MAC0210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Exercício-programa 1

Vítor Kei Taira Tamada - 8516250
André Ferrari Moukarzel - 9298166

1 Parte 1: Aritmética de ponto flutuante

Questão 1 (3.11): Dado o sistema de ponto flutuante com base 2:

$$x = \pm S \times 2^E$$
sendo que
$$S = (0.1b_2b_3b_4...)$$
$$-128 < E < 127$$

a) Qual é o maior número de ponto flutuante desse sistema?

R) O maior número de ponto flutuante que esse sistema é capaz de representar é:

$$+(0.111111111111111111111111) \times 2^{126}$$

que é equivalente a

$$+111111111111111111111111 \times 2^{102}$$

Como 111111111111111111111111 equivale a 16777215 em base 10, temos que o maior número que esse sistema consegue representar é:

$$16777215 \times 2^{102}$$

b) Qual é o menor número de ponto flutuante positivo desse sistema?

R) O menor número de ponto flutuante positivo que esse sistema é capaz de representar é:

$$+(0.100000000000000000000000) \times 2^{-127}$$

Como 0.100000000000000000000000 equivale a 0.5 em base 10, temos que o menor número positivo que esse sistema consegue representar é:

$$0.5 \times 2^{-127}$$

c) Qual é o menor inteiro positivo que não é exatamente representável nesse sistema?

R) O menor número positivo não representável no sistema é o número com o menor S dentro do intervalo e o menor E acima do intervalo. Ou seja,

$$S = 0.100000000000000000000000$$
$$E = 127$$

Logo, o menor inteiro não representável nesse sistema é o

$$x = 0.5 \times 2^{127}$$

■

Questão 2 (5.1): Qual é a representação do número $\frac{1}{10}$ no formato IEEE single para cada um dos quatro modos de arredondamento? E para os números $1 + 2^{-25}$ e 2^{130}?

R) As representações no formato IEEE single em cada um dos quatro modos de arredondamento são as seguinte:

[Para $\frac{1}{10}$]

- Aproximação para $+\infty$:
  $(0.00011001100110011001101)_2 \times 2^0$

- Aproximação para $-\infty$:
  $(0.00011001100110011001100)_2 \times 2^0$

- Aproximação para 0:
  $(0.00011001100110011001100)_2 \times 2^0$

- Aproximação para o mais próximo:
  $(0.00011001100110011001101)_2 \times 2^0$

[Para $1 + 2^{-25}$, sabendo que a mantissa tem 23 bits]

- Aproximação para $+\infty$:
  $(0.10000000000000000000001)_2 \times 2^1$

- Aproximação para $-\infty$:
  $(0.10000000000000000000000)_2 \times 2^1$

- Aproximação para 0:
  $(0.10000000000000000000000)_2 \times 2^1$

- Aproximação para o mais próximo:
  $(0.10000000000000000000000)_2 \times 2^1$

[Para 2^{130}]

Uma vez que o formato IEEE single não consegue representar números maior do que 2^{128} *(sendo que esse limite é reservado para representar* ∞*), o número* 2^{130} *não possui aproximação nesse sistema*

■

Questão 3 (6.4): Qual é o maior número de ponto flutuante x tal que $1 \oplus x$ é exatamente 1, assumindo que o formato usado é IEEE single e modo de arredondamento para o mais próximo? E se o formato for IEEE double?

R) Dada uma mantissa binária com t bits de precisão, um número $x \leqslant 2^{-(t+2)}$ é arredondado para baixo se utilizar arredondamento para mais próximo. Portanto, o número x é:

- Para IEEE single, 2^{-25}
- Para IEEE double, 2^{-54}

■

Questão 4 (6.8): Em aritmética exata, a soma é um operador comutativo e associativo. O operador de soma de ponto flutuante é comutativo? E associativo? Explique.

R)

- Associatividade:
  Prova por contradição: Supondo que o operador de soma de ponto flutuante é associativo:

$$a = 1 + 2^{-25}$$
$$b = 1$$

Com o arredondamento para o mais próximo, temos que:

$$((a+a)+b = 3+2^{-23}) \neq ((a+b)+a = 3)$$

Por contradição, conclui-se que a soma de ponto flutuante não é associativa.

- Comutatividade:

Seja $fl(x) = x + x \times e_x$ o valor de x em ponto flutuante - ou seja, e_x é o erro causado pela limitação do computador;

$$fl(a) + fl(b) = fl(b) + fl(a)$$
$$a + a \times e_a + b + b \times e_b = b + b \times e_b + a + a \times e_a$$

Seja $e_{ab} = a \times e_a + b \times e_b$, temos então que:

$$a + b + e_{ab} = b + a + e_{ab}$$

Logo, conclui-se que a soma de ponto flutuante é comutativa

∎

2 Parte 2: Método de Newton

Método de Newton: O método de Newton foi implementado na função `newton()` segundo o indicado pelo livro com as seguintes checagens:

- Uma iteração verifica se o valor absoluto de $f(x)$ atual é menor do que a tolerância pré determinada. Em caso positivo, retorna $|f(x0)|$;

```
root = newton(f, x0)
    err = 0.000001;
    valor = polyval(f, x0);
    if (abs(valor) < err)
        root = x0;
        return;
    endif
    ...
```

- em seguida, verifica se $f'(x) = 0$, pois o método realiza uma divisão com a derivada no denominador. Logo, essa checagem serve para evitar divisões por zero;

```
    ...
    der = polyval(polyder(f), x0);
    if (der == 0)
        root = NaN;
        return;
    endif
    ...
```

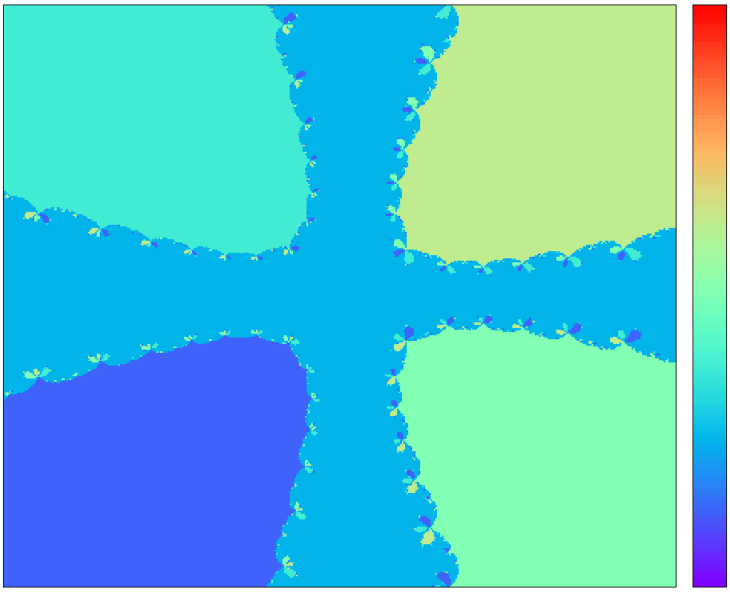
- caso o método ultrapasse 100 iterações, considera-se que o ponto dado não converge para uma das raízes da função, retornando `NaN`.

```
    for iter = 0 :  100
        ...
    endfor
```

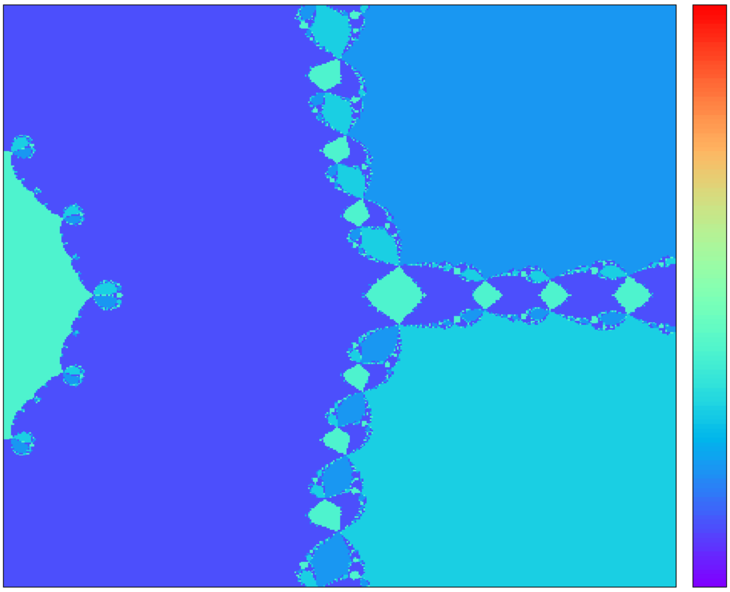
Exemplos de saída do programa

O enunciado foi feito com os limites [-2, 2] para o parte real e [-2i, 2i] para a parte imaginária.

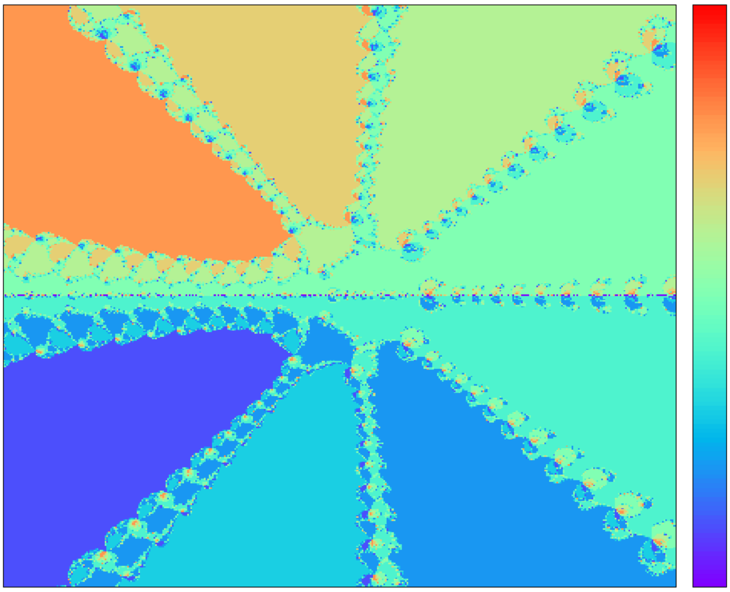
Os exemplos gerados estão dentro dos intervalos [-4, 4] para a parte real e [-4i, 4i] para a parte imaginária e intervalo `[0:8]` no arquivo `plot_basins.gp`



