Faculdade de Tecnologia de São Bernardo do Campo Adib Moises Dib

# Matemática Discreta

*Profa Me Jediane Teixeira de Souza*

***2019***

# Sumário

# Teoria dos Conjuntos

## Conjuntos e elementos

Um *conjunto* pode ser considerado como uma coleção de objetos, *elementos* ou *membros* do conjunto. Exemplos de conjuntos:

1) Conjunto das vogais:
2) Conjunto dos planetas do sistema solar:
3) Conjunto dos números primos positivos:

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado *elemento*. Assim, nos exemplos anteriores, temos os elementos:

1) a, e, i, o, u
2) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, ...
3) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc. É importante notar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo, o conjunto das seleções que disputam um campeonato mundial de futebol é um conjunto formado por equipes que, por sua vez, são conjuntos de jogadores.

Normalmente, usamos letras maiúsculas, *A*, *B*, *C*, *D*,..., para denotar conjuntos, e letras minúsculas, *a*, *b*, *c*, *d*, ..., para denotar elementos dos conjuntos. A afirmação "$p$ é um elemento de *A*" ou, equivalente, "*p* pertence a *A*", é escrita

$$p \in A$$

A afirmação de que *p* não é elemento de *A*, isto é, *p* não pertence a *A*, é escrita

$$p \notin A$$

## Descrição de Conjuntos

Existem essencialmente duas maneiras de especificar um conjunto particular. Uma opção, quando possível, consiste em listar seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

denota o conjunto *A* cujos elementos são as letras a, e, i, o, u. observe que os elementos são separados por vírgulas ou ponto e vírgula e se encontram dentro de chaves { }.

A segunda maneira consiste em enunciar as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto, chamamos de *Descrição por uma propriedade*. Por exemplo:

$$B = \{x \mid x \text{ é um inteiro par e } x > 0\}$$

que deve ser lido como "*B* é o conjunto dos *x* tal que *x* é um inteiro para e *x* é maior do que 0", significa que os elementos do conjunto *B* são inteiros positivos.

**Exemplos:**

1º. O conjunto A definido anteriormente também pode ser escrito como:

$$A = \{x \mid x \text{ é uma letra do alfabeto e } x \text{ é uma vogal}\}$$

2º. Não seria possível listar todos os elementos do conjunto B acima, embora frequentemente se possa especificar o conjunto escrevendo

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

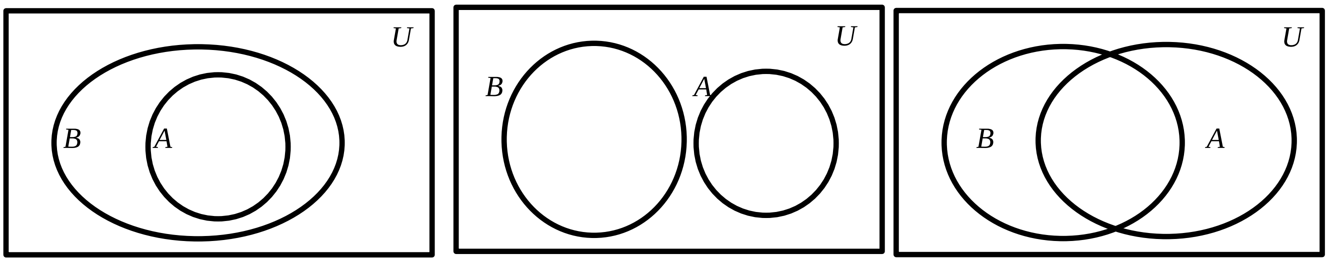
**Princípio da extensão:** Dois conjuntos, $A$ e $B$, são iguais, se e somente se, possuem os mesmos elementos. Como de hábito, escrevemos $A = B$ se os conjuntos $A$ e $B$ são iguais, e escrevemos $A \neq B$ se os conjuntos não são iguais. Por exemplo:

Seja $C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $D = \{2, 1\}$ e $E = \{1, 2, 2, 1, \frac{6}{3}\}$. Então $C = D = E$. Observe que um conjunto não depende da maneira como seus elementos são representados. Um conjunto não se altera se os elementos são repetidos ou reordenados.

## *Diagrama de Venn*

Um diagrama de Venn é uma representação pictórica na qual os conjuntos são representados por áreas delimitadas por curvas no plano.

O conjunto universo U é representado pelo interior de um retângulo, e os outros conjuntos, por discos contidos dentro desse retângulo.




$A \subset B$ $A \neq B$ $A$ e $B$ possuem elementos em comum

## *Alguns Conjuntos Importantes*

- **Conjunto Universo**

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, os elementos de todos conjuntos considerados pertencem a algum conjunto maior, conhecido como *conjunto universo*. Por exemplo, em geometria plana, o conjunto universo compõe-se de todos os pontos de um plano e, em estudos de populações humanas, o conjunto universo compõe-se de todas as pessoas do mundo. Vamos usar o símbolo $U$ para denotar o conjunto universo.

- **Conjunto Vazio**

O Conjunto Vazio é um conjunto que não possui elementos e pode ser denotado por $\varnothing$ ou { }.

**Exemplos:**

a) O conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos.

b) O conjunto de todos os números que são simultaneamente pares e ímpares.

- **Conjunto Unitário**

Um conjunto constituído por um único elemento. Existem infinitos conjuntos unitários. Um conjunto unitário é usualmente denotado por 1.

**Exemplo:**

O conjunto constituído pelo jogador Pelé.

- **Conjuntos finitos e infinitos**

Um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos.

A) *Conjunto finito* pode ser denotado por extensão, ou seja, listando exaustivamente todos os seus elementos;

B) *Conjunto infinito*, é impossível listar todos os seus elementos.

**Exemplos:**

1º. Os seguintes conjuntos são finitos:
- $\varnothing$
- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$

2º. Os seguintes conjuntos são infinitos:
- $\mathbb{R}$
- $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

**<u>Exercícios:</u>**

1. Dê os elementos dos seguintes conjuntos:
   a. A = {x | x é letra da palavra "matematica"}
   b. B = {x | x é cor da bandeira brasileira}
   c. C = {x | x é nome de estado brasileiro que inicia com "a"}

2. Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:
   a. A = {0, 2, 4, 6, 8, ...}
   b. B= {0, 1, 2, ...,9}
   c. C= {Brasília, Rio de Janeiro, Salvador}

3. Escreva com símbolos, ou seja, por extensão:
   a. O conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre $-10$ e $+10$;
   b. O conjunto dos divisores inteiros de 42;
   c. O conjunto dos múltiplos inteiros de 0;

d. O conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3;
e. O conjunto dos nomes das capitais da região Sudeste do Brasil.

4. Descreva por meio de uma propriedade dos elementos:
   a. $A = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\}$
   b. $B = \{0, 10, 20, 30, 40, ...\}$
   c. $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
   d. $D = \{Lua\}$

5. Quais dos conjuntos abaixo são unitários?
   a. $A = \{x \mid x < \frac{9}{4}\ e\ x > \frac{6}{5}\}$
   b. $B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$
   c. $C = \{x \mid x \text{ é } inteiro\ e\ \ x^2 = 3\}$
   d. $D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$

6. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?
   a. $A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$
   b. $B = \{x \mid x > \frac{9}{4}\ e\ x < \frac{6}{5}\}$
   c. $C = \{x \mid x \text{ é } divisor\ de\ zero\}$
   d. $D = \{x \mid x \text{ é } divisível\ por\ zero\}$

# ***Subconjuntos***

Se todo elemento de um conjunto *A* é também um elemento de um conjunto *B*, diz-se que *A* é um subconjunto de *B*. Também dizemos que *A* está contido em *B* ou que *B* contém *A*. Essas relações são escritas como segue:

- *A* está contido em *B*: $\boldsymbol{A \subset B}$
- *B* contém *A*: $\boldsymbol{B \supset A}$

Se *A* não é elemento de *B*, isto é, se pelo menos um elemento de *A* não pertence a *B*, escrevemos $\boldsymbol{A \not\subset B}$ ou $\boldsymbol{B \not\supset A}$.

**Exemplos:**

1. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 5\}$ e $D = \{5, 1\}$. Então:
   a. $C \subset A$ e $C \subset B$, já que 1 e 5, os elementos de C, são também elementos de A e B.
   b. $B \not\subset A$, uma vez que seus elementos, 2 e 7, não pertencem a A.

c. Também podemos dizer que, $C \subset D$ e $D \subset C$, ou seja, $C = D$. Portanto, todo conjunto é subconjunto de si mesmo.
d. $A \supset C$ e $B \supset C$. Também, $A \not\supset B$.

