Sistemas Baseados em Conhecimento
Aula de Exercícios I

Vinícius Bitencourt Matos

IME-USP

Setembro de 2017

Exercício 1

Considere os seguintes fatos sobre o Clube da Ponte da Rua Elm: Joe, Sally, Bill, e Ellen são os únicos membros do clube. Joe é casado com Sally. Bill é irmão de Ellen. O cônjuge de toda pessoa casada do clube também está no clube.
Desses fatos, a maioria das pessoas seria capaz de determinar que Ellen não é casada.

(a) Represente esses fatos como sentenças em lógica de primeira ordem, e mostre semanticamente que apenas por elas não podemos concluir que Ellen não é casada.

Exercício 1

Considere os seguintes fatos sobre o Clube da Ponte da Rua Elm: Joe, Sally, Bill, e Ellen são os únicos membros do clube. Joe é casado com Sally. Bill é irmão de Ellen. O cônjuge de toda pessoa casada do clube também está no clube.
Desses fatos, a maioria das pessoas seria capaz de determinar que Ellen não é casada.

(a) Represente esses fatos como sentenças em lógica de primeira ordem, e mostre semanticamente que apenas por elas não podemos concluir que Ellen não é casada.

(b) Escreva em lógica de primeira ordem alguns fatos adicionais que a maioria das pessoas sabe, e mostre que esse conjunto de sentenças expandido agora permite concluir que Ellen não é casada.

Forma normal conjuntiva

Conjunção de disjunções de átomos ou suas negações

Forma normal conjuntiva

Conjunção de disjunções de $\underbrace{\text{átomos ou suas negações}}_{\text{literais}}$

Exemplo:

$$p \quad \neg q \qquad q \quad r \quad \neg s \quad p \qquad \neg r \quad q$$

Forma normal conjuntiva

$$\text{Conjunção de } \underbrace{\text{disjunções de } \underbrace{\text{átomos ou suas negações}}_{\text{literais}}}_{\text{cláusulas}}$$

Exemplo:

$$p \vee \neg q \qquad q \vee r \vee \neg s \vee p \qquad \neg r \vee q$$

$$[p,\ \neg q]\ \ [q,\ r,\ \neg s,\ p]\ \ [\neg r,\ q]$$

Forma normal conjuntiva

$$\underbrace{\text{Conjunção de } \underbrace{\text{disjunções de } \underbrace{\text{átomos ou suas negações}}_{\text{literais}}}_{\text{cláusulas}}}_{\text{fórmulas em CNF}}$$

Exemplo:

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg r \vee q)$$

$$\{[p, \neg q], [q, r, \neg s, p], [\neg r, q]\}$$

Forma normal conjuntiva

$\varnothing = \{\}$: nenhuma cláusula — equivale a $\top$;

Forma normal conjuntiva

$\varnothing = \{\}$: nenhuma cláusula — equivale a $\top$;

[]: cláusula vazia — equivale a $\bot$;

Forma normal conjuntiva

$\varnothing = \{\}$: nenhuma cláusula — equivale a $\top$;

$[]$: cláusula vazia — equivale a $\bot$;

$\{[]\}$: conjunto contendo apenas a cláusula vazia — equivale a $\bot$.

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$\alpha \leftrightarrow \beta$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \equiv \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta \quad &\equiv \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta \quad &
\end{aligned}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$\begin{aligned} \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\ \alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \end{aligned}$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha &
\end{aligned}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$\begin{aligned} \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\ \alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\ \neg\neg\alpha &\equiv \alpha \end{aligned}$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha &\equiv \alpha \\
\neg(\alpha \land \beta) &
\end{aligned}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha &\equiv \alpha \\
\neg(\alpha \land \beta) &\equiv \neg\alpha \lor \neg\beta
\end{aligned}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
\neg\neg\alpha & \equiv & \alpha \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) & &
\end{array}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha &\equiv \alpha \\
\neg(\alpha \land \beta) &\equiv \neg\alpha \lor \neg\beta \\
\neg(\alpha \lor \beta) &\equiv \neg\alpha \land \neg\beta
\end{aligned}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta & \equiv & \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha & \equiv & \alpha \\
\neg(\alpha \land \beta) & \equiv & \neg\alpha \lor \neg\beta \\
\neg(\alpha \lor \beta) & \equiv & \neg\alpha \land \neg\beta \\
\alpha \lor (\beta \land \gamma) & &
\end{array}
$$

