. Por exemplo, se $B \subset A$, temos que $A \cap B = A$, ou seja, a união terá apenas 5 elementos.

III – Afirmativa verdadeira.

Justificativa: apesar de desconhecermos os elementos dos conjuntos, sabemos que não existem elementos em comum entre A e B, pois $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, a união entre eles terá 18 elementos (resultado da soma dos 7 elementos de A com os 11 elementos de B).

IV – Afirmativa verdadeira.

Justificativa: se um universo é um conjunto vazio, qualquer subconjunto seu também será um conjunto vazio.

3) Uma plataforma de *streaming* de filmes e séries classifica seus títulos de acordo com categorias. Considere que o conjunto D reúne todos os filmes de drama da plataforma e que o conjunto M reúne todos os títulos com a atriz Meryl Streep. Escreva uma operação entre esses conjuntos que reúna todos os filmes dramáticos com a atriz disponíveis na plataforma.

Resolução

Para reunirmos os filmes dramáticos com Meryl Streep, precisamos de títulos da plataforma que pertençam ao conjunto D e que também pertençam ao conjunto M. Logo, os títulos de interesse devem pertencer à interseção entre esses dois conjuntos, ou seja, $D \cap M$.

Lembrete

No caso dos conjuntos, a ordem dos elementos que pertencem a eles não tem importância. O mesmo ocorre se os elementos se repetirem. A repetição é totalmente irrelevante, pois cada elemento é considerado somente uma vez.

Saiba mais

Python é uma das linguagens de programação que têm uma estrutura de dados denominada *set*, termo usado em inglês para conjunto. Essa estrutura é baseada na teoria matemática e aceita as operações que estudamos neste tópico. Você pode ler a respeito na documentação oficial da linguagem Python:

ESTRUTURA de dados. *Python*. [s.d.].

Disponível em: https://tinyurl.com/4aydpkn6. Acesso em: 16 out. 2024.

2.4 Conjuntos numéricos

Passaremos agora a descrever os principais conjuntos numéricos existentes. No nosso sistema decimal de numeração, utilizamos apenas 10 algarismos, que vão de 0 a 9, para representar quantidades. Quando combinamos algarismos entre si, formamos numerais, que representam qualquer número (quantidade) que desejarmos representar. Esses números podem ser classificados por tipo e divididos em conjuntos. A matemática chama-os de conjuntos numéricos. Podemos pensar que esses conjuntos identificam o nível de complexidade dos números em questão. Veremos os principais conjuntos numéricos adotados, começando pelos mais simples.

2.4.1 Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Começaremos com o conjunto dos números mais simples e intuitivos de todos. Inclusive, já nos referimos a ele nas seções anteriores deste livro-texto.

O conjunto dos números naturais, expresso pelo símbolo N, é constituído por todos os números inteiros não negativos, incluindo o zero. Desse modo, temos um conjunto que se inicia em zero e se estende infinitamente. Afinal, sempre podemos pensar no próximo número natural, e nunca atingimos um limite. Esse conjunto é representado a seguir.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

O conjunto dos números naturais apresenta um subconjunto de destaque. Para conjuntos numéricos, ficou convencionado que a inclusão de um asterisco próximo ao símbolo de representação do conjunto significa a exclusão do zero. Dessa forma, temos o que segue:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ (conjunto dos números naturais não nulos)

2.4.2 Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Os números inteiros, que englobam também os naturais, são todos aqueles que podem ser representados sem casas decimais ou frações (a não ser que sejam frações com denominador igual a 1). Pense nos números naturais, mas inclua também os números negativos. Temos, nesse caso, um conjunto que se estende infinitamente nos dois sentidos da contagem, conforme exposto a seguir.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

O conjunto dos números inteiros apresenta alguns subconjuntos de destaque. Além do asterisco, que indica supressão do zero, podemos utilizar mais símbolos. A inclusão do sinal "+" próximo ao símbolo de representação do conjunto significa a exclusão de todos os números negativos. Já o sinal "–" (menos) significa a exclusão de todos os números positivos. Dessa forma, podemos ter os conjuntos mostrados a seguir.

