Sistemas Baseados em Conhecimento
Aula 16

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2017

A linguagem típica ($\mathcal{ALC}$)

- Attributive Concept Language with Complements (Schmidt-Schauß and Smolka, 1991).
- Construção de conceitos fechada sob operadores booleanos.
- Base para linguagens mais expressivas.

Conceitos

$$
\begin{array}{lcl}
C, D & \longrightarrow & \mathsf{A} \mid \\
 & & \top \mid \\
 & & \bot \mid \\
 & & \neg C \mid \\
 & & C \sqcap D \mid \\
 & & C \sqcup D \mid \\
 & & \forall R.C \mid \\
 & & \exists R.C
\end{array}
$$

Interpretações

$\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}}$ (domínio da interpretação)
- função que atribui para cada:
    - A, um conjunto $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
    - R, uma relação binária $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$.
    - a, um elemento $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$

Estendendo a função de interpretação

$$
\begin{array}{rcl}
\top^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \\
\bot^{\mathcal{I}} & = & \emptyset \\
(\neg C)^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \backslash C^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}} \\
(\exists R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} | \exists (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \text{ e } b \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} | \ \forall (a,b) \in R^{\mathcal{I}},\ b \in C^{\mathcal{I}}\}
\end{array}
$$

Semântica da TBox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C \equiv D$ sse $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$.

Semântica da TBox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C \equiv D$ sse $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$.
- $C \sqsubseteq D$ sse $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.

Semântica da TBox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C \equiv D$ sse $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$.
- $C \sqsubseteq D$ sse $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.
- a TBox $\mathcal{T}$ sse satisfaz todos os elementos de $\mathcal{T}$

Semântica da ABox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C(a)$ sse $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.

Semântica da ABox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C(a)$ sse $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
- $r(a, b)$ sse $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in r^{\mathcal{I}}$.

Semântica da ABox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ satisfaz

- $C(a)$ sse $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
- $r(a, b)$ sse $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in r^{\mathcal{I}}$.
- a ABox $\mathcal{A}$ sse satisfaz todos os elementos de $\mathcal{A}$

Base de conhecimento $\mathcal{ALC}$

Uma Base de conhecimento $\mathcal{ALC}$ é um par $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$, onde

- $\mathcal{T}$ é uma TBox
- $\mathcal{A}$ é uma ABox

Uma interpretação $\mathcal{I}$ é um *modelo* de Σ se satisfaz $\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}$.

Uma base de conhecimento Σ é *satisfatível* se admite um modelo.

Consequência Lógica

$\Sigma \models \varphi$ sse todo modelo de Σ é um modelo de φ

Consequência Lógica

$\Sigma \models \varphi$ sse todo modelo de Σ é um modelo de φ

$\exists \text{teaches.Course} \sqsubseteq \text{GraduateStudent} \sqcup \text{Professor}$

teaches(john, cs101)
Course(cs101)
$\neg$Professor(john)

Consequência Lógica

$\Sigma \models \varphi$ sse todo modelo de Σ é um modelo de φ

$\exists \text{teaches.Course} \sqsubseteq \text{GraduateStudent} \sqcup \text{Professor}$

teaches(john, cs101)
Course(cs101)
$\neg$Professor(john)

$\Sigma \models$GraduateStudent(john)

Tradução para LPO

Conceitos são traduzidos para fórmulas com uma variável livre:
$t_x(A) = A(x)$
$t_x(C \sqcap D) = t_x(C) \land t_x(D)$
$t_x(\forall r.C) = \forall y(r(x,y) \rightarrow t_y(C))$
$t_x(\exists r.C) = \exists y(r(x,y) \land t_y(C))$

Tradução para LPO

Conceitos são traduzidos para fórmulas com uma variável livre:
$t_x(A) = A(x)$
$t_x(C \sqcap D) = t_x(C) \wedge t_x(D)$
$t_x(\forall r.C) = \forall y(r(x,y) \rightarrow t_y(C))$
$t_x(\exists r.C) = \exists y(r(x,y) \wedge t_y(C))$