**Propriedade:** O conjunto vazio, $\emptyset$, também é subconjunto de qualquer conjunto.

### *Conjunto das partes*

Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A – notação $\wp(A)$ – aquele que é formada por todos os subconjuntos de A. Em símbolos:

$$\wp(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

**Exemplo:**

Se $A = \{a, b\}$, os elementos de $\wp(A)$ são:

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

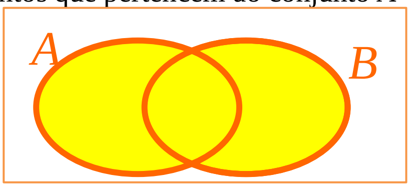
---

# ***Operações entre conjuntos***

### *União de conjuntos*

**Definição**: A união dos conjuntos *A* e *B* é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto *A* ou ao conjunto *B*.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$



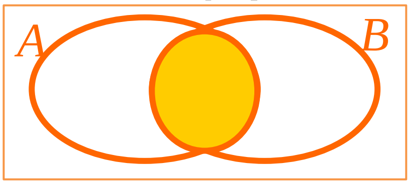

Como exemplo, observe que dados $A = \{a, e, i, o, 3, 5\}$ e $B = \{a, 3, 4\}$, temos:

$$A \cup B = \{a, e, i, o, 3, 4, 5\}$$

### *Intersecção de conjuntos*

**Definição**: A intersecção dos conjuntos *A* e *B* é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto *A* e ao conjunto *B*.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$$



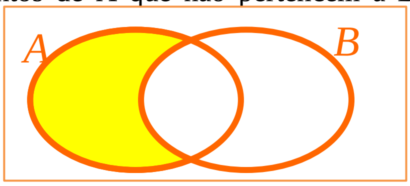

Como exemplo, observe que dados $A = \{a, e, i, o, 3, 5\}$ e $B = \{a, 3, 4\}$, temos:

$$A \cap B = \{a, 3\}$$

## *Diferença*

**Definição**: O conjunto diferença de A e B é formado por elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \; e \; x \notin B\}$$




Exemplo: Dados os conjuntos A = {-4, -3, -2, -1, 0} e B = {-2, -1, 0, 1}, temos:

$$A - B = \{-4, -3\} \text{ e } B - A = \{1\}$$

**Exercícios:**

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$, pede-se para escrever simbolicamente as sentenças a seguir, classificando-as em V ou F.
   a. 2 é elemento de A
   b. 4 pertence a B
   c. B é parte de A
   d. 1 não é elemento de B
   e. A é igual a B

2. Para A = {1}, B = {1, 2} e C = {{1}, 1}, marque as afirmações corretas
   a) $A \subset B$
   b) $A \in B$
   c) $A = B$
   d) $A \subset C$
   e) $A \in C$
   f) $A = C$
   g) $1 \in A$
   h) $1 \in C$
   i) $\{1\} \in A$
   j) $\{1\} \in C$
   k) $\varnothing \notin C$
   l) $\varnothing \subset C$

3. Sendo A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {1, 3 ,4} e D = {1, 2, 3, 4}, classificar em V ou F cada sentença abaixo :
   a. $A \subset D$
   b. $A \subset B$
   c. $B \subset C$
   d. $D \supset B$
   e. $C = D$
   f. $A \not\subset C$

4. Quais das igualdades são verdadeiras
   a. $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$
   b. $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \; e \; x^3 - 4x = 0\}$
   c. $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$
   d. $\{x \mid x < 0 \; e \; x \geq 0\} = \emptyset$

5. Dizer se é verdadeiro (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:
    a. $0 \in \{0,1,2,3,4\}$
    b. $a \in \{a,\{a\}\}$
    c. $\{a\} \in \{a,b\}$
    d. $\{a\} \subset \{a,\{a\}\}$
    e. $\emptyset \in \{0\}$
    f. $\emptyset \subset \{\emptyset,\{a\}\}$
    g. $0 \in \emptyset$
    h. $\emptyset \in \{\emptyset,\{a\}\}$
    i. $\{a\} \subset \emptyset$
    j. $\{a,b\} \in \{a,b,c,d\}$

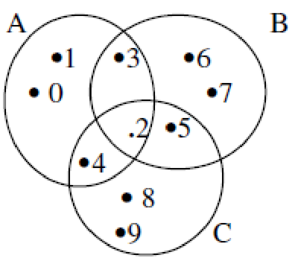
6. Dados os conjuntos A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determinar os seguintes conjuntos:
    a. $A \cup B =$
    b. $A \cup C =$
    c. $C \cup B =$
    d. $A \cap B =$
    e. $A \cap C =$
    f. $A - B =$
    g. $A - C =$

7. Sendo A = { 3, 4, 5, 6, 7} e B = {5, 6, 7, 8, 9 ...}, determine:
    a. $A \cup B =$
    b. $A \cap B =$
    c. $A - B =$
    d. $B - A =$

8. Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$ e $C = \{-1,-2,1,3,5,7,9\}$. Determine:
    a. $A \cup B =$
    b. $A \cap B =$
    c. $C \cap B =$
    d. $A \cap C =$

9. Ainda sobre o exercício anterior, represente o que se pede no diagrama de Venn:
    a. $A \cup B =$
    b. $A \cap B =$
    c. $C \cap B =$
    d. $A \cap C =$

10. Observe o diagrama e responda:




Quais os elementos dos conjuntos abaixo:

a) A =

b) B =

c) C =

d) $A \cap B =$

e) $B \cap C =$

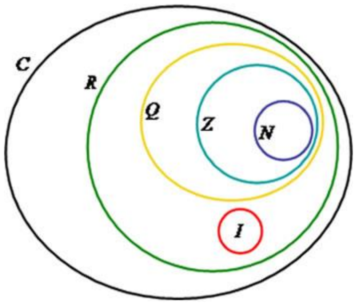
f) $A \cap B \cap C =$

# Conjunto Numéricos

A história nos mostra que desde muito tempo o homem sempre teve a preocupação em contar objetos e ter registros numéricos. Seja através de pedras, ossos, desenhos, dos dedos ou outra forma qualquer, em que procurava abstrair a natureza por meio de processos de determinação de quantidades.

E essa procura pela abstração da natureza foi fundamental para a evolução, não só, mas também, dos conjuntos numéricos. E é sobre eles que passamos a dissertar.

- $\mathbb{N}$, que representa o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$, que representa o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{I}$, que representa o conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R}$, que representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$, que representa o conjunto dos números complexos.




## *Conjunto dos Números Naturais*

Como decorrência da necessidade de contar objetos surgiram os números naturais que é simbolizado pela letra $\mathbb{N}$ e é formado pelos números 0, 1, 2, 3, …, ou seja:

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

Um subconjunto de $\mathbb{N}$ muito usado é o conjunto dos números naturais menos o zero, ou seja $\mathbb{N} - \{0\} =$ conjuntos dos números naturais positivos, que é representado por $\mathbb{N}^*$.

No conjunto dos números naturais são definidas duas operações fundamentais a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

| | |
|---|---|
| ***[A1] associativa da adição*** | $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$ |
| ***[A.2] comutativa da adição*** | $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$ |
| ***[A.3] elemento neutro da adição*** | $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$ |
| ***[M.1] associativa da multiplicação*** | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$ |
| ***[M.2] comutativa da multiplicação*** | $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$ |
| ***[M.3] elemento neutro da multiplicação*** | $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$ |
| ***[D] distributiva da multiplicação relativamente à adição*** | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$ |

Assim , dado um número natural $a \neq 0$, o simétrico de $a$ não existe em $\mathbb{N}$: $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que o símbolo $a - b$ não tem significado em $\mathbb{N}$. para todos $a, b \in \mathbb{N}$, isto é, em $\mathbb{N}$ a subtração não é uma operação; cria-se assim a necessidade de outro conjunto.

## *Conjunto dos Números Inteiros*

Chama-se o conjunto dos números inteiros, representado pela letra $\mathbb{Z}$, o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ distinguimos alguns subconjuntos notáveis que possuem notação própria para representá-los:

- Conjunto dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$;
- Conjunto dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\dots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}$;
- Conjunto dos inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$;
- Conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_+^* = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$;
- Conjunto dos inteiros negativos $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots;\ -3;\ -2;\ -1\}$.

Note que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ e, por essa razão, $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

*Observações:*

No conjunto $\mathbb{Z}$, além das operações e suas propriedades mencionadas para $\mathbb{N}$, vale a propriedade:

| | |
|---|---|
| ***[A4] simétrico ou oposto para a adição*** | $a + (-a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ |

Devido a este fato podemos definir a operação de subtração em Z:

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)} \textbf{ para todo } \boldsymbol{a} \textbf{ e } \boldsymbol{b} \textbf{ pertencente a } \mathbb{Z}\textbf{;}$$

Note que a noção de inverso não existe em $\mathbb{Z}$. Em outras palavras, dado $q \in \mathbb{Z}$, diferente de $1$ e de $-1$, $\frac{1}{q}$ não existe em $\mathbb{Z}$. Por esta razão não podemos definir divisão no conjunto dos números inteiros.

Outro conceito importante que podemos extrair do conjunto $\mathbb{Z}$ é o de divisor. Isto é, o inteiro $a$ é divisor do inteiro $b$ – simbolizado por $a \mid b$ – se existe um inteiro $c$ tal que $b = c \cdot a$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists\, c \in \mathbb{Z} \mid c \cdot a = b)$$

**Exemplos:**

1) $2 \mid 12$ $\quad pois \quad$ $6 \cdot 2 = 12$
2) $3 \mid -18$ $\quad pois \quad$ $(-6) \cdot 3 = -18$
3) $-5 \mid 20$ $\quad pois \quad$ $(-4) \cdot (-5) = 20$
4) $-2 \mid -14$ $\quad pois \quad$ $7 \cdot (-2) = -14$
5) $4 \mid 0$ $\quad pois \quad$ $0 \cdot 4 = 0$
6) $0 \mid 0$ $\quad pois \quad$ $1 \cdot 0 = 0$

Quando $a$ é divisor de $b$ dizemos que "$b$ é $divisível\ por\ a$" ou "$b$ é $múltiplo\ de\ a$".

Para um inteiro $a$ qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

**Exemplos:**

$D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$ $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$

$D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$ $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$

$D(0) = Z$ $M(0) = 0$

Dizemos que um número inteiro $p$ é primo quando $p > 0$ e $D(p) = \{1, p\}$. Exemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, ...

Em $\mathbb{Z}$ podemos introduzir o conceito de módulo ou valor absoluto:

$|x| = x$ e $|-x| = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Como decorrência da definição temos que $|x| \geq 0$ para qualquer número inteiro.