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (conjunto dos números inteiros não nulos)

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ (conjunto dos números inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ (conjunto dos números inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ (conjunto dos números inteiros não nulos e não negativos)

$\mathbb{Z}^*_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ (conjunto dos números inteiros não nulos e não positivos)

2.4.3 Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, engloba os dois conjuntos tratados anteriormente. Podemos definir o conjunto dos números racionais como aquele que tem os números que podem ser expressos na forma de fração entre inteiros. Nesse caso, há a seguinte propriedade:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Vemos que ***b*** fica restrito a números inteiros não nulos, pois não podemos atribuir 0 ao denominador de uma fração e, ainda assim, mantê-la dentro do conjunto dos números racionais. Os mesmos símbolos *, + e –, podem ser associados ao símbolo $\mathbb{Q}$, formando subconjuntos.

A seguir, veremos alguns exemplos de números racionais, que incluem números decimais e dízimas periódicas (numerais cujas casas decimais são infinitas, mas apresentam periodicidade).

- $\frac{3}{5}$, que é uma fração entre inteiros
- $-\frac{7}{2}$, que é uma fração entre inteiros
- 0,71, que pode ser escrito como $\frac{71}{100}$
- –0,3, que pode ser escrito como $-\frac{3}{10}$
- 5, que pode ser escrito como $\frac{5}{1}$
- 0,4444..., que pode ser escrito como $\frac{4}{9}$
- 0,121212..., que pode ser escrito como $\frac{12}{99}$

2.4.4 Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

O conjunto dos números irracionais, $\mathbb{I}$, engloba os números cujos formatos decimais são infinitos e não periódicos (Margutl, 2017). Diversas constantes matemáticas, como o famoso π (pi), são números irracionais. Muitas raízes também se encaixam nessa categoria. Note que não existe interseção entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Vamos ver, a seguir, alguns exemplos de números irracionais.

- π = 3,141592653... A constante π resulta da divisão do comprimento de uma circunferência por seu diâmetro. Note que as casas decimais são infinitas e não periódicas, e não podemos expressar π como uma fração entre inteiros.

- e = 2,71828182... Esse número é conhecido como constante de Euler, sendo muito utilizado em funções exponenciais e logarítmicas.

- $\sqrt{2} = 1{,}414221356...$

- $\sqrt{5} = 2{,}23606797...$

2.4.5 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, representa a união entre os conjuntos dos números racionais e irracionais. Ele engloba, portanto, todos os conjuntos numéricos vistos anteriormente. Podemos defini-lo da seguinte forma:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$

Tal conjunto parece englobar todos os números existentes, correto? Só que não é bem assim. Há números que estão fora do conjunto dos números reais, que são aqueles que apresentam parte imaginária. Eles fazem parte de um conjunto ainda maior, denominado conjuntos dos números complexos. Esse conjunto contém o conjunto dos números reais. Porém, não vamos abordá-lo, pois não utilizaremos números imaginários no conteúdo deste livro-texto.

O relacionamento existente entre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais é mostrado na figura a seguir, no formato de um diagrama. Note as relações de inclusão existentes entre eles. No estudo de funções, conjuntos numéricos serão abordados com certa frequência.

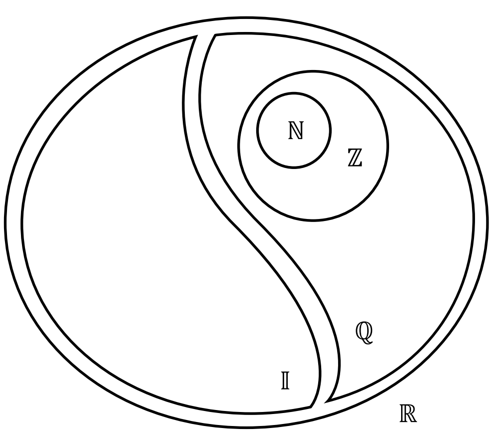


Figura 11 – Diagrama que mostra relações entre conjuntos numéricos

Fonte: Marguti (2017, p. 14).

