Probabilidade Condicional

e

Independência

(revisão)

Probabilidade Condicional

Neste curso, consideramos sempre que há o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ subjacente.

Definição

Dado o evento $B \in \mathcal{F}$, com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de um evento A qualquer dado que o evento B ocorreu é definido por:

$$P(A \mid B) \overset{\text{notação}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dizemos, " probabilidade de A, dado B" ou
"probabilidade de A, condicionado a B".

Regra do Produto

Regra do Produto

Para todo A e $B \in \mathcal{F}$ temos que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \mid B) \cdot P(B) \qquad (P(B) > 0) \\ &= P(B \mid A) \cdot P(A) \qquad (P(A) > 0) \end{aligned}$$

Regra do Produto - caso geral

Para $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_m \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

Teoremas

Seja $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ uma **partição** do espaço amostral $\left(\text{isto é, } A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j, \text{ e } \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega\right)$ e seja $B \in \mathcal{F}$

Teorema da Probabilidade Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema de Bayes

Seja B (com $P(B) > 0$), então para k fixado, $k = 1, \dots, m$,

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)} \cdot P(A_k)$$

Independência entre dois eventos

Independência entre dois eventos

Para A e $B \in \mathcal{F}$, dizemos que A e B são eventos (estatisticamente ou estocasticamente) **independentes** se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Proposição

Se A e $B \in \mathcal{F}$ são eventos **independentes** então

(a) A e B^c são independentes;

(b) A^c e B são independentes;

(c) A^c e B^c são independentes.

Independência entre três eventos

Considere os eventos aleatórios A, B e $C \in \mathcal{F}$.

Perguntas

(1) Se A e B são eventos independentes e, se B e C são eventos independentes, então A e C são eventos independentes?

(2) Se A e B são independentes e, se A e C são independentes, então A e $(B \cap C)$ são eventos independentes?

(3) Se A e B são independentes; A e C são independentes e, se B e C são independentes (2 a 2 independentes), então A, B e C são todos independentes entre si?

$\longrightarrow$ NÃO necessariamente! (para as 3 perguntas)

Independência entre três eventos

Independência entre três eventos

Três eventos A, B e $C \in \mathcal{F}$ são (conjuntamente) independentes se

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \quad \text{e} \\
P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \quad \text{e} \\
P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \quad \text{e} \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)
\end{aligned}$$

Independência - caso geral

Independência - caso geral

Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ são (conjuntamente) **independentes** se para todo $k, \; k = 2, 3, \ldots, m$

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

para todo $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq m$.

Independência Condicional

Independência Condicional

Para A, B e $C \in \mathcal{F}$ dizemos que A e C são **condicionalmente independentes** dado B se

$$P(A \cap C \mid B) = P(A \mid B) \cdot P(C \mid B) \quad \text{para} \quad P(B) > 0$$

e

$$P(A \cap C \mid B) = P(A \cap C) \quad \text{para} \quad P(B) = 0$$