Unidade II

3 FUNÇÕES AFIM

O capítulo 3 do nosso livro-texto será dedicado ao estudo das funções afim. Antes de entrarmos especificamente nesse tipo de função, vamos fazer uma importante introdução, na qual abordaremos o próprio conceito de função e a sua importância.

3.1 Introdução às funções

Funções matemáticas estão por toda a parte. A média que você obtém em uma disciplina deste curso é uma função das notas que tirou nas avaliações. O preço que você paga em um posto de gasolina ao abastecer seu veículo é uma função da quantidade de combustível adquirida. Programadores utilizam esse recurso extensamente na elaboração de seus códigos-fonte. Mas, o que, exatamente, significa função? Vamos utilizar algumas abordagens para definir esse importante conceito, começando pela utilização de conjuntos, que abordamos anteriormente.

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, considere que x seja uma variável que representa os elementos de A e que y seja uma variável que representa os elementos de B. Uma função de A em B é uma regra que determina como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Essa função pode ser denotada pela expressão a seguir:

$$f: A \rightarrow B$$

Lemos essa notação como "f é função de A em B". Na figura a seguir, vemos um diagrama, denominado diagrama de flechas, que exemplifica a relação entre os elementos de A e de B e caracteriza $f: A \rightarrow B$. O conjunto A é chamado de domínio, e o conjunto B é denominado contradomínio. Note que as setas que correspondem os elementos partem de A e chegam a B.

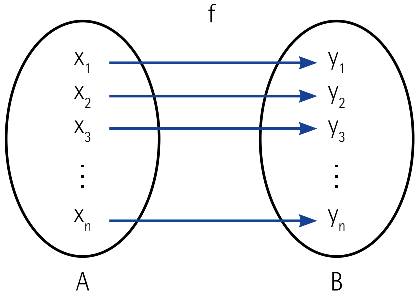


Figura 15 – Diagrama de flechas que relaciona os elementos x do conjunto de partida A aos elementos y do conjunto de chegada B por meio da regra f, de forma a constituir uma função $f: A \rightarrow B$

Para termos uma função, é necessário atender às seguintes condições:

- Todos os elementos x de A devem ter um correspondente y em B (não podem sobrar elementos no conjunto A sem correspondência).

- Cada elemento x de A deve ter apenas um correspondente y em B (cada elemento de A deve apontar para apenas um elemento em B).

Apesar de ser uma abordagem importante para entendermos definições e a relação entre variáveis, em termos práticos, não nos preocupamos tanto assim com conjuntos quando falamos de funções. Isso ocorre, principalmente, porque grande parte das funções tem sua regra de correspondência entre elementos definida por uma lei de formação, que nada mais é do que uma equação capaz de relacionar as variáveis do contexto. Quando isso é possível, para representar a correspondência entre variáveis de uma função de A em B, costumamos utilizar a notação de função de Euler, dada por:

$y = f(x)$

Chamamos essa representação de notação de Euler porque, no século XVIII, Leonard Euler (1707-1783), físico, filósofo e matemático suíço, criou a notação f(x) para designar uma função que depende da variável x.

Podemos ler essa notação como "y é função de x", com $x \in A$ e $y \in B$. Chamamos x de variável independente e y de variável dependente. É como se a variável y aguardasse x assumir seus valores para que y tenha seus valores determinados pela lei de formação que define a função. Em outras palavras, o valor de y é determinado por uma função f aplicada a x. Sempre que pensamos em fórmulas matemáticas, estamos falando de leis de funções.

Imagine uma fórmula do tipo $y = 5x$, em que x e y representam números reais. O que isso significa? Primeiramente, precisamos ver que, em $y = 5x$, temos o seguinte:

- x, a variável independente, é a entrada de valores.

- y, a variável dependente, é a saída de valores.

- $y = 5x$ é a lei de formação da função que relaciona x e y.

Na figura a seguir, temos um esquema do que acabamos de explicar:

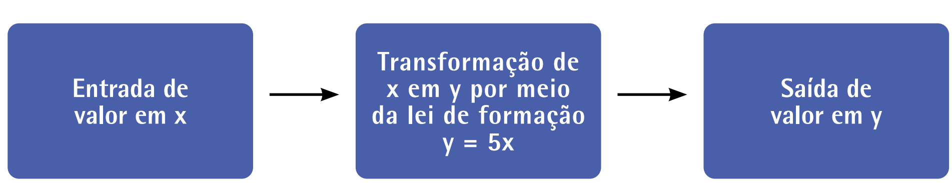


Figura 16 – Esquema da transformação de x em y pela função y = 5x

Por exemplo, se substituirmos o símbolo x pelo número 7, teremos como resultado, no símbolo y, o número 35, pois a fórmula dada ($y = 5x$) significa que o valor de saída em y é o quíntuplo do valor de entrada em x. Observe:

$y = 5x = 5 \cdot 7 = 35$

Podemos, também, escrever a função em análise como:

$f(x) = 5x$

Veja que, nessa notação, $f(x)$ não é o produto de f por x. $f(x)$ em $f(x) = 5x$ é equivalente a y em $y = 5x$. Logo, se substituirmos x por 7, por exemplo, ficaremos com $f(7) = 35$, pois:

$f(7) = 5 \cdot 7 = 35$

Observação

Na prática, nem toda função é descrita diretamente por uma lei de formação, ou seja, por uma equação. Se pensarmos, por exemplo, em um gráfico que descreve o "número de casos de uma doença em função do tempo", encontraremos valores que, provavelmente, não podem se relacionar diretamente por uma equação. De qualquer forma, temos uma variável dependente (número de casos da doença) e uma variável independente (tempo). Esse tipo de função é muito explorado na área da estatística (que veremos na unidade IV) e das ciências experimentais. Porém, nesta unidade, estudaremos funções matemáticas descritas por uma lei de formação.

3.2 Domínio, contradomínio e imagem

Vamos retomar brevemente o tema de conjuntos, que aparece com frequência nas definições de conceitos envolvidos nas funções matemáticas.

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto $B = \{0, 3, 6, 9\}$. Considere, também, a função $f: A \rightarrow B$ definida pela lei de formação $f(x) = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$. Nesse caso, podemos utilizar a lei da função para achar as correspondências entre os elementos de A e os elementos de B. Veja, a seguir.

- Para $x = 0$, temos: $y = 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$
- Para $x = 1$, temos: $y = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow (1, 3)$
- Para $x = 2$, temos: $y = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow (2, 6)$

A correspondência entre valores x de A e y de B pode ser expressa como pares ordenados, no formato (x, y). Note que essa notação já foi utilizada anteriormente. Por exemplo, o par (2, 6) significa que, para x = 2, temos y = 6 nessa função.

Perceba também que, nas correspondências entre variáveis, utilizamos todos os elementos de A (cada um deles achou uma única correspondência em B, conforme esperado). Porém, nem todos os elementos de B participam da correspondência. O elemento $9 \in B$, mas está fora de qualquer um dos pares ordenados. Com isso, vamos definir os conjuntos domínio, contradomínio e imagem dessa função, explicados a seguir.

- **Domínio**: D(f) = A = {0, 1, 2}. O conjunto domínio de uma função, denotado por D(f), é composto por todos os elementos que a variável x (variável independente) pode assumir em determinado contexto. Nessa situação, ele é igual ao próprio conjunto A.

- **Contradomínio**: CD(f) = B = {0, 3, 6, 9}. O conjunto contradomínio de uma função, denotado por CD(f), é composto por todos os elementos disponíveis para a variável y (variável dependente de x) dentro de um contexto.

- **Imagem**: Im(f) = {0, 3, 6}. O conjunto imagem de uma função, denotado por Im(f), é composto por todos os elementos de B que de fato encontraram correspondência em A, ou seja, são todos os valores efetivamente assumidos pela variável y, uma vez aplicada a lei da função nos elementos de A. Im(f) é sempre um subconjunto de CD(f), ou seja, $Im(f) \subset CD(f)$.

Lembrete

Um conjunto é considerado subconjunto de si mesmo. Logo, mesmo que $Im(F) \subset CD(f)$, Im(F) e CD(f) podem ser iguais.

A figura a seguir ilustra os conjuntos domínio, contradomínio e imagem da função em questão.

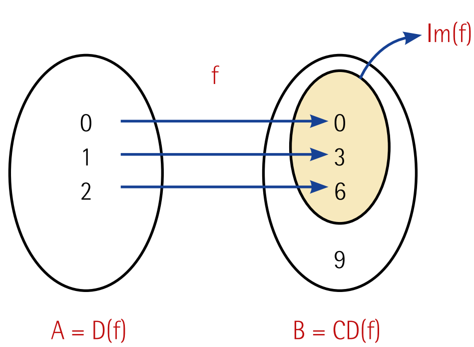


Figura 17 – Diagrama de flechas da função proposta, com identificação dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem

Quando dizemos f: A → B, estamos, na verdade, estabelecendo que A é o domínio da função f (A apresenta valores que podem ser assumidos pela variável independente) e que B é o contradomínio da função f (B apresenta valores que podem ser assumidos pela variável dependente). A lei de formação nada mais é do que a fórmula que relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio dessa função. É muito comum que conjuntos numéricos sejam postos como domínio e contradomínio de funções, de forma a fazer restrições aos valores que podem ser assumidos pelas variáveis dentro de contextos.

Caso não haja menção ao domínio e ao contradomínio (o que é bastante comum na prática), levamos em consideração o próprio contexto, que muitas vezes restringe os tipos de valores que as variáveis podem assumir.

Em situações descontextualizadas, adotamos $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, ou seja, consideramos que as variáveis podem assumir qualquer valor real. Além disso, precisamos levar em consideração o formato da lei de formação da função, pois podem existir valores para a variável independente para os quais a função não é definida, como valores que zeram o denominador de frações, por exemplo.

Lembrete

Em situações contextualizadas, o domínio de uma função pode ser dado não apenas pelo formato da lei de formação, mas também pelo contexto. Por exemplo, se em determinada situação x significa a quantidade de canetas vendidas por um fabricante, o contexto impõe que $D(f) = \mathbb{N}$, já que não é possível vender quantidades fracionárias nem negativas de canetas.

Os exemplos a seguir vão abordar situações que envolvem domínio, contradomínio e imagem de algumas funções.

Exemplo de aplicação

1) Considere a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por sua lei $f(x) = x + 1$. Indique o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função.

Resolução

Pela notação $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, já sabemos quem é o domínio (D) e quem é o contradomínio (CD) de f. Veja.

$D(f) = \mathbb{N}$

$CD(f) = \mathbb{N}$

Domínio é o conjunto que aparece antes da seta, indicando que a variável x pode assumir o valor de qualquer número natural. Contradomínio é o conjunto que aparece depois da seta, indicando que y = f(x) também pode assumir qualquer valor natural.

