Unidade III

5 EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Neste capítulo, estudaremos as operações e as propriedades de potenciação e de logaritmos. Também veremos as funções associadas a essas operações: as funções exponenciais e as funções logarítmicas.

5.1 Exponenciais

Veremos conceitos e propriedades relativos ao contexto de exponenciais.

Você já deve ter ouvido frases como "a população do mundo está crescendo exponencialmente" ou "a violência nas capitais está aumentando em uma progressão exponencial". Nesses casos, temos situações que envolvem crescimento ou decrescimento em curtos intervalos.

Existem diversas aplicações das funções exponenciais, em vários ramos das ciências, como na biologia, na descrição das taxas de crescimento de bactérias, e na economia, nos cálculos do aumento ou da redução de taxas de juros, entre outros. Na computação, esse recurso matemático é utilizado na criação de algoritmos que descrevem taxas de crescimento ou de decrescimento.

A operação de potenciação é a base dessas funções, uma vez que uma função exponencial é definida por uma base elevada a um expoente variável. Portanto, o estudo de potenciação é fundamental para entender e trabalhar com exponenciais. Vamos começar esse estudo, a seguir.

5.1.1 Potenciação

A potenciação, também chamada de exponenciação, é uma operação aritmética que envolve dois elementos: base e expoente. Após efetuada, a operação resulta em uma potência, como ilustrado a seguir:

$a^n = p$ ➡ a: base
n: expoente
p: potência (resultado)

Figura 36 – Componentes de uma potenciação

Quando dizemos que "8 é potência de 2", estamos nos referindo ao fato de que a base 2, quando elevada ao expoente natural 3, resulta em 8. Temos, portanto: $2^3=8$. Do mesmo modo, podemos dizer que 16 é potência de 2, já que: $2^4=16$.

Vamos acompanhar a forma como essas operações são constituídas.

Potências com expoente natural

Considere um número real a e um número natural n. A potência, nesse caso, é igual ao produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$$

Vejamos alguns exemplos:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Observação

Na multiplicação entre frações, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si.

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

O numerador resulta do raciocínio $2 \cdot 3 = 6$. Já o denominador resulta da multiplicação $1 \cdot 5 = 5$.

Ainda tratando de expoentes naturais, temos os seguintes casos de destaque:

$$a^0 = 1 \text{ (para } a \neq 0\text{)}$$

$$a^1 = a$$

Vejamos alguns exemplos.

$2^0 = 1$

$3^0 = 1$

$(-3)^0 = 1$

$2^1 = 2$

$3^1 = 3$

$(-3)^1 = -3$

Observação

Perceba que fizemos a restrição $a \neq 0$ para o caso de destaque $a^0=1$. Isso foi feito porque a operação 0^0 é considerada indeterminada. Nessa operação, raciocínios matemáticos diferentes conduzem a resultados diferentes. Teste em sua calculadora.

Potências com expoente inteiro negativo

Vamos, agora, estender o conceito de potenciação para trabalhar com expoentes negativos. Considere um número real não nulo a e um número inteiro n. Nesse caso, temos a propriedade a seguir.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ (para } a \neq 0\text{)}$$

Vejamos alguns exemplos:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$(-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$$

Essa mesma propriedade pode ser reescrita em outro formato, como mostrado a seguir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (para } a \neq 0\text{)}$$

Vejamos alguns exemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$$

Repare que os mesmos exemplos foram resolvidos por ambos os formatos. Obtivemos resultados iguais, como esperado. Na próxima seção, veremos diversas propriedades de potência para expoentes inteiros. Uma delas permitirá que compreendamos o motivo pelo qual os dois formatos que estudamos são equivalentes.

Exemplo de aplicação

Calcule o valor da expressão a seguir.

$$E = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Resolução

A expressão E é formada por um termo com expoente negativo, o que permite utilizar a propriedade em estudo nesta seção. Vamos, no primeiro momento, aplicá-la de forma a nos livrarmos do expoente negativo.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{9}}$$

Perceba que chegamos a uma divisão entre frações. Para realizar a divisão, devemos "manter a fração de cima e inverter a fração de baixo", transformando a divisão em uma multiplicação. O numerador (1) pode ser expresso no formato de fração, como 1/1. Acompanhe:

$$\frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Logo, temos o que segue:

$$E = \frac{9}{4}$$

No entanto, existe um atalho que pode ser utilizado nesses casos. Ao partirmos de uma base fracionária com expoente negativo, podemos simplesmente inverter numerador com denominador, retirando o sinal negativo do expoente. Isso nos poupa de fazer a divisão entre frações. Observe a seguir.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Propriedade de potência com expoente inteiro

Considere um número real não nulo a e um número inteiro n. Nesse caso, são válidas as propriedades de potência a seguir:

1) Multiplicação de potências de mesma base:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2) Divisão de potências de mesma base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (\text{para } a \neq 0)$$

3) Potência de potência:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4) Potência de produto:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

5) Potência de quociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (\text{para } b \neq 0)$$

Vejamos alguns exemplos:

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 \qquad \text{(propriedade 1)}$$

$$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-1} = 5^1 = 5 \qquad \text{(propriedade 2)}$$

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 \qquad \text{(propriedade 3)}$$

$$(2\cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{(propriedade 4)}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} \qquad \text{(propriedade 5)}$$

Observação

A propriedade 5 permite que entendamos a equivalência das regras vistas na seção anterior deste livro-texto. Partimos de:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Aplicando a propriedade 5, temos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n}$$

Como $1^n = 1$, para qualquer n inteiro, temos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Logo, concluímos que:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Vamos acompanhar alguns exemplos de fixação em que utilizaremos as propriedades de potência vistas até então. É muito importante que você acompanhe essas resoluções, ou melhor, tente resolvê-las por conta própria. Vamos lá!

Exemplo de aplicação

1) Utilizando propriedades de potência, simplifique a expressão a seguir:

$$\left(\frac{2ab^3}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2c}{b}\right)^3$$

Resolução

Utilizando a propriedade 5, vamos distribuir o expoente de cada fração entre numerador e denominador.

$$\left(\frac{2ab^3}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2c}{b}\right)^3 = \frac{\left(2ab^3\right)^2}{c^2} \cdot \frac{\left(a^2c\right)^3}{b^3}$$

Utilizando a propriedade 4, vamos distribuir o expoente externo dos numeradores entre seus fatores.

$$\frac{\left(2ab^3\right)^2}{c^2} \cdot \frac{\left(a^2c\right)^3}{b^3} = \frac{2^2a^2\left(b^3\right)^2}{c^2} \cdot \frac{\left(a^2\right)^3c^3}{b^3}$$

Utilizando a propriedade 3, vamos multiplicar os expoentes externos pelos internos. Isso será feito para os dois fatores do numerador que possuem parênteses. Também substituiremos o fator 2^2 por 4.

$$\frac{2^2a^2\left(b^3\right)^2}{c^2} \cdot \frac{\left(a^2\right)^3c^3}{b^3} = \frac{4a^2b^6}{c^2} \cdot \frac{a^6c^3}{b^3}$$

Agora, multiplicaremos as frações entre si, tornando-as uma estrutura apenas. Já agruparemos fatores de mesma base para facilitar a visualização.

$$\frac{4a^2b^6}{c^2} \cdot \frac{a^6c^3}{b^3} = \frac{4a^2a^6b^6c^3}{b^3c^2}$$

Podemos, agora, usar a propriedade 1, de modo a somar os expoentes dos fatores de base a:

$$\frac{4a^2a^6b^6c^3}{b^3c^2} = \frac{4a^8b^6c^3}{b^3c^2}$$

A propriedade 2 permite, nessa situação, que simplifiquemos os expoentes de mesma base, desde que ela se encontre tanto no numerador quanto no denominador. Isso acontecerá para as bases b e c. Basta manter a base e subtrair o expoente de cima pelo de baixo.

$$\frac{4a^8b^6c^3}{\cancel{b^3}\,\cancel{c^2}} = 4a^8b^3c$$

Logo, concluímos que:

$$\left(\frac{2ab^3}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2c}{b}\right)^3 = 4a^8b^3c$$

2) Calcule o valor da expressão a seguir:

$$E = 16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2}$$

Resolução

Visto que $8 = 2^3$, $16 = 2^4$ e $32 = 2^5$, E pode ser escrito como:

$$E = \left(2^4\right)^{0,5} + \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2^5}\right)^{-0,2}$$

Invertendo o sinal do expoente, para nos livrarmos da fração, temos:

$$E = \left(2^4\right)^{0,5} + \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2^{-5}\right)^{-0,2}$$

Vamos trabalhar com cada um dos termos separadamente. Pela propriedade 3 das potências, temos:

$$\left(2^4\right)^{0,5} = 2^{4 \cdot 0,5} = 2^2 = 4$$

$$\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$

$$\left(2^{-5}\right)^{-0,2} = 2^{(-5) \cdot (-0,2)} = 2^1 = 2$$

Assim:

$$E = 4 + 2 + 2 = 8$$

No exemplo, fizemos transformações de base. Passamos números em base 8, 16 e 32 para a base 2. Com os valores baixos que lidamos, é relativamente fácil inferir essas transformações intuitivamente. E quando lidamos com valores cuja transformação não é tão óbvia? Nesses casos, podemos decompor as grandezas em fatores primos, ou seja, realizar uma fatoração numérica.

Caso você não se lembre de como esse procedimento é feito, acompanharemos as fatorações da tabela a seguir. Basta dividir, sucessivamente, o número que se deseja decompor pelo menor valor primo possível, até chegarmos ao resultado 1. No caso, os dividendos são posicionados na coluna da esquerda e os divisores primos na coluna da direita. Um número primo é aquele divisível apenas por 1 e por ele mesmo (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...). Observe os exemplos a seguir, expostos na tabela, da decomposição dos números 32, 729 e 200 em fatores primos.

Tabela 14 – Fatorações

Fatorando 32	Fatorando 729	Fatorando 200
$\begin{array}{r\|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
Logo, $32 = 2^5$, já que encontramos 5 vezes o fator 2 em sua decomposição	Logo, $729 = 3^6$, já que encontramos 6 vezes o fator 3 em sua decomposição	Logo, $200 = 2^3 \cdot 5^2$, já que encontramos 3 vezes o fator 2 e 2 vezes o fator 5 em sua decomposição

3) Calcule o valor da expressão a seguir:

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{-1}{4}\right)^{-2}$$

Resolução

A expressão A é formada por três termos cujos expoentes são negativos. Vamos trabalhar separadamente com cada um deles, utilizando a inversão de numerador e denominador, para nos livrarmos do expoente negativo.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1} = 2^1 = 2$$

$$\left(\frac{-1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{-1}\right)^{2} = \frac{4^2}{(-1)^2} = \frac{16}{1} = 16$$

Reescrevendo a expressão A, lembrando que o segundo termo é negativo, temos:

$$A = \frac{9}{4} - 2 + 16$$

$$A = \frac{9}{4} + 14$$

Manteremos o formato de frações para relembrar como fazer esse tipo de operação. Podemos realizar a adição entre frações se tivermos o mesmo denominador. Para isso, reescreveremos o termo 14 com denominador 4, mantendo a proporcionalidade. O jeito mais comum de realizar essa operação é dividindo o denominador novo pelo antigo e, em seguida, multiplicando o resultado pelo numerador antigo. Isso nos traz um numerador novo, que é capaz de manter a proporcionalidade da fração. Na figura a seguir, há um esquema dessa operação.

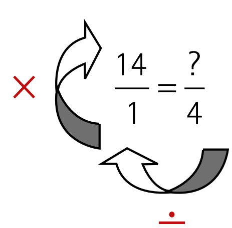

Figura 37 – Procedimento para encontrar novo numerador, mantendo a proporcionalidade

Pegamos o denominador novo, 4, e dividimos pelo denominador antigo, 1. Temos $4 \div 1 = 4$. O resultado deve ser multiplicado pelo numerador antigo, 14. Como $4 \cdot 14 = 56$, o valor do símbolo "?" da figura será 56. Temos, desse modo, frações proporcionais, conforme indicado a seguir.

$$14 = \frac{14}{1} = \frac{56}{4}$$

Vamos retornar à expressão A. Dessa vez, substituiremos o termo 14 pela fração que acabamos de encontrar e somar os numeradores.

$$A = \frac{9}{4} + \frac{56}{4} = \frac{65}{4}$$

Portanto, concluímos que:

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{-1}{4}\right)^{-2} = \frac{65}{4}$$

Potências com expoente racional

Antes de abordar as novas propriedades de potência, vamos, inicialmente, retomar a operação de radiciação. Sendo a um número real não negativo e n um número natural não nulo, temos a seguinte equivalência entre potenciação e radiciação:

$$b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

Na radiação apresentada anteriormente, n é o índice, a é o radicando e b é a raiz enésima. O símbolo √ é conhecido como radical e utilizado para representar a operação de radiciação. O que procuramos em uma radiciação é o valor de b que, quando multiplicado por ele mesmo n vezes, deve resultar em a. Lembre-se de que, no conjunto dos números reais, não existem raízes de números negativos (para índices n pares). Também devemos nos lembrar de que a ausência de um índice explícito significa n = 2 (a famosa raiz quadrada). Acompanhe os exemplos:

$\sqrt{16} = 4$, já que $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$\sqrt{-16}$ não está definida no conjunto dos números reais, já que nenhum número multiplicado por ele mesmo resulta em -16.

$\sqrt[3]{125} = 5$, já que $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$\sqrt[3]{-125} = -5$, já que $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$. No caso, o índice n vale 3, ou seja, é um índice ímpar. Essa operação é definida no conjunto dos números reais, conforme acabamos de demonstrar.

Voltemos à potenciação. Vamos continuar estendendo a ideia da operação, dessa vez, para incluir expoentes fracionários. Todas as propriedades anteriores continuam válidas, apenas introduziremos mais uma. Considere um número real positivo a, que será a base, dois números naturais não nulos, m e n, que comporão o expoente racional. Nesse caso, temos a seguinte propriedade:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Vejamos os exemplos:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

$$9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt[2]{9} = 3$$

$$64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{\left(2^6\right)^2} = \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3\div 3]{2^{12\div 3}} = 2^4 = 16$$

No último exemplo, substituímos a base 64 por 2^6. Multiplicando os expoentes, ficamos com 2^{12} no radicando. Podemos simplificar o cálculo dividindo tanto o índice quanto o expoente do radicando por 3. Como 12÷3=4, o valor 4 será o novo expoente da base 2. Com isso, nos livramos do radical, já que ele passaria a apresentar índice 1 após a simplificação.