Axiomas $C \sqsubseteq D$ correspondem a
$\forall x(t_x(C) \rightarrow t_x(D))$

Tradução para LPO

$\text{Cat} \sqsubseteq \text{Mammal}$
$\forall x(\text{Cat}(x) \rightarrow \text{Mammal}(x))$

Tradução para LPO

Cat $\sqsubseteq$ Mammal
$\forall x(\text{Cat}(\text{x}) \rightarrow \text{Mammal}(\text{x}))$

Student $\sqsubseteq$ $\forall$hasPet.(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)
$\forall x(\text{Student}(x) \rightarrow$
$\forall y\ (\text{hasPet}(\text{x,y}) \rightarrow (\text{Owl}(\text{y}) \vee \text{Cat}(\text{y}) \vee \text{Toad}(\text{y}))))$

Exemplo (Horrocks) - TBox

$\text{HogwartsStudent} \equiv \text{Student} \sqcap \exists \text{attendsSchool.Hogwarts}$

$\text{HogwartsStudent} \sqsubseteq \forall \text{hasPet.}(\text{Owl} \sqcup \text{Cat} \sqcup \text{Toad})$

$\exists \text{hasPet.Phoenix} \sqsubseteq \text{Wizard}$

$\text{Phoenix} \sqsubseteq \neg(\text{Owl} \sqcup \text{Cat} \sqcup \text{Toad})$

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:
HogwartsStudent(harryPotter)

Inferências:

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:	**Inferências:**
HogwartsStudent(harryPotter)	$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:	**Inferências:**
HogwartsStudent(harryPotter)	$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)	

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:	**Inferências:**
HogwartsStudent(harryPotter)	$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)	(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)(hedwig)

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:

HogwartsStudent(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)
Phoenix(fawks)

Inferências:

$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)(hedwig)

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:
HogwartsStudent(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)
Phoenix(fawks)

Inferências:
$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)(hedwig)
$\neg$hasPet(harryPotter,fawks)

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:
HogwartsStudent(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)
Phoenix(fawks)
hasPet(dumbledore,fawks)

Inferências:
$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)(hedwig)
$\neg$hasPet(harryPotter,fawks)

Exemplo (Horrocks) - ABox

Fatos:
HogwartsStudent(harryPotter)
hasPet(harryPotter, hedwig)
Phoenix(fawks)
hasPet(dumbledore,fawks)

Inferências:
$\exists$attendsSchool.Hogwarts(harryPotter)
(Owl $\sqcup$ Cat $\sqcup$ Toad)(hedwig)
$\neg$hasPet(harryPotter,fawks)
Wizard(dumbledore) and
$\neg$HogwartsStudent(dumbledore)

Ontologias vs. Banco de Dados

Banco de Dados:

Ontologias:

Ontologias vs. Banco de Dados

Banco de Dados:

- Mundo fechado
  (não está $=$ falso)

Ontologias:

- Mundo aberto
  (não está $=$ desconhecido)

Ontologias vs. Banco de Dados

Banco de Dados:

- Mundo fechado
  (não está = falso)
- UNA
  (cada indivíduo tem nome único)

Ontologias:

- Mundo aberto
  (não está = desconhecido)
- Não tem UNA
  (indivíduo pode ter vários nomes)

Ontologias vs. Banco de Dados

Banco de Dados:

- Mundo fechado
  (não está = falso)
- UNA
  (cada indivíduo tem nome único)
- Esquema restringe dados

Ontologias:

- Mundo aberto
  (não está = desconhecido)
- Não tem UNA
  (indivíduo pode ter vários nomes)
- Axiomas usados para inferência

Exemplo - continuação

Dados os fatos:

hasFriend(harryPotter,ronWeasley)
hasFriend(harryPotter, hermioneGranger)

Exemplo - continuação

Dados os fatos:

hasFriend(harryPotter,ronWeasley)

hasFriend(harryPotter, hermioneGranger)

Pergunta: Draco é amigo de Harry Potter?