Quando consideramos a lei de formação da função, vemos que a função f transforma todo número natural x em um outro número natural y, que é sucessor de x. Logo, ficamos com o que segue:

- Para x = 0, temos: y = 0+1 = 1 ⇨ (0, 1)
- Para x = 1, temos: y = 1+1 = 2 ⇨ (1, 2)
- Para x = 2, temos: y = 2+1 = 3 ⇨ (2, 3)
- Para x = 3, temos: y = 3+1 = 4 ⇨ (3, 4)

E assim, sucessivamente, lembrando que o conjunto dos números naturais é iniciado em zero e se estende até o infinito. Portanto, o menor valor que y consegue assumir é 1, quando considerada a lei da função. Temos, no caso, o seguinte conjunto imagem:

$Im(f) = \mathbb{N}^*$

2) Dadas as leis de funções reais f a seguir, explicite seus domínios.

A) $f(x) = x^2 + 2$

B) $y = \dfrac{x+2}{x}$

C) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

D) $y = \sqrt{x-5}$

Resolução

A) Quando temos funções reais, devemos considerar o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a lei da função é definida, ou seja, devemos observar as restrições impostas pelo próprio formato da lei de formação. Para $f(x) = x^2 + 2$, não existe qualquer tipo de restrição, pois qualquer número real assumido pela variável x resultará em um número real para f(x). Logo:

$D(f) = \mathbb{R}$

B) No item B, temos uma função cuja lei envolve uma fração algébrica (fração que possui variável no denominador). Nos números reais, divisão por zero não é uma operação definida. Portanto, devemos restringir o domínio, de forma a nunca zerar o denominador. Note que não há problema em zerar o numerador. Como temos apenas a variável x no denominador, basta que o domínio não inclua o elemento zero. Dessa forma, qualquer outro valor assumido por x resultará em um número real em $y = f(x)$. Temos, portanto:

$D(f) = \mathbb{R}^*$

C) Na lei de formação da função do item C, temos, no denominador, a expressão algébrica $x + 2$. Como não podemos ter denominador nulo, precisamos descobrir qual valor de x é capaz de zerar essa expressão. Para isso, basta igualarmos a expressão a zero e isolarmos o x, conforme faremos a seguir.

$x + 2 = 0$

$x = -2$

Logo, nosso domínio irá incluir qualquer número real, contanto que ele seja diferente de −2. Em linguagem matemática, podemos escrever:

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Alternativamente, também podemos expressar o conjunto domínio da função da maneira a seguir:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$

Podemos ler essa notação como: "x pertence ao conjunto dos números reais, tal que x é diferente de −2".

Perceba que essas duas formas de explicitar o domínio da função nos levam ao mesmo conjunto de elementos.

D) No item D, temos um radical com uma variável em seu radicando. Devemos nos preocupar em não deixar o radicando se tornar um valor negativo, pois não existem raízes quadradas de números negativos em $\mathbb{R}$. Portanto, a expressão algébrica do radicando deve ser igual a zero ou maior do que zero. Nesse caso, podemos trabalhar com uma inequação, que funciona de forma parecida com uma equação, mas, em vez de utilizarmos o símbolo de igualdade, vamos usar o símbolo maior ou igual. Em linguagem matemática, temos:

$x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$

Logo, x pode assumir qualquer valor real maior ou igual a 5. Nosso domínio pode ser escrito dessa forma:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

3.3 Plano cartesiano

Um plano cartesiano é um plano munido de dois eixos ortogonais (no caso, perpendiculares). Esses eixos são retas que abrigam valores do domínio e da imagem da função, de forma a nos permitir representar graficamente o comportamento da função.

O eixo horizontal, denominado eixo das abscissas, abriga valores da variável independente, x. Já o eixo vertical, denominado eixo das ordenadas, abriga valores da variável dependente, y = f(x). No cruzamento entre os eixos, temos a origem, local em que ambas as variáveis valem zero. Na figura a seguir, vemos um plano cartesiano com alguns pontos marcados para estudarmos suas coordenadas.

Observação

Abscissa é a coordenada horizontal em um plano cartesiano. Ordenada é a coordenada vertical. É essencial que o par ordenado de um ponto P exiba primeiro a abscissa e depois a ordenada, no formato P(x, y).

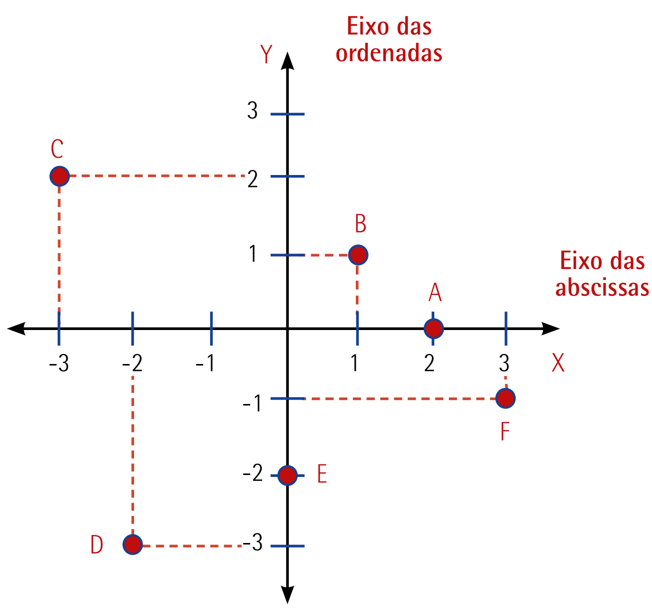


Figura 18 – Plano cartesiano

Vamos observar o eixo horizontal. Note que, da origem para a direita, x assume valores positivos. Da origem para a esquerda, x assume valores negativos. Já no eixo vertical, temos valores positivos para y acima da origem, assim como valores negativos abaixo da origem.

Os pontos assumem coordenadas que podemos localizar por pares ordenados, no formato (x, y). Sempre que um ponto é marcado em cima de um dos eixos, significa que a variável que o outro eixo representa vale 0. Observe os pontos destacados no plano cartesiano:

- A(2, 0)
- B(1, 1)
- C(–3, 2)
- D(–2, –3)
- E(0, –2)
- F(3, –1)

3.4 Função afim

Segundo Dante e Viana (2019), uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função afim quando sua lei de formação pode ser expressa no seguinte formato, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax + b$$

Temos a e b como coeficientes, x como variável independente e y = f(x) como variável dependente. Na prática, podemos pensar em uma função afim como qualquer função que descreve uma reta no plano cartesiano, desde que tal reta não seja vertical (paralela ao eixo das ordenadas). Podemos pensar nessa reta como o resultado do posicionamento adjacente de todos os pares ordenados da função, que estarão todos alinhados entre si.

Quando a = 0, temos um tipo de função afim chamada de função constante, pois, nesse caso, temos f(x) = b. Sempre que $a \neq 0$, temos a famosa função de 1º grau, que é o tipo mais comum de função afim. Quando uma função de 1º grau apresenta b = 0, temos um tipo de função afim chamada de função linear. Veremos depois, com mais detalhes, esses casos particulares.

Observação

Alguns autores consideram função afim como sinônimo de função polinomial de 1º grau. Nesse caso, o coeficiente a não pode ser nulo. Outros consideram como função afim, além das funções de 1º grau, também as funções constantes. É esta a definição que adotamos neste livro-texto.

Na tabela a seguir, vemos as leis de algumas funções afim, com a determinação de seus coeficientes e de seus tipos.

Tabela 9 – Leis de algumas funções afim, com a apresentação de seus coeficientes

Lei da função afim	Coeficientes	Tipo de função afim
$f(x) = 2x + 17$	$a = 2$	Polinomial de 1º grau
	$b = 17$	
$f(x) = 15{,}57x$	$a = 15{,}57$	Polinomial de 1º grau linear (pois $a \neq 0$ e $b = 0$)
	$b = 0$	
$f(x) = 67 + \frac{3x}{2}$	$a = \frac{3}{2}$	Polinomial de 1º grau
	$b = 67$	
$f(x) = 9{,}8x + 2\pi$	$a = 9{,}8$	Polinomial de 1º grau
	$b = 2\pi$	
$f(x) = \sqrt{2} + x$	$a = 1$	Polinomial de 1º grau
	$b = \sqrt{2}$	
$f(x) = 42$	$a = 0$	Constante (pois $a = 0$)
	$b = 42$	

Observação

As funções do tipo afim são definidas como tendo domínio real. No entanto, algumas aplicações, cuja lei tem formato f(x) = ax + b, vão exigir a restrição do domínio a alguns pontos ou intervalos. Nesses casos, focamos nos segmentos de interesse, mas trabalhamos sob o mesmo conjunto de regras, de forma geral.

3.4.1 Estudo dos coeficientes

Já percebemos que o coeficiente a, chamado de coeficiente angular, sempre acompanha a variável x. Já o coeficiente b, chamado de coeficiente linear, integra um termo independente, ou seja, não multiplica qualquer variável. Vamos conhecer agora um pouco a respeito do papel que eles exercem em uma função afim.

O coeficiente angular (a) é responsável pelo ângulo formado entre o gráfico da função e o eixo das abscissas (eixo horizontal). A respeito do coeficiente angular, temos as características expostas a seguir, que podem ser observadas na próxima figura.

- **Para a > 0:** a função é crescente. Aumentos no valor de x causam aumentos no valor de f(x) e vice-versa.

- **Para a < 0:** a função é decrescente. Aumentos no valor de x causam diminuições no valor de f(x) e vice-versa.

- **Para a = 0:** a função é constante. Variar o valor de x não causa impacto no valor de f(x).

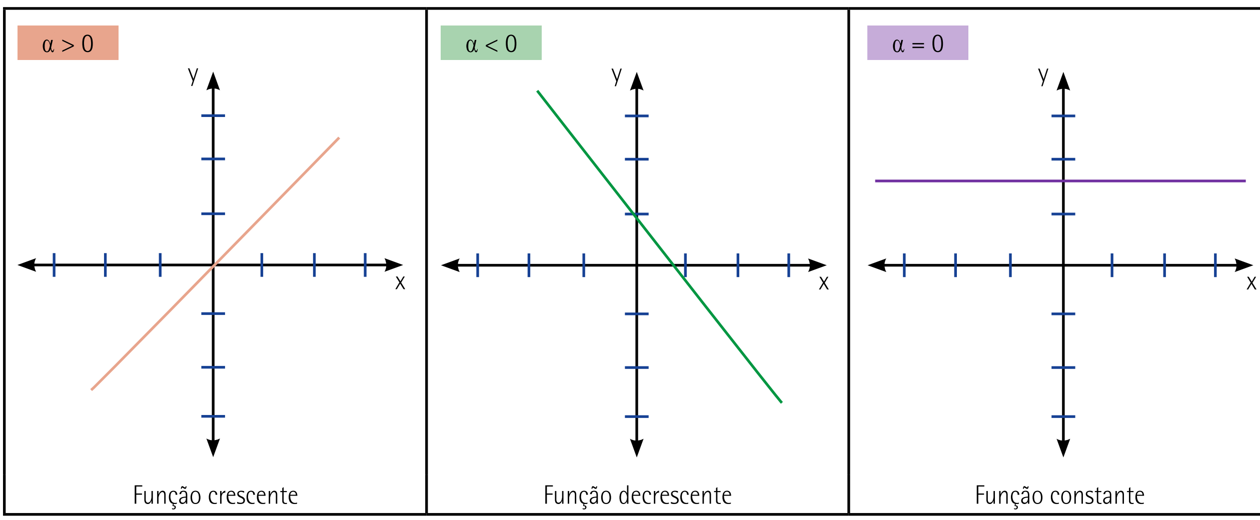


Figura 19 – Exemplos de funções afim crescente (laranja), decrescente (verde) e constante (roxo)

O coeficiente linear (b), por sua vez, determina o ponto no qual a reta intersecta o eixo das ordenadas (eixo vertical). Essa interseção ocorre no ponto (0, b). O coeficiente linear não é capaz de alterar a inclinação da reta (esse papel sempre será do coeficiente angular). Na figura a seguir, vemos gráficos de funções que têm diferentes coeficientes angulares, mas mesmo valor de coeficiente linear. Note que o cruzamento com o eixo vertical sempre ocorre no ponto onde y = b.