Continuando nossos estudos, nos casos em que o numerador m do expoente racional vale 1, podemos considerar diretamente o caso específico a seguir.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Vejamos os próximos exemplos:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

Combinando duas propriedades já vistas, podemos, também, chegar à seguinte estrutura:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Vejamos os exemplos:

$$8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{4^{\frac{2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[4\div 2]{4^{2\div 2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4}} = \frac{1}{2}$$

5.1.2 Equações exponenciais

Antes de chegarmos às funções, vamos, nesta seção, estudar as equações exponenciais. Para isso, é importante que tenhamos familiaridade com as propriedades de potência e com a fatoração numérica, que são imprescindíveis para que as resoluções se desenvolvam facilmente. Uma equação exponencial é toda equação que contém a incógnita no expoente. Observe os exemplos a seguir:

$$3^x = 9$$

$$6^x + 6^{2x} = 30$$

$$2^x = 4$$

Uma forma de resolver a equação exponencial na incógnita x consiste em expressar os membros das equações como potências de mesma base a (com a > 0 e a ≠ 1). Algebricamente, isso é entendido como:

$$a^x = a^y \leftrightarrow x = y$$

Podemos ler a expressão anterior como "a^x é igual a a^y somente se x for igual a y". Vamos, agora, resolver uma equação exponencial. Considere a equação:

$$125^x = 625$$

Queremos determinar o valor de x nessa equação. Para tanto, devemos igualar ambos os lados, colocando tudo em forma de potências com a mesma base. Então, devemos fatorar ambas as bases da seguinte forma:

$$125 = 5^3$$

$$625 = 5^4$$

Encontramos uma base comum entre eles, a base 5. Vamos retomar a equação, substituindo as bases iniciais pela base 5.

$$125^{x} = 625$$

$$\left(5^{3}\right)^{x} = 5^{4}$$

$$5^{3x} = 5^{4}$$

Nessa etapa, já podemos descartar as bases e igualar os expoentes.

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Isso significa que 125 elevado a ¾ resulta em 625.

Acompanhe mais alguns exemplos.

Exemplo de aplicação

1) Encontre o valor de x nas equações a seguir:

A) $3^{x} = 27$

B) $3^{x} = \dfrac{1}{81}$

C) $49^{x} = \sqrt[4]{343}$

D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} = \sqrt[3]{43^{x}}$

E) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

Resolução

A) Basta expressarmos 27 em base 3, fazendo a decomposição em fatores primos. Assim, temos $27 = 3^3$. Logo, faremos a substituição a seguir.

$$3^x = 27$$

A partir daqui, temos apenas base 3 do lado direito da igualdade e base 3 do lado esquerdo da igualdade. Podemos, então, igualar os expoentes e resolver a equação em x. Assim, ficamos com:

$$x = 3$$

Logo, 3 é o expoente que deve ser inserido no lugar de x, de forma que 3^x resulte em 27.

B) Podemos expressar 81 em base 3. Fatorando, ficamos com $81 = 3^4$. Desse modo, temos:

$$3^x = \frac{1}{81}$$

$$3^x = \frac{1}{3^4}$$

Podemos retirar do formato de fração trazendo o denominador para o numerador, trocando o sinal do expoente. Logo, conseguimos reescrever a equação como:

$$3^x = 3^{-4}$$

Já podemos igualar os expoentes. Assim, temos:

$$x = -4$$

C) Decompondo 49 e 343, encontramos $49=7^2$ e $343=7^3$. Vamos à resolução:

$$49^x = \sqrt[4]{343}$$

$$\left(7^2\right)^x = \sqrt[4]{7^3}$$

$$7^{2x} = 7^{\frac{3}{4}}$$

Agora, igualamos os expoentes e resolvemos a equação em x.

$$2x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

D) Vamos expressar os dois lados da equação em base 2.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$$

$$\left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$-x = \frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

E) Basta expressarmos ambos os lados da igualdade em base 7.

$$7^{3x+4} = 49^{2x-3}$$

$$7^{3x+4} = \left(7^2\right)^{2x-3}$$

$$7^{3x+4} = 7^{2(2x-3)}$$

$$3x + 4 = 2(2x - 3)$$

$$3x + 4 = 4x - 6$$

$$4 + 6 = 4x - 3x$$

$$10 = x$$

$$x = 10$$

Os exemplos a seguir têm resoluções mais complexas do que aquelas dos exemplos anteriores. Para acompanhá-los, é imprescindível que você esteja confortável com propriedades de potência, fatoração numérica e resolução de equações de 2º grau. Vamos lá.

2) Encontre o conjunto solução S da equação $2^x = 3^x$.

Resolução

Não conseguimos, inicialmente, expressar os dois lados da equação na mesma base. Porém, dividindo ambos os lados por 3^x, temos:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x}$$

Isso pode ser escrito como:

$$\frac{2^x}{3^x} = 1$$

Visto que 1 pode ser escrito em termos de qualquer base com expoente nulo, podemos escrever 1 como:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^0}{3^0}$$

Aplicando a propriedade de potência, podemos escrever ambos os lados da equação em mesma base e igualar os expoentes.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

Portanto, o conjunto solução é dado como $S = \{0\}$.

3) Determine o conjunto solução S da equação $5^x - 5^{2-x} = 24$.

Resolução

Preparando a equação com o uso das propriedades de potência, temos:

$$5^x - \left(5^2 \cdot 5^{-x}\right) = 24$$

$$5^x - \left(25 \cdot \frac{1}{5^x}\right) = 24$$

$$5^x - \frac{25}{5^x} = 24$$

Vamos utilizar uma substituição: assumimos que $5^x = y$. Desse modo, podemos reescrever a equação original:

$$y - \frac{25}{y} = 24$$

Expressando todos os termos sob denominador y, e lembrando que termos expressos fora do formato de fração têm denominador 1, chegamos a:

$$\frac{y}{1} - \frac{25}{y} = \frac{24}{1}$$

$$\frac{y \cdot y}{y} - \frac{25}{y} = \frac{24 \cdot y}{y}$$

$$\frac{y^2}{y} - \frac{25}{y} = \frac{24y}{y}$$

Com todos os denominadores iguais, podemos cortá-los e reescrever a equação apenas com a expressão dos numeradores. Observe.

$$\frac{y^2}{\cancel{y}} - \frac{25}{\cancel{y}} = \frac{24y}{\cancel{y}}$$

$$y^2 - 25 = 24y$$

$$y^2 - 24y - 25 = 0$$

Note que chegamos a uma equação de 2º grau. Para encontrar os valores de y que satisfazem a equação igualada a 0, basta aplicarmos a fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = 576 + 100 = 676$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{2 \cdot 1} = \frac{24 \pm 26}{2}$$

$$y' = \frac{24 + 26}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$y'' = \frac{24 - 26}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Temos, portanto, duas substituições possíveis para y. Lembrando que $y = 5^x$, podemos, com isso, criar duas equações distintas para 5^x.

$$5^x = -1$$

Nesse caso, x não pertence ao conjunto dos números reais, pois, com base positiva, devemos ter uma potência positiva. Portanto, a afirmação é falsa para qualquer valor de x. Vamos, então, para a segunda substituição.

$$5^x = 25$$

Nesse caso, basta igualarmos as bases, conforme resolução a seguir.

$$5^x = 25$$
$$5^x = 5^2$$
$$x = 2$$

Logo, o conjunto solução S é expresso como $S = \{2\}$.

4) Encontre o valor da expressão a seguir.

$$\frac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}}$$

Resolução

Da propriedade de multiplicação de potências de mesma base, temos:

$3^{12} = 3^{10} \cdot 3^2$ (já que $3^{10} \cdot 3^2 = 3^{10+2} = 3^{12}$) e

$3^{11} = 3^{10} \cdot 3^1$ (já que $3^{10} \cdot 3^1 = 3^{10+1} = 3^{11}$)

Vamos substituir esses termos na expressão original:

$$\frac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}} = \frac{3^{10} \cdot 3^2 - 3^{10} \cdot 3^1 - 3^{10}}{3^{10} \cdot 3^1 + 3^{10} + 3^{10}}$$

Com isso, podemos fatorar as expressões colocando o fator comum 3^{10} em evidência. Observe que o fator 3^{10} aparece em todos os termos, tanto na expressão do numerador quanto na expressão do denominador. Temos, portanto:

$$\frac{3^{10}\cdot 3^2-3^{10}\cdot 3^1-3^{10}}{3^{10}\cdot 3^1+3^{10}+3^{10}}=\frac{3^{10}\left(3^2-3^1-1\right)}{3^{10}\left(3^1+1+1\right)}$$

Note que, se aplicarmos a propriedade distributiva entre 3^{10} e os termos dos parênteses, devemos voltar às expressões iniciais, tanto no numerador quanto no denominador. Colocamos, dessa forma, um fator comum em evidência. Como esse fator aparece na expressão de cima e na expressão de baixo, podemos cortá-lo, mantendo apenas a expressão dos parênteses.

$$\frac{\cancel{3^{10}}\left(3^2-3^1-1\right)}{\cancel{3^{10}}\left(3^1+1+1\right)}=\frac{3^2-3^1-1}{3^1+1+1}$$

Agora, basta resolvermos o resto da expressão numérica.

$$\frac{3^2-3^1-1}{3^1+1+1}=\frac{9-3-1}{3+1+1}=\frac{5}{5}=1$$

Observação

Nem toda equação exponencial pode ser resolvida igualando-se as bases, como vimos ao longo desse capítulo. Nesses casos, precisamos usar logaritmos. Eles também precisam ser usados para conseguirmos isolar incógnitas que se encontram no expoente de equações exponenciais.

5.1.3 Função exponencial

Vamos, finalmente, falar de funções exponenciais, que possuem vasta aplicabilidade. Iniciaremos os estudos por sua definição para, em sequência, acompanharmos algumas aplicações.

Segundo Dante e Viana (2019), uma função exponencial de base a, sendo a um número real ($a > 0$ e $a \neq 1$), é toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ cuja lei de formação segue o formato a seguir.

$$f(x)=a^x$$

A notação $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_{+}^{*}$ indica que o domínio dessa função é o conjunto dos números reais, e o contradomínio é formado por todos os reais positivos maiores do que zero.

Lembrete

Domínio é o conjunto de todos os valores que usamos como entrada na função, ou seja, todos aqueles que podem ser assumidos pela variável independente. Contradomínio é o conjunto de valores possíveis que a função produz como resultado. Imagem é o conjunto de valores que a função realmente alcança quando aplicamos todos os valores do domínio em sua lei de formação.

Vejamos alguns exemplos de funções exponenciais.

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$f(x)=3^{x}$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$$

O gráfico de uma função exponencial tem forma curvada, com crescimento ou decrescimento rápido em uma direção. Os dois casos mostrados a seguir devem ser considerados.

- Se $a > 1$, a função é crescente.
- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Observação

Se, no formato da função exponencial, considerarmos $a = 1$, caímos em uma função constante. Por isso, existe a restrição $a \neq 1$. Bases negativas geram problemas para expoentes fracionários, pois a raiz de números negativos não está definida no conjunto dos números reais. Por isso, existe a restrição $a > 0$.

Para funções crescentes, isto é, quando $a > 1$, temos um formato similar ao mostrado na figura a seguir. Note que, aumentando o valor de x, elevamos o valor de y.

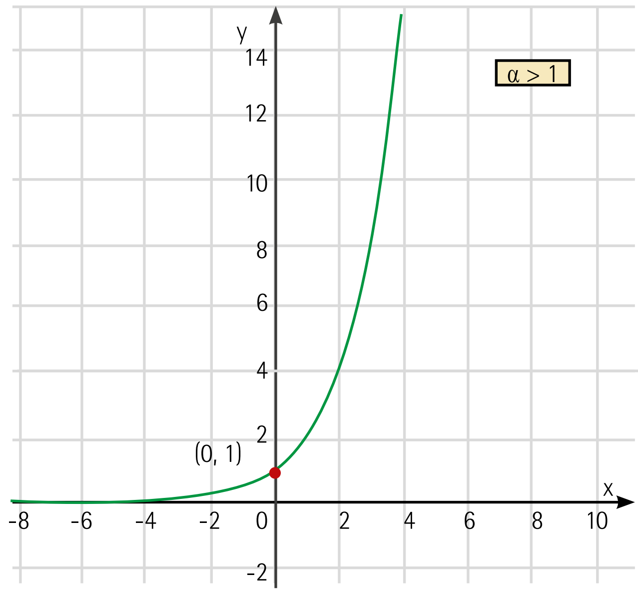

Figura 38 – Gráfico de uma função exponencial crescente

Para funções decrescentes, isto é, quando 0 < a < 1, temos o que se mostra na figura a seguir.

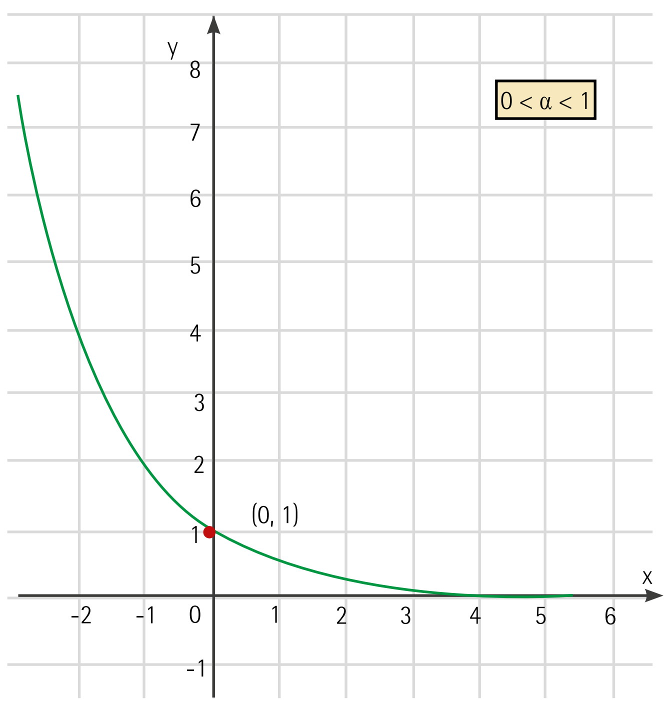

Figura 39 – Gráfico de uma função exponencial decrescente

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Primeiramente, atribuímos alguns valores para x e calculamos sua função, y. Posicionaremos esses valores na tabela a seguir. O cálculo de y para cada valor selecionado de x é mostrado na última coluna.

Tabela 15 – Alguns pares ordenados da função exponencial crescente f(x)=2^x^

x	y	Par ordenado (x, y)	Cálculo de y
–2	0,25	(–2;0,25)	$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=0,25$
–1	0,5	(–1;0,5)	$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}=0,5$
0	1	(0,1)	$f(0)=2^0=1$
1	2	(1,2)	$f(1)=2^1=2$
2	4	(2,4)	$f(2)=2^2=4$
3	8	(3,8)	–

Assim, o gráfico tem a forma indicada na figura a seguir.