**<u>Exercícios:</u>**

1. Quais das sentenças são verdadeiras?
   a. $0 \in \mathbb{N}$
   b. $(2-3) \in \mathbb{N}$
   c. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
   d. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$
   e. $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$
   f. $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$
   g. $(-4) \cdot (-5) \in \mathbb{Z}_+$
   h. $0 \in \mathbb{Z}_-$
   i. $(5-11) \in \mathbb{Z}$

2. Descreva os seguintes conjuntos:
   a. $D(6) =$
   b. $D(-18) =$
   c. $D(-24) \cap D(16) =$
   d. $M(4) =$
   e. $M(10) =$
   f. $M(-9) \cap M(6) =$

3. Quais dos seguintes elementos de $\mathbb{Z}$ não são primos: 12, 13, 0, 31, 1, 2, 4, 49, 53, 109 e 51.

4. Determine os seguintes números inteiros:
   a. $mdc\ (2,3) =$
   b. $mdc\ (-4,6) =$
   c. $mdc\ (-6,-14) =$
   d. $mmc\ (2,3) =$
   e. $mmc\ (-4,6) =$
   f. $mmc\ (-6,-14) =$

5. Determine os resultados a seguir:
    a. $550 + 620 - 999 =$
    b. $-45 + 85 - 101 + 250 =$
    c. $(-500) + (-600) + (-700) =$
    d. $(-200) + (+500) + (-450) + (+300) =$
    e. $(-999) + (+1.000) + (-1.001) + (1.002) =$
    f. $-1 + 2 - 4 - 6 - 3 - 8 =$
    g. $6 - 8 - 3 - 7 - 5 - 1 + 0 - 2 =$
    h. $2 - 10 - 6 + 14 - 1 + 20 =$
    i. $-13 - 1 - 2 - 8 + 4 - 6 - 10 =$
    j. $10 - 6 + 3 - 3 - 10 - 1 =$

6. Calcule o valor das expressões:
    a. $-17 + 5 . (-2) =$
    b. $(-9) \cdot 4 + 14 =$
    c. $(-7) \cdot (-5) - (-2) =$
    d. $(+4) \cdot (-7) + (-5) \cdot (-3) =$
    e. $(+3) \cdot (-5) - (+4) \cdot (-6) =$
    f. $40 \div (-2) + 9 =$
    g. $+2 + (-54) \div (-9) =$
    h. $(-1) \cdot (-8) + 20 =$
    i. $4 + 6 \cdot (-2) =$
    j. $-25 + (+3) \cdot (-2) =$

# ***Conjunto dos Números Racionais***

O conjunto dos números racionais, simbolizado pela letra $\mathbb{Q}$, é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de uma fração $\frac{p}{q}$, com $\boldsymbol{p}\ e\ \boldsymbol{q}$ inteiros quaisquer e $\boldsymbol{q}$ diferente de zero:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \mid \boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Como todo número inteiro pode ser escrito na forma $\frac{p}{1}$, então $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Valem também para o conjuntos dos números racionais as notações:

- $\mathbb{Q}^*$ (conjunto dos números racionais não nulos),
- $\mathbb{Q}_+$ (conjunto dos números racionais não negativos) e
- $\mathbb{Q}_-$ (conjunto dos números racionais não positivos).

Na fração

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \begin{array}{l} \rightarrow \boldsymbol{numerador} \\ \rightarrow \boldsymbol{denominador} \end{array}$$

Se $a\ e\ b$ são primos entre si, isto é, se $mdc(a,b) = 1$, dizemos $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis, mas $\frac{6}{10}$ não é.

*Observações:*

- São válidas todas as propriedades vistas para o conjunto dos números inteiros;
- Além disso é válida a propriedade simétrico ou inverso para a multiplicação. Isto é, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ **e** $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ , tal que $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = 1$;
- Decorre da propriedade acima que é possível definir a operação de divisão em $\mathbb{Q}^*$ da seguinte forma $\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right)$, para quaisquer $a, b, c\ e\ d$ pertencente a $\mathbb{Q}$;
- Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser escrito como um número decimal exato ex: $\left(\frac{1}{2} = 0{,}5\right)$ ou como uma dízima periódica $\left(\frac{1}{3} = 0{,}33333\ ...\right)$

Notemos finalmente que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Na passagem de um notação para podem ocorrer dois casos:

1º. o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, é uma decimal exata.
Quando ao decimal é exata, podemos transformá-lo em fração cujo o numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo o denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado

**Exemplos:**

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \qquad 1{,}027 = \frac{1027}{1000}$$

2º. o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

Nesse caso, devemos procurar sua geratriz, veja os exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica:

**Exemplo 1:**

A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e o denominador é formado por tantos "noves" quantos forem os algarismos do período.

$$\mathbf{0,777\ldots = 0,\overline{7} = \frac{7}{9}}$$

$$\mathbf{0,2323\ldots = 0,\overline{23} = \frac{23}{99}}$$

**Exemplo 2:**

Caso a dízima possua parte inteira, ela deve ser incluída à frente dessa fração, formando um número misto.

$$\mathbf{1,3131\ldots = 1,\overline{31} = 1 + 0,\overline{31} = 1 + \frac{31}{99} = \frac{99+31}{99} = \frac{130}{99}}$$

## *Operações com números racionais*

*Adição e Subtração com Números Racionais*

**Primeiro Caso:** Denominadores iguais.

Neste caso, basta somar ou subtrair seus numeradores e conservar os denominadores.

**Exemplos:**

$$\frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7+4}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**Segundo Caso:** Denominadores diferentes.

Para resolver a soma algébrica quando os denominadores são diferentes, encontramos o Mínimo Múltiplo Comum entre os denominadores (mmc), o resultado será o novo denominador das frações envolvidas. Representa-se todas as frações com o mesmo denominador, logo dividiremos o novo denominador obtido pelo cálculo do mmc e multiplicamos pelo numerador da fração para encontrar o novo numerador.

**Exemplo:**

$$\frac{13}{15} + \frac{1}{2} =$$

Primeiro passo é calcular o mmc, que no caso é 30.

$$\begin{array}{r|l} 15,\ 2 & 2 \\ 15,\ 1 & 3 \\ 5,\ 1 & 5 \\ \hline 1,\ 1 & 2 \times 3 \times 5 = 30 \end{array}$$

$$\frac{13}{15} + \frac{1}{2} = \frac{26 + 15}{30} = \frac{41}{30}$$

*Multiplicação e Divisão com Números Racionais*

Na multiplicação dos números fracionários, devemos multiplicar os numeradores pelos numeradores e os denominadores pelos denominadores.

**Exemplos:**

$$\frac{10}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{10 \times 8}{3 \times 9} = \frac{80}{27}$$

$$2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{1 \times 5} = \frac{2}{5}$$

Na divisão dos números fracionários o quociente de dois números racionais é obtido multiplicando-se o dividendo pelo elemento inverso do divisor, ou seja conservaremos a primeira fração e inverteremos a segunda e logo após multiplicaremos.

**Exemplo:**

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$4 \div \frac{7}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

## *Números Irracionais*

Como o próprio nome sugere um número irracional é todo número não racional, isto é, todo número que não pode ser escrito na forma de uma fração.

São exemplos de números irracionais:

$$\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \pi; e$$

Existem números cuja representação decimal com infinitas casa decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal 0,1010010001 ... é não periódico.

## *Números Reais*

O conjunto dos números reais, simbolizado pela letra $\mathbb{R}$, é o formado por todos os números racionais e por todos os números irracionais:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ ou\ x \in \mathbb{I}\}$$

Desse modo todos os conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ e\ \mathbb{I}$) são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Da mesma forma destacamos três outros subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^*$ (conjunto dos números reais não nulos),
- $\mathbb{R}_+$ (conjunto dos números reais não negativos) e
- $\mathbb{R}_-$ (conjunto dos números reais não positivos).

**Exercícios**

1. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
b. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
c. $0 \in \mathbb{Q}$
d. $5{,}17 \in \mathbb{Q}$
e. $0{,}4747\ldots \in \mathbb{I}$
f. $\left\{\frac{4}{7}, \frac{11}{3}\right\} \subset \mathbb{Q}$
g. $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
h. $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
i. $\frac{14}{2} \in \mathbb{Z}$
j. $\frac{21}{14}$ é $irredutível$
k. $\frac{121}{147} < \frac{131}{150}$
l. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

2. Colocar na forma de uma fração os seguintes números racionais

a. $0{,}4$
b. $0{,}444\ldots$
c. $0{,}32$
d. $0{,}32323232\ldots$
e. $5{,}42$
f. $5{,}424242\ldots$

3. Colocar em ordem crescente os números racionais:

$$\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}\ e\ \frac{2}{3}$$

4. Resolva as seguintes operações com números racionais:

a. $\frac{15}{6} + \frac{7}{3} + \frac{5}{3} =$
b. $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{10}{8} =$
c. $\frac{14}{3} \times \frac{9}{7} =$
d. $\frac{14}{3} \div \frac{9}{7} =$
e. $\frac{3}{6} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{13}{16}\right) =$
f. $\frac{2}{5} \times \left(\frac{14}{12} + \frac{2}{6}\right) - 3 \times \left(\frac{15}{9} \div \frac{1}{2}\right) =$

5. Determinar se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações justificando sua resposta:

a. $\frac{1}{5} = 0{,}555\ldots$
b. $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{5}{12}$
c. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$
d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

# Princípio da Enumeração

Um conjunto é dito finito se contém exatamente *m* elementos distintos, onde *m* denota algum inteiro não negativo.

A notação *n(A)* será usada para denotar o número de elementos de um conjunto finito $A$.

**Teorema:** se A e B são conjuntos finitos então $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos e

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Podemos aplicar esse resultado para obter uma fórmula similar para três conjuntos:

- Se A, B e C são conjuntos finitos então $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$ são finitos e
$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Observe as seguintes situações:

1. Uma pesquisa com jovens mostrou que 90 jovens gostam de música, 70 gostam de esportes, 25 gostam de ambas. Quantos jovens foram entrevistados?

   **Solução**: Utilizando o teorema, temos:

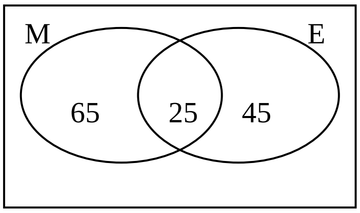
   $$n(M \cup E) = n(M) + n(E) - n(M \cap E) = 90 + 70 - 25 = 135$$

   Utilizando o diagrama de Venn, temos:

   **M** = conjunto dos que gostam de música → n (M) = 90 ➔ 90 – 25 = 65

   **E** = conjunto dos que gostam de esportes → n (E) = 70 ➔ 70 – 25 = 45

   **M ∩ E =** conjunto dos que gostam de ambos → n (M ∩ E) = 25

   Portanto, o número de entrevistados é: 65 + 25 + 45 = 135

2. Uma pesquisa revelou que, dentre 3 000 pessoas que costumavam ler jornal:

   1 000 liam o Diário de Notícias;

   1 100 liam o Estado Nacional;

   1 400 liam a Folha Mercantil;

   300 liam o Diário de Notícias e o Estado Nacional;

   500 liam a Folha Mercantil e o Estado Nacional;

   350 liam a Folha Mercantil e o Diário de Notícias;

   100 liam o Diário de Notícias, o Estado Nacional e a Folha Mercantil.