Exemplo - continuação

Dados os fatos:

hasFriend(harryPotter,ronWeasley)

hasFriend(harryPotter, hermioneGranger)

Pergunta: Draco é amigo de Harry Potter?
BD: não.
Ontologia: não sei (mundo aberto).

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2
Ontologia: pelo menos 1 (não UNA).

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2
Ontologia: pelo menos 1 (não UNA).

Se acrescentarmos um fato novo:
¬(`ronWeasley=hermioneGranger`)

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2
Ontologia: pelo menos 1 (não UNA).

Se acrescentarmos um fato novo:
`¬(ronWeasley=hermioneGranger)`

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2

Exemplo - continuação

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2
Ontologia: pelo menos 1 (não UNA).

Se acrescentarmos um fato novo:
$\neg$`(ronWeasley=hermioneGranger)`

Pergunta: Quantos amigos Harry Potter tem?

BD: 2
Ontologia: pelo menos 2 (mundo aberto).

Exemplo - continuação

Novos fatos inseridos:

Phoenix(fawks)

hasPet(dumbledore,fawks)

Exemplo - continuação

Novos fatos inseridos:

Phoenix(fawks)

hasPet(dumbledore,fawks)

DB: Rejeita inserção (domínio de hasPet é Human e Dumbledore não é Human - mundo fechado)
Ontologia: Infere que Dumbledore é humano. E também que é mago (pois tem uma Fênix)

Tipos de raciocínio

- Satisfatibilidade:
  Verificar se Σ tem um modelo
- Satisfatibilidade de Conceito (em relação a Σ):
  Checar se existe um modelo $\mathcal{I}$ de Σ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
  $\Sigma \not\models C \equiv \bot$
  Student $\sqcap$ $\neg$Person

Tipos de raciocínio

- "Subsunção" (em relação a Σ):
  Checar se para todos os modelos $\mathcal{I}$ de Σ, $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.
  $\Sigma \models C \sqsubseteq D$
  Student $\sqsubseteq$Person

Foi o primeiro problema estudado (classificação).
Para lógicas simples, resolvido por métodos estruturais.

Tipos de raciocínio

- Checagem de instância (em relação a Σ):
  Checar se para todo modelo $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
  $\Sigma \models C(a)$

Tipos de raciocínio

- Checagem de instância (em relação a Σ):
  Checar se para todo modelo $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
  $\Sigma \models C(a)$
- Recuperação
  Encontrar os indivíduos a tais que para todos os modelos $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
  $\{a | \Sigma \models C(a)\}$

Tipos de raciocínio

- Checagem de instância (em relação a Σ):
  Checar se para todo modelo $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
  $\Sigma \models C(a)$
- Recuperação
  Encontrar os indivíduos a tais que para todos os modelos $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
  $\{a | \Sigma \models C(a)\}$
- Realização
  Encontrar os conceitos C tais que para todos os modelos $\mathcal{I}$ de Σ, $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
  $\{C | \Sigma \models C(a)\}$

Tipos de raciocínio

Todos os tipos podem ser vistos como satisfatibilidade.

Tipos de raciocínio

Todos os tipos podem ser vistos como satisfatibilidade.

Satisfatibilidade de conceito: $\Sigma \not\models C \equiv \bot$

Tipos de raciocínio

Todos os tipos podem ser vistos como satisfatibilidade.

Satisfatibilidade de conceito: $\Sigma \not\models C \equiv \perp$

sse

$\Sigma \cup \{C(x)\}$ é satisfazível.

Tipos de raciocínio

Todos os tipos podem ser vistos como satisfatibilidade.