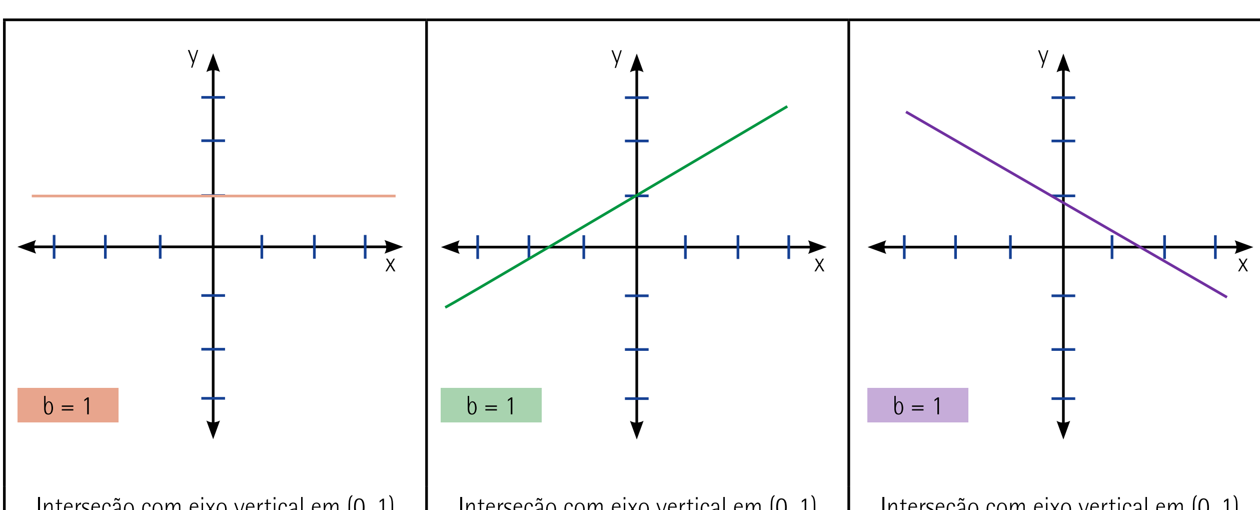
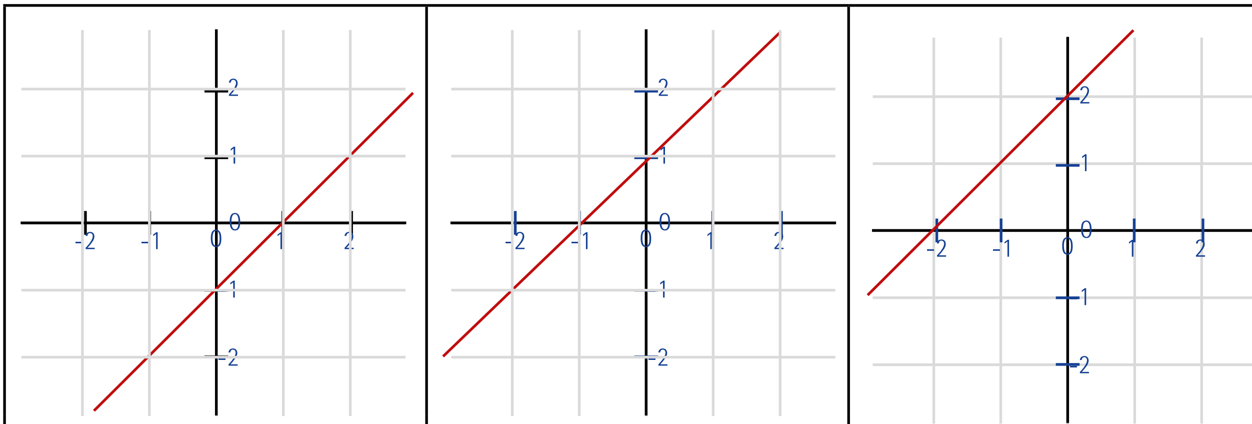


Figura 20 – Diferentes funções com mesmo coeficiente linear

3.4.2 Função polinomial de 1º grau

Uma função polinomial de 1º grau é qualquer função afim em que $a \neq 0$. Basicamente, se uma função afim não é do tipo constante, ela pode ser chamada de função de 1º grau. Nesse caso, ela será crescente ou decrescente, dependendo do sinal do coeficiente angular, como já vimos. Veja a figura a seguir:



$f(x) = x - 1$ $a = 1$ $b = -1$ Função crescente Intersecta o eixo vertical em $(0, -1)$	$f(x) = x + 1$ $a = 1$ $b = 1$ Função crescente Intersecta o eixo vertical em $(0, 1)$	$f(x) = x + 2$ $a = 1$ $b = 2$ Função crescente Intersecta o eixo vertical em $(0, 2)$

Figura 21 – Funções de 1º grau com coeficientes a e b não nulos

As funções de 1º grau têm uma vasta gama de aplicações, que incluem cálculo de tarifas, conversão de unidades de medida, cálculos de salários comissionados, entre outras. Vamos acompanhar, a seguir, um exemplo contextualizado, para fixarmos e aplicarmos o que estudamos.

Exemplo de aplicação

Uma vendedora recebe da empresa em que trabalha um salário mensal composto por uma parte fixa, no valor de R$ 1.780,00, e uma parte variável, que corresponde a 8% sobre o total de vendas que ela fez ao longo do mês. Chamando o total de vendas do mês (em reais) de x, responda ao que se pede.

A) Qual é a lei de formação da função que representa o salário desta vendedora?

B) Temos uma função crescente ou decrescente?

C) No mês em que a vendedora recebeu R$ 1.860,00, qual valor, em reais, ela foi capaz de vender?

Resolução

A) A vendedora tem R$ 1.780,00 por mês garantidos, pois, ainda que não venda nada, essa parte de seu salário é fixa. Devemos adicionar a parte fixa à parte variável, que corresponde a uma comissão de 8% sobre o total que ela vendeu. Como x representa o total de vendas do mês, temos:

$f(x) = 0{,}08x + 1780$

Note que, nessa situação, temos uma lei da função afim completa, no formato $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Nesse caso, temos $a = 0{,}08$ e $b = 1780$.

B) Temos, na lei da função mostrada no item A, os coeficientes a seguir:

$a = 0{,}08$

$b = 1780$

Como $a > 0$, estamos trabalhando com uma função crescente. O contexto em estudo apenas permitiria uma função crescente, pois, quanto mais a vendedora conseguir vender, mais deve receber de salário.

C) Vamos partir da seguinte função:

$f(x) = 0{,}08x + 1780$

Sabemos que a vendedora recebeu R$ 1.860,00. Isso corresponde a $f(x) = 1860$. Substituiremos $f(x)$ por esse valor, a seguir.

$1860 = 0{,}08x + 1780$

Vamos, agora, isolar o x.

$0{,}08x + 1780 = 1860$

$0{,}08x = 1860 - 1780$

$x = 1000$

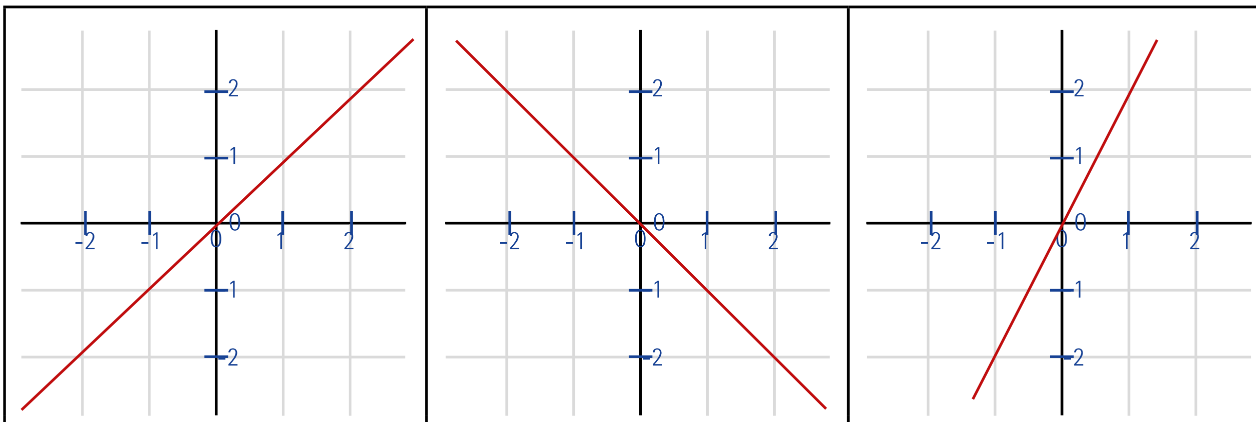
Logo, o total de vendas do mês corresponde a R$ 1.000,00.

Função linear

Existe um caso particular de função de 1º grau, a chamada função linear. Para haver função linear, precisamos, necessariamente, de $a \neq 0$ e $b = 0$. Como o termo independente é nulo, podemos determinar que a lei da função linear será especificamente do tipo:

$f(x) = ax$

Uma característica importante das funções lineares é que a interseção entre a reta da função e o eixo vertical sempre ocorre no ponto (0, 0), ou seja, na origem do plano cartesiano. Veja os exemplos mostrados na figura a seguir:



$f(x) = x$ $a = 1$ $b = 0$ Função crescente Intersecta o eixo vertical em (0, 0)	$f(x) = -x$ $a = -1$ $b = 0$ Função decrescente Intersecta o eixo vertical em (0, 0)	$f(x) = 2x$ $a = 2$ $b = 0$ Função crescente Intersecta o eixo vertical em (0, 0)

Figura 22 – Exemplos de gráficos de funções lineares

Observação

A função linear também é uma função de 1º grau. Trata-se apenas de um caso particular, em que necessariamente $b = 0$.

Lembrete

O coeficiente angular (a) de uma função do 1º grau está ligado à inclinação da reta que representa a função no plano cartesiano.

