Projeto 3 - Distribuição Ótima de Edifícios - SME0510

21 de novembro de 2024

Situação problema

O arquiteto de uma cidade deseja criar um plano diretor que maximize o desenvolvimento econômico mantendo a qualidade de vida dos moradores. Ele tem a tarefa de distribuir três tipos de edifícios (Casas, Parques e Fábricas) em uma série de locais predefinidos (representados como vértices de um grafo) que descrevem a estrutura da cidade. As conexões entre esses locais, representadas pelas arestas do grafo, indicam as ruas onde é possível estabelecer interações entre esses edifícios, impactando o lucro e a felicidade dos habitantes.

O **objetivo principal** é posicionar os edifícios de modo a *maximizar* o lucro total da cidade e o **objetivo secundário** é o de *maximizar* a felicidade. Ao mesmo tempo, o plano diretor precisa garantir uma **felicidade não negativa** para a população, promovida pela presença de Parques e limitada pela proximidade de Fábricas. **O vértice número 1 da cidade sempre será reservado para a casa do prefeito**, de modo que só é possível escolher os edifícios para os demais vértices.

Para alcançar esse equilíbrio entre lucro e felicidade, o modelo matemático proposto considera as seguintes diretrizes:

- Cada vértice deve ser associado a uma *única* estrutura, que pode ser uma Casa, um Parque ou uma Fábrica.
- Parques aumentam a felicidade em $+1$ por parque, mas não geram lucro.
- Fábricas reduzem a felicidade da cidade em -1 devido aos impactos ambientais e de ruído e não geram lucro por si só.
- Conexões (arestas) entre uma Casa e uma Fábrica geram $+1$ de lucro, por conexão.
- Conexões entre uma Casa e um Parque proporcionam um bônus de $+1$ de felicidade, por conexão.
- Conexões entre uma Fábrica e um Parque proporcionam um ônus de -1 de felicidade, por conexão, devido ao impacto negativo das fábricas no ambiente do parque.
- Todas as configurações devem respeitar o layout da cidade, representado no grafo, onde as conexões só são válidas para vértices adjacentes.

Em suma:

Estruturas	**Lucro**	**Felicidade**	**População**	**Custo**
Vértice Casa	0	0	$+1$	25600
Vértice Parque	0	$+1$	0	12800
Vértice Fábrica	0	-1	0	19200
Aresta Casa-Parque	0	$+1$	0	0
Aresta Casa-Fábrica	$+1$	0	0	0
Aresta Parque-Fábrica	0	-1	0	0

Tabela 1: Impactos das variáveis de decisão nas métricas de lucro, felicidade, população e custo

Exemplo

Suponha uma pequena cidade representada por um grafo com 6 vértices e o layout descrito na Figura 1. O grafo tem as seguintes conexões de adjacência, representadas pela matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada entrada $A_{ij} = 1$ indica uma conexão entre os vértices i e j, e $A_{ij} = 0$ indica ausência de conexão. A Figura 1 exibe o layout inicial da cidade com essas conexões.

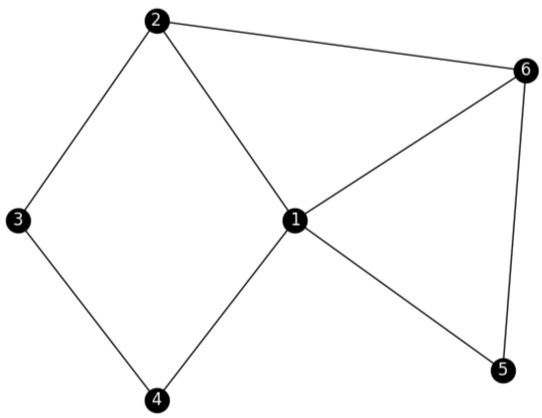

Figura 1: Layout inicial da cidade, representando as conexões entre os vértices.