Satisfatibilidade de conceito: $\Sigma \not\models C \equiv \bot$

sse

$\Sigma \cup \{C(x)\}$ é satisfazível.

Subsunção: $\Sigma \models C \sqsubseteq D$

Tipos de raciocínio

Todos os tipos podem ser vistos como satisfatibilidade.

Satisfatibilidade de conceito: $\Sigma \not\models C \equiv \bot$

sse

$\Sigma \cup \{C(x)\}$ é satisfazível.

Subsunção: $\Sigma \models C \sqsubseteq D$

sse

$\Sigma \cup \{(C \sqcap \neg D)(x)\}$ não é satisfazível.

Exemplo

Para saber se

$$\exists R.A \sqcap \exists R.B \sqsubseteq \exists R.(A \sqcap B)$$

devemos verificar se o conceito

$$\exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \neg\exists R.(A \sqcap B)$$

é satisfazível, ou seja, se existe uma interpretação $\mathcal{I}$ tal que

$$(\exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \neg\exists R.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$, logo, existe c tal que $(b, c) \in R^{\mathcal{I}}$ e $c \in A^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$, logo, existe c tal que $(b, c) \in R^{\mathcal{I}}$ e $c \in A^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.B)^{\mathcal{I}}$, logo, existe d tal que $(b, d) \in R^{\mathcal{I}}$ e $d \in B^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$, logo, existe c tal que $(b, c) \in R^{\mathcal{I}}$ e $c \in A^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.B)^{\mathcal{I}}$, logo, existe d tal que $(b, d) \in R^{\mathcal{I}}$ e $d \in B^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\forall R.(\neg A \sqcup \neg B))^{\mathcal{I}}$, logo, $c, d \in (\neg A \sqcup \neg B)^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$, logo, existe c tal que $(b, c) \in R^{\mathcal{I}}$ e $c \in A^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.B)^{\mathcal{I}}$, logo, existe d tal que $(b, d) \in R^{\mathcal{I}}$ e $d \in B^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\forall R.(\neg A \sqcup \neg B))^{\mathcal{I}}$, logo, $c, d \in (\neg A \sqcup \neg B)^{\mathcal{I}}$
- $c \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ gera conflito, logo $c \in (\neg B)^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

- Primeiro passo: forma normal negada
  $C \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$
- Se existir $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, então o axioma inicial não é válido.
- Inventa b e diz que $b \in C^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$, logo, existe c tal que $(b, c) \in R^{\mathcal{I}}$ e $c \in A^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\exists R.B)^{\mathcal{I}}$, logo, existe d tal que $(b, d) \in R^{\mathcal{I}}$ e $d \in B^{\mathcal{I}}$
- $b \in (\forall R.(\neg A \sqcup \neg B))^{\mathcal{I}}$, logo, $c, d \in (\neg A \sqcup \neg B)^{\mathcal{I}}$
- $c \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ gera conflito, logo $c \in (\neg B)^{\mathcal{I}}$
- $d \in (\neg B)^{\mathcal{I}}$ gera conflito, logo $d \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{I}} = \{(b, c), (b, d)\}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{I}} = \{(b, c), (b, d)\}$
- $A^{\mathcal{I}} = \{c\}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{I}} = \{(b, c), (b, d)\}$
- $A^{\mathcal{I}} = \{c\}$
- $B^{\mathcal{I}} = \{d\}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{I}} = \{(b, c), (b, d)\}$
- $A^{\mathcal{I}} = \{c\}$
- $B^{\mathcal{I}} = \{d\}$

Exemplo – solução

Construímos uma interpretação $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{I}} = \{(b, c), (b, d)\}$
- $A^{\mathcal{I}} = \{c\}$
- $B^{\mathcal{I}} = \{d\}$

$$(\exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B))^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$$

Exercício

Verificar se o seguinte axioma é válido:

$$\exists R.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists R.A \sqcap \exists R.B$$