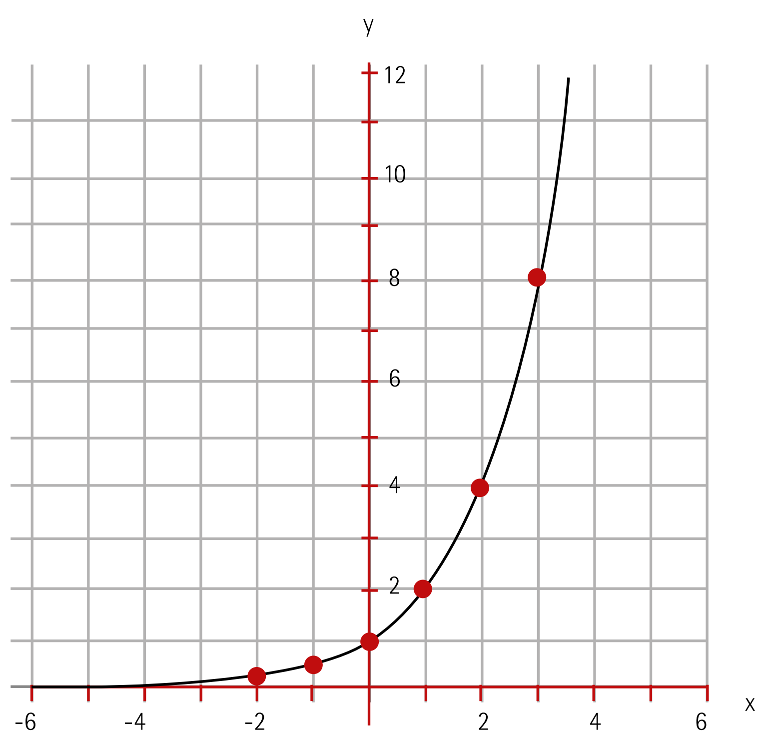

Figura 40 – Gráfico da função exponencial crescente $f(x) = 2^x$

Se consideramos a função $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, esperamos uma função decrescente, já que, nesse caso, a base está restrita ao intervalo 0 < a < 1.

Atribuindo alguns valores para x e construindo a tabela, temos o que se mostra a seguir:

Tabela 16 – Alguns pares ordenados da função exponencial decrescente $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y	Par ordenado (x, y)	Cálculo de y
–3	8	(–3,8)	$f(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^{3}=2^3=8$
–2	4	(–2,4)	$f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{2}=2^2=4$
–1	2	(–1,2)	$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{1}\right)^{1}=2^1=2$
0	1	(0,1)	$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	0,5	(1;0,5)	$f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}=0,5$
2	0,25	(2;0,25)	$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}=0,25$

O gráfico tem a forma mostrada na figura a seguir.

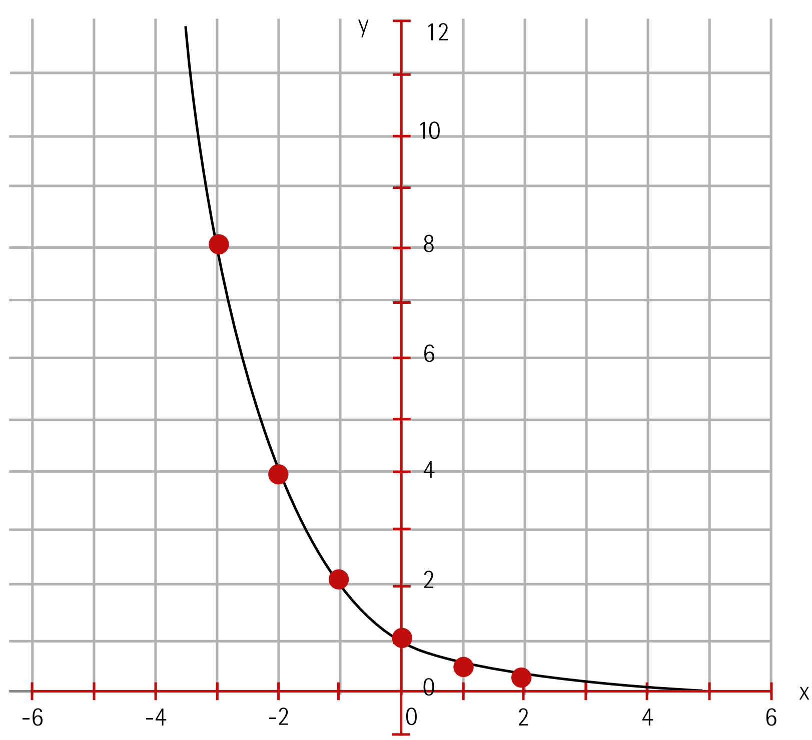

Figura 41 – Gráfico da função exponencial decrescente $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Analisando os dois gráficos, podemos ver algumas similaridades. Essas similaridades representam propriedades das funções exponenciais básicas, do tipo $f(x) = a^x$, elencadas a seguir.

- As curvas que representam graficamente as funções exponenciais nunca cruzam o eixo horizontal, ou seja, o eixo x. Portanto, uma função exponencial não tem raízes.

- Os gráficos interceptam o eixo vertical (eixo y) no ponto (0,1).

- Os valores de y são sempre positivos.

Observação

Conforme vimos, a função exponencial básica tem a lei de formação no formato $f(x) = a^x$. Porém, em aplicações práticas, especialmente em áreas como economia, física e ciências naturais, é muito comum o uso do formato mais geral explicitado a seguir.

$$f(x) = k \cdot a^x$$

Nesse caso, k é uma constante que multiplica o conjunto base e expoente, que representa o tamanho inicial do fenômeno que a função modela.

Agora, resolveremos algumas questões contextualizadas, de forma a compreender algumas das aplicações desse tipo de função.

Exemplo de aplicação

1) Na matemática financeira, denomina-se montante (M), a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar o capital (C), a juros compostos, à taxa (i) durante o tempo (t). O montante pode ser calculado pela seguinte fórmula dos juros compostos, na qual i é expressa em formato unitário.

$$M = C(1+i)^t$$

Aplicações de renda fixa comumente utilizam o sistema de juros compostos para gerar seus montantes. Suponha que uma pessoa aplicou o capital de R$ 100.000,00 à taxa de 12% ao ano durante 3 anos. Qual é o montante que deverá ser recebido ao final desse prazo?

Resolução

Vamos substituir os valores indicados no enunciado na fórmula dos juros compostos e resolver a equação em M. Precisamos observar que a fórmula considera a taxa i no formato unitário. Desse modo, em vez de 12, devemos inserir 0,12 (já que 12% = 0,12). Vamos aos cálculos:

$M = C(1+i)^t$

$M = 100.000(1+0,12)^3$

$M = 100.000(1,12)^3$

$M = 140.492,80$

Logo, o montante a ser recebido ao fim do prazo de investimento é de R$ 140.492,80.

2) Uma empresa produziu, em certo ano, 8.000 unidades de um produto. Considere a produção da empresa, que representa o número de unidades fabricadas, como P. Considere, também, o tempo, em anos, como t. Pensando em um aumento anual da produção de 50%, determine o que se pede a seguir.

A) A produção da empresa depois de cinco anos.

B) O tempo após o qual a produção da empresa será de 40.500 unidades.

Resolução

A) O enunciado não nos entregou diretamente uma lei de formação de uma função. Ele apenas nos trouxe informações a respeito do contexto. Devemos, portanto, inferir essa lei com base nos dados. Se considerarmos a produção inicial como P_0, temos $P_0 = 8000$. Vamos pensar conforme indicado a seguir.

Após um ano, a produção terá aumento de 50% em relação a P_0. Se, inicialmente, a produção corresponde a 100% de P_0, após um ano, com o acréscimo de 50%, temos 150% de P_0. Vejamos:

$100\% \cdot P_0 + 50\% \cdot P_0 = 150\% \cdot P_0 = P_0 \cdot 1,5$

Após dois anos, a produção será de 150% em relação ao ano anterior.

$150\% \cdot (P_0 \cdot 1,5) = 1,5 \cdot (P_0 \cdot 1,5) = P_0 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = P_0 \cdot 1,5^2$

Após três anos, a produção será de 150% em relação ao ano anterior.

$150\% \cdot (P_0 \cdot 1,5^2) = 1,5 \cdot (P_0 \cdot 1,5^2) = P_0 \cdot 1,5 \cdot 1,5^2 = P_0 \cdot 1,5^3$

Assim, generalizando, podemos escrever a função:

$P(t) = P_0 \cdot 1,5^t$

Porém, como P_0 tem valor fixo de 8.000, substituiremos esse valor na função.

$P(t) = 8000 \cdot 1,5^t$

Portanto, após 5 anos, temos:

$$P(5) = 8000 \cdot 1,5^5 = 8000 \cdot 7,59375 = 60750$$

Logo, após 5 anos, serão produzidas 60.750 unidades.

B) No item B, temos $P(t) = 40500$. Utilizando o formato da função obtido no item A, temos:

$$P(t) = 8000 \cdot 1,5^t$$

$$40500 = 8000 \cdot 1,5^t$$

$$8000 \cdot 1,5^t = 40500$$

$$1,5^t = \frac{40500}{8000}$$

Simplificando a fração (podemos dividir tanto numerador quanto denominador por 500), temos:

$$1,5^t = \frac{81}{16}$$

Como $1,5 = \frac{3}{2}$ e $\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$, podemos reescrever a função como:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

As bases são iguais, portanto, os expoentes podem ser igualados:

$$t = 4$$

Assim, após quatro anos, a produção anual da empresa será de 40.500 unidades.

3) Uma colônia de bactérias dobra sua quantidade a cada 3 horas. Inicialmente, há 200 bactérias. A fórmula que modela esse tipo de fenômeno biológico é dada a seguir.

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$$

Na equação, $N(t)$ é a quantidade final de bactérias, N_0 é a quantidade inicial de bactérias, t é o tempo decorrido (em horas) e T é o tempo necessário para a quantidade de bactérias dobrar.

Nessa situação, determine em quanto tempo a colônia atingirá 6.400 bactérias.

Resolução

Sabemos que a quantidade de bactérias é dobrada a cada 3 horas (T = 3). Também compreendemos que a quantidade inicial de bactérias na colônia é 200, o que indica que $N_0=200$. Por fim, temos que o valor final de bactérias é 6.400, o que implica $N(t)=6400$. Agora, vamos usar a lei de formação fornecida, substituir esses valores e isolar t.

$$N(t)=N_0\cdot 2^{t/T}$$

$$6400=200\cdot 2^{t/3}$$

$$200\cdot 2^{t/3}=6400$$

$$2^{t/3}=\frac{6400}{200}$$

$$2^{t/3}=32$$

Vamos reescrever 32 em base 2 para, então, igualar os expoentes.

$$2^{t/3}=2^5$$

$$\frac{t}{3}=5$$

$$t=5\cdot 3=15$$

Portanto, a colônia atingirá 6.400 bactérias em 15 horas.

5.2 Logaritmos

Estudaremos, nos subitens da seção 5.2, os logaritmos. Eles são relacionados à potenciação, mas são utilizados em várias situações nas quais a potenciação não é suficiente ou não é prática. Para resolvermos alguns tipos de equações exponenciais, por exemplo, precisamos usar logaritmos.

Algumas escalas, como a escala Richter, usada para medir a magnitude de terremotos, ou a escala decibéis, usada principalmente para medir intensidades sonoras, utilizam logaritmos em suas composições. Além disso, diversas funções da física, da química e da biologia precisam dessa ferramenta para suas modelagens matemáticas. Uma aplicação clássica de logaritmos na área da computação é o cálculo da complexidade de algoritmos, especialmente em problemas relacionados à pesquisa e ordenação de dados.

5.2.1 Forma exponencial x forma logarítmica

Como já comentamos, o logaritmo é uma operação relacionada com a potenciação. Para entender esse assunto, voltaremos à seção anterior, em que estudamos as funções exponenciais. Vamos lembrar, por exemplo, que o número 16 pode ser decomposto como:

$$16 = 2^4$$

Ao expoente dessa potência, podemos dar o nome de logaritmo. Portanto, 4 é o logaritmo de 16 na base 2. Desse modo, o logaritmo é uma operação na qual queremos descobrir o expoente que dada base deve ter para resultar em certa potência.

Usando a simbologia dos logaritmos, temos a seguinte equivalência entre expressões, em que a expressão da esquerda utiliza a forma exponencial e a expressão da direita usa a forma logarítmica:

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$$

Vamos, a seguir, ver mais alguns exemplos.

$$6^2 = 36 \Leftrightarrow \log_6 36 = 2$$

$$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$$

$$2^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2$$

Faremos, agora, a definição formal de logaritmo, generalizando a regra vista anteriormente. Dados dois números, a e b, sendo $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, existe somente um número real x, tal que (Gomes, 2019):

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

Nessa equivalência, temos a nomenclatura mostrada no quadro a seguir.

Quadro 1 – Nomenclaturas (forma exponencial e forma logarítmica)

Forma exponencial		Forma logarítmica	
$a^x = b$	a é a base da potência	$\log_a b = x$	a é a base do logaritmo
	b é a potência		b é o logaritmando
	x é o expoente		x é o logaritmo

Exemplo de aplicação

1) Encontre o valor de x que representa o logaritmo de 32 na base ¼.

Resolução

Algebricamente, podemos escrever o que é exposto no enunciado como:

$$\log_{\frac{1}{4}} 32 = x$$

Se representarmos esse logaritmo na forma exponencial, teremos:

$$\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32$$

Vamos, então, solucionar o problema utilizando regras da potenciação.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 32$$

$$\left(4^{-1}\right)^x = 32$$

$$\left(\left(2^2\right)^{-1}\right)^x = 2^5$$

$$\left(2^{-2}\right)^x = 2^5$$

$$2^{-2x} = 2^5$$

$$-2x = 5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

2) Encontre o valor de x que representa o logaritmo de 1 na base 7.

Resolução

Matematicamente, podemos escrever o que é exposto no enunciado como:

$$\log_7 1 = x$$

Na forma exponencial, temos:

$$\log_7 1 = x \Leftrightarrow 7^x = 1$$
$$7^x = 7^0$$
$$x = 0$$

3) Encontre o valor de $\log_3 \sqrt{27}$.

Resolução

Chamaremos o logaritmo de x. Temos, portanto, o que segue.

$$\log_3 \sqrt{27} = x$$

Na forma exponencial, temos:

$$\log_3 \sqrt{27} = x \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{27}$$
$$3^x = 27^{\frac{1}{2}}$$
$$3^x = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$3^x = 3^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

4) Na área de circuitos digitais, uma tabela-verdade é uma ferramenta que apresenta todas as possíveis entradas associadas a determinada expressão lógica, com o valor da saída de cada uma delas (Capuano, 2014). Esse artifício é utilizado no projeto e na execução de uma grande variedade de circuitos lógicos, incluindo os circuitos dos processadores computacionais.

Uma tabela-verdade tem o número de linhas l(n) dado em função do número de entradas n que compõem a expressão lógica para a qual se pretende construir a tabela. A lei da função é dada por:

$$l(n) = 2^n$$

Se dada tabela-verdade tem 256 linhas, quantas foram as entradas da expressão lógica?

