Teoria das Probabilidades

Sequências infinitas de eventos

Limites de sequência de eventos

Sequências infinitas de eventos e convergência

Tanto em probabilidade como em processos estocásticos, tem-se interesse em estudar o comportamento assintótico de sequências, principalmente quando a sequência é indexada pelo **tempo**.

Portanto, faz-se necessário estabelecer sequências infinitas de **eventos**; e naturalmente saber se essa sequência "converge".

Similarmente à convergência de <u>números reais</u>, ao tratar de convergência de <u>eventos</u> precisamos estudar em que situações há a convergência (quando o limite existe) e, caso o limite exista, qual/como é esse limite; e também qual é a probabilidade desse evento limite.

A seguir, faremos uma revisão de limites de sequências de números reais, que serve de base para limites de sequências de eventos.

Sequências infinitas de números reais - Revisão

Seja $\{x_n,\ n \geq 1\}$ uma sequência de **número reais.**

Qual é a condição simples para a existência de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

$\longrightarrow$ sequências monótonas

Para uma sequência de números reais **qualquer**, considere

$$a_m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n\geq m} x_n \quad \text{e} \quad b_m \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\geq m} x_n \quad \text{para } m = 1, 2 \ldots$$

então $\{a_m\}$ e $\{b_m\}$ são sequências monótonas pois para todo k, $a_k \leq a_{k+1}$ e $b_k \geq b_{k+1}$, e portanto convergem

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geq m} x_n = \liminf x_n$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} x_n = \limsup x_n$$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, quando vale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$?

Sequências infinitas de eventos aleatórios

Conceitos de monotonicidade e limites para sequências de **conjuntos**

Definição

Seja $\{A_n,\, n \geq 1\} \in \mathcal{F}$ uma sequência infinita de eventos aleatórios.

(a) A sequência $\{A_n\}$ é dita ser crescente (ou não-decrescente) se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$
E definimos um novo evento A como sendo o limite, isto é,

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \therefore \quad A \in \mathcal{F}$$

(b) A sequência $\{A_n\}$ é dita ser decrescente (ou não-crescente) se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$
E definimos um novo evento A como sendo o limite, isto é,

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \therefore \quad A \in \mathcal{F}$$

Propriedade de continuidade da função probabilidade

(8) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{A_n,\ n \geq 1\} \in \mathcal{F}$ uma sequência <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) de eventos aleatórios, então

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

Demonstração omitida

<u>*Observação:*</u>
Alguns livros consideram uma variação dos axiomas, substituindo a $\sigma-$aditividade pela **aditividade**, isto é,
Axioma 3′: Para qualquer dois eventos disjuntos A e B de $\mathcal{F}$ temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Para haver a equivalência com os axiomas enunciados necessita-se de um quarto axioma (continuidade da função P), que é justamente a propriedade acima.

Lim sup e Lim inf de eventos aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{A_n,\ n \geq 1\} \in \mathcal{F}$ uma sequência qualquer de eventos aleatórios, então podemos definir

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad C_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Claramente $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ para todo $n \geq 1$, e além disso $\{C_n\} \uparrow$ e $\{B_n\} \downarrow$ são sequências monótonas de $\mathcal{F}$.
Portanto tem limites

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} A_n$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} A_n$$

Naturalmente, $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$

Proposição

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{A_n,\ n \geq 1\} \in \mathcal{F}$ uma sequência (qualquer) de eventos aleatórios, então

(a) $P\left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n) \overset{\text{ok}}{\leq} \limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right)$

(b) Se existe $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, então $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

Demonstração omitida (veja o último exercício do Conjunto de Exercícios 1)

<u>Nomenclatura</u> (Explicação na lousa)

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{A_n \ \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}\} \\
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{A_n \ \text{ infinitas vezes}\}
\end{aligned}
$$