   Quantas pessoas não leem nenhum dos três jornais?

Do enunciado, temos:

Universo → n (U) = 3 000

Diário de Notícias → n (D) = 1 000

Estado Nacional → n (E) = 1 100

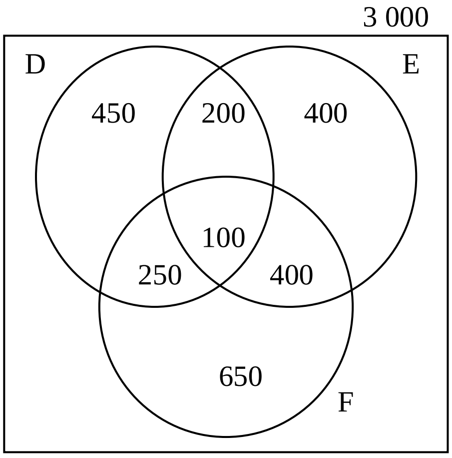
Folha Mercantil → n (F) = 1 400

n (D ∩ E) = 300

n (F ∩ E) = 500

n (F ∩ D) = 350

n (D ∩ E ∩ F) = 100




Utilizando o teorema, temos:

$$n(D \cup E \cup F) = n(D) + n(E) + n(F) - n(D \cap E) - n(D \cap F) - n(F \cap E) + n(D \cap E \cap F)$$

$$n(D \cup E \cup F) = 1000 + 1100 + 1400 - 300 - 500 - 350 + 100 = 2450$$

Portanto, o número de pessoas que não leem jornais é: 3000 – 2450 = 550.

**<u>Exercícios:</u>**

1. Em pesquisa realizada numa loja, envolvendo todos os seus funcionários, foram feitas duas perguntas às quais 24 responderam sim à primeira; 22 responderam sim à segunda; 9 responderam sim a ambas e 5 responderam não a ambas. Determine o número de funcionários dessa loja.

2. Numa academia de ginástica que oferece várias opções de atividades físicas, foi feita uma pesquisa para saber o número de pessoas matriculadas em alongamento, hidroginástica e musculação, chegando-se ao resultado expresso na tabela a seguir:

| Atividade | Alongamento (A) | Hidroginástica (H) | Musculação (M) | Along. e hidro. | Along. e Musc. | Hidro. e musc. | As 3 atividades | Outras atividades |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de pessoas matriculadas** | 109 | 203 | 162 | 25 | 28 | 41 | 5 | 115 |

Construa o diagrama de Venn para representar esses dados e responda:

a) Quantas pessoas a pesquisa envolveu?
b) Quantas pessoas estavam matriculadas apenas em alongamento?
c) Quantas pessoas estavam matriculadas apenas em hidroginástica?

3. Fez-se um levantamento, com 200 alunos de uma escola, para se analisar o índice de aprovação nas disciplinas Português, Matemática e Inglês. Verificou-se o seguinte:

   80 alunos passaram em Português, 60 passaram em Matemática e 62, em Inglês.

   22 alunos passaram em Matemática e Inglês, 24 alunos passaram em Português e Inglês e 20 passaram em Matemática e Português. 9 alunos passaram nas três disciplinas.

   A partir dos dados levantados, pode-se afirmar:

   a) Quantos alunos foram reprovados nas três disciplinas?

b) Quantos alunos passaram apenas em Matemática?
c) Quantos alunos passaram apenas em Inglês?
d) Quantos alunos passaram apenas em uma disciplina?

4. Uma pesquisa realizada com um grupo de pessoas revelou a seguinte preferência pelas revistas A, B e C:

| | |
|---|---|
| 139 leem a revista A; | 9 leem as três revistas; |
| 207 leem a revista B; | 100 não leem revista . |
| 170 leem a revista C; | Das informações conclui-se: |
| 32 leem as revistas A e B; | _____ pessoas foram consultadas. |
| 60 leem as revistas B e C; | _____ pessoas leem somente a revista A. |
| 30 leem as revistas A e C; | _____ pessoas não leem as revistas B ou C. |

5. Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y. Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma ?

6. Sabendo-se que das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais e 110 não liam nenhum dos jornais, determine o número de pessoas que foram consultadas.

7. Num concurso foram cadastrados vários candidatos que declararam falar, pelo menos, um dos idiomas: inglês, francês ou espanhol. Sabendo que 120 candidatos declararam falar inglês, francês e espanhol; 220 inglês e espanhol; 120 francês e espanhol; e 170 inglês e francês, pergunta-se: Quantos concorrentes declararam falar exatamente uma das três línguas, se eram 1500 cadastrados?

8. Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações: Sabrina, Bianca e Mariana. Para isso pesquisou o mercado e concluiu que em cada 1000 pessoas consultadas, 600 leram Bianca, 400 leram Sabrina, 300 leram Mariana, 200 leram Bianca e Sabrina, 150 leram Bianca e Mariana, 100 leram Sabrina e Mariana, e 20 leram as três obras. Calcule:
   a. o número de pessoas que leram apenas uma das três obras;
   b. o número de pessoas que não leram nenhuma das obras;

9. A empresa ***Belas Artes***, preocupada com a satisfação dos seus clientes, realizou uma pesquisa para conhecer a opinião dos clientes em relação ao atendimento recebido pelos departamentos ***A*** e ***B*** da empresa. Após conhecer a opinião de 500 clientes, pode constatar que, destes, 300 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelo departamento ***A***, 350 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelo departamento ***B***, e 200 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelos dois departamentos, ou seja, ***A*** e ***B***. Determine o número de clientes que manifestaram insatisfação com o atendimento recebido dos departamentos.

# 1ª Lista de Exercícios de Matemática Discreta

*OBS.: Todas as questões devem ser apresentadas com os cálculos justificando sua resposta, mesmo as com alternativas e deve ser entregue na data estipulada pelo professor.*

1. Quais dentre estes conjuntos são iguais?

$A = \{x | x \in N, 0 < x < 3\}$ $\quad C = \{1, 2\}$ $\quad E = \{3, 1\}$ $\quad G = \left\{\frac{-10}{-5}, \sqrt[3]{1}\right\}$

$B = \{x | x \in N, x \text{ é } ímpar, x < 5\}$ $\quad D = \{1, 2, 1\}$ $\quad F = \{1, 1, 3\}$ $\quad H = \left\{\sqrt[3]{27}, \frac{42}{14}, 1^{10}\right\}$

2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:
   a. $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$
   b. $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \text{ é } par, x < 15\}$
   c. $C = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 + x = 3\}$

3. (PUC-MG) Considere os seguintes conjuntos de números naturais:

   $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

   $P = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 20\}$

   $A = \{x \in P \mid x \text{ é } par\}$

   $B = \{x \in P \mid x \text{ é } divisor\ de\ 48\}$

   $C = \{x \in P \mid x \text{ é } múltiplo\ de\ 5\}$

   O número de elementos do conjunto $(A - B) \cap C$ é:

   a. 2 b. 3 c. 4 d. 5 e. 6

4. Considere os seguintes conjuntos: $\emptyset$, $A = \{1\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,5,9\}$, $D = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{1,3,5,7,9\}$, $U = \{1,2,3, ... ,8,9\}$. Insira o símbolo correto, $\subset$ ou $\not\subset$, em cada par de conjuntos:

   a. $\emptyset$ ____ $A$ b. $A$ ____ $B$ c. $B$ ____ $C$ d. $B$ ____ $E$

   e. $C$ ____ $D$ f. $C$ ____ $E$ g. $D$ ____ $E$ h. $D$ ____ $U$

5. Dados os conjuntos A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f, g} e C = {b, d, e, g}. Determinar:

   a. $A \cup B$ b. $A \cup C$
   c. $A \cup B \cup C$ d. $A \cap C$
   e. $B \cap C$ f. $A \cap B \cap C$
   g. $A - B$ h. $B - A$
   i. $(A \cup B) - C$ j. $(A \cup B) - (A \cap C)$

6. Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Dizer quais das proposições abaixo são verdadeiras.
   a. $a \in E$
   b. $\{a\} \in E$
   c. $a \subset E$
   d. $\{a\} \subset E$
   e. $\emptyset \in E$
   f. $\emptyset \subset E$

7. Colocar na forma de uma fração os seguintes números racionais
   a. $1{,}25$
   b. $0{,}151515\ldots$
   c. $12{,}242424\ldots$

8. Resolva as seguintes operações com números racionais:
   a. $\frac{2}{5} + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} =$
   b. $\frac{4}{7} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$
   c. $\frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{11}{12}\right) =$
   d. $3 \times \left(\frac{8}{9} + \frac{3}{4}\right) - 2 \times \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}\right) =$

9. Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam Inglês, 163 estudam Francês e 52 estudam ambas as línguas.
   a. Quantos alunos estudam Inglês ou Francês?
   b. Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

10. (PUC-PR) Em uma pesquisa feita com 120 empregados de uma firma, verificou-se o seguinte:
    - têm casa própria: 38
    - têm curso superior: 42
    - têm plano de saúde: 70
    - têm casa própria e plano de saúde: 34
    - têm casa própria e curso superior: 17
    - têm curso superior e plano de saúde: 24
    - têm casa própria, plano de saúde e curso superior: 15

Qual a porcentagem dos empregados que não se enquadram em nenhuma das situações anteriores?
   a. 25%
   b. 30%
   c. 35%
   d. 40%
   e. 45%