Para fixarmos e aplicarmos o que foi explicado, vamos estudar o exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

A administração de um condomínio residencial estabeleceu um critério para cobrar pelo aluguel do salão de festas. Para cada locação, o condômino deve pagar 10% do salário mínimo brasileiro vigente. Ao chamarmos de p o preço da locação do salão e de s o valor do salário mínimo, responda ao que se pede.

A) Para cada valor de salário mínimo, existe um único valor a ser pago pela locação do salão?

B) No caso, temos uma função? O que é dado em função de quê?

C) Qual é a lei de formação que associa as variáveis deste contexto?

D) Temos uma função crescente ou uma função decrescente?

E) Quanto um condômino pagava na locação do salão de festas em 2016, sabendo que o salário mínimo valia R$ 880,00 naquele ano?

Resolução

A) Sim. O salário mínimo é reajustado de tempos em tempos, como todos sabemos. Para o valor vigente, existe um único valor a ser pago para alugar o salão, mas caso haja reajuste do salário mínimo, o valor da locação do salão do condomínio também será reajustado.

B) Sim, temos uma função. O valor da locação do salão é dado em função do salário mínimo, e não o contrário. Logo, s é a variável independente (assume o papel de x) e p é a variável dependente de s (assume o papel de y).

C) Temos p em função de s, sendo que p vale 10% de s. Matematicamente, temos:

$p = 0{,}1s$

Note que, nessa situação, temos uma lei da função linear, no formato f(x) = ax, com a ≠ 0 e b = 0.

D) Temos, na função em estudo, os seguintes coeficientes:

a = 0,1

b = 0

Como a > 0, temos função crescente.

O contexto em estudo apenas permitiria uma função crescente, pois, quanto maior for o salário mínimo, mais cara deverá ser a locação do salão.

E) No caso, a variável s deve assumir o valor de R$ 880,00. Para saber quanto um condômino pagava no aluguel, basta fazer a substituição de s e calcular o valor de sua função (p):

$p = 0{,}1s$

$p = 0{,}1 \cdot 880$

$p = 88$

Logo, para o salário mínimo de R$ 880,00, um condômino pagava R$ 88,00 para alugar o salão.

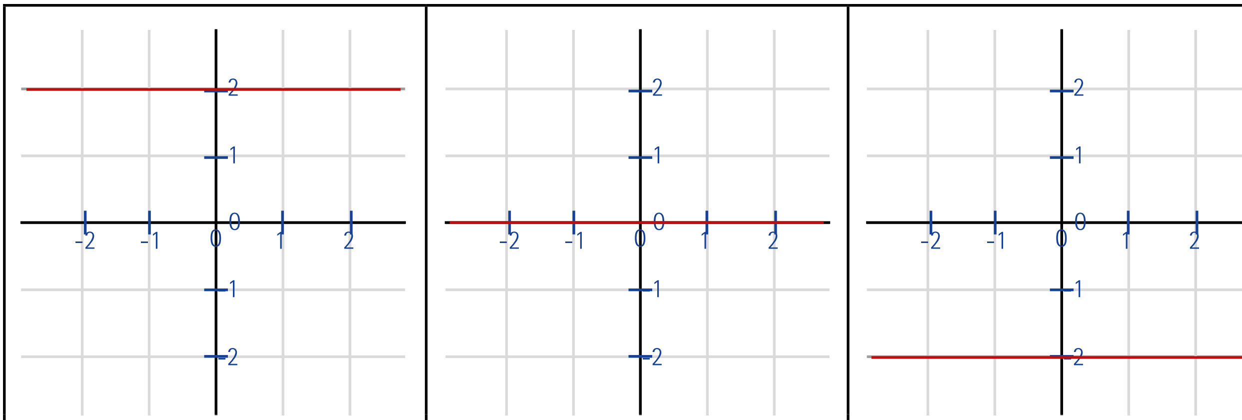
3.4.3 Função constante

Como comentamos, chamamos de função constante a função afim que apresenta a = 0, ou seja, coeficiente angular nulo. Nesse caso, podemos dizer que a lei da função constante será especificamente do tipo:

f(x) = b

Na figura a seguir, vemos gráficos de algumas funções constantes. Com coeficiente angular nulo, o gráfico de uma função constante sempre será uma reta paralela ao eixo das abscissas. Além disso, fica claro que o ponto de interseção entre a função e o eixo das ordenadas é determinado pelo próprio coeficiente linear, ocorrendo sempre no ponto (0, b), como esperado.

Perceba que o gráfico de f(x) = 2 é uma reta paralela ao eixo horizontal, que intersecta o eixo vertical no ponto (0, 2). Já f(x) = 0 é uma reta que coincide com o eixo horizontal, que intersecta o eixo vertical no ponto (0, 0). Para f(x) = –2, temos interseção com o eixo vertical no ponto (0, –2).



$f(x) = 2$ $a = 0$ $b = 2$ Função constante Intersecta o eixo vertical em (0, 2)	$f(x) = 0$ $a = 0$ $b = 0$ Função constante Intersecta o eixo vertical em (0, 0)	$f(x) = -2$ $a = 0$ $b = -2$ Função constante Intersecta o eixo vertical em (0, –2)

Figura 23 – Exemplos de gráficos de funções constantes

Lidar com funções constantes de forma descontextualizada é fácil. Entender sua aplicabilidade, nem tanto. No exemplo a seguir, temos uma situação contextualizada, na qual a função constante aparece.

Exemplo de aplicação

Uma pizzaria do centro da cidade utiliza o sistema de rodízio, em que cada cliente paga o equivalente a R$ 65,00 e pode comer à vontade, com bebidas e sobremesas inclusas. Com x representando a quantidade de pizza consumida por um cliente, em quilogramas (kg), determine o que se pede.

A) A lei de formação da função que descreve o preço pago por cliente nessa pizzaria.

B) O preço pago por um cliente que consumiu 0,8 kg de pizza.

C) O preço pago por um cliente que consumiu 0,2 kg de pizza.

Resolução

A) Sabemos que clientes diferentes podem consumir quantidades diferentes de pizza. A variável x, portanto, vai variar de acordo com o consumo. No entanto, o preço pago será constante. Representando esse preço como f(x), ficamos com $f(x) = 65$.

Nessa situação, temos uma lei de função constante, no formato $f(x) = b$, com $a = 0$.

B) Lembrando que x representa uma massa, em kg, do consumo do cliente, temos agora um valor pelo qual substituí-lo. Nesse caso, x deve valer 0,8: $f(0{,}8) = 65$.

Logo, o cliente que consumir 0,8 kg de pizza pagará R$ 65,00.

C) No caso, x deve valer 0,2: f(0,2) = 65.

Logo, o cliente que consumir 0,2 kg de pizza também pagará R$ 65,00.

Saiba mais

Um osciloscópio é um instrumento de medição que permite enxergar o comportamento de sinais elétricos. Ele mostra, em uma tela, como a tensão (força que provoca a circulação da corrente elétrica) varia. A tela do osciloscópio atua de forma semelhante a um plano cartesiano, com dois eixos que se cruzam no centro da tela, representando a origem (ponto (0, 0)). O eixo horizontal representa o tempo, e o eixo vertical representa a tensão elétrica do sinal, medida em volts (V).

Na figura a seguir, vemos o exemplo de um osciloscópio recebendo um sinal constante de 10 V. Nesse caso, o sinal se mantém estável em 10 V ao longo do tempo, o que faz com que o osciloscópio exiba, em sua tela, uma reta paralela ao eixo horizontal, indicando que o sinal é representado por uma função constante que intersecta o eixo vertical em (0, 10).

Figura 24 – Osciloscópio virtual exibindo o comportamento de um sinal constante de 10 volts

Adaptada de: https://tinyurl.com/yc3f8d5h. Acesso em: 13 nov. 2024.

Sinais constantes, como o visto anteriormente, são emitidos por dispositivos como pilhas, baterias ou fontes de alimentação de computadores.

Se você quiser operar o osciloscópio virtual utilizado para gerar a imagem, visite o site a seguir:

MINAWI, F. Virtual oscilloscope. *PhysicsZone*, 2020. Disponível em: https://tinyurl.com/ypyrv8mx. Acesso em: 13 nov. 2024.

3.4.4 Raiz da função afim

Denominamos para a raiz da função afim o valor de x para o qual a função é nula, ou seja, o valor de x para o qual f(x) = 0. Para calcular a raiz da função, basta igualarmos sua lei de formação a zero e resolvermos a equação obtida. A raiz representa a interseção entre a reta da função e o eixo horizontal.

Alternativamente, também podemos obter a raiz da função afim, aqui chamada de x', por meio da fórmula:

$$x' = -\frac{b}{a}$$

Note que somente é possível calcular raízes para funções de 1º grau, ou seja, aquelas em que $a \neq 0$. Vamos estudar o exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Seja f uma função afim definida pela lei de formação f(x) = 5x + 3.

A) Quais são os coeficientes angular e linear?

B) Qual é a raiz dessa função?

C) Em qual ponto a função intersecta o eixo horizontal?

D) Em qual ponto a função intersecta o eixo vertical?

E) Calcule f(6).

F) Esboce o gráfico da função.

Resolução

A) Vejamos, a seguir, os coeficientes angular e linear de f(x) = 5x + 3.

Coeficiente angular: a = 5

Coeficiente linear: b = 3

B) A raiz da função f(x) = 5x+3 está calculada a seguir:

$$x' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Tanto faz expressarmos a raiz na forma de fração ou decimal.

C) O ponto de interseção com o eixo horizontal é dado pela própria raiz da função. O par ordenado onde ocorre a interseção é (x', 0) = (–0,6; 0).

D) O ponto de interseção com o eixo vertical é dado pelo coeficiente b. O par ordenado onde ocorre a interseção é (0, b) = (0, 3).

E) Para determinarmos f(6), devemos substituir a variável independente pelo valor 6. Logo:

f(x) = 5x + 3

f(6) = 5·6 + 3

f(6) = 30 + 3

f(6) = 33

F) Para esboçar o gráfico de uma função de 1º grau, precisamos de pelo menos dois pares ordenados, de forma a conseguirmos dois pontos distintos no plano cartesiano. Utilizando a lei da função, podemos achar infinitos pares ordenados, apenas escolhendo valores para x e calculando y. Dos itens anteriores, já conhecemos alguns pares, mostrados na tabela a seguir.