Observação

No mundo do desenvolvimento de software, linguagens de programação explicitamente tipadas são aquelas em que os tipos de dados devem ser definidos pelo programador no código-fonte. Ao selecionarmos o tipo de uma variável numérica em uma linguagem explicitamente tipada, como a linguagem C, o conteúdo dessa variável fica restrito a um número finito de elementos de um conjunto numérico. Os exemplos a seguir representam declarações, em C, das variáveis x, y e z.

unsigned int x; ($x \in \mathbb{N}$)

int y; ($y \in \mathbb{Z}$)

float z; ($z \in \mathbb{R}$)

Conjuntos numéricos, na teoria matemática, podem ser infinitos. Porém, quando aplicamos seus conceitos a sistemas computacionais, estaremos lidando com recursos finitos. No nosso exemplo, a memória reservada a cada variável tem uma quantidade limitada. O tipo de dado determina a quantidade de memória que deve ser reservada para a variável em questão e o intervalo de valores que ela é capaz de suportar. Portanto, de forma geral, é uma boa prática utilizar o menor conjunto numérico possível que atenda às necessidades da variável.

2.5 Número de elementos de conjuntos

Em diversos contextos, principalmente nos relacionados ao campo da estatística, estamos mais interessados no número de elementos das regiões de conjuntos do que na listagem desses elementos. Se considerarmos os conjuntos A e B como os únicos subconjuntos do universo U, denotaremos por n o número de elementos de dado conjunto. Assim, temos o que segue.

- **n(A)** = número de elementos do conjunto A.
- **n(B)** = número de elementos do conjunto B.
- **n(U)** = número de elementos do universo.
- **n(A∪B)** = número de elementos da união entre os conjuntos A e B.
- **n(A∩B)** = número de elementos da interseção entre os conjuntos A e B.

- **n(A) – n(A⋂B)** = número de elementos exclusivos do conjunto A.

- **n(B) – n(A⋂B)** = número de elementos exclusivos do conjunto B.

- **n((A⋃B)c)** = número de elementos do complementar da união entre A e B. Na prática, consideramos aqui os elementos que pertencem ao universo, mas não pertencem nem a A nem a B, como mostra a figura a seguir.

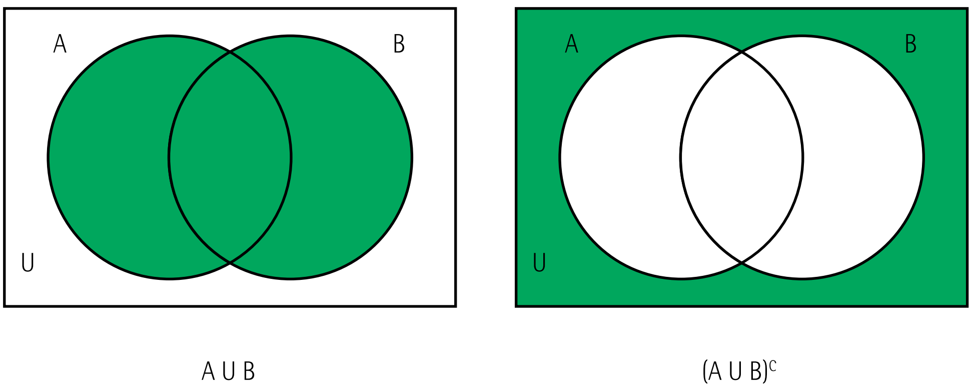


Figura 12 – União entre os conjuntos A e B (à esquerda) e complementar da união entre os conjuntos A e B (à direita)

Vamos acompanhar o exemplo a seguir para entender melhor a aplicabilidade da contagem de elementos.

Exemplo de aplicação

Em uma empresa de tecnologia, 18 funcionários dominam a linguagem de programação Python e 27 dominam a linguagem Java, sendo que 10 deles dominam ambas as linguagens. Sabe-se, também, que há 15 funcionários que não conhecem qualquer uma dessas linguagens de programação. Quantos funcionários trabalham nessa empresa?

Resolução

Se você está com vontade de fazer 18 + 27 + 10 + 15 = 70 e passar para o próximo assunto do livro-texto, tenha calma. Primeiro, vamos definir alguns conjuntos que fazem parte desse contexto:

- **P** = conjunto de funcionários que dominam Python.