$-\frac{9}{7}x^5 + \frac{7}{11}x^4 + \frac{3}{17}x^3 - 5x - 1$
n = 400

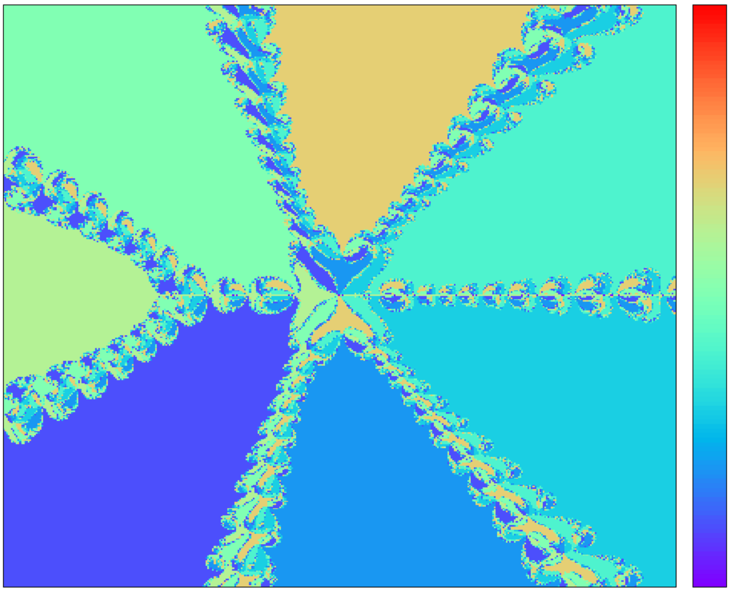


$x^4 + 2x^3 + -7x^2 + 8x - 12$
n = 400

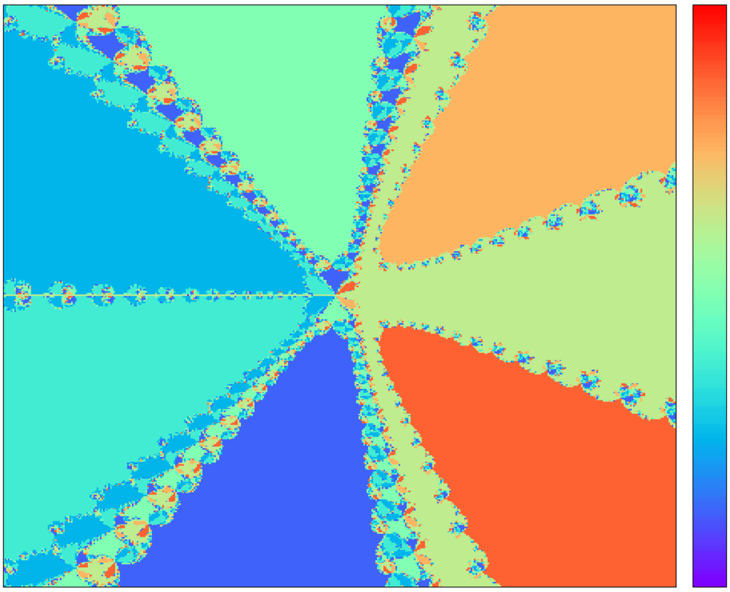


$x^8 + -2x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 10$
n = 400

$x^3 - 3x^2 + 2$
n = 400



$5x^7 + 12x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{9}x^4 - 3x^2 + 21$
n = 400



$13x^7 - 5x^6 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + \frac{1}{9}x - 1$
n = 400

■

3 Parte 3: Encontrando todas as raízes de uma função

O programa `root_finder` não trata de casos em que há mais do que uma raíz em um subintervalo uma vez que fica por conta do usuário colocar um `ninter` pequeno o suficiente para que isso não ocorra.

Ele também utiliza exclusivamente o método da secante e não o de Newton uma vez que seria muito mais difícil implementar ou encontrar métodos que realizariam a derivada de funções genéricas. Isso não é um problema na segunda parte do exercício pois apenas polinômios são utilizadas nela, havendo a função `polyder()`.

No caso de não haver descrescimento suficiente como especificado pelo enunciado ($|f(x_k)| > 0.5|f(x_{k-1})|$), a função secante retorna `NaN` como indicador de que precisa rodar o método da bissecção três vezes antes de tentar o da secante novamente.

■