Resolução

O problema pede para calcularmos n no momento em que I(n) = 256. Logo, estamos procurando o logaritmo de 256 em base 2. Nesse caso, podemos fazer a transformação da equação da forma logarítmica para a forma exponencial, e igualar as bases.

$$\log_2 256 = n \Leftrightarrow 2^n = 256$$

$$2^n = 2^8$$

$$n = 8$$

Portanto, a expressão lógica é formada por 8 entradas.

Observação

O logaritmo de um número a em base 10 é chamado de logaritmo decimal e pode ser representado apenas por log a. Quando o logaritmo é escrito dessa maneira, a base fica subentendida.

Já o logaritmo de a em base e é chamado de logaritmo neperiano, e pode ser representado por lna, representação que equivale a $\log_e a$. A constante e, conhecida como número de Euler ou como constante de Neper, é um número irracional, e tem valor aproximadamente igual a 2,71828.

O logaritmo neperiano é amplamente utilizado em matemática, física, engenharia e em outras ciências devido às suas propriedades únicas, que simplificam muitas fórmulas e equações.

5.2.2 Propriedades básicas

Assim como a potenciação, os logaritmos têm propriedades que se mostram importantes na resolução de problemas diversos. Vamos acompanhá-las, a seguir.

Propriedade 1

$\log_a 1 = 0$, ou seja, o logaritmo de 1 em qualquer base é sempre igual a 0.

$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_5 1 = 0$$

Propriedade 2

$\log_a a = 1$, ou seja, o logaritmo da base, qualquer que seja ela, é sempre 1.

$\log_2 2 = 1$
$\log_5 5 = 1$

Propriedade 3

$\log_a a^m = m$, ou seja, o logaritmo em base a de uma potência a, elevada a m, é igual ao expoente m.

$\log_2 2^3 = 3$
$\log_5 5^9 = 9$

Propriedade 4

$a^{\log_a b} = b$, ou seja, uma base a elevada a um logaritmo de b em mesma base a, é igual ao próprio b.

$5^{\log_5 3} = 3$
$7^{\log_7 6} = 6$

Propriedade 5

Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$. Se dois logaritmos com a mesma base são iguais, então os logaritmandos são iguais.

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
$\log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c$
$\therefore b = c$

Observação

O símbolo ∴ é lido como "portanto".

5.2.3 Propriedades operacionais

Além das propriedades básicas, temos algumas propriedades operacionais importantes, sendo elas:

Propriedade operacional 1

$\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$, ou seja, o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Acompanhe o exemplo.

$$\log_2(2 \cdot 8) = \log_2 2 + \log_2 8$$
$$\log_2(2 \cdot 8) = 1 + 3$$
$$\log_2(2 \cdot 8) = 4$$

Propriedade operacional 2

$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$, ou seja, o logaritmo de uma razão é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador. Veja o exemplo:

$$\log_3\left(\frac{9}{27}\right) = \log_3 9 - \log_3 27$$
$$\log_3\left(\frac{9}{27}\right) = 2 - 3$$
$$\log_3\left(\frac{9}{27}\right) = -1$$

Propriedade operacional 3

$\log_b m^k = k \log_b m$, ou seja, o logaritmo de uma potência é igual ao logaritmo da base dessa potência multiplicado por seu expoente. Acompanhe:

$$\log_2 4^5 = 5 \log_2 4$$
$$\log_2 4^5 = 5 \cdot 2$$
$$\log_2 4^5 = 10$$

Propriedade operacional 4

$\log_b \sqrt[c]{m} = \frac{1}{c}\log_b m$, ou seja, o logaritmo de uma raiz é igual ao logaritmo do radicando multiplicado pelo inverso do índice da raiz. Veja a seguir:

$$\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3}\log_4 16$$

$$\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3}\cdot 2$$

$$\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}$$

Para praticarmos, vamos acompanhar mais alguns exemplos.

Exemplo de aplicação

1) Calcule o valor de:

$$A = 5^{2+\log_5 3}$$

Resolução

Aplicando a propriedade de potências de mesma base, que vimos quando estudamos potenciação, temos que:

$$5^{2+\log_5 3} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 3}$$

Usando a propriedade 4, temos que $5^{\log_5 3} = 3$. Assim:

$$5^{2+\log_5 3} = 5^2 \cdot 3$$

$$5^{2+\log_5 3} = 25 \cdot 3$$

$$5^{2+\log_5 3} = 75$$

Portanto, sabemos que $A = 75$.

2) Sabendo que $\log_b a = 3$, calcule $\log_b a^5$.

Resolução

Por meio da propriedade operacional 3, sabemos que:

$$\log_b a^5 = 5\log_b a$$

Como o enunciado nos trouxe que $\log_b a = 3$, temos o que segue:

$$\log_b a^5 = 5 \cdot 3 = 15$$

3) Sabendo que $\log_b a = 4$, calcule $\log_b \sqrt[6]{a^5}$.

Resolução

Usando a propriedade operacional 4, sabemos que:

$$\log_b \sqrt[6]{a^5} = \frac{1}{6}\log_b a^5$$

Podemos, agora, aplicar a propriedade operacional 3, para passar o expoente 5 multiplicando.

$$\log_b \sqrt[6]{a^5} = 5 \cdot \frac{1}{6}\log_b a$$

$$\log_b \sqrt[6]{a^5} = \frac{5}{6}\log_b a$$

Como $\log_b a = 4$, temos o que segue.

$$\log_b \sqrt[6]{a^5} = \frac{5}{6} \cdot 4 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

5.2.4 Mudanças de base

Há momentos em que encontramos certo logaritmo em determinada base e temos de convertê-lo para outra. Por exemplo, se quisermos utilizar uma calculadora para encontrar o valor de $\log_7 2$, não conseguiremos por meio de equipamentos que trabalham apenas com logaritmos na base 10 ou na base neperiana, situação bem comum quando utilizamos calculadoras científicas.

Nesse caso, devemos fazer uso de um artifício matemático que permite calcular esse logaritmo a partir de logaritmos de bases conhecidas. Essa ferramenta poderosa que facilita os cálculos chama-se mudança de base.

Mas como fazemos isso? A mudança de base é definida como:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \ (\text{com } c \neq 1)$$

Nesse caso, estamos saindo da base b e chegando a uma operação equivalente em base c. Essa mudança de base não altera o resultado. Ela apenas muda a base na qual a operação é representada. Vejamos alguns exemplos, a seguir.

$$\log_{64} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 64} = \frac{5}{6}$$

$$\log_{81} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 81} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

5.2.5 Funções logarítmicas

Podemos dizer que uma função logarítmica é toda função $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida pela lei de formação exposta a seguir, com a ≠ 1 e a > 0 (Dante; Viana, 2019).

$$f(x) = \log_a x$$

A notação $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ indica que o domínio de uma função logarítmica básica é o conjunto dos números reais não nulos e não negativos, e que o contradomínio é o conjunto dos números reais.

A seguir, vemos alguns exemplos de leis de formação de funções logarítmicas.

$$f(x) = \log_2 x$$
$$f(x) = \log_3 x$$
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

O gráfico de uma função logarítmica básica é uma linha curva que começa bem perto do eixo vertical (mas nunca o toca) e se afasta lentamente, ficando cada vez mais plana à medida que se afasta para a direita.

Nas funções logarítmicas, dois casos devem ser considerados para análise. Vejamos eles.

Caso 1: a > 1

Nesse caso, temos uma função logarítmica crescente e o gráfico tem a forma mostrada na figura a seguir. Assim, plotamos o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

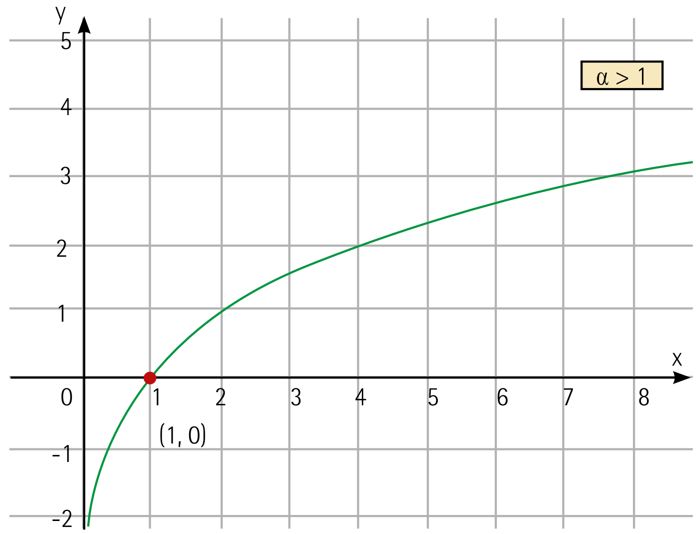

Figura 42 – Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_2 x$

Caso 2: 0 < a < 1

Nesse caso, temos uma função logarítmica decrescente e o gráfico tem a forma mostrada na figura a seguir. Assim, plotamos o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

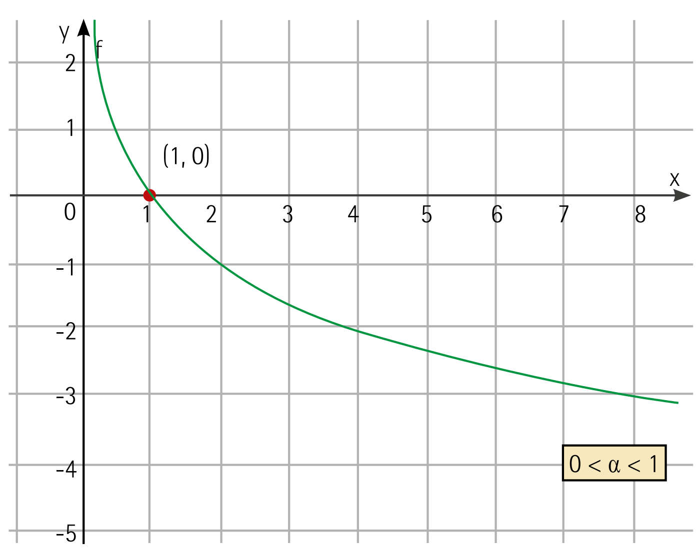

Figura 43 – Gráfico da função logarítmica decrescente $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observando os dois gráficos, podemos observar algumas particularidades das funções logarítmicas.

- As curvas estão totalmente à direita do eixo y, pois as funções são definidas para x > 0.
- Ambas as curvas interceptam o eixo x no ponto (1, 0), o que mostra que a função apresenta uma raiz.

Observação

Conforme vimos, a função logarítmica básica tem a lei de formação no formato $f(x) = \log_a x$. Porém, em aplicações práticas, é muito comum o uso do formato mais geral:

$$f(x) = m\log_a x + c$$

Nesse caso, c é uma constante que representa o tamanho inicial ou o valor de referência do fenômeno que a função modela. O fator m é um coeficiente de escala, que pode afetar a inclinação da curva ou a taxa de variação do fenômeno.

Saiba mais

Para aprender mais sobre logaritmos e suas funções e equações, consulte o livro a seguir:

GOMES, F. M. *Pré-cálculo*: operações, equações, funções e trigonometria. São Paulo: Cengage Learning, 2019.

Vamos, a seguir, trabalhar com algumas situações contextualizadas.

Exemplo de aplicação

1) Uma empresa de tecnologia está analisando o desempenho de seu servidor e percebeu que o tempo médio necessário para processar uma determinada quantidade de dados pode ser modelado pela lei de formação a seguir.

$$T(x) = 10\log_2 x$$

Na equação, T representa o tempo de processamento, em segundos, e x representa a quantidade de dados, em gigabytes (GB).

Com base nisso, calcule o tempo necessário para que o servidor processe 512 GB.

Resolução

Podemos substituir o valor 512 na variável independente da lei de formação, conforme feito a seguir.

$$T(512) = 10\log_2 512$$

Como 512 é potência de 2, podemos substituí-lo.

$$T(512) = 10\log_2 2^9$$

Agora, passaremos o expoente para a frente, multiplicando.

$$T(512) = 10 \cdot 9 \cdot \log_2 2$$
$$T(512) = 90 \cdot \log_2 2$$

Sabemos que $\log_2 2 = 1$, já que a base e o logaritmando da operação têm o mesmo valor. Com isso, já podemos calcular o tempo.

$$T(512) = 90 \cdot 1 = 90$$

Portanto, o servidor demorará 90 segundos para processar 512 GB de dados.

2) Uma empresa de TI está analisando o crescimento exponencial do número de usuários de sua nova plataforma digital. A equipe de análise precisa prever quando o número de usuários atingirá o marco importante de 10.000 usuários. Por meio de técnicas de ajuste de curvas, uma engenheira que integra a equipe encontrou que, atualmente, o número U de usuários da plataforma após t meses pode ser modelado pela função exponencial disposta a seguir.

$$U(t) = 500 \cdot 2^{0,5t}$$

Como as calculadoras disponíveis para a equipe de análise apenas suportam cálculos de logaritmos na base 10, a engenheira julgou adequado ajustar a equação para esta base, de forma a facilitar o trabalho de seus colegas. Nesse cenário, após aplicar a propriedade de conversão de bases de logaritmos, encontre a equação correspondente ao cálculo de t para o cenário de 10.000 usuários.

Resolução

Para resolvermos esse problema, vamos partir da função exponencial a seguir:

$$U(t) = 500 \cdot 2^{0,5t}$$

Sendo o marco de 10.000 usuários a meta do cálculo, este número corresponde ao valor de U para o cenário desejado. O cálculo segue conforme exposto a seguir:

$$10000 = 500 \cdot 2^{0,5t}$$
$$\frac{10000}{500} = 2^{0,5t}$$
$$20 = 2^{0,5t}$$
$$2^{0,5t} = 20$$

Para isolarmos a incógnita t, vamos transformar a equação do formato exponencial para o formato logarítmico, lembrando que $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$. Temos, portanto, que:

$$2^{0,5t} = 20 \Leftrightarrow \log_2 20 = 0,5t$$

Desse modo, trabalharemos a partir de agora com a equação a seguir:

$$\log_2 20 = 0,5t$$

Ainda estamos expressando o logaritmo em base 2. Como nossa intenção é atingir a base 10, para que o cálculo seja realizado em uma calculadora da equipe, vamos utilizar a regra de conversão de bases, disposta a seguir:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \text{ (com } c \neq 1)$$

Substituindo os termos da nossa equação, temos o que segue:

$$\log_2 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2}$$

Agora, basta substituirmos o termo $\log_2 20$ da nossa equação pela fração que acabamos de encontrar no passo anterior e, a partir disso, isolar a incógnita t.

$$\log_2 20 = 0{,}5t$$

$$\frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2} = 0{,}5t$$

$$0{,}5t = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2}$$

$$t = \frac{\log_{10} 20}{0{,}5 \cdot \log_{10} 2}$$

O último formato disposto previamente, no qual conseguimos isolar t, já representa a resposta da situação. Se estivermos em posse de uma calculadora capaz de realizar cálculos de logaritmos, podemos encontrar o valor numérico final de t. Observe.

$$t = \frac{\log_{10} 20}{0{,}5 \cdot \log_{10} 2} \cong \frac{1{,}3010}{0{,}5 \cdot 0{,}3010} \cong \frac{1{,}3010}{0{,}1505} \cong 8{,}64$$

No contexto do problema, isso significa que o número de usuários da plataforma digital da empresa atingirá o marco de 10.000 usuários dentro de 8,64 meses.

