MAE 228

Contagem e Análise Combinatória

(Revisão)

Princípio básico de contagem

Considere r experimentos que podem ser realizados de maneira que o 1o. experimento produz um entre n_1 possíveis resultados e, para cada um desses n_1 resultados há n_2 possíveis resultados do 2o. experimento; e para cada um dos resultados dos 2 primeiros experimentos há n_3 possíveis resultados do 3o. experimento; e assim por diante.

Então há $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ possíveis resultados para os r experimentos realizados conjuntamente.

Princípio básico de contagem - Exemplos

Ao resolver os exemplos, especifique o que são os "experimentos".

Exemplo 1

Quantas placas de carros distintas podem ser formadas com 3 letras e 4 números?

$\longrightarrow 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^4$.

Exemplo 2

Quantas placas de carros distintas podem ser formadas com 3 letras e 4 números, sem repetição de letras e números?

$\longrightarrow 26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

Exemplo 3

De quantas maneiras podemos arranjar/dispor/posicionar as letras a, b e c?

$\longrightarrow$ lousa (listando todas as maneiras)

$\Longrightarrow \quad 3 \times 2 \times 1 = 6 = 3!$

Permutação e Arranjo

Definição:
A **permutação** de n elementos (distintos) é o número de arranjos ordenados de n elementos distintos, e é igual a

$$n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \overset{\text{notação}}{=} n!$$

Definição:
O **arranjo** de n elementos (distintos) tomados k a k $(k \leq n)$ é o número de arranjos ordenados de k elementos distintos escolhidos dentre os possíveis n elementos, e é igual a

$$n(n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \overset{\text{notação}}{=} A_{n,k}$$

Arranjo e combinação - Exemplos

Exemplo 4

Quantas diretorias de 3 pessoas (diretor, secretário e tesoureiro) podem ser formadas a partir de 8 pessoas?

$\longrightarrow \quad A_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6$

Exemplo 5

Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas a partir de 8 pessoas?

$\longrightarrow$ Uma comissão não envolve cargos, então a ordem não importa. Portanto, temos uma combinação.

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = 8 \cdot 7$$

Combinação

Definição

A **combinação** de n elementos tomados k a k $(k \leq n)$ é o número de maneiras de dispor, sem ordem, k elementos distintos escolhidos dentre os possíveis n elementos.

Notação: $C_{n,k}$

$$\underbrace{A_{n,k}}_{\text{ordenado}} = \underbrace{C_{n,k}}_{\text{sem ordem}} \times \underbrace{k!}_{\text{permuta}}$$

$$\Longrightarrow \quad C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Problema dos sorvetes

Uma sorveteria vende sorvetes em 7 sabores distintos.
Uma pessoa entra na sorveteria e compra 4 sorvetes.
De quantos modos é possível escolher esses 4 sorvetes dentre os 7 sabores disponíveis?

Atenção: a resposta NÃO é $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$ e nem 7^4 (justificativas dadas na lousa)

Descreva, em português, o que $C_{7,4}$ e 7^4 podem eventualmente representar em termos de maneiras de escolher sorvetes.

Para simplificar o problema (você pode listar todas as possíveis maneiras) considere 3 sorvetes e 4 sabores (a, b, c e d) disponíveis; ou ainda 2 sorvetes e 3 sabores.

Resolução do problema dos sorvetes

O problema dos sorvetes pode ser inserido no seguinte contexto.

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{no. de sorvetes escolhidos do sabor 1;} \\ x_2 &= \text{no. de sorvetes escolhidos do sabor 2;} \\ &\vdots \\ x_7 &= \text{no. de sorvetes escolhidos do sabor 7;} \end{aligned}$$

Assim, escolher 4 sorvetes de 7 sabores disponíveis corresponde a

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 4$$

O número de maneiras de escolher 4 sorvetes de 7 sabores distintos é equivalente ao número de soluções $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ de números inteiros e não-negativos da equação $(*)$.

Combinação completa

Caso geral do problema dos sorvetes:

O número de soluções inteiras e não-negativas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

é dado por (demonstrado na lousa)

$$\binom{r-1+n}{n} = \binom{r+n-1}{r-1}$$

Esse valor é chamado, às vezes, de combinação completa.