Tabela 10 – Alguns pares ordenados da função f(x) = 5x + 3

x	y	Par ordenado
–0,6	0	(–0,6; 0)
0	3	(0, 3)
6	33	(6, 33)

Com pelo menos dois pares em mãos, escolhemos uma região do plano cartesiano para traçar o gráfico. Como tanto o domínio como o contradomínio de uma função afim são representados por ℝ, a reta que representa a função será infinita e, portanto, somente conseguimos representar um segmento dela graficamente. A ideia é traçar um segmento que passe pelos pontos escolhidos. Observe a figura a seguir:

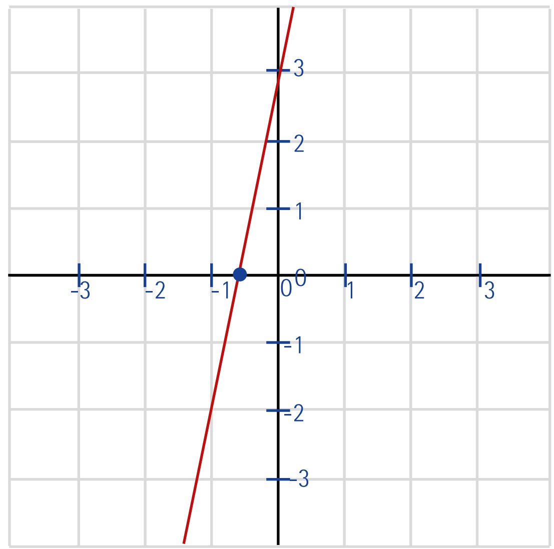


Figura 25 – Gráfico da função f(x) = 5x + 3

Pelos segmentos dos eixos escolhidos, não conseguimos enxergar o par (6, 33), visto que apenas foram marcados os outros dois pares. No entanto, ele continua sendo parte da função, assim como qualquer outro ponto que caia em cima da reta da função.

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

O capítulo 4 de nosso livro-texto será dedicado às funções quadráticas, que descrevem parábolas no plano cartesiano, por meio de seus pares ordenados.

Segundo Dante e Viana (2019), uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função quadrática ou função polinomial de 2º grau quando sua lei de formação pode ser expressa no seguinte formato, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Temos a, b e *c* como coeficientes (é imprescindível termos $a \neq 0$), x como variável independente e $y = f(x)$ como variável dependente. Podemos pensar em uma função quadrática como qualquer função que descreve uma parábola no plano cartesiano, que terá concavidade voltada para cima ou para baixo. Uma parábola é uma curva em formato de “U”, simétrica em relação a uma reta vertical.

Observação

Se o coeficiente a for nulo, a função perde sua característica de grau 2. Nesse caso, teríamos uma função afim, não uma função quadrática.

Na tabela a seguir, vemos a lei de formação de algumas funções de 2º grau, com a determinação de seus coeficientes.

Tabela 11 – Algumas funções quadráticas com apresentação de seus coeficientes

Lei da função do segundo grau	Coeficientes
$f(x) = 2x^2 + 17x + 2$	$a = 2$
	$b = 17$
	$c = 2$
$f(x) = -15,2x^2 + 56$	$a = 15,2$
	$b = 0$
	$c = 56$
$f(x) = 67 + \frac{3x^2}{2}$	$a = \frac{3}{2}$
	$b = 0$
	$c = 67$
$f(x) = 9,8x^2 - 2\pi x$	$a = 9,8$
	$b = -2\pi$
	$c = 0$
$f(x) = 18\sqrt{3}x^2$	$a = 18\sqrt{3}$
	$b = 0$
	$c = 0$

4.1 Estudo dos coeficientes

Até então, já percebemos que, na função do segundo grau, o coeficiente a sempre acompanha a variável x elevada ao quadrado. O coeficiente b acompanha a variável x. Temos o coeficiente c como um termo independente, ou seja, que não multiplica qualquer variável. Vamos conhecer agora a respeito do papel que cada um desses coeficientes exerce em uma função quadrática.

O sinal do coeficiente a é responsável pela concavidade da parábola. Temos as características mostradas a seguir, observadas na figura a seguir.

- **Para a > 0**: a concavidade é voltada para cima. Nesse caso, a função apresenta um ponto mínimo, que representa seu vértice.

- **Para a < 0**: a concavidade é voltada para baixo. Nesse caso, a função apresenta um ponto máximo, que representa seu vértice.

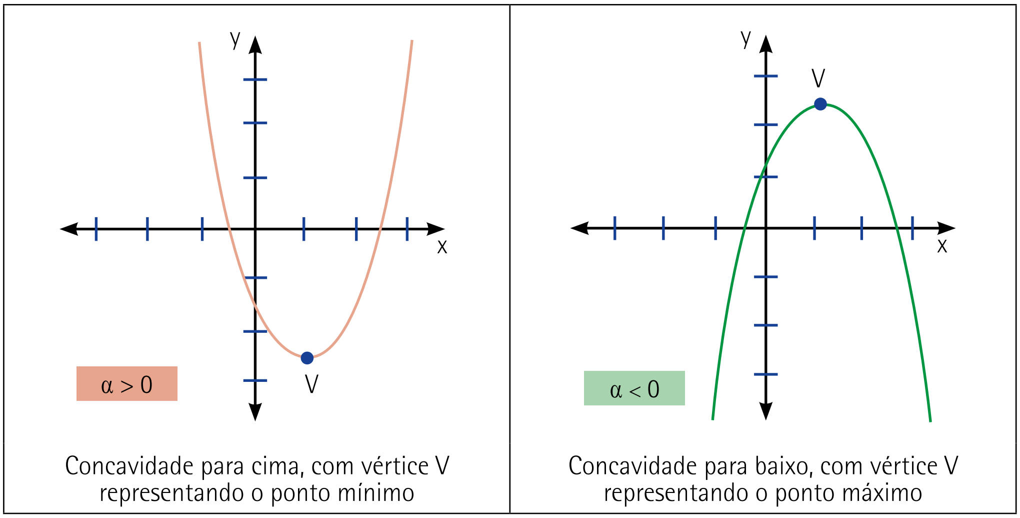


Figura 26 – Concavidade da parábola de acordo com sinal do coeficiente a

Além disso, o valor em módulo do coeficiente a determina qual será a abertura da parábola. Isso significa que a parábola de uma função com a = 3 tem a mesma abertura da parábola de uma função com a = –3 (apenas o lado da concavidade será diferente, como já visto). Quanto maior for o módulo de a, menor será a abertura da parábola.

O coeficiente *c*, que representa o termo independente, determina o ponto no qual a curva da função intersecta o eixo das ordenadas. Essa interseção ocorre no ponto (0, *c*). O coeficiente *c* não é capaz de alterar a abertura ou a concavidade da parábola (esses papéis são do coeficiente a). Na figura a seguir, vemos gráficos de funções com diferentes coeficientes *c*. Note que o cruzamento com o eixo vertical sempre ocorre no ponto onde y = *c*. É perceptível que *c*, sozinho, não determina qual parte da parábola cruzará o eixo vertical. Repare que, no exemplo em que *c* = –2, é o próprio vértice da parábola que intersecta o eixo horizontal. Nos outros dois exemplos, isso não acontece.

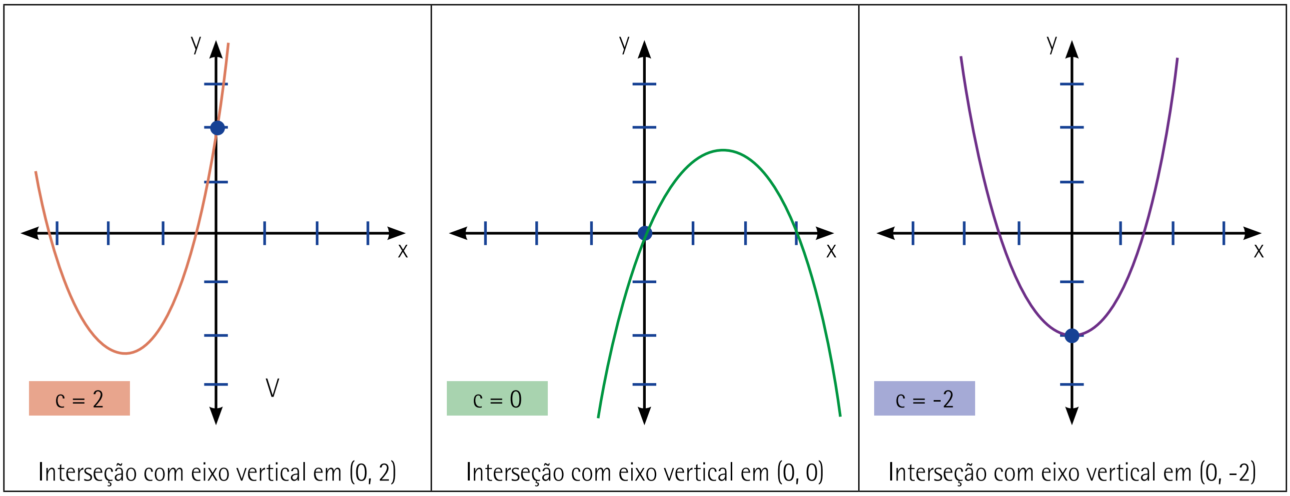


Figura 27 – Interseções de parábolas com o eixo vertical de acordo com coeficiente *c*

O coeficiente b, que aparece no termo bx da função do segundo grau, determina se o vértice da parábola ocorrerá sobre o eixo vertical ou estará deslocado dele. Sempre que b = 0, o ponto do vértice ocorre em cima do eixo das ordenadas. Sempre que b ≠ 0, o vértice será deslocado do eixo, podemos ver isso na figura a seguir. As coordenadas exatas de vértice não são definidas apenas pelo coeficiente b e, sim, pela combinação de todos eles (estudaremos coordenadas de vértice em breve).

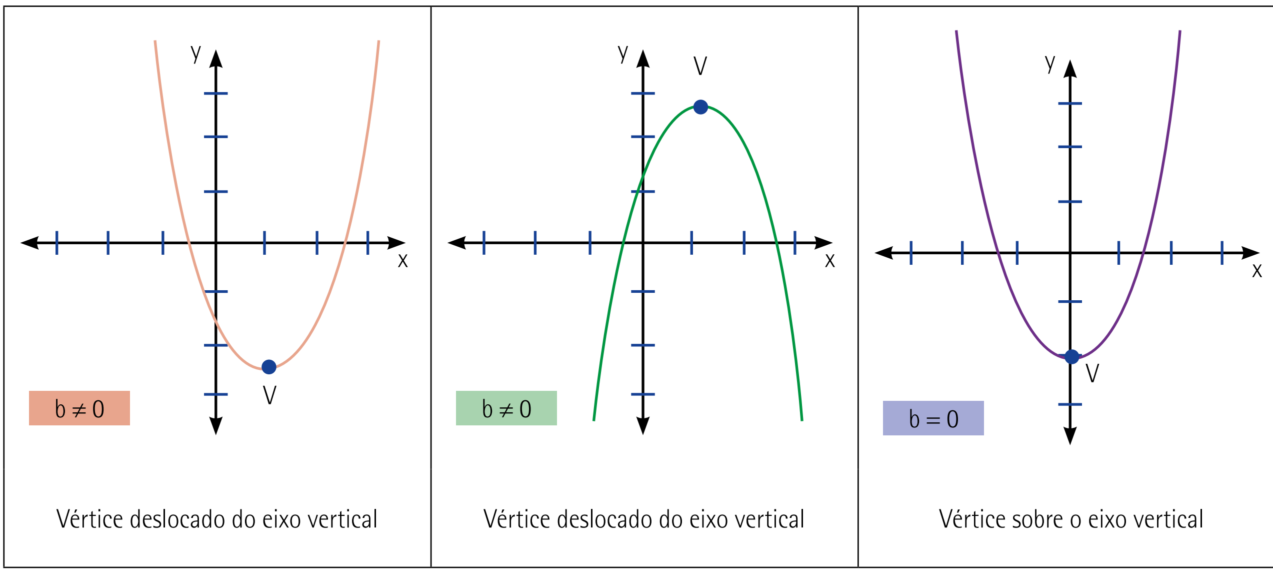


Figura 28 – Vértice da parábola ocorrendo sobre eixo vertical apenas quando coeficiente b é nulo

Saiba mais

Imagine um canhão atirando uma bala que, depois de determinado tempo, retorna ao solo. Que tipo de figura essa bala descreve no ar durante sua trajetória? O lançamento de projéteis é um dos fenômenos que pode ser modelado por funções de 2º grau. Pesquise quais outros fenômenos da física requerem a aplicação desse tipo de função. Para isso, assista:

TRAJETÓRIA da bola. 2024. 1 vídeo (7 min). Publicado pelo canal Como Pode Cair no Enem. Disponível em: https://tinyurl.com/4s3c8fwm. Acesso em: 18 nov. 2024.