- **J** = conjunto de funcionários que dominam Java.

- **E** = conjunto de funcionários da empresa.

O enunciado diz que 18 pessoas da empresa dominam Python e que 27 pessoas dominam Java, mas existe uma interseção entre elas: 10 pessoas dominam ambas as linguagens. Essas 10 pessoas, portanto, pertencem tanto a P quanto a J, ou seja, pertencem a $P \cap J$. Para sabermos o número de pessoas que dominam exclusivamente Python, devemos subtrair a interseção, ou seja: n(P) menos $n(P \cap J)$. Temos, portanto, a situação a seguir.

$n(P) = 18$

$n(J) = 27$

$n(P \cap J) = 10$

$n(P) - n(P \cap J) = 18 - 10 = 8$ (8 pessoas dominam exclusivamente Python)

$n(J) - n(P \cap J) = 27 - 10 = 17$ (17 pessoas dominam exclusivamente Java)

Ainda existem 15 pessoas que, apesar de fazerem parte do universo E por serem funcionários da empresa, não participam nem de P nem de J. Essas pessoas estão posicionadas no complementar da união entre P e J, ou seja, estão posicionadas na região $(P \cap J)^C$. A contagem de elementos dessa região, portanto, é expressa da forma a seguir.

$n((P \cap J)^C) = 15$

Com isso, podemos montar um diagrama e posicionar as contagens nas regiões adequadas, como mostra a figura a seguir.

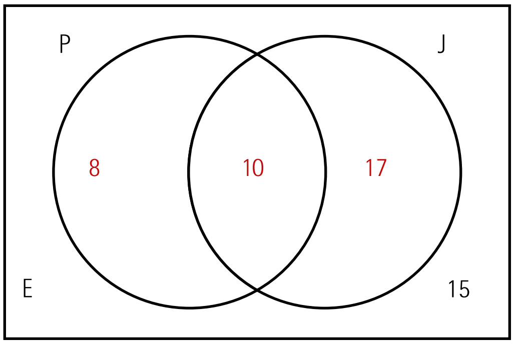


Figura 13 – Contagem de elementos de cada região do diagrama do universo E

Lembre-se de que não estamos posicionando elementos nas regiões e, sim, contagens de elementos.

Lendo o diagrama, percebemos que:

- 8 pessoas dominam exclusivamente Python.
- 17 pessoas dominam exclusivamente Java.

- 10 pessoas dominam ambas as linguagens.
- 15 pessoas não dominam qualquer uma delas.

No total, temos 18 funcionários que dominam Python (sendo que 10 deles também dominam Java) e 27 funcionários que dominam Java (sendo que 10 deles também dominam Python).

Agora, fica bem fácil respondermos à pergunta do enunciado. Para sabermos quantos funcionários trabalham na empresa, precisamos descobrir o número de elementos do universo E. Para isso, basta realizarmos o somatório do número de elementos das regiões, conforme feito a seguir:

$n(E) = 8 + 10 + 17 + 15 = 50$

Logo, 50 funcionários trabalham na empresa.

Resumo

Nesta unidade, revisamos conceitos básicos da matemática e aprendemos a respeito de teoria de conjuntos. Esses conhecimentos serão importantes para prosseguirmos com o desenvolvimento do conteúdo da disciplina.

Começamos nosso estudo com a leitura de expressões algébricas, vimos conceitos de proporcionalidade e aplicamos esses conceitos no cálculo de porcentagens, que são essenciais para a área de finanças e de estatística e para diversos outros contextos.

Prosseguimos com as definições de conjunto e de elemento. Em sequência, vimos as relações de igualdade e de inclusão entre conjuntos. Depois, passamos a trabalhar com operações, em que estudamos exemplos de aplicação da teoria dos conjuntos. Aprendemos, também, a trabalhar com conjuntos numéricos, que serão muito importantes para o estudo de funções. Por fim, lidamos com a contagem de elementos das regiões dos conjuntos, assunto relevante para a área estatística.