Técnicas de contagem

A maioria dos problemas de contagem se encaixa em uma de 4 possíveis situações associadas à

- **Bolas e urnas**: distribuição de n bolas em M urnas; ou
- **Amostragem**: seleção de n elementos de um conjunto de M elementos

Naturalmente essas técnicas de contagem envolvem os elementos de análise combinatória (permutações, arranjos e combinações).

Além disso, há equivalência em distribuir bolas em urnas e amostrar elementos.

Distribuição de BOLAS em URNAS

Deseja-se calcular o número de maneiras que n bolas podem ser distribuídas em M urnas.

- As BOLAS podem ser distintas ou iguais
- As URNAS podem ter restrição de no máximo 1 bola por urna (com exclusão) ou qualquer quantidade de bolas por urna (sem exclusão)

Os 4 possíveis casos estão especificados na tabela abaixo.

Distribuição de n bolas em M urnas

	Bolas distintas	Bolas iguais
Urna sem exclusão	(I)	(IV)
Urna com exclusão	(II)	(III)

Distribuição de bolas em urnas

Número de maneiras de distribuir n bolas em M urnas

	Bolas distintas	Bolas iguais
Urna sem exclusão (M e $n \in I\!N$)	M^n Est. Maxwell-Boltzmann	$C_{M+n-1,n}$ Est. Bose-Einstein (fótons, píons)
Urna com exclusão ($n \leq M$)	$A_{M,n}$	$C_{M,n}$ Est. Fermi-Dirac (elétrons, prótons, neutrons)

Selecionar n elementos de um conjunto com M

Deseja-se calcular o número de maneiras que n elementos podem ser selecionados/retirados de um conjunto com M elementos.

- A AMOSTRA pode ser ordenada ou sem ordenação
- As RETIRADAS podem ser com ou sem reposição

Os 4 possíveis casos estão especificados na tabela abaixo.

Seleção de n elementos de um conjunto de M elementos

	Amostra ordenada	Amostra sem ordenação
Retiradas com reposição	(I)	(IV)
Retiradas sem reposição	(II)	(III)

Seleção de n elementos

Número de maneiras de selecionar n elementos de um conjunto com M elementos.

	Amostras ordenadas	Amostras sem ordenação
Retiradas com reposição (M e $n \in I\!N$)	M^n	$C_{M+n-1,n}$
Retiradas sem reposição ($n \leq M$)	$A_{M,n}$	$C_{M,n}$

Equivalência entre distribuição de bolas em urnas e seleção de amostras

Para $i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, M$,

$$\text{Bola } i \text{ na urna } k \iff \begin{array}{c} i - \text{ésimo elemento selecionado} \\ \text{é o elemento } k \text{ do conjunto} \end{array}$$

ou seja, bola na urna $k \iff$ elemento k está na amostra

A equivalência segue de

$$\begin{array}{rcl} \text{urna sem exclusão} & \iff & \text{retirada com reposição} \\ \text{urna com exclusão} & \iff & \text{retirada sem reposição} \\ \text{bolas distintas} & \iff & \text{amostra ordenada} \\ \text{bolas iguais} & \iff & \text{amostra sem ordenação} \end{array}$$

Distribuir n bolas em M urnas			
	Bolas distintas	Bolas iguais	
Urna sem exclusão	M^n	$C_{M+n-1,n}$	Retiradas com reposição
Urna com exclusão $(n \leq M)$	$A_{M,n}$	$C_{M,n}$	Retiradas sem reposição $(n \leq M)$
	Amostra ordenada	Amostra sem ordenação	
	Selecionar n elementos dentre M elementos		

Permutação com elementos repetidos

Considere n elementos tais que n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, ..., n_r são do tipo r $(r \geq 2)$, de modo que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Então o número de permutações desses elementos repetidos é

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} \overset{\text{notação}}{=} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

Note (demonstre) que a expressão acima é igual a

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_r}{n_r}$$

Exemplo: número de anagramas da palavra ARARAQUARA

$$\frac{10!}{5!\;3!\;1!\;1!}$$