4.2 Raízes da função quadrática

Chamamos de raízes da função quadrática os valores de x para os quais a função é nula, ou seja, os valores de x para os quais f(x) = 0. As raízes, se existirem, representam os pontos de interseção entre a parábola e o eixo horizontal.

Para calcular as raízes da função, podemos utilizar o famoso método de resolução conhecido como fórmula de Bhaskara, capaz de entregar duas raízes: x' e x''. Vamos relembrá-lo:

$$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Calculamos um discriminante, indicado por Δ, que traz algumas informações a respeito da função quadrática, mostradas a seguir e vistas na figura seguinte.

- **Para Δ > 0**: a função tem duas raízes reais distintas. Temos como solução x' ≠ x''. Nesse caso, a parábola intersecta o eixo horizontal em dois pontos.

- **Para Δ = 0**: a função tem duas raízes reais iguais. Temos como solução x' = x''. Nesse caso, a parábola intersecta o eixo horizontal em apenas um ponto. Esse ponto é o próprio vértice da parábola.

- **Para Δ < 0**: a função não tem raízes reais. Não temos soluções reais, pois encontramos, no cálculo, uma raiz quadrada de um número negativo. Nesse caso, a parábola não intersecta o eixo horizontal.

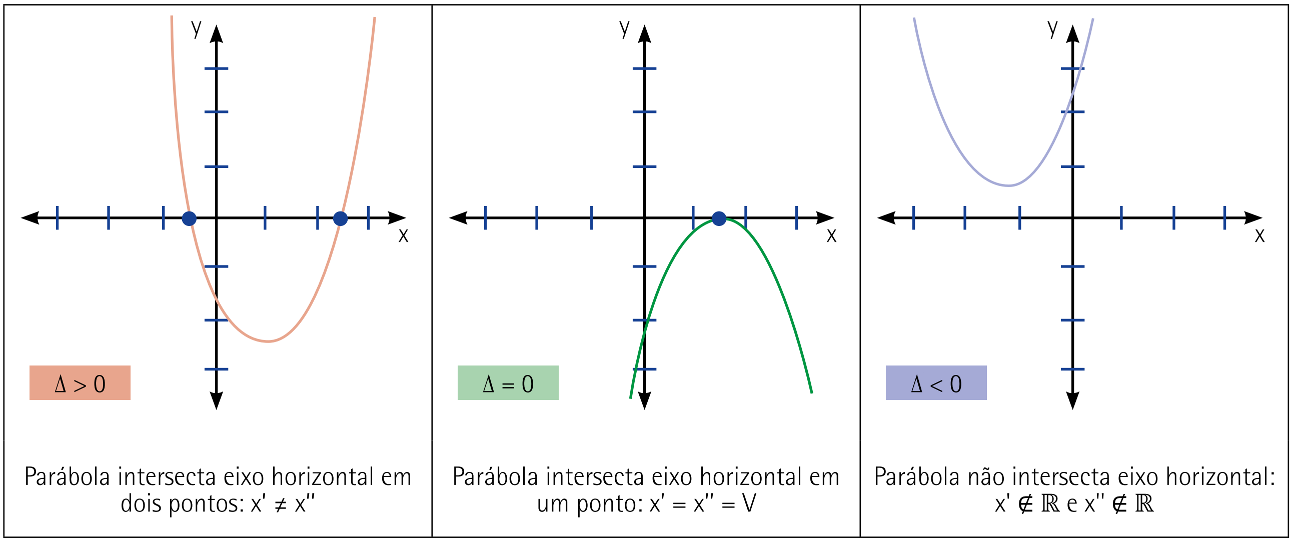


Figura 29 – Raízes de acordo com o discriminante da função quadrática

Alternativamente, também podemos obter as raízes da função quadrática por outros métodos, como a fatoração do polinômio que representa a lei da função. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo de aplicação

1) Calcule as raízes das seguintes funções quadráticas:

A) $y = 2x^2 - 5x + 2$

B) $y = x^2 - 3x + 3$

C) $y = -x^2 + x$

D) $y = 3x^2 - 3$

Resolução

A) $y = 2x^2 - 5x + 2$

$$a = 2$$
$$b = -5$$
$$c = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$
$$x' = \frac{5+3}{4} = 2$$
$$x'' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

No caso, temos duas raízes reais distintas, o que indica que a parábola cruza o eixo horizontal em dois pontos.

B) $y = x^2 - 3x + 3$

$$a = 1$$
$$b = -3$$
$$c = 3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3$$

Como $\Delta < 0$, já sabemos que a função não possui raízes reais. Nesse caso, a parábola não cruza o eixo horizontal.

C) $y = -x^2 + x$

$a = -1$

$b = 1$

$c = 0$

Como o coeficiente c é nulo, podemos utilizar o método de fatoração do polinômio para determinação de raízes. Para isso, colocamos em evidência o fator comum a ambos os termos (no caso, o fator comum é x):

$$-x^2 + x = x(-x + 1)$$

Vamos fazer:

$$-x^2 + x = x(-x + 1) = 0$$

Temos dois fatores: x e $-x + 1$. Igualando cada um deles a zero, achamos as raízes.

1º fator

$x' = 0$

2º fator

$-x'' + 1 = 0$

$-x'' = -1$

$x'' = 1$

Logo, temos duas raízes reais distintas: 0 e 1.

Se você não se adaptou a esse método, saiba que qualquer formato de função quadrática pode ter suas raízes encontradas utilizando Bhaskara.

D) $y = 3x^2 - 3$

$a = 3$

$b = 0$

$c = -3$

Dessa vez, o coeficiente b é nulo. Podemos igualar a função a 0 e isolar x, conforme resolução:

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$

Com isso, temos o caminho positivo e o caminho negativo:

$$x' = +\sqrt{1} = 1$$
$$x'' = -\sqrt{1} = -1$$

Temos duas raízes reais distintas: 1 e -1. Tente encontrar as raízes por Bhaskara e compare os resultados.

2) Sabe-se que a área A de um círculo pode ser calculada por meio da função quadrática A = πr^2, em que r é o raio do círculo. Considerando a constante π = 3,14, encontre o que se pede a seguir.

A) Os coeficientes a, b e c da função.

B) A área do círculo cujo raio vale 10 cm.

C) O raio do círculo cuja área vale 78,5 m^2.

Resolução

A) Foi estabelecido, no enunciado, um valor racional aproximado para a constante irracional π. Temos, portanto:

$$a = 3{,}14$$
$$b = 0$$
$$c = 0$$

B) Vamos substituir a variável r pelo valor 10. Não podemos esquecer que esse valor representa uma medida, que acompanha a unidade cm. Isso vai definir a unidade da área calculada. Vejamos:

$$A = \pi r^2$$
$$A = 3{,}14 \times 10^2$$
$$A = 3{,}14 \times 100$$
$$A = 314\ cm^2$$

C) Vamos substituir a variável A pelo valor 78,5. Esse valor também representa uma medida, que acompanha a unidade m^2. Isso vai definir a unidade do raio calculado. Algebricamente, temos:

$$A = \pi r^2$$

$$78{,}5 = 3{,}14r^2$$

$$3{,}14r^2 = 78{,}5$$

$$r^2 = \frac{78{,}5}{3{,}14}$$

$$r^2 = 25$$

$$r = \pm\sqrt{25}$$

$$r = \pm 5$$

No entanto, repare que o contexto limita o domínio da função a valores não negativos, afinal, não é possível termos um raio negativo. Portanto, temos, como resposta, $r = 5$ m.

Lembrete

Vimos que a função do 2º grau pode ter duas raízes distintas, uma raiz (ou seja, duas raízes idênticas) ou nenhuma raiz, o que é definido pelo sinal do discriminante Δ. Assim, temos o que segue:

- Se o discriminante for positivo ($\Delta > 0$), há duas raízes reais e distintas.
- Se o discriminante for nulo ($\Delta = 0$), há uma única raiz real.
- Se o discriminante for negativo ($\Delta < 0$), não há raízes reais.

4.3 Coordenadas do vértice da parábola

Podemos calcular as coordenadas do vértice V de uma função quadrática por meio das relações mostradas a seguir, em que x_V é a coordenada horizontal e y_V é a coordenada vertical.

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Com isso, podemos pensar que o vértice é um ponto no plano cartesiano representado pelo par ordenado:

$$V(x_V, y_V) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Lembrete

Uma parábola pode ter ou não raízes reais, ou seja, ela pode cortar ou não o eixo x. No entanto, toda parábola tem vértice.

Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo de aplicação

1) Os proprietários de uma grande fazenda pretendem cercar uma área retangular de sua propriedade, que será destinada à criação de ovelhas, conforme visto na figura a seguir. Tendo em consideração que estão disponíveis 180 m de cerca, responda o que se pede.

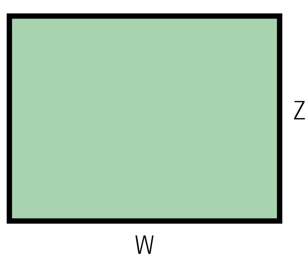


Figura 30 – Área retangular da propriedade

A) Utilizando a área e o perímetro da região cercada, prove para os fazendeiros que a maior área possível será obtida se o espaço cercado for quadrado.

B) Qual é a maior área retangular que este fazendeiro consegue destinar ao espaço das ovelhas?

Resolução

A) Sabemos que um quadrado é um retângulo cujos lados têm as mesmas dimensões, ou seja, um quadrado é um caso particular de um retângulo. Já voltaremos a essa questão.