Lembrete

A notação $\log_{10} a$ é equivalente à notação $\log a$. Nesse caso, fica subentendido que a base do logaritmo é 10.

Saiba mais

Além das calculadoras científicas comerciais, existem várias soluções em software para cálculos de logaritmos. Uma delas é a calculadora de log do site miniWebtool.

MINIWEBTOOL. *Calculadora de log*. [s.d.]. Disponível em: https://tinyurl.com/2jp4m9us. Acesso em: 11 nov. 2024.

6 MATRIZES E DETERMINANTES

O capítulo 6 do nosso livro-texto será dedicado ao estudo das matrizes e dos determinantes. Começaremos com conceitos introdutórios e passaremos a abordar técnicas mais avançadas, ao passo em que avançamos no capítulo.

6.1 Matrizes

Você já mexeu com planilhas? Se sim, você mexeu com a estrutura de matrizes e nem se deu conta. Segundo Guedes (2014), matrizes são aplicadas na área computacional com o intuito de resolver cálculos complexos de estrutura, problemas estatísticos, dentre outras situações. As linguagens de programação costumam oferecer uma estrutura de dados denominada matriz. Em situações diversas da área de engenharia, elas podem oferecer uma solução sistemática para problemas.

Podemos pensar em uma matriz como uma tabela, que tem m linhas e n colunas identificadas de forma a endereçar cada um de seus elementos. É possível também realizar cálculos entre matrizes e utilizar determinantes, que nos permite resolver sistemas de equações, tópico que abordaremos ainda nesse capítulo.

Observe a tabela a seguir. Nela, as linhas representam pessoas que fazem parte de uma família e as colunas representam características. Existem 15 elementos numéricos, dispostos nos posicionamentos adequados. Por exemplo, se consultarmos o cruzamento entre a última linha e a última coluna, descobrimos que Júnior tem 30 anos de idade.

Tabela 17 – Exemplo de tabela cujos dados são dispostos em 5 linhas e 3 colunas

	Altura (metros)	Peso (quilogramas)	Idade (anos)
João (pai)	1,82	93	62
Mariana (mãe)	1,70	70	60
Jorge (irmão)	1,85	80	35
Marina (irmã)	1,74	78	33
Júnior (irmão)	1,80	75	30

Fonte: Guedes (2014, p. 78).

Vamos utilizar os dados da tabela para nos aproximarmos da linguagem matemática. Se ocultarmos os títulos das linhas e das colunas, ficaremos apenas com os 15 elementos que constituem a nossa matriz, que estarão dispostos em 5 linhas ($m = 5$) e 3 colunas ($n = 3$). Portanto, dizemos que temos uma matriz de ordem 5×3 (lemos: 5 por 3). Como precisamos de dois índices para localizar um elemento (número da linha e número da coluna), podemos dizer que a dimensão D de uma matriz é igual a 2. Observe a figura a seguir:

D=2

(m x n)

n = 3

m = 5

1,82	93	62
1,70	70	60
1,85	80	35
1,74	78	33
1,80	75	30

Figura 44 – Matriz de ordem 5×3

Fonte: Guedes (2014, p. 80).

No contexto matemático, as matrizes costumam abrigar seus elementos entre parênteses, colchetes ou barras duplas verticais, como veremos ao longo do capítulo.

6.1.1 Representação

Considere os símbolos a seguir:

- **m**: número do total de linhas da matriz.
- **n**: número do total de colunas da matriz.
- **i**: índice de representação da linha do elemento.
- **j**: índice de representação da coluna do elemento.
- **X**: nome escolhido para a matriz.
- $\mathbf{X_{ij}}$: elemento genérico da matriz X.

A matriz X é uma tabela retangular de ordem $m \times n$, ou seja, composta por m linhas e n colunas. O número de elementos (ou termos) da matriz corresponde ao produto de m por n. Temos, portanto, $m \times n$ elementos x_{ij}, cada um deles representado por um número real. Podemos endereçar cada elemento individualmente indicando sua linha i e sua coluna j. Observe a matriz X a seguir, representada de três maneiras:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{Vmatrix}_{m \times n}$$

Assim, temos o que segue:

- O elemento x_{11} é um número real posicionado na 1ª linha e na 1ª coluna da matriz X.
- O elemento x_{12} é um número real posicionado na 1ª linha e na 2ª coluna da matriz X.
- O elemento x_{2n} é um número real posicionado na 2ª linha e na última coluna da matriz X.
- O elemento x_{mn} é um número real posicionado na última linha e na última coluna da matriz X.

Observação

A forma de representar matrizes, seja utilizando parênteses, colchetes ou barras duplas verticais, não é relevante, já que o significado não é alterado e todas elas são encontradas na literatura. No entanto, ao longo do nosso conteúdo, daremos preferência à representação entre colchetes.

Vamos acompanhar alguns exemplos simples envolvendo matrizes.

Exemplo de aplicação

1) Considere a matriz A, dos elementos a_{ij}, apresentada a seguir e faça o que se pede.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

A) Determine os elementos a_{13} e a_{22} da matriz A.

B) Determine a ordem da matriz A.

C) Determine o número de termos da matriz A.

Resolução

A) Vejamos os elementos a_{13} e a_{22} da matriz A.

- $a_{13} = -1$ (elemento que se encontra na 1ª linha e 3ª coluna)
- $a_{22} = 8$ (elemento que se encontra na 2ª linha e 2ª coluna)

B) Como temos 2 linhas e 3 colunas, a matriz A possui ordem 2×3.

C) A matriz A possui ordem 2×3, o que implica $2 \cdot 3 = 6$ termos (ou elementos).

2) Escreva a matriz $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$, de forma que $b_{ij} = i^2 - 2j$.

Resolução

Temos que escrever uma matriz do nome B, formada pelos elementos genéricos b_{ij}, de ordem 3×2. Esperamos, portanto, o seguinte formato:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

O valor de cada elemento é dado em função de seus índices, de acordo com a lei $b_{ij} = i^2 - 2j$. Vamos calcular cada um deles, conforme mostrado a seguir:

$b_{11} = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$b_{12} = 1^2 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$

$b_{21} = 2^2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$

$$b_{22} = 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

$$b_{31} = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$$

$$b_{32} = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$$

Finalmente, vamos escrever a matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

6.1.2 Operações aritméticas

Podemos realizar operações aritméticas com matrizes, seguindo algumas normas e restrições. Vamos conhecer essas operações.

Adição de matrizes

Podemos realizar a operação de adição de matrizes, desde que possuam a mesma ordem. Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$: a matriz resultante da adição A+B é a matriz de mesma ordem $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, em que temos os elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Na prática, basta encontrarmos a soma entre os elementos que se encontram na mesma posição. Vejamos os exemplos a seguir:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4+5 \\ 3+7 & 6+1 \end{bmatrix} = \overset{C}{\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} -2 & -10 & 20 \\ 42 & 7 & 1 \\ 5 & -20 & -3 \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2+1 & -10+1 & 20+1 \\ 42+2 & 7+5 & 1+(-4) \\ 5+0 & -20+3 & -3+3 \end{bmatrix} = \overset{C}{\begin{bmatrix} -1 & -9 & 21 \\ 44 & 12 & -3 \\ 5 & -17 & 0 \end{bmatrix}}$$

Observação

Uma matriz quadrada é uma matriz que tem m = n, ou seja, que tem o número de linhas igual ao número de colunas. Matrizes de ordem 2×2 ou 3×3 são exemplos de matrizes quadradas. Nesses casos, podemos simplesmente dizer que a matriz tem ordem 2 ou ordem 3.

Subtração de matrizes

Se você compreendeu como fazer adição entre matrizes, já deve ter entendido o que fazer no caso da subtração. Para realizarmos a operação aritmética de subtração de matrizes, também precisamos que elas tenham a mesma ordem. Sejam as matrizes $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{m\times n}$: a matriz resultante da subtração A-B é a matriz de mesma ordem $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, em que temos os elementos $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$. Acompanhe os exemplos a seguir:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}} - \overset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-5 \\ 3-7 & 6-1 \end{bmatrix} = \overset{C}{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} -2 & -10 & 20 \\ 42 & 7 & 1 \\ 5 & -20 & -3 \end{bmatrix}} - \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2-1 & -10-1 & 20-1 \\ 42-2 & 7-5 & 1-(-4) \\ 5-0 & -20-3 & -3-3 \end{bmatrix} = \overset{C}{\begin{bmatrix} -3 & -11 & 19 \\ 40 & 2 & 5 \\ 5 & -23 & -6 \end{bmatrix}}$$

Exemplo de aplicação

Na área de contabilidade, o termo receita refere-se ao valor total obtido pela venda de bens ou de serviços, representando a entrada de recursos financeiros em uma empresa.

Nas tabelas a seguir, encontraremos a receita obtida por uma editora com a venda de livros didáticos no ano passado. A tabela A é referente apenas à receita do 1º semestre do ano, enquanto a tabela B mostra toda a receita anual. Utilizando operações entre matrizes, escreva a matriz C, que corresponde à receita obtida no 2º semestre do ano passado.

Tabela 18 – Tabelas A e B

Tabela A	
	Receita (em R$)
Português	47.560,20
Biologia	32.867,00
Geografia	29.542,23
História	31.754,89
Matemática	53.129,81
Física	52.567,11
Química	45.081,00

Tabela B	
	Receita (em R$)
Português	56.394,82
Biologia	45.402,99
Geografia	41.564,08
História	52.126,22
Matemática	60.911,60
Física	56.975,00
Química	50.870,45

Resolução

Devemos escrever uma matriz de nome C que representa a receita da editora obtida no 2º semestre do ano passado. Para isso, basta pegarmos a receita anual e subtrairmos a quantia referente ao 1º semestre. Temos, portanto: C = B – A. Representando as matrizes, ficamos com a indicação a seguir:

$$\overset{B}{\begin{bmatrix} 56.394,82 \\ 45.402,99 \\ 41.564,08 \\ 52.126,22 \\ 60.911,60 \\ 56.975,00 \\ 50.870,45 \end{bmatrix}} - \overset{A}{\begin{bmatrix} 47.560,20 \\ 32.867,00 \\ 29.542,23 \\ 31.754,89 \\ 53.129,81 \\ 52.567,11 \\ 45.081,00 \end{bmatrix}} = \overset{C}{\begin{bmatrix} 8.834,62 \\ 12.535,99 \\ 12.021,85 \\ 20.371,33 \\ 7.781,79 \\ 4.407,89 \\ 5.789,45 \end{bmatrix}}$$

Temos, no caso, matrizes-coluna, que é a denominação dada a matrizes que têm uma única coluna. A ordem das matrizes é 7×1, de forma a concordar com os dados apresentados nas tabelas.

Multiplicações

A operação de multiplicação envolvendo matrizes pode acontecer de duas formas: multiplicação de um número real por uma matriz e multiplicação de duas matrizes. Veremos essas duas formas a seguir.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Nessa situação, há uma operação bem simples. Se temos uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um número real k, a matriz kA, resultante da multiplicação entre k e A, é composta por elementos ka_{ij}, mantendo-se a mesma ordem de A. Em outras palavras, basta pegarmos o número k e multiplicarmos tal número por todos os elementos da matriz, sem mudar seus posicionamentos.

Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar 3A e 5,6A:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 21 & -3 \\ -6 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5{,}6A = 5{,}6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}6 \cdot 3 & 5{,}6 \cdot 7 & 5{,}6 \cdot (-1) \\ 5{,}6 \cdot (-2) & 5{,}6 \cdot 8 & 5{,}6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}8 & 39{,}2 & -5{,}6 \\ -11{,}2 & 44{,}8 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação entre matrizes

A operação de multiplicação de uma matriz por outra é um pouco mais complexa e requer maior atenção. Para que seja possível realizar tal operação, é imprescindível que a primeira matriz tenha o número de colunas igual ao número de linhas da segunda. A matriz resultante, por sua vez, tem o número de linhas da primeira e o número de colunas da segunda.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times q}$. A matriz que indica o produto AB tem ordem $m \times q$. Observe o esquema a seguir:

$$\underbrace{A_{m \times n} \times B_{n \times q}}_{m \times q} = AB_{m \times q} \qquad (n = n)$$

Figura 45 – Determinação da ordem da matriz resultante da multiplicação entre matrizes

Uma vez estabelecida a possibilidade da operação e a ordem da matriz resultante, vamos mostrar como calcular os elementos ab_{ij} de AB. Devemos multiplicar ordenadamente os elementos da linha i de A e os elementos da coluna j de B, somando os resultados dessas multiplicações. Vamos acompanhar um exemplo para deixar mais claro esse procedimento. Para isso, considere as matrizes A e B a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Vamos verificar se é possível realizar a multiplicação de A por B. A matriz A tem 3 colunas, enquanto B tem 3 linhas. Logo, podemos prosseguir com a operação. A matriz resultante, AB, tem ordem 2×2: duas linhas como na matriz A e duas colunas como na matriz B. Esperamos, portanto, o formato a seguir.

$$AB = \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Para calcular os elementos, andamos nas linhas de A e nas colunas de B. Por exemplo, para o elemento ab_{11}, andamos na linha 1 de A (elementos 3, 7 e 1) e na coluna 1 de B (elementos 1, 2 e 7), multiplicando-os ordenadamente e somando os resultados. Ficamos com:

$$ab_{11} = (3 \cdot 1) + (7 \cdot 2) + (1 \cdot 7) = 3 + 14 + 7 = 24$$

Para o elemento ab_{12}, usamos a linha 1 de A e a coluna 2 de B. Para o elemento ab_{21}, usamos a linha 2 de A e a coluna 1 de B. Finalmente, para calcular ab_{22}, usamos a linha 2 de A e a coluna 2 de B. Note que os índices dos elementos indicam qual linha e coluna das matrizes A e B você precisa utilizar. Vamos ao cálculo completo.

$$AB = \overset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3\cdot1+7\cdot2+1\cdot7 & 3\cdot3+7\cdot0+1\cdot5 \\ 2\cdot1+8\cdot2+0\cdot7 & 2\cdot3+8\cdot0+0\cdot5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 14 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Observação

Na multiplicação envolvendo matrizes, não existe a propriedade comutativa, pois $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Vamos acompanhar um exemplo contextualizado.

