Teoria das Probabilidades

Espaço de Probabilidade

Axiomas e Propriedades

(revisão)

Espaço de Probabilidade

Definição

O **espaço de probabilidade** ou modelo probabilístico associado a um experimento é dado por $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \text{espaço amostral} \\
&= \text{conj. de todos os possíveis resultados do experimento} \\
\mathcal{F} &= \sigma-\text{álgebra de subconjuntos de } \Omega \\
&= \text{coleção de } \underline{\text{eventos}} \text{ de } \Omega \\
P &= \text{função (ou medida) de probabilidade definida em } \mathcal{F}.
\end{aligned}
$$

Em boa parte deste curso o espaço de probabilidades será **discreto**, isto é, Ω é constituído de elementos contáveis ou enumeráveis.

Neste caso, $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as partes, ou seja, a coleção de todos os subconjuntos de Ω.

Função de Probabilidade

Definição

Considere um experimento com espaço amostral Ω e $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$. A função P definida em $\mathcal{F}$ com valores no intervalo $[0,1]$ $(P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1])$ é chamada de (medida de) probabilidade se satisfaz os três axiomas abaixo.

Axioma 1 $\quad P(\Omega) = 1$

Axioma 2 $\quad$ Para todo $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad$ (ou apenas $P(A) \geq 0$)

Axioma 3 $\quad$ ($\sigma-$aditividade) $\quad$ Para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (isto é, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$), temos que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Propriedades da função Probabilidade

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma sequência finita de eventos mutuamente exclusivos de $\mathcal{F}$ então $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

(3) $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$

(4) Para A e $B \in \mathcal{F}$, tal que $B \subset A$, tem-se que $P(A) \geq P(B)$

(5) Para todo A e $B \in \mathcal{F}$ tem-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Regra da adição de probabilidades)

Propriedades da função Probabilidade - continuação

(6) (Teorema de Poincaré ou Fórmula da inclusão-exclusão)

Para $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$, $(m \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&+ \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
&+ \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_r} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) \\
&+ \cdots + (-1)^{m+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Problema dos pareamentos/coincidências

(7) (Sub$-\sigma-$aditividade)

Para $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (quaisquer),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Esse resultado vale para um número finito de eventos:

(7′) (Sub-aditividade)

Para $A_1, A_2, \ldots A_m \in \mathcal{F}$ (quaisquer), $m \leq 2$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$