Agora, considere uma solução qualquer proposta pelo arquiteto, ilustrada na Figura 2. Nesta configuração, temos:

- O vértice 1 contém uma Casa.
- O vértice 2 contém um Parque.
- O vértice 3 contém uma Fábrica.
- O vértice 4 contém outra Fábrica.
- O vértice 5 contém uma Casa.
- O vértice 6 contém um Parque.

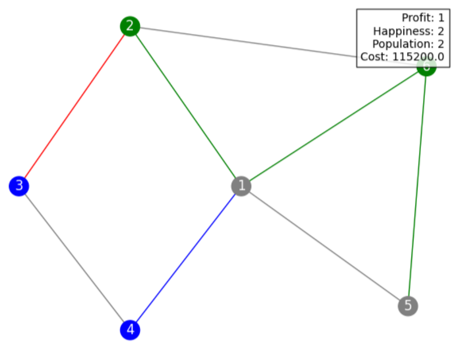

Figura 2: Configuração inicial da cidade com distribuição não ótima dos edifícios.

Para essa configuração, as métricas de **lucro** e **felicidade** são calculadas considerando as interações entre os vértices de acordo com as regras estabelecidas:

- A conexão 1-4 (Casa-Fábrica) é a única que contribui para o lucro com um valor de +1.
- Os vértices 2 e 6, contendo um Parque cada um, contribuem com um total de +2 para a felicidade.
- Os vértices 3 e 4, contendo Fábricas, reduzem a felicidade em -2.
- As conexões Casa-Parque (indicadas em verde) dadas por 1-2, 1-6 e 5-6 aumentam a felicidade em +3.
- A conexão Parque-Fábrica (indicada em vermelho na figura) entre os vértices 2-3 diminui a felicidade em -1.
- O vértice 1 sempre será uma Casa.

Essa configuração inicial, portanto, resulta em um layout com um lucro total de 1 e uma felicidade total de 2, mas não representa a configuração ótima. A solução ótima, que maximiza o lucro primeiro e depois a felicidade enquanto mantém uma felicidade não negativa, está ilustrada na Figura 3.

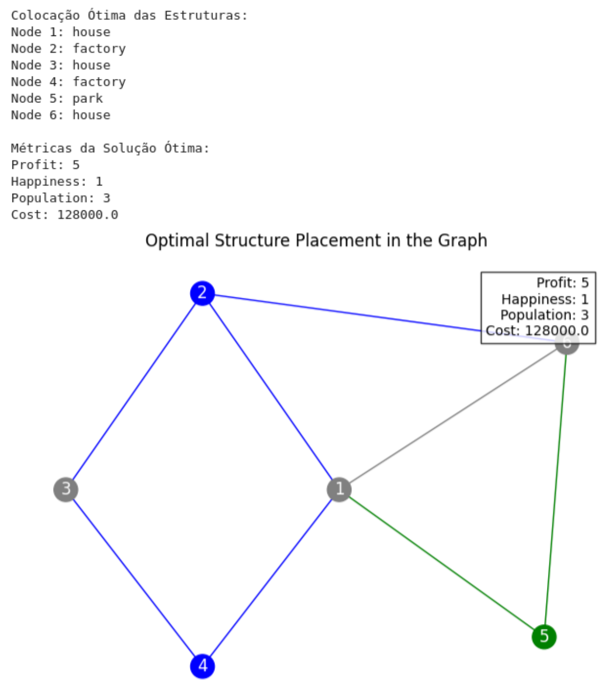

Figura 3: Solução ótima da cidade, maximizando o lucro e felicidade mantendo a felicidade não negativa.

Na solução ótima, temos uma distribuição que alcança o lucro e a felicidade máximos possíveis (nesta ordem) para essa configuração.