A princípio, sabemos, pela figura, que um dos lados do espaço cercado tem medida w e que o outro lado tem medida z. Com isso, a área A e o perímetro P desse espaço retangular são dados por:

$A = wz$

$P = 2w + 2z$

Sabemos que existem 180 m de cerca, valor que corresponde ao perímetro P do quadrado em análise. Com isso, podemos fazer o seguinte:

$$P = 2w + 2z$$
$$2w + 2z = 180$$
$$2z = 180 - 2w$$
$$z = \frac{180 - 2w}{2}$$
$$z = 90 - w$$

Agora, reescrevemos a função da área A do cercado, substituindo z por 90 – w:

$$A = wz$$
$$A = w(90 - w)$$
$$A = 90w - w^2$$

Perceba que, na última etapa do cálculo, aplicamos a propriedade distributiva, multiplicando w por 90 e multiplicando w por –w. Com isso, chegamos a uma função quadrática, que coloca a área do cercado em função da dimensão w, cujos coeficientes são:

$$a = -1$$
$$b = 90$$
$$c = 0$$

Sabemos que tal situação nos leva a uma função cujo vértice representa o ponto máximo da função, pois a < 0. Portanto, para determinarmos a dimensão w que nos leva à área máxima, precisamos determinar a coordenada x_V, ou seja, a abscissa do vértice da parábola:

$$w_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{90}{2(-1)} = -\frac{90}{-2} = 45$$

Logo, a área cercada máxima será obtida se tivermos dimensão w valendo 45 m. Da equação do perímetro, podemos calcular z:

$$2w + 2z = 180$$
$$2 \cdot 45 + 2z = 180$$
$$90 + 2z = 180$$
$$2z = 180 - 90$$
$$2z = 90$$
$$z = 45$$

Obtivemos dimensões $w = 45\,m$ e $z = 45\,m$. Como elas são iguais, temos um cercado quadrado que garante máxima área para as ovelhas.

B) Da função da área, podemos facilmente substituir as variáveis e calcular A:

$$A = wz$$
$$A = 45 \cdot 45$$
$$A = 2025\,m^2$$

Alternativamente, podemos continuar pensando no significado do vértice da função. Como essa situação nos leva a uma função cujo vértice representa o ponto máximo da função, para sabermos a área máxima, podemos calcular a coordenada A_V, ou seja, a coordenada vertical do vértice da parábola:

$$A_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{90^2 - 4(-1)0}{4(-1)} = -\frac{8100}{-4} = 2025\,m^2$$

Observar o gráfico da função nos permite enxergar com mais clareza estes pontos calculados.

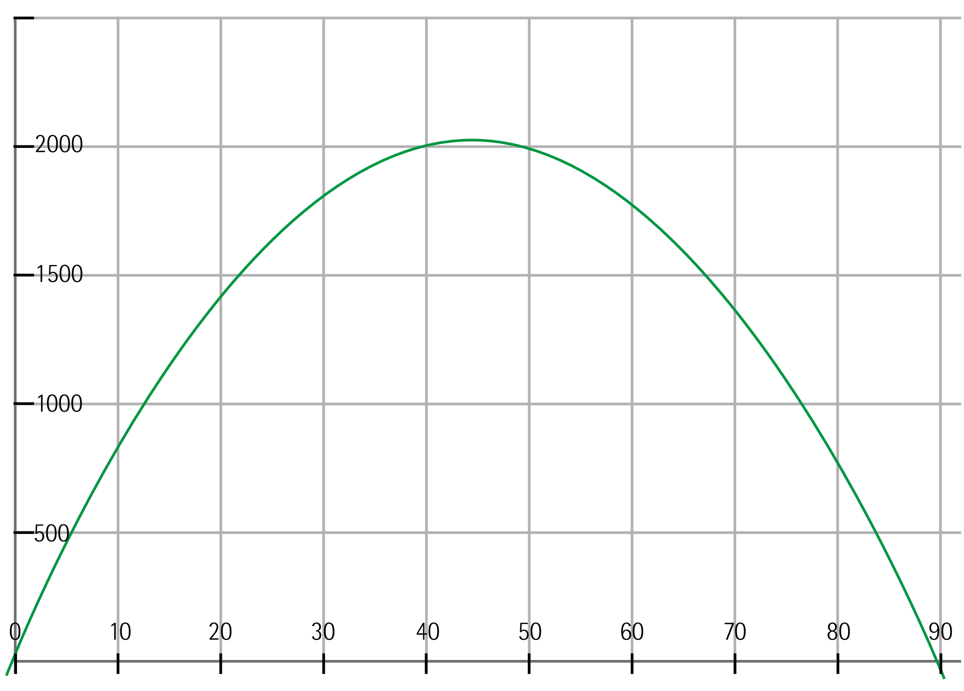


Figura 31 – Gráfico da função da área do cercado A = 90w – w^2

2) Um resistor é um dispositivo amplamente utilizado em circuitos elétricos. Ele é responsável por aquecer a água do chuveiro elétrico, por exemplo. Para calcular a potência elétrica em um resistor, podemos utilizar a seguinte expressão: $P = R \cdot I^2$, em que P é a potência (em W), R é resistência (em Ω) e I é a intensidade da corrente elétrica (em A). Considere um resistor cuja resistência vale 200 Ω. Nesse contexto, faça o que se pede a seguir.

A) Determine a expressão que relaciona a potência e a intensidade da corrente elétrica para o resistor em questão.

B) Determine as raízes da função.

C) Determine o ponto de cruzamento da parábola com o eixo vertical.

D) Determine as coordenadas do vértice da parábola.

E) Determine a mínima potência obtida no resistor.

F) Faça o esboço do gráfico da função, supondo que seja possível utilizar valores negativos de corrente elétrica.

Resolução

A) Como o resistor tem 200 Ω de resistência, a lei de formação da função é dada por:

$$P = 200I^2$$

B) Em $P = 200I^2$, temos os coeficientes a seguir.

$$a = 200$$
$$b = 0$$
$$c = 0$$

Como temos apenas o coeficiente a, podemos facilmente achar I quando P é nulo. Vejamos:

$$P = 200I^2$$
$$200I^2 = 0$$
$$I^2 = 0$$
$$I = \pm\sqrt{0}$$
$$I = 0$$

No caso, temos $x' = x'' = 0$. Ou seja, a parábola intersecta o eixo horizontal apenas em (0, 0).

C) Como o coeficiente *c* é nulo, temos interseção com eixo vertical em (0, 0).

D) Se você já analisou corretamente os itens anteriores, pode passar desse item sem fazer qualquer cálculo. De qualquer forma, vamos fazer os cálculos a seguir.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 200} = 0$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0^2 - 4 \cdot 200 \cdot 0}{4 \cdot 200} = -\frac{0}{800} = 0$$

Logo, podemos representar nosso vértice como V(0, 0).

E) Como a > 0, o vértice representa o ponto mínimo da função. A potência mínima é dada por y_V. Logo, o menor valor que P assume no contexto em análise é 0 W.

F) Não existe qualquer restrição para o domínio da função no caso em análise. Para esboçar uma parábola, precisamos de mais de dois pontos. Como vértice, raízes e cruzamento com eixo vertical caíram no ponto (0, 0), precisamos calcular alguns pontos adicionais. Utilizando a lei da função, vamos escolher alguns valores para I e encontrar sua imagem, ou seja, os valores correspondentes de P, conforme feito a seguir.

Tabela 12 – Alguns pares ordenados da função

I (A)	P (W)	Par ordenado
-2	800	(-2,800)
-1	200	(-1,200)
-0,5	50	(-0,5;50)
0	0	(0,0)
0,5	50	(0,5;50)
1	200	(1,200)
2	800	(2,800)

Podemos posicionar os pontos calculados no plano cartesiano e fazer o esboço da parábola que caracteriza a potência em função da corrente elétrica para um resistor de 200 Ω.

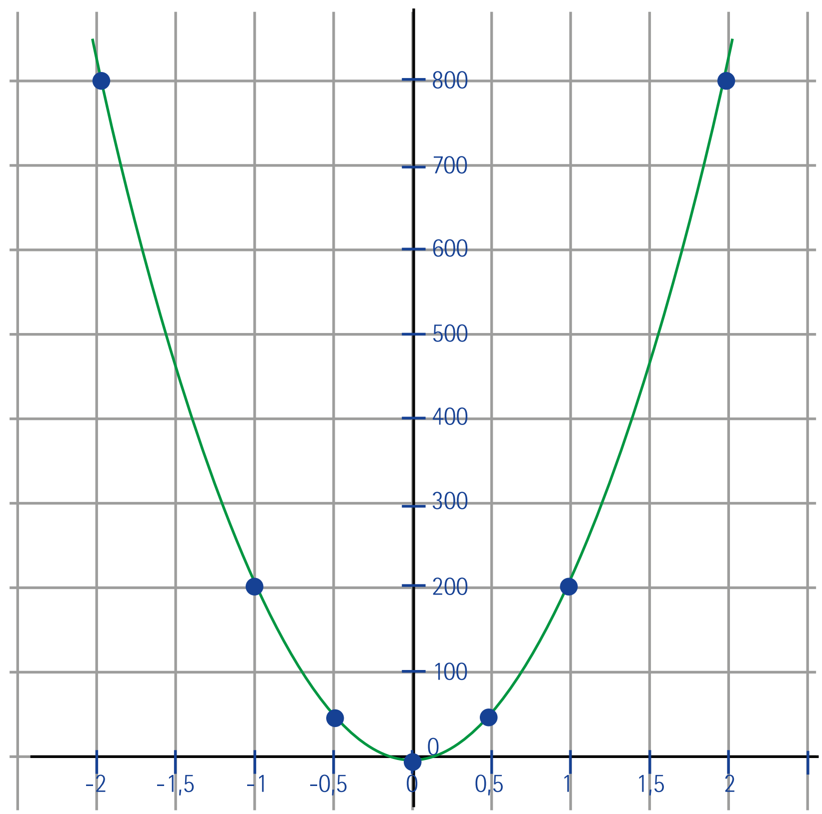


Figura 32 – Gráfico da função

3) (Cebraspe 2019, adaptado) Uma instituição alugou um salão para realizar um seminário para 100 pessoas. No ato de inscrição, cada participante pagou R$ 80,00 e se comprometeu a pagar mais R$ 4,00 por cada vaga não preenchida. Nessa situação hipotética, determine a quantidade de inscrições para a qual ocorrerá a maior arrecadação da instituição.

Resolução

Vamos pensar primeiramente na quantidade de participantes do seminário. Se chamarmos de x o número de participantes e de y o número de vagas não preenchidas entre as 100, teremos a situação que é vista na tabela a seguir.

Tabela 13 – Quantidade de vagas preenchidas e de vagas não preenchidas

x (vagas preenchidas)	y (vagas não preenchidas)
1	99
2	98
3	97
⋮	⋮

Logo, podemos representar y em função de x:

$$y = 100 - x$$

Cada participante pagará R$ 80,00 mais R$ 4,00 por vaga não preenchida (y). Se chamarmos de u o preço por pessoa, teremos:

$$u = 80 + 4y$$
$$u = 80 + 4(100 - x)$$

No entanto, a instituição não receberá a inscrição de apenas uma pessoa, e sim de x pessoas (lembre-se de que x significa número de vagas preenchidas). Logo, a arrecadação A será dada pelo valor unitário u multiplicado por x pessoas:

$$A = ux$$
$$A = (80 + 4(100 - x))x$$
$$A = (80 + 400 - 4x)x$$
$$A = 80x + 400x - 4x^2$$
$$A = -4x^2 + 480x$$

Note que temos uma lei de função quadrática, que coloca a arrecadação (A) em função do número de participantes (x). A concavidade da parábola é voltada para baixo, e o vértice representa ponto máximo da função. A maior arrecadação, portanto, é dada pela coordenada vertical do vértice.

