Sistemas Baseados em Conhecimento
Aula de Exercícios III

Vinícius Bitencourt Matos

IME-USP

Setembro de 2017

Exercício 6

Esta questão envolve a formalização de algumas propriedades simples de *conjuntos* em lógica de primeira ordem. Considere os seguintes fatos:

- Nenhum conjunto é elemento de si mesmo.
- Um conjunto x é um subconjunto de um conjunto y se e somente se todo elemento de x é um elemento de y.
- Algo é elemento da união de dois conjuntos x e y se e somente se ele é um elemento de x ou um elemento de y.

Exercício 6

(a) Represente os fatos como sentenças de lógica de primeira ordem. Como símbolos não lógicos, use $\mathrm{Sub}(x, y)$ para representar "x é um subconjunto de y", $\mathrm{Elt}(e, x)$ para representar "e é um elemento de x", e $\mathrm{u}(x, y)$ para representar "a união de x e y". Em vez de usar um predicado especial para afirmar que algo é um conjunto, você pode simplesmente assumir que no domínio (que assumimos não vazio) tudo é um conjunto. Chame de $\mathcal{T}$ o conjunto de sentenças resultante.

Exercício 6

(b) Mostre usando interpretações lógicas que "x é subconjunto da união de x e y" é consequência lógica de $\mathcal{T}$.

Exercício 6

(c) Mostre usando interpretações lógicas que "a união de x e y é igual à união de y e x" não é consequência lógica de $\mathcal{T}$.

Exercício 6

(d) Seja A um conjunto qualquer. Mostre usando interpretações lógicas que "existe um conjunto z tal que a união de A e z é um subconjunto de A" é consequência lógica de $\mathcal{T}$.

Exercício 6

(e) “Existe um conjunto z tal que, para qualquer conjunto x, a união de x e z é um subconjunto de x” é consequência lógica de $\mathcal{T}$? Explique.

Exercício 6

(f) Escreva uma sentença que afirme a existência de conjuntos unitários, isto é, para qualquer x, o conjunto cujo único elemento é x. O conjunto $\mathcal{T}_1$ é $\mathcal{T}$ com essa sentença adicionada.

Exercício 6

(g) Prove que $\mathcal{T}_1$ não é finitamente satisfatível (novamente, assumindo que o domínio é não vazio).

Exercício 6

(h) Prove ou desprove que a existência de um conjunto vazio é consequência lógica de $\mathcal{T}$.

Exercício 7

Em certa cidade, há as seguintes regras em relação ao barbeiro da cidade:

- o barbeiro deve barbear qualquer um que não se barbeia;
- qualquer um que o barbeiro barbear não deve barbear a si mesmo.

Mostre que nenhum barbeiro pode satisfazer esses requisitos, isto é, formule os requisitos como sentenças da lógica de primeira ordem e mostre que, em qualquer interpretação em que a primeira regra é verdadeira, a segunda necessariamente é falsa. (Isto é conhecido como "paradoxo do barbeiro", e foi formulado por Bertrand Russell.)

Exercício 7

$$\forall x \left[\neg s(x,x) \rightarrow s(b,x) \right]$$

$$\forall x \left[s(b,x) \rightarrow \neg s(b,x) \right]$$

Se uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz a primeira sentença, então implica logicamente que $\neg s(b,b) \rightarrow s(b,b)$, ou seja, $s(b,b) \vee s(b,b)$, que equivale a $s(b,b)$. Sendo $s(b,b)$ verdadeiro, temos que a $s(b,b) \rightarrow \neg s(b,b)$ é falso, portanto $\mathcal{I}$ não satisfaz a segunda afirmação.

Referências

Exercícios 6 e 7 adaptados dos exercícios 3 e 4 do capítulo 2 de *Knowledge Representation and Reasoning* (Brachman & Levesque, 2004).