Exemplo de aplicação

Um técnico de informática que presta serviço para empresas precisa realizar orçamentos de peças para dois clientes. O cliente 1 precisa de 2 processadores, 5 placas-mãe, 10 monitores e 15 teclados. Já o cliente 2 precisa de 6 processadores, 5 monitores e 22 teclados. A tabela seguinte mostra os preços das peças requeridas em duas lojas distintas, chamadas de loja 1 e loja 2. Utilizando multiplicação de matrizes, escreva a matriz C, que corresponde aos orçamentos de cada cliente em cada uma destas lojas, supondo que todos os produtos devam ser adquiridos no mesmo estabelecimento.

Resolução

Antes de escrever a matriz C com os resultados dos orçamentos, escreveremos as matrizes que compõem o enunciado. A tabela, com os preços dos produtos em cada loja, pode ser descrita diretamente como uma matriz, que chamamos de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2.073{,}22 & 2.041{,}00 \\ 579{,}90 & 599{,}99 \\ 445{,}23 & 452{,}90 \\ 28{,}80 & 24{,}20 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

Na matriz A, assim como na tabela, as linhas indicam cada tipo de peça a ser adquirida. Como mencionamos anteriormente, correspondemos linhas de uma matriz com a coluna da outra, assim, na matriz B, colocaremos cada uma das peças como colunas, mantendo as linhas para diferenciar um cliente do outro. Observe:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 0 & 5 & 22 \end{bmatrix}_{2\times 4} & \begin{array}{l} \text{Cliente1} \\ \text{Cliente2} \end{array} \end{array}$$

Note que o elemento b_{22} é zero ($b_{22}=0$), visto que o cliente 2 não deseja adquirir nenhuma placa-mãe. Os itens de cada cliente encontram-se dispostos nas linhas da matriz B, enquanto os preços de cada item nas lojas encontram-se nas colunas da matriz A. Para andarmos nas linhas de B e nas colunas de A, devemos multiplicar B por A. Logo, BA = C. Assim, conseguiremos os orçamentos solicitados. Vamos primeiro determinar a ordem de C:

$$B_{2\times 4} \times A_{4\times 2} = C_{2\times 2}$$

Agora, realizaremos a multiplicação de matrizes.

$$C = \overset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 0 & 5 & 22 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 2073,22 & 2041,00 \\ 579,90 & 599,99 \\ 445,23 & 452,90 \\ 28,80 & 24,20 \end{bmatrix}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2073,22 + 5 \cdot 579,90 + 10 \cdot 445,23 + 15 \cdot 28,80 & 2 \cdot 2041,00 + 5 \cdot 599,99 + 10 \cdot 452,90 + 15 \cdot 24,20 \\ 6 \cdot 2073,22 + 0 \cdot 579,90 + 5 \cdot 445,23 + 22 \cdot 28,80 & 6 \cdot 2041,00 + 0 \cdot 599,99 + 5 \cdot 452,90 + 22 \cdot 24,20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{Loja1} & \text{Loja2} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 11930,24 & 11973,95 \\ 15299,07 & 15042,90 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Cliente1} \\ \text{Cliente2} \end{array} \end{array}$$

Analisando a matriz C, podemos concluir que é financeiramente mais vantajoso adquirir as peças do cliente 1 na loja 1 e as peças do cliente 2 na loja 2, levando em consideração que todos os itens de um mesmo cliente devem ser adquiridos na mesma loja.

Lembrete

Para efetuar o produto de duas matrizes é sempre necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

6.1.3 Matriz identidade

Existe um tipo especial de matriz denominado matriz identidade. Considere a matriz quadrada I mostrada a seguir, com a indicação de sua diagonal principal.

$$I = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Diagonal principal

Observação

Em uma matriz quadrada I de ordem 2, a diagonal principal é formada pelos elementos i_{11} e i_{22}.

A matriz quadrada I_2 será uma matriz identidade **apenas se todos os elementos da sua diagonal principal forem iguais a 1, e todos os seus demais elementos forem iguais a 0**. Desse modo, a matriz identidade I_2 deve ter os elementos destacados a seguir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

A matriz I_3, a seguir, também é uma matriz identidade, de ordem 3.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Lembrete

Uma matriz quadrada é uma matriz que tem m = n, ou seja, que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Para ser uma matriz identidade, a matriz precisa, primeiramente, ser quadrada.

Matrizes identidade são elementos neutros da multiplicação entre matrizes. Isso significa que, dada uma matriz quadrada A de ordem n, o produto entre a matriz A e a matriz identidade I_n é igual à própria matriz A.

6.1.4 Matriz transposta

Considere a matriz A, a seguir:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 7 & -1\\ -2 & 8 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

A transposta A^t dessa matriz A é uma matriz que traz os mesmos elementos de A, posicionados de forma diferente. A matriz A^t pode ser encontrada transportando, de forma ordenada, os elementos de cada linha de A para os elementos de cada coluna de A^t. Desse modo, temos o que segue:

$$A^t=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & 8\\ -1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Observe que a matriz A é de ordem 2×3, enquanto sua transposta A^t é de ordem 3×2. Sempre haverá a troca entre os valores de m e de n no processo de transposição.

6.1.5 Matriz inversa

Considere a matriz quadrada A de ordem 2, exposta a seguir:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

A inversa da matriz A é a matriz A^{-1}, na qual o produto entre A e A^{-1} deve ser igual à matriz identidade de mesma ordem de A (I_2).

Para encontrarmos a matriz inversa A^{-1}, utilizaremos o conceito de equação matricial. Temos que:

$$A\cdot A^{-1}=I_2$$

Como ainda não conhecemos a matriz A^{-1}, vamos, em um primeiro momento, representá-la no formato algébrico:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}}\cdot\overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}=\overset{I_2}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

Realizando a multiplicação entre A e A^{-1}, temos:

$$\overset{A \cdot A^{-1}}{\begin{bmatrix} 1a+2c & 1b+2d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{bmatrix}} = \overset{I_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares extraídas de um mesmo contexto. Podemos trabalhar com essas equações em conjunto, para que possamos determinar os valores das incógnitas em questão.

Note que na matriz $A{\cdot}A^{-1}$ podemos enxergar a montagem de dois sistemas de equações: um com as equações da coluna 1, nas quais aparecem as incógnitas a e c, e outro com as equações da coluna 2, nas quais aparecem as incógnitas b e d. Os resultados das somas dos termos devem ser vistos na matriz I_2. Vamos montar o primeiro sistema:

$$\begin{cases} 1a+2c=1 \\ 3a+5c=0 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição, que você deve se lembrar do ensino básico. Para isso, devemos escolher uma das duas equações (escolheremos a de cima) e isolar a incógnita a.

$$a+2c=1$$
$$a=1-2c$$

Lembrete

Escrever o termo como a implica que o coeficiente associado à parte literal é 1. Portanto, a e 1a representam a mesma coisa.

Agora, vamos substituir o valor encontrado de a na outra equação.

$$3a+5c=0$$
$$3(1-2c)+5c=0$$
$$3-6c+5c=0$$
$$-c=-3$$
$$c=3$$

Em posse do valor de c, já podemos calcular o valor de a, substituindo c em qualquer uma das equações.

$$a + 2c = 1$$
$$a + 2 \cdot 3 = 1$$
$$a + 6 = 1$$
$$a = 1 - 6$$
$$a = -5$$

Agora, partiremos para o 2º sistema de equações, encontrado na coluna 2 da matriz $A \cdot A^{-1}$, na qual encontramos as incógnitas b e d. Faremos o mesmo procedimento para calcular essas incógnitas.

$$\begin{cases} 1b + 2d = 0 \\ 3b + 5d = 1 \end{cases}$$

$$b + 2d = 0$$
$$b = -2d$$

Agora, vamos substituir o valor encontrado de b na outra equação.

$$3b + 5d = 1$$
$$3(-2d) + 5d = 1$$
$$-6d + 5d = 1$$
$$-d = 1$$
$$d = -1$$

Finalmente, podemos calcular o valor numérico de b.

$$b + 2d = 0$$
$$b + 2(-1) = 0$$
$$b - 2 = 0$$
$$b = 2$$

Em resumo, encontramos os valores a seguir:

$$a = -5\,;\; b = 2\,;\; c = 3\,;\; d = -1$$

Já podemos, portanto, representar a matriz A^{-1}, inversa de A, conforme exposto a seguir:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Observação

Ainda neste capítulo, aprenderemos uma nova forma, bem sistemática, de resolver sistemas de equações, que envolve o uso de determinantes de matrizes. Além disso, aplicaremos matrizes inversas posteriormente.

A multiplicação de uma matriz A por sua inversa A^{-1} resulta na matriz identidade I. Desse modo, temos que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Nesse caso, a ordem dos fatores não altera o produto, portanto, temos que a seguinte sentença também é verdadeira.

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Calcular a matriz inversa é uma técnica poderosa em muitas áreas da ciência e da engenharia. Ela permite resolver sistemas complexos de equações, analisar sistemas de controle, implementar algoritmos numéricos, entre outras aplicações importantes.

Exemplo de aplicação

Em uma campanha, uma escola de ensino básico distribuiu alimentos para alunos de duas turmas. Cada aluno da turma A recebeu 5 caixas de biscoitos e 3 caixas de leite. Cada aluno da turma B recebeu 2 caixas de biscoitos e 4 caixas de leite. No total, a escola distribuiu 47 caixas de biscoitos e 45 caixas de leite. Com base nesse cenário, determine a quantidade de alunos que integra cada turma.

Dados:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

Resolução

Vamos chamar de a a quantidade de alunos da turma A e de b a quantidade de alunos da turma B. O problema pode ser resolvido utilizando multiplicação de matrizes, de forma a compormos uma equação matricial, disposta a seguir.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Biscoito} \\ \text{Leite} \end{array}\begin{array}{c} \;\;\text{A}\quad\text{B} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Na primeira matriz, foram dispostas as quantidades de caixas recebidas por cada turma, separadas por tipo. A primeira linha é referente às quantidades de caixas de biscoitos. A segunda linha é referente às quantidades de caixas de leite. A primeira coluna é dedicada às quantidades distribuídas à turma A, enquanto a segunda coluna se ocupa das quantidades distribuídas à turma B.

Sabemos que, no total, foram distribuídas 47 caixas de biscoitos, sendo que cada aluno da turma A recebeu 5 e cada aluno da turma B recebeu 2. Temos, portanto, que a quantidade total de caixas de biscoitos é descrita pela equação $5a + 2b = 47$. Essa equação é obtida ao realizarmos a multiplicação entre matrizes, utilizando a linha 1 da primeira matriz.

O mesmo raciocínio é aplicado às caixas de leites, que nos leva à equação $3a + 4b = 45$, obtida ao realizarmos a multiplicação a partir da linha 2.

O que fizemos, portanto, foi dispor os dados do problema em uma matriz, compondo uma equação matricial, já que os termos da 2ª matriz são desconhecidos.

Chamando a 1ª matriz (que representa a quantidade de caixas por tipo e turma) de C, a 2ª matriz (que representa as incógnitas) de X e a 3ª matriz (que representa a quantidade total de caixas) de T, temos a disposição a seguir.

$$C \cdot X = T$$

A nossa intenção é isolar a matriz X, cujos elementos são desconhecidos. Para isso, podemos multiplicar ambos os lados da equação por C^{-1}.

$$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot T$$

Como sabemos que $C^{-1} \cdot C = I$, faremos essa substituição, a seguir.

$$I \cdot X = C^{-1} \cdot T$$

Como compreendemos que matrizes identidade são elementos neutros da multiplicação entre matrizes, podemos apenas apagar a matriz I da equação. Isso nos leva à situação a seguir:

$$X = C^{-1} \cdot T$$

Portanto, para resolvermos a equação, vamos multiplicar as matrizes C^{-1} e T entre si. A matriz C^{-1} foi entregue como dado do enunciado, o que significa que não precisamos calculá-la, apenas utilizá-la. Vamos realizar a multiplicação.

$$C^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 47 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \cdot 47 - \frac{1}{7} \cdot 45 \\ -\frac{3}{14} \cdot 47 + \frac{5}{14} \cdot 45 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{94}{7} - \frac{45}{7} \\ -\frac{141}{14} + \frac{225}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{7} \\ \frac{84}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Agora, sabemos que a = 7 e que b = 6. Portanto, há 7 alunos na turma A e 6 alunos na turma B.

6.2 Determinantes

Um determinante é um número real obtido a partir dos elementos que compõem uma matriz quadrada. Com base nos determinantes das matrizes, é possível resolvermos diversos problemas de forma sistemática, ou seja, seguindo um algoritmo de resolução. Uma das aplicações mais comuns para determinantes consiste na resolução de sistemas de equações lineares, que utilizaremos para encontrar a função que se ajusta a conjuntos de pares ordenados. É possível, também, calcularmos matrizes inversas, assim como determinar a lei de formação de funções para as quais alguns pares ordenados são conhecidos.

Vamos, primeiramente, aprender a encontrar os determinantes de matrizes de ordem 2×2 e 3×3.

6.2.1 Determinante de matriz de ordem 2×2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 pode ser encontrado da seguinte maneira:

- Calculamos o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.
- Subtraímos, do valor do produto dos elementos da diagonal principal, o produto da diagonal secundária.

Seja a matriz quadrada A mostrada a seguir, com as indicações da diagonal principal e da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

Observação

Em uma matriz quadrada A de ordem 2, a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11} e a_{22}, enquanto a diagonal secundária é formada pelos elementos a_{12} e a_{21}.

Podemos calcular o determinante de A (detA) da seguinte forma:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observação

O determinante de uma matriz pode ser expresso por linhas simples verticais que envolvem os elementos da matriz em questão.

Para fixar o entendimento, vamos calcular o determinante das matrizes X e Y a seguir.

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det X = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = (3 \cdot 8) - (7 \cdot (-2)) = 24 - (-14) = 24 + 14 = 38$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 8) - (7 \cdot 9) = -24 - 63 = -87$$

6.2.2 Determinante de matriz de ordem 3×3

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser encontrado utilizando a **regra de Sarrus**, cujos passos serão descritos a seguir diretamente com um exemplo numérico, para facilitar o entendimento.

Vamos considerar a matriz A a seguir, para a qual se deseja calcular o determinante detA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Faremos o passo a passo do cálculo de detA.

Passo 1: para começar o cálculo do determinante, repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz e ficamos com o total de 5 colunas.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

Passo 2: utilizando três elementos por vez, efetuamos três multiplicações paralelas à diagonal principal, conforme indicado pelas setas.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1\cdot 5\cdot 9 = 45 \\ 2\cdot 6\cdot 7 = 84 \\ 3\cdot 4\cdot 8 = 96 \end{matrix}$$

$$45 \quad 84 \quad 96$$

Passo 3: utilizando três elementos por vez, efetuamos três multiplicações paralelas à diagonal secundária, conforme indicado pelas setas. No entanto, esses produtos devem ser multiplicados por -1, ou seja, seus sinais precisam ser trocados.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1\cdot 5\cdot 9 = 45 \\ 2\cdot 6\cdot 7 = 84 \\ 3\cdot 4\cdot 8 = 96 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -(3\cdot 5\cdot 7) = -105 \\ -(1\cdot 6\cdot 8) = -48 \\ -(2\cdot 4\cdot 9) = -72 \end{matrix}$$

$$-105 \quad -48 \quad -72$$

Passo 4: o determinante é a soma dos valores obtidos nos passos 2 e 3.