Exercícios

Questão 1. Observe a figura a seguir, nela vemos uma promoção do tipo "compre 3 e leve 4 potes". Considerando que o valor de cada pote, de modo individual, é R$ 50,00, analise as afirmativas na sequência.

Figura 14 – Promoção em que o comprador compra 3 potes e recebe 4

I – O cliente que comprar 2 potes pagará R$ 100,00.

II – O cliente que comprar 3 potes, levará 4 e terá desconto percentual de 25%.

III – O valor do pote para o cliente que comprar 3 potes e levar 4 será igual a R$ 37,50.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) I e II, apenas.

C) I, II e III.

D) II, apenas.

E) II e III, apenas.

Resposta correta: alternativa C.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: a promoção mostrada na figura não vale para o cliente que comprar 2 potes. Logo, o cliente que comprar 2 potes pagará o preço unitário de R$ 50,00 que, multiplicado por 2, resulta em R$ 100,00.

II – Afirmativa correta.

Justificativa: comprando 4 unidades fora da promoção, um cliente gasta 4x R$ 50,00, ou seja, R$ 200,00.

Na promoção, se o cliente comprar 3 unidades, levará 4. Logo, na promoção, o valor das 4 unidades será igual a 3x R$ 50,00, ou seja, R$ 150,00.

Para sabermos o desconto percentual obtido pelo cliente que comprar na promoção, fazemos o que se descreve a seguir:

- Calculamos a diferença entre o "valor de 4 unidades sem promoção" (R$ 200,00) e o "valor de 4 unidades com promoção" (R$ 150,00).
- Dividimos o valor dessa diferença (R$ 200,00 - R$ 150,00 = R$ 50,00) pelo "valor de 4 unidades sem promoção" (R$ 200,00).
- Multiplicamos o valor dessa divisão por 100%, para termos o resultado em percentual.

Esse procedimento pode ser visto no cálculo a seguir:

$$\%\ \text{desconto} = \frac{\text{Valor de 4 unidades sem promoção} - \text{Valor de 4 unidades com promoção}}{\text{Valor de 4 unidades sem promoção}}.100\%$$

$$\%\,\text{desconto} = \frac{R\$200,00 - R\$150,00}{R\$200,00}.100\%$$

$$\%\,\text{desconto} = \frac{R\$50,00}{R\$200,00}.100\% = 25\%$$

III – Afirmativa correta.

Justificativa: para sabermos o valor do pote para o cliente que comprar o pacote, dividimos o "valor de 4 unidades com promoção" (R$ 150,00) pelo "número de unidades que o cliente levará" (4).

Esse procedimento pode ser visto no cálculo a seguir:

$$\text{Valor da unidade} = \frac{\text{Valor de 4 unidades com promoção}}{\text{Número de unidades que o cliente leva}}$$

$$\text{Valor da unidade} = \frac{R\$150,00}{4} = R\$37,50$$

Questão 2. Considere os conjuntos A = {15,20,25}, B = {1,2,3} e C = {-1,0,1} e analise as afirmativas.

I – O conjunto D formado pela união dos conjuntos A, B e C, ou seja, $D = A \cup B \cup C$, é dado por D = {-1,0,1,1,2,3,15,20,25}.

II – O conjunto E, cujos elementos são o dobro dos valores dos elementos do conjunto A, possui o dobro do número de elementos do conjunto A.

III – O conjunto F expresso por $A \cup B \cap C$ é dado por F = {1}.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) III, apenas.

C) I e II, apenas.

D) II e III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa B.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa incorreta.

Justificativa: para determinarmos o conjunto D, consideramos todos os elementos dos conjuntos A, B e C. Logo, temos: $D = A \cup B \cup C$ = {-1,0,1,2,3,15,20,25}.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o conjunto E é dado por E = {30,40,50}. Assim, vemos que o conjunto E e o conjunto A têm o mesmo número de elementos.

III – Afirmativa correta.

Justificativa: vamos fazer $A \cup B \cap C$ nas duas etapas mostradas a seguir.

$A \cup B$ = {1,2,3,15,20,25}

$A \cup B \cap C$ = F = {1}.