11. (Uneb-BA) Em um vestibular, 80 alunos acertaram pelo menos uma questão entre as questões de nº 1 e nº 2. Sabe-se que 70 deles acertaram a questão nº 1 e 50 acertaram a questão nº 2. O número de alunos que acertaram ambas as questões é igual a:
    a. 40
    b. 35
    c. 20
    d. 60
    e. 120

12. Relacione os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.
    a. $\sqrt{2}$ ___ R
    b. 0,333 ___ R
    c. $\sqrt{3}$ ___ Q
    d. 1,4 ___ Z
    e. 0,777... ___ N
    f. $\frac{3}{7}$ ___ Z
    g. 0,2 ___ I
    h. -234 ___ Z
    i. 6 ___ N
    j. 0,2 ___ R

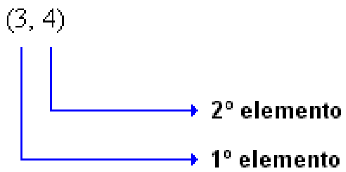
# Relações

## *Par ordenado*

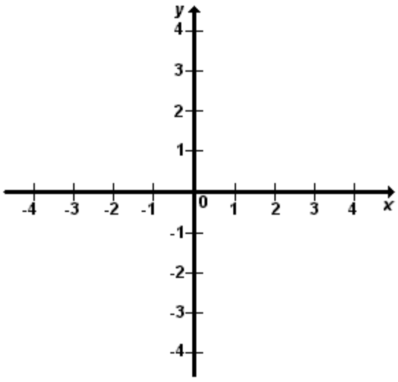
Chama-se par ordenado o conjunto de dois elementos considerando uma certa ordem.

Assim: Indicamos por ($x$, $y$) o par ordenado formado pelos elementos $x$ e $y$, onde $x$ é o 1º elemento e $y$ é o 2º elemento.

**Exemplo:**




## *Plano Cartesiano*




Representamos um par ordenado em um plano cartesiano.

Esse plano é formado por duas retas, $x$ e $y$, perpendiculares entre si.

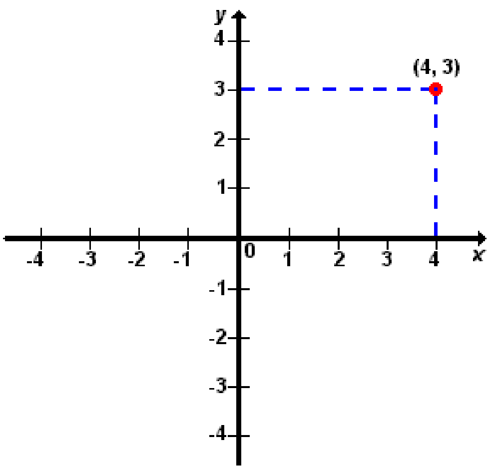
A reta horizontal é o eixo das abscissas (eixo $x$).

A reta vertical é o eixo das ordenadas (eixo $y$).

O ponto comum dessas duas retas é denominado origem, que corresponde ao par ordenado (0, 0).

### *Localização de um Ponto*

Para localizar um ponto num plano cartesiano, utilizamos a sequência prática:




- O 1º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das abscissas.
- O 2º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das ordenadas.
- No encontro das perpendiculares aos eixos $x$ e $y$, por esses pontos, determinamos o ponto procurado. Exemplo:
- Localize o ponto (4, 3).

## *Produtos de Conjuntos*

Considere dois conjuntos arbitrários $A$ e $B$. O conjunto de todos os pares ordenados $(a, b)$ onde $a \in A$ e $b \in B$ é chamado de *produto cartesiano* de $A$ e $B$. Uma designação abreviada desse produto é $A \times B$, que pode ser lida como "$A$ cartesiano $B$". Por definição:

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A \; e \; b \in B\}$$

Frequentemente se escreve $A^2$ em vez de $A \times A$.

***Exemplo:***

Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b,c\}$. Então:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$
$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$
$$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Obs.:

- $A \times B \neq B \times A$: o produto cartesiano diz respeito a pares ordenados de modo que, naturalmente, a ordem em que os conjuntos são considerados é importante;
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ para quaisquer conjuntos finitos A e B. No exemplo, temos:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6$$

## *Relações*

*Definição:* Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma *relação binária* ou, simplesmente, *relação* de $A$ para $B$ é um subconjunto de $A \times B$.

Suponha que $R$ é uma relação de $A$ para $B$, uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

I. $(a,b) \in R$; dizemos que "*a* é *R-relacionado* a *b*", escrevendo $a\,R\,b$.

II. $(a,b) \notin R$; dizemos que "*a* é não *R-relacionado* a *b*", escrevendo $a \not{R}\, b$.

O *domínio* de uma relação $R$ é o conjunto de todos os primeiros elementos de um par ordenado que pertence a $R$, e a *imagem* é o conjunto dos segundos elementos.

***Exemplos:***

1. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$ e seja $R = \{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$. Então $R$ é uma relação de $A$ para $B$, uma vez que $R$ é subconjunto de $A \times B$. Assim , temos que o produto cartesiano de A em B é:

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

   Os elementos de $R$ são todos os pares ordenados de $A \times B$ nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo. $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

2. Sejam $A = \{ovos,\ leite,\ milho\}$ e $B = \{vacas,\ cabras,\ galinhas\}$. Podemos definir uma relação de $A$ para $B$ por $(x, y) \in R$ se $x$ é produzido por $y$.

$$R = \{(ovos, galinhas), (leite, vacas), (leite, cabras)\}$$

O domínio dessa relação $R$ é $D = \{ovos,\ leite\}$ e a imagem é $Im = \{vacas,\ cabras,\ galinhas\}$.

## *Relações Inversas*

Seja $R$ uma relação qualquer de um conjunto $A$ para um conjunto $B$. A inversa de R, denotada por $R^{-1}$, é a relação de B para A que consxiste nos pares ordenados que, quando têm sua ordem revertida, pertencem a R, isto é:

$$R^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in R\}$$

Por exemplo, a inversa da relação $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$ de A para B é a seguinte:

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3)\}$$

## *Representações de Relações em Conjuntos Finitos*

Suponha que $A$ e $B$ são conjuntos finitos. Apresentamos a seguir duas maneiras de representar graficamente uma relação $R$ de $A$ para $B$.

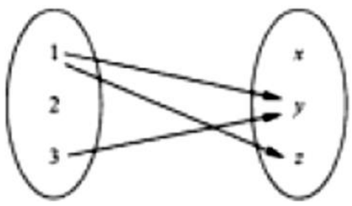
I. **<u>Matriz da relação</u>**: Forme uma matriz retangular, nomeando as linhas pelos elementos de A e as colunas pelos elementos de B. Coloque 1 ou 0 em cada posição da matriz dependendo de $a \in A$ estar ou não relacionado com $b \in B$.

***Exemplo:*** Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{x, y, z\}$ e seja $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$. Então a *matriz da relação* $R$ de $A$ para $B$ é:

| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |

II. **<u>Diagrama de setas:</u>** Escreva os elementos de $A$ e os elementos de $B$ em dois dicos disjuntos e, então, desenhe uma seta de de $a \in A$ para $b \in B$ sempre que $a$ estiver relacionado com $b$.

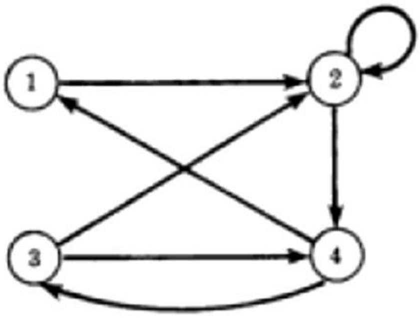
***Exemplo:*** Utilizando o mesmo exemplo, temos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x, y, z\}$ e $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$.



III. **Grafos Orientados:** Existe uma outra maneira de representar graficamente uma relação $R$ quando $R$ é uma relação de um conjunto finito nele mesmo. Primeiramente escrevemos os elementos do conjunto e então desenhamos uma seta de cada elemento $x$ para um elemento $y$ sempre que $x$ estiver relacionado a $y$. ***Exemplo:*** Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação de $A$ em $A$

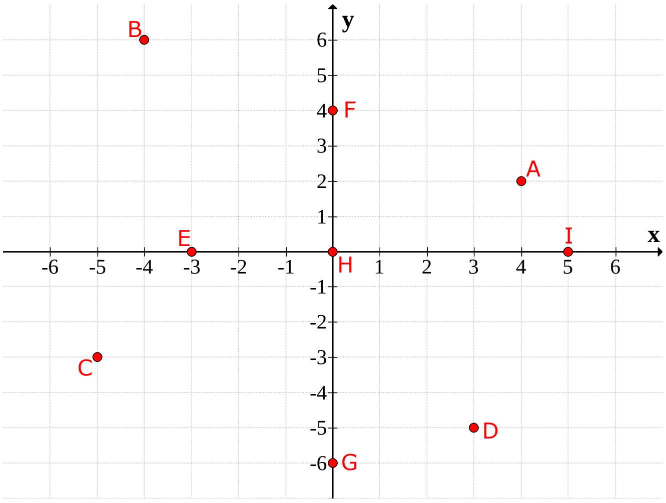
$$R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$$

Observe que existe uma seta partindo de 2 para si mesmo, já que 2 está relacionado a 2 por R.




**Exercícios**

1. Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo:




2. Assinale no plano cartesiano os pontos: A(2, -3), B(0, -4), C(-4, -5), D(-1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0) e H(-3, 2).

3. Dados $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a, b\}$, ache:
   a. $A \times B$
   b. $B \times A$
   c. $B \times B$

4. Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{c, d\}$, ache:
   d. $(A \times B) \cap (A \times C)$
   e. $A \times (B \cap C)$

5. São dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.Seja $R$ a seguinte relação de $A$ para $B$:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$$

   a. Determine os pares ordenados da relação.
   b. Determine a matriz da relação.
   c. Desenhe o diagrama de setas de $R$.
   d. Ache a relação $R^{-1}$ inversa de $R$.
   e. Determine o domínio e a imagem de $R$.