A quantidade de inscrições x que nos leva à máxima arrecadação é dada pela coordenada horizontal do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{480}{2 \cdot (-4)} = -\frac{480}{-8} = 60$$

Logo, com 60 participantes, a instituição conseguirá máxima arrecadação.

Resumo

Nesta unidade, compreendemos o significado de funções matemáticas e vimos os dois tipos mais básicos de função, as afins e as quadráticas, com diversos exemplos de aplicação.

Começamos com a explicação do que é uma função matemática, com a exposição de importantes conceitos, como domínio, contradomínio e imagem.

Seguimos para o entendimento das funções afins, cuja lei de formação geral é dada por $f(x) = ax + b$. Nessa categoria, estão todas as funções que podem ser graficamente representadas por uma reta no plano cartesiano. Entendemos que a é o coeficiente angular, relacionado à inclinação da reta, e que b é o coeficiente linear, posição em que a reta intercepta o eixo vertical. Vimos que diversas situações cotidianas podem ser modeladas por esse tipo de função.

Então, passamos a focar em funções quadráticas, cuja lei geral é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graficamente, tais funções são representadas por parábolas. Exibimos os papéis dos coeficientes a, b e c e compreendemos que a famosa fórmula de Bhaskara serve para calcularmos as raízes da função do segundo grau, caso existam. Em seguida, aprendemos a calcular as coordenadas do vértice e vimos alguns exemplos de aplicação desse tipo de função.

Exercícios

Questão 1. Observe o gráfico da figura a seguir:

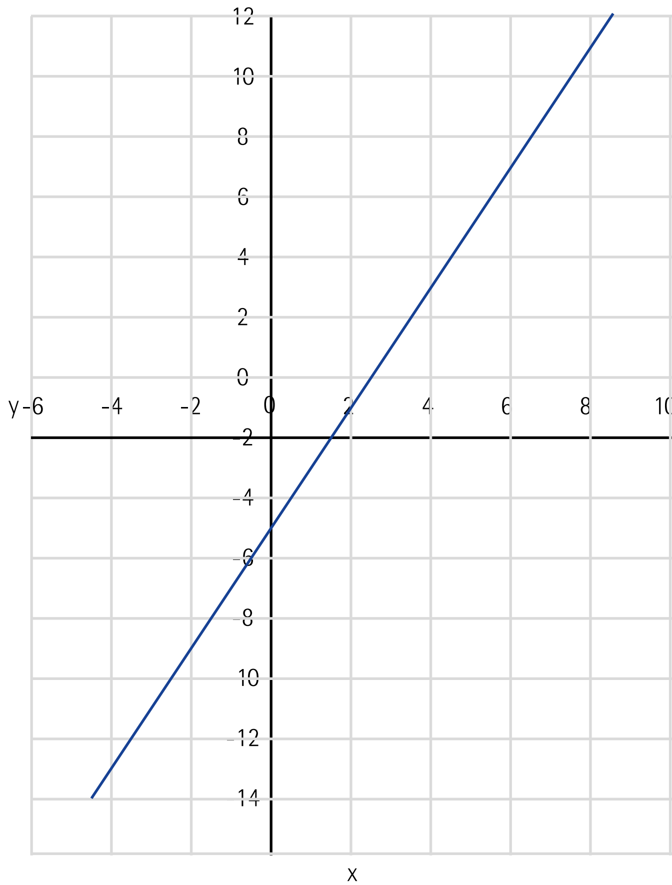


Figura 33 – Gráfico de função f(x)

Assinale a alternativa que mostra corretamente a equação da função ilustrada no gráfico.

A) y=2.x-5

B) y=2.x-6

C) y=-2.x-5

D) y=-2.x+5

E) y=5.x-2

Resposta correta: alternativa A.

Resolução

Vamos escolher quaisquer dois pontos P_1 e P_2 da reta da figura para calcularmos seu coeficiente angular. Como mostrado na figura a seguir, podemos selecionar, por exemplo, os seguintes pontos:

- $P_1=(-4,-13)$;
- $P_2=(6,7)$.

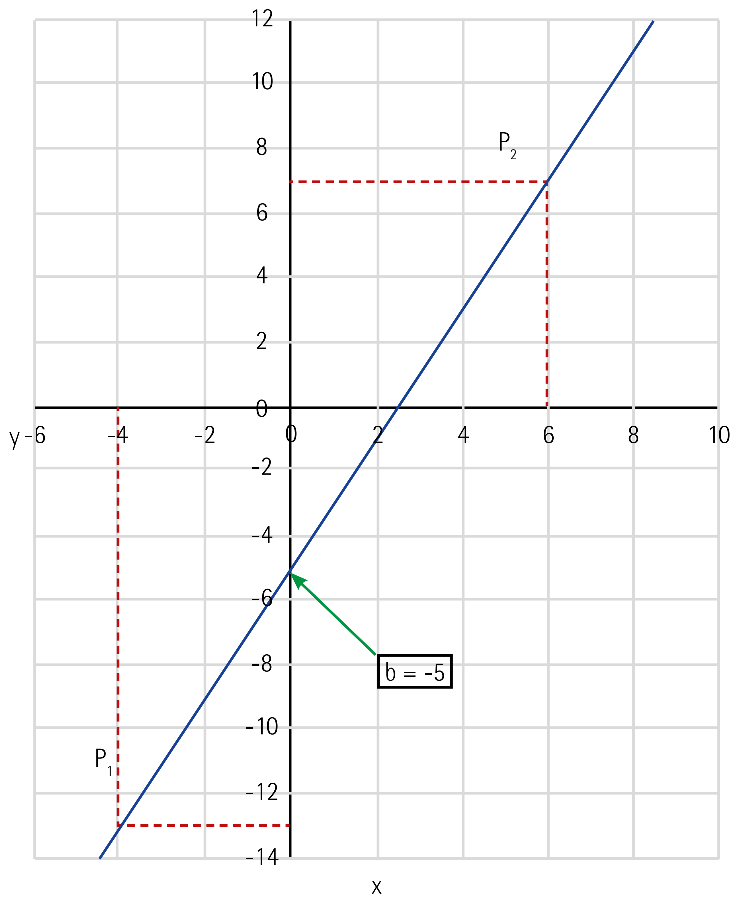


Figura 34 – Gráfico com pontos P_1 e P_2

Nesse caso, temos:

- $x_1=-4$
- $y_1=-13$
- $x_2=6$
- $y_2=7$

Logo, o coeficiente angular a da reta da figura é igual a 2, pois:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-13)}{6-(-4)} = \frac{7+13}{6+4} = \frac{20}{10} = 2$$

O coeficiente linear b da reta está identificado na figura e vale -5.

Assim, concluímos que a equação da reta em análise é y=2.x-5.

Questão 2. Observe os gráficos 1 e 2 mostrados na figura a seguir:

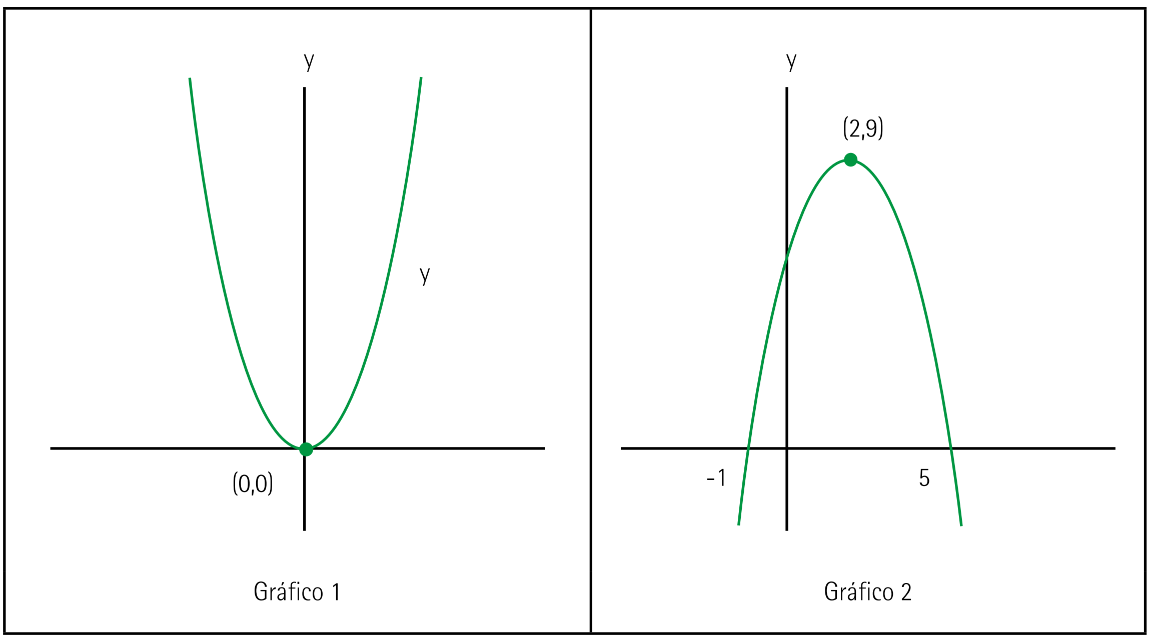


Figura 35 – Gráficos com funções de 2º grau

Fonte: Goldstein, Schneider e Asmar (2012, p. 18).

Com base na observação e nos seus conhecimentos, avalie as afirmativas.

I – O gráfico 1 pode referir-se à função do 2º grau dada por $f(x)=x^2$.

II – O gráfico 2 pode referir-se à função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$.

III – O vértice V do gráfico 2 é dado por V=(2,9) e representa o ponto de mínimo dessa parábola.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e II, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa A.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: no gráfico 1, vemos uma parábola que:

- Passa pela origem O=(0,0) dos eixos coordenados.
- É simétrico em relação ao eixo Ox.
- Tem concavidade voltada para cima.

Logo, em virtude das características expostas, o gráfico 1 pode referir-se à função do 2º grau dada por $f(x)=x^2$.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o gráfico da função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$ cruza o eixo Oy em $y=-0,5$, visto que o termo independente c é -0,5. Como podemos ver na figura do enunciado, o gráfico 2 cruza o eixo vertical em posição $y>0$. Logo, o gráfico 2 não pode se referir à função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$.

III – Afirmativa incorreta.

Justificativa: como podemos ver na figura anterior, o vértice V do gráfico 2 é dado por V=(2,9). No entanto, V representa o ponto de máximo da parábola em estudo e não o seu ponto de mínimo.