Sistemas Baseados em Conhecimento
Aula 5

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2017

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Exemplos:

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$

Exemplos:

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$
- $\cancel{(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee r)}$

Transformar em CNF

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

Transformar em CNF

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Transformar em CNF

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Transformar em CNF

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
4. Distribuir $\vee$ e $\wedge$: $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

Por que CNF?

1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.

Por que CNF?

1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.
2. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.

Por que CNF?

1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.
2. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
3. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.

Por que CNF?

1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.
2. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
3. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.
4. Para provar teoremas: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ sse $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ não é SAT

O problema SAT

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

O problema SAT

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

- SAT é NP-completo [Cook 1971]

O problema SAT

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

- SAT é NP-completo [Cook 1971]
- Competição desde 2002:
  `http://www.satcompetition.org/`

NaiveSAT

Entrada: φ, em CNF
Saída: v, se $v(\varphi) = T$; "não", caso contrário

```
Para toda valoração v sobre os átomos de φ faça:
     se v(C) = T então devolva v
Devolva ``não''
```

Resolução

Única regra:

$$\frac{\phi \vee p \qquad \psi \vee \neg p}{\phi \vee \psi}$$

Robinson, J. Alan (1965). "A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle".

Resolução

Única regra:

$$\frac{\phi \vee p \qquad \psi \vee \neg p}{\phi \vee \psi}$$

Robinson, J. Alan (1965). “A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle”.

Completa para *refutação*!

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT).

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT).
5. Senão, devolva F (χ é SAT).

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT).
5. Senão, devolva F (χ é SAT).

Refutação por resolução

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ em CNF.
2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT).
5. Senão, devolva F (χ é SAT).

Exemplo:

- $p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$

Exemplo passo a passo

$$p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$$

Exemplo passo a passo

$$p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$$

1. Transformar $\chi = p \to q \wedge r \to s \wedge \neg((p \vee r) \to (q \vee s))$ em CNF:

Exemplo passo a passo

$$p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$$

1. Transformar $\chi = p \to q \wedge r \to s \wedge \neg((p \vee r) \to (q \vee s))$ em CNF:

$p \to q \wedge r \to s \wedge \neg((p \vee r) \to (q \vee s)) \equiv$

Exemplo passo a passo

$$p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$$

1. Transformar $\chi = p \to q \wedge r \to s \wedge \neg((p \vee r) \to (q \vee s))$ em CNF:

$p \to q \wedge r \to s \wedge \neg((p \vee r) \to (q \vee s)) \equiv$
(eliminando implicações)
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg(\neg(p \vee r) \vee (q \vee s)) \equiv$

Exemplo passo a passo

$$p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$$

1. Transformar $\chi = p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s \wedge \neg((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$ em CNF:

$p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s \wedge \neg((p \vee r) \rightarrow (q \vee s)) \equiv$
(eliminando implicações)
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg(\neg(p \vee r) \vee (q \vee s)) \equiv$
(movendo negações para dentro)
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg\neg(p \vee r) \wedge \neg(q \vee s)) \equiv$
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg\neg(p \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg s) \equiv$

Exemplo passo a passo

$$p \to q, r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$$

1. Transformar $\chi = p \to q \land r \to s \land \neg((p \lor r) \to (q \lor s))$ em CNF:

$p \to q \land r \to s \land \neg((p \lor r) \to (q \lor s)) \equiv$
(eliminando implicações)
$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg(\neg(p \lor r) \lor (q \lor s)) \equiv$
(movendo negações para dentro)
$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg\neg(p \lor r) \land \neg(q \lor s)) \equiv$
$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg\neg(p \lor r) \land (\neg q \land \neg s) \equiv$
(eliminando a dupla negação)
$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor r) \land \neg q \land \neg s$

Exemplo passo a passo

2. $C = \{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$

Exemplo passo a passo

2. $C = \{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$

3. Aplicar resolução:

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg r \vee s$
3. $p \vee r$
4. $\neg q$
5. $\neg s$
6. $\neg p$ (1,4)
7. r (3,6)
8. $\neg r$ (2,5)
9. [] (7,8)

Exemplo passo a passo

4. Como geramos a cláusula vazia, a fórmula χ não é satisfatível.

Exemplo passo a passo

4. Como geramos a cláusula vazia, a fórmula χ não é satisfatível.

Isso quer dizer que o sequente

$$p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$$

é válido.