6. Seja $A = \{1,2,3,4,6\}$ e seja $R$ a relação em $A$ definida por "$x$ divide $y$", escrita $x|\, y$.
   a. Escreva $R$ como um conjunto de pares ordenados.
   b. Desenhe seu grafo orientado.
   c. Ache a relação inversa $R^{-1}$ de $R$.

# ***Funções***

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

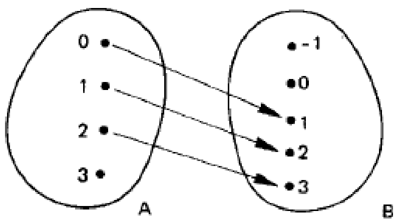
e as seguintes relações binárias de A em B:

$$R = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\}$$
$$S = \{(x, y) \in A \times B | y^2 = x^2\}$$
$$T = \{(x, y) \in A \times B | y = x\}$$
$$V = \{(x, y) \in A \times B | y = (x - 1)^2 - 1\}$$
$$W = \{(x, y) \in A \times B | y = 2\}$$

Analisando cada uma das relações temos:

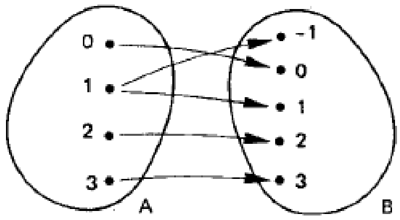
a) $R$ = {(0, 1), (1, 2), (2,3)}

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$. Para o elemento $3 \in A$, não existe, $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.



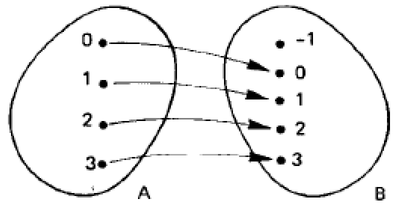

b) $S$ = {(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)}

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos de $B$, o 1 e o –1, tais que $(1,1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.



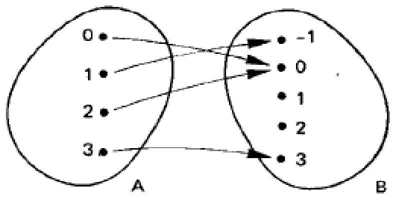
c) $T$ = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.



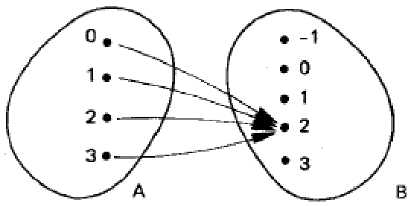

d) $V$ = {(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)}

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.




e) $W$ = {(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)}

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.




As relações *T*, *V*, *W*, que apresentam a particularidade: "para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y)$ pertence a relação", recebem o nome de *função definida em A com imagens em B.*

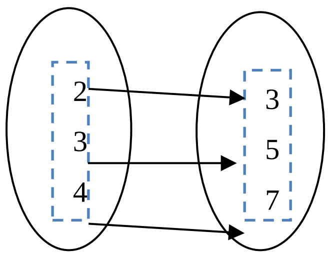
## *Definição*

Dados dois conjuntos *A* e *B*, não vazios, uma relação *f* de *A* em *B* recebe o nome de *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

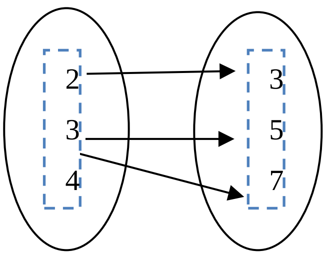
$$\boxed{\boldsymbol{f} \text{ é } \boldsymbol{função\ de\ A\ em\ B} \iff (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists|\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f})}$$

Nem todas as relações são funções. Para que uma relação seja função, é necessário que para cada elemento de *x* – conjunto e partida – haja um único elemento no conjunto de chegada – *y*.

**Exemplo:**




É função




Não é função

## *Notação das funções*

Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um subconjunto de pares ordenados. Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então:

$$f = \{(x, y) \in A \times B | y = f(x)\}$$

**Exemplo:**

Seja a função *f* que associa cada número real ao seu dobro é:

$$f(x) = 2x$$

## *Imagem de um elemento*

Se $(a,\ b) \in f$, o elemento $b$ é chamado *imagem de a* pela aplicação da função $f$ no elemento $a$, e indicamos:

$$f(a) = b$$

**Exemplo:**

Seja a função $f(x) = 2x + 1$, então:

a. a imagem de 0 na função *f* é:

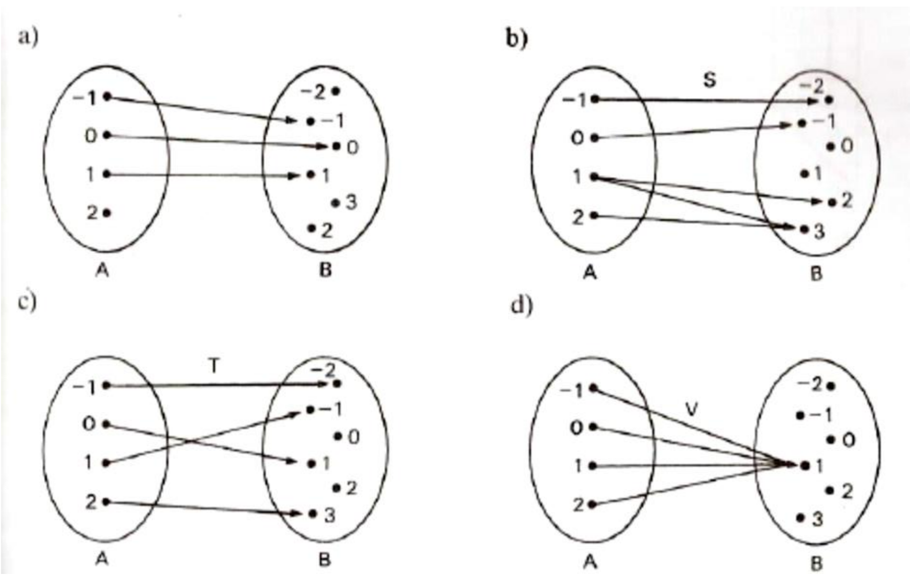
$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

b. a imagem de – 2 na função *f* é:

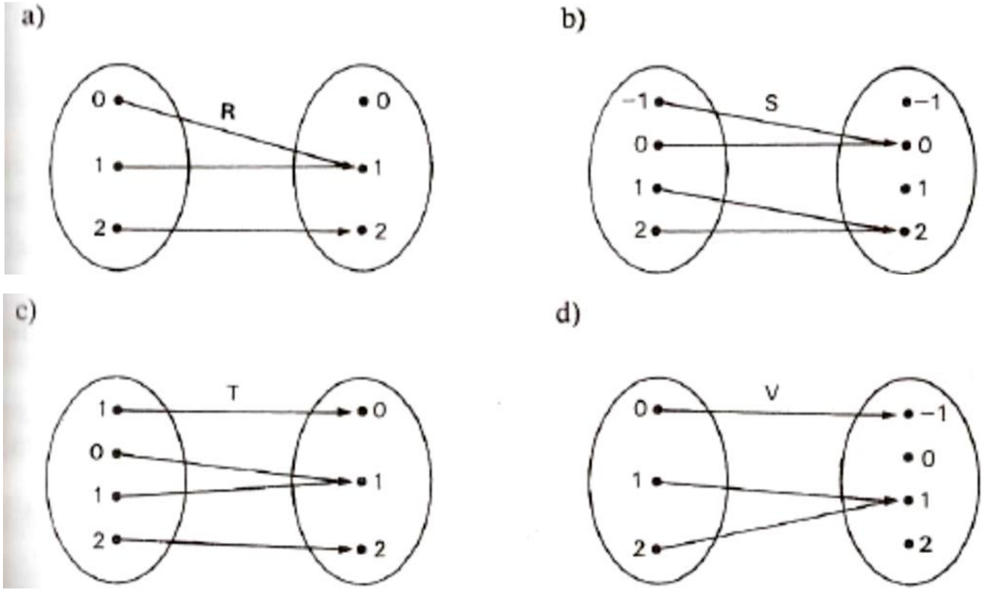
$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$

**<u>Exercícios</u>**

1. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de A = {-1, 0,1, 2} em B = {-2, -1, 0,1,2, 3}. Justifique.



2. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de A = {0, 1, 2} em B = {-1, 0, 1, 2}?




3. Qual é a notação das seguintes funções de ℝ em ℝ?
   a) *f* associa cada número real ao seu oposto.
   b) *g* associa cada número real ao seu cubo.
   c) *h* associa cada número real ao seu quadrado menos 1.
   d) *k* associa cada número real ao número 2.

4. Seja *f* a função de ℤ em ℤ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:
   a) $f(2) =$
   b) $f(-3) =$
   c) $f(0) =$
   d) $f\left(\frac{3}{2}\right) =$

5. Seja *f* a função de ℝ em ℝ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:
   a) $f(2) =$
   b) $f(-1) =$
   c) $f\left(-\frac{1}{3}\right) =$
   d) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

6. Calcule a imagem pedida da função *f* de ℝ em ℝ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, se\ x \geq 1 \\ 2x - 1, se\ x < 1 \end{cases}$$

   a) $f(2) =$
   b) $f(-1) =$
   c) $f(1) =$

# Equação do 1º grau

Equação do 1º grau (primeiro grau) é nada mais do que uma igualdade entre as expressões, que as transformam em uma identidade numérica, para um ou para mais valores atribuídos as suas letras.

**Exemplo:**

$$5 + x = 8$$

Essa equação se transforma numa identidade, fazendo:

$$x = 3$$

Substituindo $x$ por 3, temos: $5 + 3 = 8 \quad \Rightarrow \; 8 \; = \; 8$ temos uma identidade.

A letra $x$ na equação é denominada a variável da equação ou incógnita, enquanto que o número 3 é chamado de solução da equação ou conjunto verdade.