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$$

6.2.3 Resolução de sistemas de equações

A **regra de Cramer** é um artifício que nos ajuda a resolver sistemas de equações lineares por meio da resolução de determinantes. É principalmente aplicada a sistemas de três equações e três incógnitas, mas também pode ser utilizada no caso de duas equações e duas incógnitas, como veremos a seguir. Vamos retomar o conteúdo de funções já abordado neste livro-texto, mas de uma forma diferente: por meio de pares ordenados conhecidos, encontraremos as leis das funções que os caracterizam.

Em algumas situações, podemos determinar leis de funções pelo contexto. Na prática, em muitos casos, é o caminho contrário que precisamos tomar: a observação de um fenômeno nos leva a pares ordenados, que podem vir em um gráfico, por exemplo. A partir desse gráfico, somos capazes de extrair uma lei matemática que o caracteriza. É esse o tema que abordaremos na sequência.

6.2.4 Determinação de uma função de 1º grau a partir de dois pares ordenados

As funções de 1º grau podem ser caracterizadas apenas por dois pares ordenados, já que sua representação gráfica é uma reta no plano cartesiano.

Consideraremos dois pares ordenados conhecidos, que fazem parte da mesma função de 1º grau: (1,8) e (6,33). Desconhecemos, a princípio, a lei de formação desta função. Vamos, por meio da regra de Cramer, encontrá-la.

Lembrete

As funções de 1º grau têm formato $f(x) = ax + b$, sendo $y = f(x)$. Os pares ordenados têm o formato (x, y): isso indica que dados valores de x e de y correspondem a um ponto do plano cartesiano que passa pela curva da função.

Passo 1: considerando o formato $f(x) = ax + b$, escrevemos duas equações com os valores de x e y entregues pelos pares ordenados.

Par (1,8): para x = 1, temos y = 8. Logo:

$$ax + b = y$$
$$a \cdot 1 + b = 8$$
$$a + b = 8$$

Par (6,33): para x = 6, temos y = 33. Logo:

$$ax + b = y$$
$$a \cdot 6 + b = 33$$
$$6a + b = 33$$

Passo 2: montamos o sistema de equações com as duas equações obtidas no passo anterior, mantendo as incógnitas à esquerda da igualdade e o termo independente à direita da igualdade.

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ 6a + b = 33 \end{cases}$$

É importante que nos certifiquemos de que as incógnitas estão alinhadas nas duas equações: a embaixo de a e b abaixo de b.

Passo 3: encontramos um determinante principal D apenas com os coeficientes dos termos que contêm incógnitas (que estão à esquerda da igualdade).

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ 6a + b = 33 \end{cases} \rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

Se você não entendeu os elementos do determinante, preste atenção no sistema de equações, $a + b = 8$, por exemplo, tem dois termos que contêm incógnitas e um termo independente que se encontra à direita da igualdade. Somente utilizamos nesse determinante os termos da esquerda. O termo a pode ser escrito como 1a e o termo b pode ser escrito como 1b. Por isso, na 1ª linha do determinante, temos os elementos 1, já que levamos apenas os coeficientes (parte numérica) para o cálculo do determinante. Já para $6a + b = 33$, devemos levar o 6 (do termo 6a) e o 1 (do termo 1b).

Passo 4: encontramos um determinante em que os primeiros termos das equações (aqueles que contêm a incógnita a) são substituídos pelos termos independentes (da direita da igualdade).

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 6a+b=33 \end{cases} \rightarrow D_a = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 33 & 1 \end{vmatrix} = 8-33 = -25$$

Note que a 1ª coluna do determinante foi trocada pelos termos independentes, 8 e 33. A 2ª coluna manteve-se igual ao que estava no determinante principal.

Passo 5: encontramos um determinante em que os segundos termos das equações (aqueles que contêm a incógnita b) são substituídos pelos termos independentes (da direita da igualdade).

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 6a+b=33 \end{cases} \rightarrow D_b = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 33 \end{vmatrix} = 33-48 = -15$$

Note que a 2ª coluna do determinante foi trocada pelos termos independentes, 8 e 33. A 1ª coluna se manteve igual ao que estava no determinante principal.

Passo 6: com os valores dos determinantes, encontramos os valores das incógnitas a e b. Para isso, basta aplicar as seguintes regras:

$$a = \frac{D_a}{D}$$

$$b = \frac{D_b}{D}$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-25}{-5} = 5$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$$

Passo 7: substituímos os valores já conhecidos de a e b, partindo do formato $f(x) = ax + b$:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x) = 5x + 3$$

Com isso, determinamos que a lei de formação da função de 1º grau que contém os pares ordenados (1,8) e (6,33), é $f(x) = 5x + 3$.

Observação

Existem diversas maneiras de resolver um sistema de equações, como o método da substituição, que já abordamos, e o método da adição. Tente resolver o sistema que acabamos de solucionar novamente, mas por outros caminhos que não utilizem determinantes.

Vamos estudar o exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Observe o gráfico de uma função de 1º grau, exposto na figura a seguir. A partir dos pares ordenados destacados, encontre a lei da função utilizando o método de determinantes.

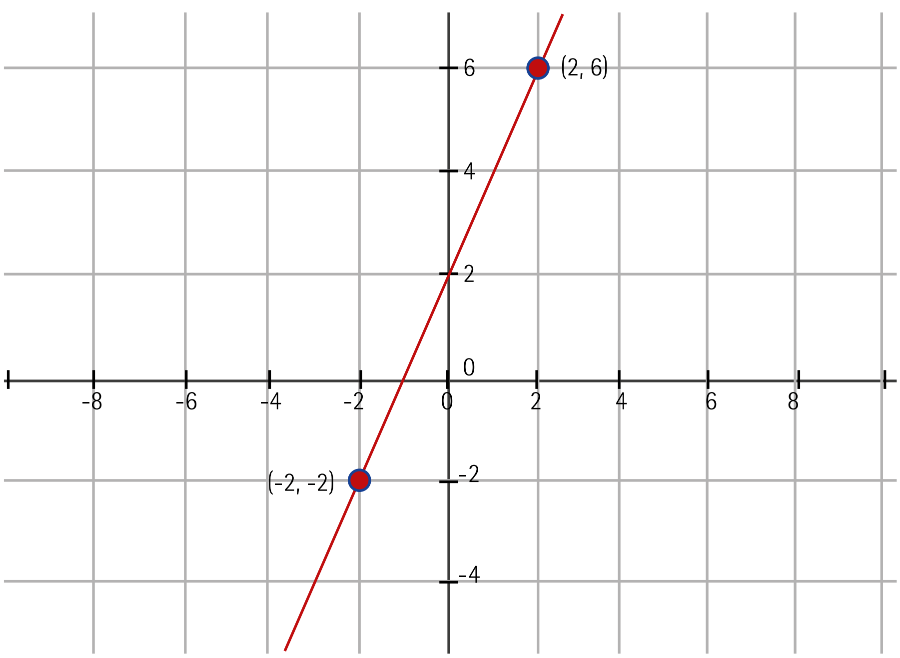

Figura 46 – Gráfico de uma função de 1º grau desconhecida

Resolução

Vamos observar os pares mostrados no gráfico do enunciado.

Par (2,6): para x = 2, temos y = 6. Logo:

$$ax + b = y$$
$$a \cdot 2 + b = 6$$
$$2a + b = 6$$

Par (-2,-2): para x = −2, temos y = −2. Logo:

$$ax + b = y$$
$$a \cdot (-2) + b = -2$$
$$-2a + b = -2$$

$$\begin{cases} 2a + b = 6 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto, a lei da função de 1º grau que contém os pares ordenados (2,6) e (-2,-2) é $f(x) = 2x + 2$. É claro que você poderia ter identificado outros pares ordenados pelo gráfico, ao invés de utilizar aqueles que foram destacados. Qualquer conjunto de dois pares ordenados que participam desta função levariam você ao mesmo resultado.

6.2.5 Determinação de uma função quadrática a partir de três pares ordenados

As funções quadráticas podem ser caracterizadas por apenas três pares ordenados. Dois pares não seriam suficientes, pois mais de uma parábola pode passar pelo mesmo conjunto de dois pares ordenados.

Vamos considerar três pares ordenados conhecidos, que fazem parte da mesma função quadrática: (1,2), (2,3) e (3,6). Desconhecemos, a princípio, a lei de formação dessa função. Vamos, por meio da regra de Cramer, encontrá-la.

Lembrete

As funções quadráticas são do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $y = f(x)$.

Passo 1: considerando o formato $f(x) = ax^2 + bx + c$, escrevemos três equações com os valores de x e y entregues pelos pares ordenados.

Par (1,2): para x = 1, temos y = 2. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$
$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2$$
$$a + b + c = 2$$

Par (2,3): para x = 2, temos y = 3. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$
$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3$$
$$4a + 2b + c = 3$$

Par (3,6): para x = 3, temos y = 6. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$
$$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6$$
$$9a + 3b + c = 6$$

Passo 2: montamos o sistema de equações com as três equações obtidas no passo anterior, mantendo as incógnitas à esquerda da igualdade e o termo independente à direita da igualdade.

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

É importante que nos certifiquemos de que as incógnitas estão alinhadas nas duas equações: a abaixo de a, b abaixo de b e c abaixo de c.

Passo 3: encontramos um determinante principal D, apenas com os coeficientes dos termos que contêm incógnitas (que estão à esquerda da igualdade).

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases} \rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{matrix}=2+9+12-18-3-4=-2$$

Para resolver o determinante, aplicamos a regra de Sarrus.

Passo 4: encontramos um determinante em que os primeiros termos das equações (aqueles que contêm a incógnita a) são substituídos pelos termos independentes (da direita da igualdade).

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases} \rightarrow D_a=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{matrix}=4+6+9-12-6-3=-2$$

Note que a 1ª coluna do determinante foi trocada pelos termos independentes, 2, 3 e 6. A 4ª coluna, obtida pela aplicação da regra de Sarrus, também deve assumir esses valores.

Passo 5: encontramos um determinante em que os segundos termos das equações (aqueles que contêm a incógnita b) são substituídos pelos termos independentes.

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases} \rightarrow D_b=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 9 & 6 \end{matrix}=3+18+24-27-6-8=4$$

Note que a 2ª coluna do determinante foi trocada pelos termos independentes, 2, 3 e 6. A 5ª coluna, obtida pela aplicação da regra de Sarrus, também deve assumir esses valores.

Passo 6: encontramos um determinante em que os terceiros termos das equações (aqueles que contêm a incógnita c) são substituídos pelos termos independentes.

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases} \rightarrow D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{matrix} = 12+27+24-36-9-24=-6$$

Passo 7: com os valores dos determinantes, encontramos os valores das incógnitas a, b e c, que representam os coeficientes da função quadrática. Para isso, basta aplicarmos as seguintes regras:

$$a = \frac{D_a}{D}$$

$$b = \frac{D_b}{D}$$

$$c = \frac{D_c}{D}$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$c = \frac{D_c}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Passo 8: substituímos os valores já conhecidos de a, b e c, partindo do formato $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(x) = 1x^2 + (-2)x + 3$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Com isso, determinamos que a lei da função de 2º grau que contém os pares ordenados (1,2), (2,3) e (3,6) é $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Vamos acompanhar mais um exemplo, mostrado a seguir.

Exemplo de aplicação

Um analista de uma unidade fabril traçou o gráfico da função lucro total (LT) em função da quantidade (q) de determinado produto manufaturado localmente. É notável que a curva forma uma parábola, o que indica que a função LT trata-se de uma função quadrática.

A partir dos pares ordenados destacados na figura a seguir, encontre a lei de formação da função LT(q), utilizando o método de determinantes.

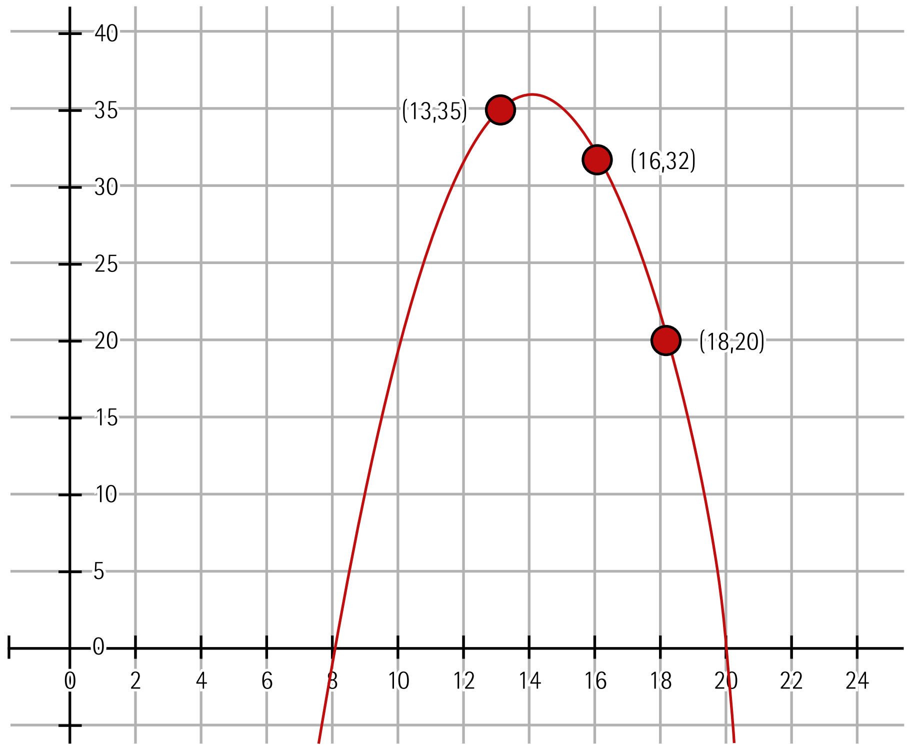

Figura 47 – Gráfico da função quadrática desconhecida

Resolução

Primeiro, vamos encontrar as equações lineares formadas a partir dos pares ordenados destacados.