Forma normal conjuntiva

Para chegar à CNF:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\neg\neg\alpha &\equiv \alpha \\
\neg(\alpha \land \beta) &\equiv \neg\alpha \lor \neg\beta \\
\neg(\alpha \lor \beta) &\equiv \neg\alpha \land \neg\beta \\
\alpha \lor (\beta \land \gamma) &\equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)
\end{aligned}
$$

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \models \alpha$.

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \vDash \alpha$.

Se $S \vDash \alpha$, então $S \vdash \alpha$?

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \vDash \alpha$.

Se $S \vDash \alpha$, então $S \vdash \alpha$? Não necessariamente.

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \vDash \alpha$.

Se $S \vDash \alpha$, então $S \vdash \alpha$? Não necessariamente.

Mas $S \vDash \bot$ se e somente se $S \vdash \bot$.

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \vDash \alpha$.

Se $S \vDash \alpha$, então $S \vdash \alpha$? Não necessariamente.

Mas $S \vDash \bot$ se e somente se $S \vdash \bot$.

E como $\mathrm{KB} \vDash \alpha$ se e somente se $\mathrm{KB} \cup \{\neg\alpha\} \vDash \bot$,

Resolução

Se $S \vdash \alpha$, então $S \models \alpha$.

Se $S \models \alpha$, então $S \vdash \alpha$? Não necessariamente.

Mas $S \models \bot$ se e somente se $S \vdash \bot$.

E como $\mathrm{KB} \models \alpha$ se e somente se $\mathrm{KB} \cup \{\neg\alpha\} \models \bot$,

então

$$\boxed{\mathrm{KB} \models \alpha \text{ se e somente se } \mathrm{KB} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot}.$$

Resolução

De

$$[c, c_1, \ldots, c_n], [\neg c, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Resolução

De

$$[c, c_1, \dots, c_n], [\neg c, c'_1, \dots, c'_m]$$

Obter

$$[c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_m]$$

Resolução

De

$$[c, c_1, \ldots, c_n], [\neg c, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Obter

$$[c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Para determinar se $\mathrm{KB} \models \alpha$:

- Converter para CNF

Resolução

De

$$[c, c_1, \ldots, c_n], [\neg c, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Obter

$$[c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Para determinar se $\mathrm{KB} \models \alpha$:

- Converter para CNF
- Incluir a cláusula $[\neg\alpha]$

Resolução

De

$$[c, c_1, \ldots, c_n], [\neg c, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Obter

$$[c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Para determinar se $\mathrm{KB} \models \alpha$:

- Converter para CNF
- Incluir a cláusula $[\neg\alpha]$
- Aplicar resolução repetidamente

Resolução

De

$$[c, c_1, \ldots, c_n], [\neg c, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Obter

$$[c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m]$$

Para determinar se $\mathrm{KB} \models \alpha$:

- Converter para CNF
- Incluir a cláusula $[\neg\alpha]$
- Aplicar resolução repetidamente
- Se gerar [], então $\mathrm{KB} \models \alpha$.