Na equação acima o que está antes da igualdade é chamado de primeiro membro, e o que está do lado direito é chamado de segundo membro da equação.

**Exemplo:**

$$\underbrace{3x - 12}_{1^\circ \text{ membro}} = \underbrace{7 + x}_{2^\circ \text{ membro}}$$

## *Os quatro passos da resolução de equações do primeiro grau*

**Passo 1** – Colocar no primeiro membro todos os termos que possuem incógnita.

Reescreva a equação colocando todos os termos que possuem incógnita no primeiro membro. Para tanto, utilize a seguinte regra: Trocou de membro, inverte a operação. Observe o exemplo:

$$\mathbf{7x + 80 = 4x - 7}$$

O termo $\mathbf{4x}$ está no segundo membro e deve ser colocado no primeiro. Assim, troque $\mathbf{4x}$ de membro invertendo a sua operação, ou seja, como ele é positivo, ele está somando e vai passar subtraindo:

$$\mathbf{7x + \; 80 = \; 4x - 7}$$

$$\mathbf{7x - 4x + 80 = -7}$$

**Passo 2** – Colocar no segundo membro todos os termos que não possuem incógnita.

Repita o procedimento do passo anterior para transferir termos que não possuem incógnita do primeiro para o segundo membro. No exemplo abaixo (continuação do exemplo anterior), observe que **+ 80** é um termo que não possui incógnita. Portanto, deve ser colocado no segundo membro. Ao fazer isso, lembre-se da regra: Trocou de membro, inverte a operação, ou seja, o 80 está somando e vai passar subtraindo.

$$\mathbf{7x - 4x + 80 = -7}$$

$$\mathbf{7x - 4x = -7 - 80}$$

**Passo 3** – Simplificar as expressões em cada membro.

Para esse passo, basta realizar as operações indicadas na equação.

$$\mathbf{3x = -87}$$

**<u>Passo 4</u>** – Isolar a incógnita no primeiro membro.

Em alguns casos, como no exemplo acima, a incógnita aparece sendo multiplicada (ou dividida) por um número qualquer. Para isolar a incógnita no primeiro membro da equação, deve-se considerar a seguinte regra: Caso o número esteja multiplicando a incógnita, passá-lo para o segundo membro dividindo. Caso o número esteja dividindo a incógnita, passá-lo para o segundo membro multiplicando. Por exemplo:

Observe que a incógnita x está sendo multiplicada por 3. Portanto, 3 deve passar para o segundo membro dividindo. Logo, o quarto passo terá o seguinte resultado:

$$\boldsymbol{3x = -87}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-87}{3}}$$

$$\boldsymbol{x = -29}$$

**Exemplo:**

Qual é o valor de x da equação seguinte?

$$\frac{2x}{3} + 9 = 4x - \frac{17}{2}$$

$$\frac{2x}{3} - 4x + 9 = -\frac{17}{2}$$

$$\frac{2x}{3} - 4x = -\frac{17}{2} - 9$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{4x}{1} = -\frac{17}{2} - \frac{9}{1}$$

$$\frac{2x - 12x}{3} = \frac{-17 - 18}{2}$$

$$\frac{-10x}{3} = \frac{-35}{2}$$

$$-20x = -105$$

$$x = \frac{-105}{-20}$$

$$x = \frac{21}{4}$$

**<u>Exercícios</u>**

1. Resolva as seguintes equações do 1º grau:

   a. $3x + 2 = 4x + 9$
   b. $m + 4 - 3m = 4 + 12m$
   c. $3 + 4m - 9 = 6m - 4 + 12$
   d. $-5 + 3x = 4 - 12 + 9x$
   e. $3x + 5 - 2 = 2x + 12$
   f. $3(x + 2) = 15$
   g. $-2(-m + 2) = 3(2m + 1)$
   h. $12m + 3(m - 1) = -2(m + 1) + 12$
   i. $\frac{x}{2} + \frac{1}{5} - \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$

2. O dobro de um número, diminuído de 4, é igual a esse número aumentado de 1. Qual é esse número?
3. Paulo gastou 30% do seu salário com roupas, 25% com alimentação e 10% com despesas extras, e ainda ficou com R$ 210,00. Qual o valor do seu salário?

# ***Função Linear***

Chama-se **função polinomial do 1º grau** ou **função linear** a qualquer função $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, onde $a$ e $b$ são números reais dados e $a \neq 0$.

Na função $f(x) = \boldsymbol{a}.x + \boldsymbol{b}$, temos:

- Termo constante – ***coeficiente linear***
- $x$ é a ***variável independente*** ( pode assumir qualquer valor);
- Coeficiente de $x$ – ***coeficiente angular***
- $f(x)$ ou $y$ é a ***variável dependente*** (depende de x);

**Exemplos:**

1. $f(x) = 5x – 3$, onde $a = 5$ e $b = - 3$
2. $f(x) = –2x – 7$, onde $a = –2$ e $b = –7$
3. $f(x) = 11x$, onde $a = 11$ e $b = 0$

***Imagem de um elemento***

Se $(a, b) \in f$ , o elemento $b$ é chamado *imagem de a* pela aplicação da função no elemento $a$.

**Exemplo:**

Seja a função $f(x) = 2x + 1$, então:

1. a imagem de 0 na função $f$ é: $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
2. a imagem de – 2 na função $f$ é: $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$

***Gráfico***

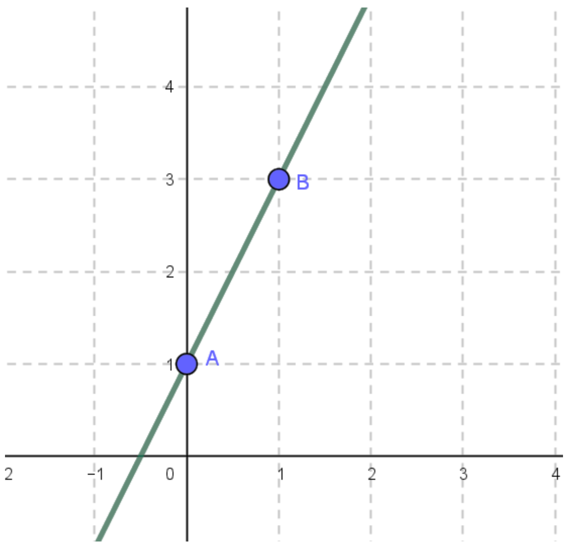
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $f(x) = y = ax + b$ é uma reta oblíqua aos eixos O$x$ e O$y$. Assim, para construir um gráfico da função de 1º grau precisamos determinar dois pontos quaisquer.

**Exemplos:**

1º. Construir o gráfico da função $y = 2x + 1$.

Vamos atribuir a $x$ dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de $y$, ou seja, suas imagens.

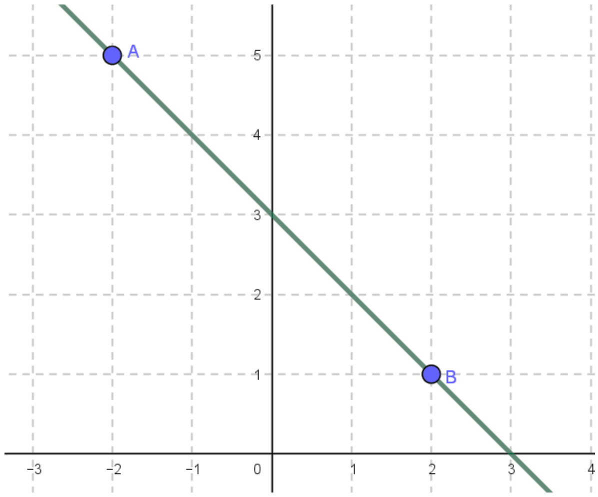
| $x$ | $y = 2x + 1$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $2 \cdot 0 + 1 = 1$ | $(0, 1)$ |
| 1 | $2 \cdot 1 + 1 = 3$ | $(1, 3)$ |



2º. Construir o gráfico da função $y = -x + 3$.

Vamos atribuir a $x$ dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de $y$, ou seja, suas imagens.

| $x$ | $y = -x + 3$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $-(-2) + 3 = 5$ | $(-2, 5)$ |
| $2$ | $-2 + 3 = 1$ | $(2, 1)$ |




***Raiz ou zero de uma função do 1º grau***

Para determinar a raiz ou o zero de uma função do 1º grau é preciso considerar $y = 0$. De acordo com gráfico, no instante em que $y$ assume valor igual a zero, a reta intersecta o eixo $x$ em um determinado ponto, determinando a raiz ou o zero da função.

Vamos determinar a raiz das funções a seguir:

$$y = 4x + 2$$

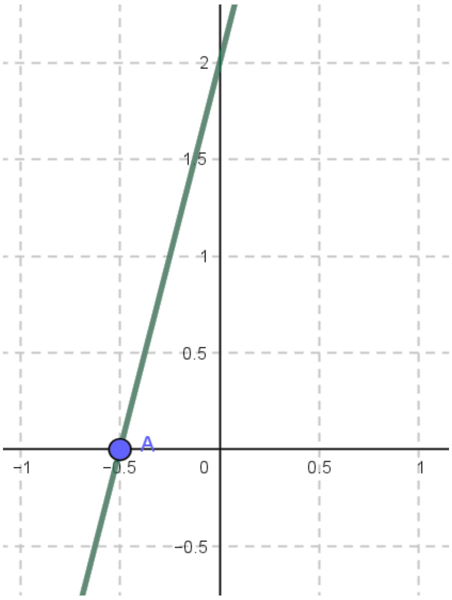
para y = 0

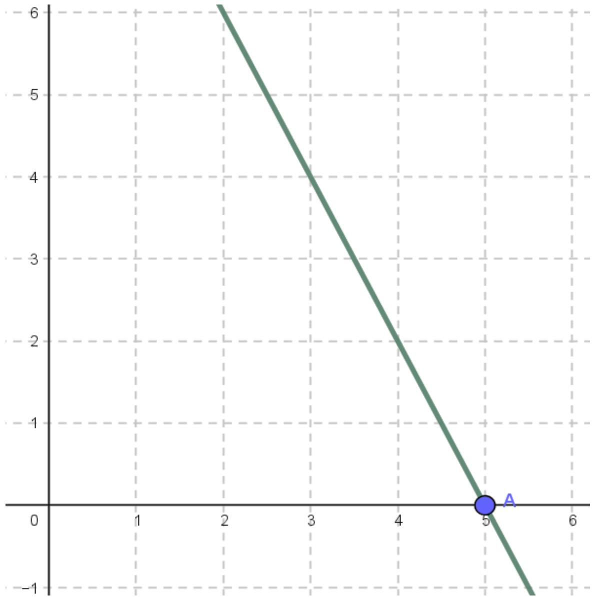
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{2}{4}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$y = -2x + 10$$

para y = 0

$$-2x + 10 = 0$$
$$-2x = -10\ (-1)$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