Modelo Matemático

Função Objetivo e Restrições

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & (2N^2+1)\cdot \mathbf{L}(\mathbf{z}) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{z}) && && (1)\\
\text{Sujeito a} \quad & x_i^C + x_i^P + x_i^F && = 1, \quad \forall i = 1,\dots,N && (2)\\
& x_i^C + x_j^F - 1 && \leq z_{ij}^{CF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (3)\\
& x_i^C && \geq z_{ij}^{CF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (4)\\
& x_j^F && \geq z_{ij}^{CF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (5)\\
& x_i^C + x_j^P - 1 && \leq z_{ij}^{CP}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (6)\\
& x_i^C && \geq z_{ij}^{CP}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (7)\\
& x_j^P && \geq z_{ij}^{CP}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (8)\\
& x_i^P + x_j^F - 1 && \leq z_{ij}^{PF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (9)\\
& x_i^P && \geq z_{ij}^{PF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (10)\\
& x_j^F && \geq z_{ij}^{PF}, \quad \forall i,j = 1,\dots,N && (11)\\
& \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{z}) && \geq 0, && (12)\\
& x_1^C && = 1, && (13)\\
& x_i^C, x_i^P, x_i^F, z_{ij}^{CP}, z_{ij}^{CF}, z_{ij}^{PF} \in \{0,1\}, && \quad \forall i,j = 1,\dots,N, && (14)
\end{aligned}
$$

onde:

$$\mathbf{L}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij}^{CF} A_{ij} \tag{15}$$

é o lucro total, calculado a partir das conexões z_{ij}^{CF}, e

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^P - x_i^F + \sum_{j=1}^{N}(z_{ij}^{CP} - z_{ij}^{PF})A_{ij}\right) \tag{16}$$

é a felicidade total, considerando as estruturas x_i^P, x_i^F e as conexões z_{ij}^{CP}, z_{ij}^{PF}. A constante A_{ij} representa a adjacência dos nós i, j ($A_{ij} = 1$ se há aresta entre i e j, caso contrário $A_{ij} = 0$).

Os vetores de variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ contêm as seguintes variáveis binárias:

$$\mathbf{x} = (x_1^C,\dots,x_N^C, x_1^P,\dots,x_N^P, x_1^F,\dots,x_N^F) \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = (z_{11}^{CP},\dots,z_{NN}^{CP}, z_{11}^{CF},\dots,z_{NN}^{CF}, z_{11}^{PF},\dots,z_{NN}^{PF}),$$

onde cada $x_i^k \in \{0,1\}$ indica a presença de uma estrutura específica (Casa, Parque ou Fábrica) no vértice i, e cada $z_{ij}^{kl} \in \{0,1\}$ indica a presença de uma conexão específica entre vértices i e j, conforme as definições abaixo:

Definição das Variáveis de Decisão

- $x_i^C = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui uma casa (C)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $x_i^P = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui um parque (P)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $x_i^F = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui uma fábrica (F)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $z_{ij}^{CP} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ conecta uma casa a um parque} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $z_{ij}^{CF} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ conecta uma casa a uma fábrica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $z_{ij}^{PF} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ conecta um parque a uma fábrica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Explicação do modelo

- (1): É a função objetivo que consiste na soma ponderada do lucro $\mathbf{L}(\mathbf{z})$ e da felicidade $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. O termo $2N^2 + 1$ é um peso que escala com o valor de N (número de nós do grafo) e garante que o lucro seja priorizado sobre a felicidade.

- (2): Garante que cada vértice tenha uma única estrutura: Ou uma casa, ou um parque ou uma fábrica).

- (3), (4), (5): Restrições de linearização que garantem que a variável z_{ij}^{CF} seja ativada apenas se houver uma casa no vértice i e uma fábrica no vértice j, isto é, $z_{ij}^{CF} = 1 \iff x_i^C = x_j^F = 1$.

- (6), (7), (8): Restrições de linearização que garantem que a variável z_{ij}^{CP} seja ativada apenas se houver uma casa no vértice i e um parque no vértice j, isto é, $z_{ij}^{CP} = 1 \iff x_i^C = x_j^P = 1$.