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

$$\neg\forall x \alpha \equiv \exists x \neg\alpha$$

$$\neg\exists x \alpha \equiv \forall x \neg\alpha$$

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

$$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$$

$$\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$$

- Utilizar variáveis distintas em cada quantificador

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

$$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$$

$$\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$$

- Utilizar variáveis distintas em cada quantificador
- Mover $\forall$ "para fora":

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

- Utilizar variáveis distintas em cada quantificador
- Mover $\forall$ "para fora":

$$\alpha \land \forall x \beta \equiv \forall x [\alpha \land \beta]$$

$$\alpha \lor \forall x \beta \equiv \forall x [\alpha \lor \beta]$$

Resolução em Lógica de Primeira Ordem

Transformações adicionais:

- Mover negações "para dentro":

$$\neg\forall x \alpha \equiv \exists x \neg\alpha$$

$$\neg\exists x \alpha \equiv \forall x \neg\alpha$$

- Utilizar variáveis distintas em cada quantificador
- Mover $\forall$ "para fora":

$$\alpha \wedge \forall x \beta \equiv \forall x [\alpha \wedge \beta]$$

$$\alpha \vee \forall x \beta \equiv \forall x [\alpha \vee \beta]$$

- Ao resolver, utilizar substituições que "unificam" literais

Resolução: Extração de resposta

- Criar um predicado de resposta $A(x)$
- Trocar $\exists x P(x)$ por $\exists x[P(x) \wedge \neg A(x)]$
- Parar ao obter $[A(...)]$, contendo a resposta

Resolução: Skolemização

Resolução: Skolemização

- Acréscimo de constantes e funções para lidar com $\exists$

Resolução: Skolemização

- Acréscimo de constantes e funções para lidar com $\exists$
- Um argumento para cada quantificador universal dominando o existencial

Resolução: Skolemização

- Acréscimo de constantes e funções para lidar com $\exists$
- Um argumento para cada quantificador universal dominando o existencial
- Satisfatibilidade é preservada, mas equivalência lógica não

Exercício 2

Dado

$$\forall w \;\; P(a, w, f(w))$$

provar usando resolução que

$$\exists x \forall y \exists z \;\; P(x, y, z).$$

Resolução: Igualdade

- Tratar como predicado

Resolução: Igualdade

- Tratar como predicado
- Assumir reflexividade, transitividade, simetria

$$\forall x[x = x]$$

$$\forall x \forall y \forall z[(x = y) \land (y = z) \rightarrow (x = z)]$$

$$\forall x \forall y[(x = y) \rightarrow (y = x)]$$

Resolução: Igualdade

- Tratar como predicado
- Assumir reflexividade, transitividade, simetria

$$\forall x[x = x]$$

$$\forall x \forall y \forall z[(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)]$$
$$\forall x \forall y[(x = y) \rightarrow (y = x)]$$

- Assumir substituição em funções e em predicados, para toda função e todo predicado

$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n \Big[\big((x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n) \big) \rightarrow$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, x_n) \Big]$$

Resolução: Igualdade

- Tratar como predicado
- Assumir reflexividade, transitividade, simetria

$$\forall x[x = x]$$

$$\forall x \forall y \forall z[(x = y) \land (y = z) \rightarrow (x = z)]$$
$$\forall x \forall y[(x = y) \rightarrow (y = x)]$$

- Assumir substituição em funções e em predicados, para toda função e todo predicado

$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n \Big[((x_1 = y_1) \land \cdots \land (x_n = y_n)) \rightarrow$$
$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n)\Big]$$

Exercício 3

Dados

$$\forall x \ \mathrm{Married}(\mathrm{father}(x), \mathrm{mother}(x))$$

$$\mathrm{father}(\mathrm{john}) = \mathrm{bill}$$

Verificar que

$$\mathrm{Married}(\mathrm{bill}, \mathrm{mother}(\mathrm{john})).$$

Exercício 4 (longo!)

Resolver o exercício 1b novamente, desta vez utilizando resolução.

Referências

Exercício 2 adaptado do exercício 5.6.10b de *An Introduction to Mathematical Logic* (Hodel, 2013)
Exercícios 1 e 3 adaptados respectivamente do exercício 2 do capítulo 3 e do exemplo da seção 4.2.4 de *Knowledge Representation and Reasoning* (Brachman & Levesque, 2004).