Par (13,35): para x = 13, temos y = 35. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$

$$a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c = 35$$

$$169a + 13b + c = 35$$

Par (16,32): para x = 16, temos y = 32. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$
$$a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c = 32$$
$$256a + 16b + c = 32$$

Par (18,20): para x = 18, temos y = 20. Logo:

$$ax^2 + bx + c = y$$
$$a \cdot 18^2 + b \cdot 18 + c = 20$$
$$324a + 18b + c = 20$$

O sistema de equações com o qual trabalharemos é mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 169a + 13b + c = 35 \\ 256a + 16b + c = 32 \\ 324a + 18b + c = 20 \end{cases}$$

Para encontrarmos os coeficientes da função quadrática, vamos calcular os determinantes D, D_a, D_b e D_c, conforme exposto a seguir:

$$D = \begin{vmatrix} 169 & 13 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \\ 324 & 18 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 169 & 13 \\ 256 & 16 \\ 324 & 18 \end{matrix} = 2704 + 4212 + 4608 - 5184 - 3042 - 3328 = -30$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 35 & 13 & 1 \\ 32 & 16 & 1 \\ 20 & 18 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 35 & 13 \\ 32 & 16 \\ 20 & 18 \end{matrix} = 560 + 260 + 576 - 320 - 630 - 416 = 30$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 169 & 35 & 1 \\ 256 & 32 & 1 \\ 324 & 20 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 169 & 35 \\ 256 & 32 \\ 324 & 20 \end{matrix} = 5408 + 11340 + 5120 - 10368 - 3380 - 8960 = -840$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 169 & 13 & 35 \\ 256 & 16 & 32 \\ 324 & 18 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} 169 & 13 \\ 256 & 16 \\ 324 & 18 \end{matrix} = 54080 + 134784 + 161280 - 181440 - 97344 - 66560 = 4800$$

Finalmente, podemos calcular os coeficientes a, b e c, conforme as regras a seguir:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{30}{-30} = -1$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{-840}{-30} = 28$$

$$c = \frac{D_c}{D} = \frac{4800}{-30} = -160$$

Com isso, determinamos que a lei da função de 2º grau que contém os pares ordenados (13,35), (16,32) e (18,20) é $f(x) = -x^2 + 28x - 160$. Como, no contexto do problema, estamos trabalhando com uma função lucro total, podemos expressá-la como $LT(q) = -q^2 + 28q - 160$.

6.2.6 Matriz inversa pelo método de matriz adjunta

Já calculamos a matriz inversa por meio de um sistema de equações, na seção 6.1.5 deste livro-texto. Vamos, agora, conhecer outro método, denominado método de inversão por matriz adjunta. Ele possui uma sequência mais longa de passos de resolução, mas, em muitos casos, é mais simples por seu caráter sistemático (Fernandes, 2024).

Primeiro, vamos entender os conceitos de menor principal, cofatores, matriz de cofatores e matriz adjunta, que serão explorados a seguir.

Menor principal

Considere a matriz quadrada a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

O menor principal associado a um elemento a_{ij} dessa matriz é o determinante dos elementos restantes, após eliminar tanto a linha quanto a coluna de a_{ij}.

Vamos, como exemplo, calcular o menor principal D_{23}, associado ao elemento a_{23}. Pela matriz A, vemos o elemento $a_{23} = 6$. Devemos, então, eliminar os elementos da linha 2 e a coluna 3 dessa matriz, conforme ilustrado a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{6} \\ 9 & 8 & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 9 = -12$$

Temos, portanto, que o menor principal associado ao elemento a_{23} da matriz A é dado por $D_{23} = -12$.

Cofatores

Considere a mesma matriz quadrada A. Um cofator C_{ij} é um número associado a um elemento a_{ij} dessa matriz, definido conforme a expressão a seguir.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Vamos, então, calcular o cofator do elemento a_{23} da matriz A. Já sabemos que o menor principal é dado por $D_{23} = -12$. Temos, portanto, o que segue.

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$$
$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-12)$$
$$C_{23} = (-1)^{5} \cdot (-12)$$
$$C_{23} = (-1) \cdot (-12)$$
$$C_{23} = 12$$

Matriz de cofatores

Uma matriz de cofatores Cof é uma matriz formada por todos os cofatores C_{ij} de outra. Essa matriz terá a mesma ordem da matriz original.

Vamos, então, calcular Cof_A, ou seja, a matriz de cofatores associada à matriz A. Para isso, precisamos calcular todos os 9 cofatores existentes para a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{1} & 2 & 6 \\ \cancel{9} & 8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 6 \cdot 8 = -34$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$$
$$C_{11} = (-1)^{2} \cdot (-34)$$
$$C_{11} = 1 \cdot (-34)$$
$$C_{11} = -34$$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 1 & \cancel{2} & 6 \\ 9 & \cancel{8} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 6 \cdot 9 = -47$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12}$$
$$C_{12} = (-1)^{3} \cdot (-47)$$
$$C_{12} = (-1) \cdot (-47)$$
$$C_{12} = 47$$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 1 & 2 & \cancel{6} \\ 9 & 8 & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 9 = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot D_{13}$$
$$C_{13} = (-1)^{4} \cdot (-10)$$
$$C_{13} = 1 \cdot (-10)$$
$$C_{13} = -10$$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{6} \\ \cancel{9} & 8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = -12$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$$
$$C_{21} = (-1)^{3} \cdot (-12)$$
$$C_{21} = (-1) \cdot (-12)$$
$$C_{21} = 12$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & \cancel{4} & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{6} \\ 9 & \cancel{8} & 7 \end{vmatrix} \rightarrow D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 9 = -24$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$$
$$C_{22} = (-1)^{4} \cdot (-24)$$
$$C_{22} = 1 \cdot (-24)$$
$$C_{22} = -24$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{6} \\ 9 & 8 & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 9 = -12$$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$

$C_{23} = (-1)^{5} \cdot (-12)$

$C_{23} = (-1) \cdot (-12)$

$C_{23} = 12$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ \cancel{1} & 2 & 6 \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 14$$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31}$

$C_{31} = (-1)^{4} \cdot 14$

$C_{31} = 1 \cdot 14$

$C_{31} = 14$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \cancel{4} & 5 \\ 1 & \cancel{2} & 6 \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 13$$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D_{32}$

$C_{32} = (-1)^{5} \cdot 13$

$C_{32} = (-1) \cdot 13$

$C_{32} = -13$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \cancel{5} \\ 1 & 2 & \cancel{6} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} \end{bmatrix} \rightarrow D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot D_{33}$

$C_{33} = (-1)^{6} \cdot 2$

$C_{33} = 1 \cdot 2$

$C_{33} = 2$

Já podemos, agora, escrever a matriz Cof_A, que será representada como exposto a seguir.

$$Cof_A = \begin{bmatrix} -34 & 47 & -10 \\ 12 & -24 & 12 \\ 14 & -13 & 2 \end{bmatrix}$$

Saiba mais

Existem calculadoras online de matrizes de cofatores. Uma delas pode ser encontrada no site a seguir:

EMH. *Cofactor matrix calculator*. [s.d.]. Disponível em: https://tinyurl.com/ymuu45a5. Acesso em: 17 dez. 2024.

Matriz adjunta

Vamos, agora, entender o conceito de matriz adjunta. Se você já aprendeu a encontrar a matriz de cofatores, encontrar a matriz adjunta é fácil. Uma matriz adjunta nada mais é do que a matriz de cofatores transposta.

Lembrete

Se temos uma matriz X, a sua matriz transposta, X^t, pode ser encontrada transportando, de forma ordenada, os elementos de cada linha de X para os elementos de cada coluna de X^t.

Vamos considerar a mesma matriz A, com a qual estamos lidando desde o início dessa seção.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Já encontramos a sua matriz de cofatores, exposta a seguir.

$$Cof_A = \begin{bmatrix} -34 & 47 & -10 \\ 12 & -24 & 12 \\ 14 & -13 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz adjunta de A, Adj_A, nada mais é do que a transposição da matriz Cof_A. Logo, ela é dada conforme exposto a seguir.

$$Adj_A = (Cof_A)^t = \begin{bmatrix} -34 & 12 & 14 \\ 47 & -24 & -13 \\ -10 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa pelo método de matriz adjunta

Agora que já aprendemos todos esses conceitos, vamos, finalmente, calcular a matriz inversa da matriz A pelo método da matriz adjunta. Para encontrarmos a inversa A^{-1}, devemos aplicar a regra a seguir (Fernandes, 2024).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det_A} \cdot \mathrm{Adj}_A$$

Na equação:

- A^{-1} é a matriz inversa da matriz A.
- $\det_A$ é o determinante da matriz A.
- Adj_A é a matriz adjunta da matriz A.

Antes de aplicar essa regra, vamos calcular $\det_A$, utilizando a regra de Sarrus.

$$\det_A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 9 & 8 \end{matrix} = 42 + 216 + 40 - 28 - 144 - 90 = 36$$

Agora que já sabemos que $\det_A = 36$, e em posse da matriz adjunta que acabamos de calcular, vamos aplicar à equação.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det_A} \cdot \mathrm{Adj}_A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \cdot \begin{bmatrix} -34 & 12 & 14 \\ 47 & -24 & -13 \\ -10 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-34}{36} & \frac{12}{36} & \frac{14}{36} \\ \frac{47}{36} & \frac{-24}{36} & \frac{-13}{36} \\ \frac{-10}{36} & \frac{12}{36} & \frac{2}{36} \end{bmatrix}$$

Simplificando as frações, chegamos ao formato final disposto a seguir:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{18} & \frac{1}{3} & \frac{7}{18} \\ \frac{47}{36} & -\frac{2}{3} & -\frac{13}{36} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Resumo

A unidade III foi dedicada ao estudo dos exponenciais, dos logaritmos, das matrizes e dos determinantes.

Começamos vendo alguns conceitos básicos de potenciação, como nomenclatura e propriedades. Passamos para o estudo das equações exponenciais e seguimos para as funções exponenciais, que são aquelas cuja lei de formação tem a variável independente como expoente, no formato $f(x) = a^x$.

No estudo dos logaritmos, observamos a equivalência entre equações expressas no formato exponencial e no formato logarítmico. Essa equivalência tem a forma $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$. Em seguida, estudamos as propriedades básicas e operacionais dos logaritmos, aprendemos a regra de mudança de base e, finalmente, conhecemos as funções logarítmicas, que são aquelas cuja lei de formação apresenta o formato $f(x) = \log_a x$.

Posteriormente, relembramos o conceito matemático de matriz e aprendemos as operações aritméticas que utilizam essas estruturas como operandos. Conhecemos, também, alguns tipos especiais de matrizes, como a matriz identidade, a matriz transposta e a matriz inversa.

Fechamos nosso conteúdo estudando os determinantes, explicando que se trata de um número real associado a uma matriz quadrada. Com base nesse conceito, resolvemos sistemas de equações e aprendemos uma nova técnica para a realização de cálculos de matrizes inversas, que é o método da matriz adjunta.

Exercícios

Questão 1. Sula pegou dinheiro emprestado de Fábio, o que gerou uma dívida. Imagine que a dívida D, em reais, de Sula varie com o tempo t, em meses, conforme a seguinte função exponencial:

$D = a.3^{b.t}$

Na função, a e b são constantes.

Na figura a seguir, podemos ver o gráfico da função $D = a.3^{b.t}$

Figura 48 – Gráfico de função exponencial

Com base no exposto e nos seus conhecimentos, avalie as afirmativas.

I – O valor que Sula tomou emprestado de Fábio, representado pela constante a, foi de R$ 1.000,00.

II – A constante b vale pouco mais de 7.000.

III – Se Sula saldar a dívida no tempo de 10 meses, o valor a ser pago para Fábio será, aproximadamente, de R$ 6.500,00.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa D.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: pela leitura do gráfico, vemos que, em t igual a 0, temos D(0)=1.000, que é o valor da constante a. Logo, concluímos que o valor que Sula tomou emprestado de Fábio, representado pela constante a, foi de R$ 1.000,00.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: pela leitura do gráfico, vemos que, em t igual a 0, temos D(0)=1.000, que é o valor da constante a. Assim, ficamos com:

$$D = 1000.3^{b.t}$$

Com o gráfico, também podemos aferir que, em t igual a 6, temos, aproximadamente, D(6)=3.000. Assim, ficamos com:

$$D(6) = 3000 = 1000.3^{b.6}$$

$$\frac{3000}{1000} = 3^{b.6} \rightarrow 3 = 3^{b.6} \rightarrow 3^{1} = 3^{b.6} \rightarrow 1 = b.6 \rightarrow b = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

Logo, concluímos que o valor de b é aproximadamente igual a 0,17.

III – Afirmativa correta.

Justificativa: pela leitura do gráfico, vemos que, em t igual a 10, temos D(10) aproximadamente igual a R$ 6.500,00.

Questão 2. Considere as matrizes A, B e C dadas a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \\ 7 & 8 \\ 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 50 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \\ 16 & 12 \\ 26 & 13 \\ 69 & 11 \end{pmatrix}$$

O elemento localizado na 5ª linha e na 1ª coluna da matriz Z = A.B+8.C é igual a:

A) -7.

B) 58.

C) 663.

D) 267.

E) 446.

Resposta correta: alternativa C.

Análise da questão

Vamos, primeiramente, calcular a matriz T = A.B, conforme detalhado a seguir.

$$T = A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \\ 7 & 8 \\ 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 50 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = A.B = \begin{pmatrix} 1.(-3)+1.20 & 1.50+1.0 \\ 0.(-3)+10.20 & 0.50+10.0 \\ 7.(-3)+8.20 & 7.50+8.0 \\ 2.(-3)+(-2).20 & 2.50+(-2).0 \\ 3.(-3)+6.20 & 3.50+6.0 \end{pmatrix}$$

$$T = A.B = \begin{pmatrix} -3+20 & 50+0 \\ 0+200 & 0+0 \\ -21+160 & 350+0 \\ -6-40 & 100+0 \\ -9+120 & 150+0 \end{pmatrix}$$

$$T = A.B = \begin{pmatrix} 17 & 50 \\ 200 & 0 \\ 139 & 350 \\ -46 & 100 \\ 111 & 150 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos calcular a matriz U = 8.C, conforme detalhado a seguir:

$$U = 8.C = 8.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \\ 16 & 12 \\ 26 & 13 \\ 69 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.1 & 8.1 \\ 8.10 & 8.8 \\ 8.16 & 8.12 \\ 8.26 & 8.13 \\ 8.69 & 8.11 \end{pmatrix}$$

$$U = 8.C = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 80 & 64 \\ 128 & 96 \\ 208 & 104 \\ 552 & 88 \end{pmatrix}$$

Como T = A.B e U = 8.C, podemos calcular Z = A.B+8.C = T+U conforme detalhado a seguir.

$$Z = T + U = \begin{pmatrix} 17 & 50 \\ 200 & 0 \\ 139 & 350 \\ -46 & 100 \\ 111 & 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 80 & 64 \\ 128 & 96 \\ 208 & 104 \\ 552 & 88 \end{pmatrix}$$

$$Z = T + U = \begin{pmatrix} 17+8 & 50+8 \\ 200+80 & 0+64 \\ 139+128 & 350+96 \\ -46+208 & 100+104 \\ 111+552 & 150+88 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 25 & 58 \\ 280 & 64 \\ 267 & 446 \\ 162 & 204 \\ 663 & 238 \end{pmatrix}$$

Vemos que o elemento localizado na 5ª linha e na 1ª coluna da matriz Z é igual a 663.