- (9), (10), (11): Restrições de linearização que garantem que a variável z_{ij}^{PF} seja ativada apenas se houver um parque no vértice i e uma fábrica no vértice j, isto é, $z_{ij}^{PF} = 1 \iff x_i^P = x_j^F = 1$.

- (12): Impõe uma felicidade não negativa para a configuração da cidade.

- (14): Impõe que todas as variáveis de decisão $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ sejam binárias.

- (13): Impõe que o vértice 1 seja a casa do prefeito.

Descrição do Projeto

O objetivo deste projeto é aplicar conceitos de Programação Linear e Otimização para modelar e resolver um problema de distribuição de edifícios em uma cidade. Os alunos, em grupos de **no máximo 5 integrantes**, deverão encontrar uma distribuição ótima de 3 tipos de edifícios (Casa, Parque e Fábrica) nos N vértices distintos da cidade de modo a maximizar o lucro total, porém de forma que a felicidade da cidade não seja negativa. Cada grupo escolherá **uma instância do problema**, que será disponibilizada no E-disciplinas em um documento anexo nesta atividade. Cada instância corresponde a um grafo específico que descreve o layout da cidade. Baseado nesse layout, vocês irão resolvê-la com auxílio de bibliotecas de resolução, solvers, etc. e exibirão o resultado graficamente. Cada instância possui a informação da matriz de adjacência associada e a lista de posições de cada nó no grafo (para quem plotar o grafo utilizando a biblioteca `NetworkX` no python). Para isso, sigam as diretrizes abaixo:

1. **Formação de Grupos:**
   - Cada grupo deve ter no máximo 5 integrantes.
2. **Resolução do Problema:**
   - Utilizem um solver de programação linear (como `PuLP`, `SciPy`, etc.) para encontrar a solução ótima do problema combinatório a partir da modelagem apresentada.
   - O modelo deve maximizar o lucro em primeiro lugar e, *apenas depois disso*, maximizar a felicidade. Isso significa que, para três soluções possíveis, A, B e C, com respectivos lucros $\mathbf{L}_A = 5$, $\mathbf{L}_B = 3$ e $\mathbf{L}_C = 3$, e felicidades $\mathbf{F}_A = 3$, $\mathbf{F}_B = 15$ e $\mathbf{F}_C = 12$, a solução A é considerada superior a solução B devido ao maior lucro ($\mathbf{L}_A > \mathbf{L}_B$). A solução B, por sua vez, é preferível à solução C pois, apesar de ambas terem o mesmo lucro ($\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_C$), a solução B apresenta uma felicidade maior ($\mathbf{F}_B > \mathbf{F}_C$). Além disso, a felicidade *não* pode ser negativa.
3. **Visualização da Solução:**
   - Cada grupo deverá plotar graficamente o layout ótimo da cidade, com os vértices e arestas coloridos de acordo com cada estrutura similar à Figura 3.
   - O plot da solução deve mostrar as informações de lucro e felicidade na tela. A população e custo da cidade (presentes na Tabela 1) podem constar, mas não são necessários.
   - A solução deve ser um dicionário python cujas chaves são os índices dos nós do grafo e cujos valores são as estruturas presentes em cada nó respectivo.
   - Vocês podem utilizar bibliotecas como `Matplotlib`, `networkx`, ou outras que possam ajudar na visualização gráfica.
4. **Entrega:**
   - O grupo deve entregar uma pasta compactada em formato .zip contendo:
     - O arquivo da instância que está disponibilizado no E-disciplinas, que contém a matriz de adjacência associada e as posições dos nós.
     - Um arquivo de saída contendo a solução ótima no formato também disponibilizado no E-disciplinas.
     - A implementação do algoritmo utilizado para a resolução da instância **com todas as dependências presentes**.
     - A imagem do *plot* do grafo ótimo com as informações de Lucro e Felicidade total do layout. Vocês podem contabilizar a população e o custo também como nas Figuras 2 e 3, mas isso **não** é obrigatório.
     - A entrega do projeto será até dia **17 de dezembro de 2024** via plataforma E-disciplinas.