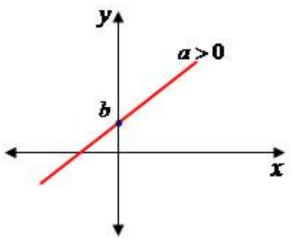


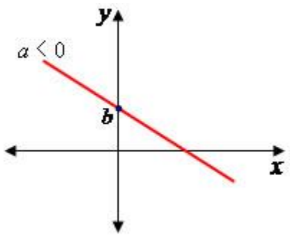
### *Função crescente e decrescente*

A representação gráfica de uma função do 1º grau é uma reta. Analisando a lei de formação $y = ax + b$, notamos a dependência entre $x$ e $y$, e identificamos dois números: $a$ e $b$. Eles são os coeficientes da função, o valor de $a$ indica se a função é crescente ou decrescente e o valor de $b$ indica o ponto de intersecção da função com o eixo $y$ no plano cartesiano. Observe:

**Função crescente**




**Função decrescente**




- <u>Função crescente</u>: à medida que os valores de $x$ aumentam os valores correspondentes em $y$ também aumentam.
- <u>Função decrescente</u>: à medida que os valores de $x$ aumentam, os valores correspondentes de $y$ diminuem.

**<u>Exercícios</u>**

1. Dada a função $f(x) = 2x + 3$, calcule:
   a. $f(0)$
   b. $f(1)$
   c. $f(-2)$

2. Dada a função $f(x) = -5x + 4$, calcule:
   a. $f(1)$
   b. $f(2)$
   c. $f(-1)$

3. Determine a raiz de cada uma das seguintes funções e classifique como crescente ou decrescente:
   a. $y = 2x - 1$
   b. $y = -3x$
   c. $y = 5x + 10$
   d. $y = -x + 3$

4. Construa os gráficos das seguintes funções:
   a. $y = x + 2$
   b. $y = -x + 1$
   c. $y = 2x - 1$
   d. $y = -2x + 2$
   e. $y = 2x$

# Características da função do 1º grau e Aplicações

### Domínio e Imagem de uma função linear

O Domínio de uma função é o conjunto formado pelos elementos que a variável independente $x$ pode assumir. Analisando a função $f(x) = ax + b$, nota-se que $x$ poderá assumir qualquer valor. Portanto, o domínio será o conjunto de números reais. D = $\mathbb{R}$.

A Imagem é formada pelos elementos do conjunto de chegada que estão relacionados com os elementos do conjunto de partida. Assim para cada $x \in \mathbb{R}$, haverá também um correspondente $y$ real. Im = $\mathbb{R}$.

Em determinadas situações, no estudo de uma função, você poderá trabalhar com um domínio restrito.

Vamos tomar como exemplo o seguinte caso:

*Um lava-jato de automóveis tem como único serviço uma lavagem simples. Após um estudo, chegou-se a função do Lucro Bruto dessa empresa*

$$LB = 7{,}6 \cdot x - 1\,692$$

*A empresa tem 3 funcionários, deste modo poderíamos determinar qual seria o conjunto domínio e imagem.*

Supondo o domínio o conjunto dos números reais, você poderia ter, por exemplo, $x$ negativo, o que não é correto, pois você não pode lavar ($-20$ carros). Da mesma forma, se o domínio fosse o conjunto dos reais, a empresa poderia lavar 100.000 carros num mês, o que também não é possível tendo apenas 3 funcionários. Como fazer então?

Ai entra o bom senso. Conhecendo o conceito de domínio, como os valores que $x$ poderá assumir numa função, você poderá obter informações proveitosas.

Se o lava-jato tem 3 funcionários e supondo que cada um consiga lavar 2 carros por hora e que cada funcionário trabalhe 8 horas por dia, 25 dias no mês, temos o número máximo de carros que 3 funcionários poderão lavar por mês.

Nº de carros = $3 \times 2 \times 8 \times 25 = 1\,200$

Neste caso, considerando a capacidade da mão-de-obra da empresa, poderemos estabelecer que o Domínio da função Lucro Bruto será:

$$D = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 0 \leq x \leq 1.200\}$$

De posse do domínio, você poderá obter a imagem da função, ou seja o lucro, bastando, para isso, substituir o menor e o maior valor possível de x, na função em estudo.

Para $x = 0$ $\quad LB = 7{,}6 \cdot x - 1\,692$

$LB = 7{,}6 \cdot 0 - 1\,692$

$LB = -1\,692$

Para $x = 1200$ $LB = 7{,}6 \cdot x - 1\ 692$

$LB = 7{,}6 \cdot 1200 - 1\ 692$

$LB = 7\ 428$

Portanto, $Im = \{LB \in \mathbb{R} | -1692 \leq x \leq 7428\}$

Concluindo, você descobriu que de acordo com a capacidade de mão-de-obra instalada na empresa, o pior resultado possível seria um prejuízo de R$ 1.692,00 e o melhor resultado possível seria um lucro de R$ 7.428,00. Desta forma, se o proprietário montou o lava-jato, pensando em ter um lucro de R$ 10.000,00 por mês, terá de repensar o tamanho e a capacidade do negócio.

## *Coeficientes da função do 1º grau*

O *coeficiente angular* ($a$) determina de quanto será o crescimento da função ou a declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente *b* da função linear $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear*, o valor de *b* é sempre igual ao valor da função quando *x* vale 0. Isto porque o *coeficiente linear* determina o valor da função quando *x* vale 0.

Por exemplo:

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe a tabela abaixo:

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ | $\boldsymbol{y}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{-1}$ | $y = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$ | $-1$ |
| **0** | $y = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ | 1 |
| **1** | $y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ | 3 |
| **2** | $y = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$ | 5 |

Percebemos que o crescimento acontece sempre pelo valor de *a*, no caso, o crescimento acontece de 2 em 2, que é o coeficiente angular da função. Por sua vez, o coeficiente linear é o valor da função quando assumimos o valor de $x = 0$.

## *Ponto de encontro entre duas retas.*

*Definição:* Sendo *r* e *s* duas retas concorrentes. Para que se determine o ponto *P* de interseção das duas retas será através do sistema formado pelas equações das mesmas.

Exemplo: Determine o ponto de intersecção das retas

$r: y = -4x - 5$ e $s: y = 2x + 7$

Para determinar o valor de $x$ comum às duas retas, iremos igualar o $y_r = y_s$

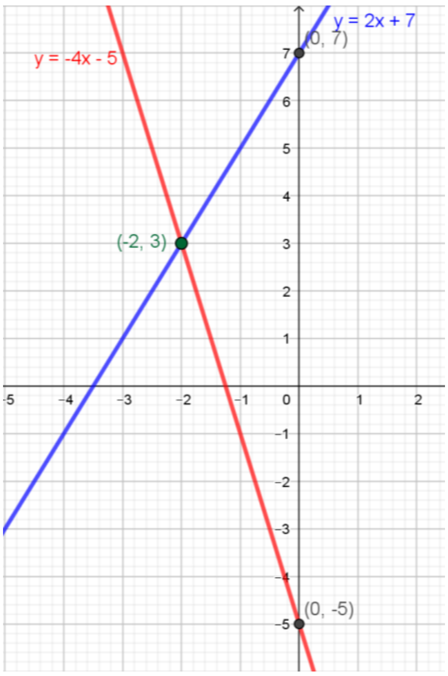
$$-4x - 5 = 2x + 7$$

$$-4x - 2x = 7 + 5$$

$$-6x = 12$$

$$x = \frac{12}{-6}$$

$$x = -2$$




Já que achamos o valor de $x$, agora devemos achar o valor de $y$. Devemos escolhendo qualquer uma das duas retas e substituir o valor de $x$ na equação, acharemos o valor de $y$. Aqui, iremos escolher a reta s.

$$y = 2x + 7$$

$$y = 2(-2) + 7 = -4 + 7$$

$$y = 3$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção é $P(-2, 3)$.

Agora, podemos esboçar o gráfico apresentando o ponto de encontro das duas retas, seguindo os passos:

1. Apresente no plano cartesiano o ponto de encontro $P(-2, 3)$.
2. Apresente o ponto que intercepta o eixo y da equação $r: y = -4x - 5$, ou seja, o ponto onde $x = 0$: $(0, -5)$.
3. Trace a reta *r* (no gráfico ao lado, a vermelha)
4. Apresente o ponto que intercepta o eixo y da equação $s: y = 2x + 7$, ou seja, o ponto onde $x = 0$: $(0, 7)$.
5. Trace a reta *s* (no gráfico ao lado, a azul).

No cotidiano de um gestor, é comum ser necessário encontrar o ponto de encontro entre duas retas. Por exemplo, pode-se querer determinar o ponto de encontro entre a reta da Receita com reta do Custo Total, assim, encontra-se o ponto de equilíbrio. Sendo que a coordenada *x* mostrará o número de peças vendidas necessário para o ponto de equilíbrio e em y, o correspondente valor da receita e do custo total. Para encontrarmos este ponto, basta igualar as duas funções. Vamos tomar como exemplo as seguintes funções:

$$R = 12 \cdot x \qquad\qquad CT = 4{,}4 \cdot x + 1\,692$$

$$R = CT$$

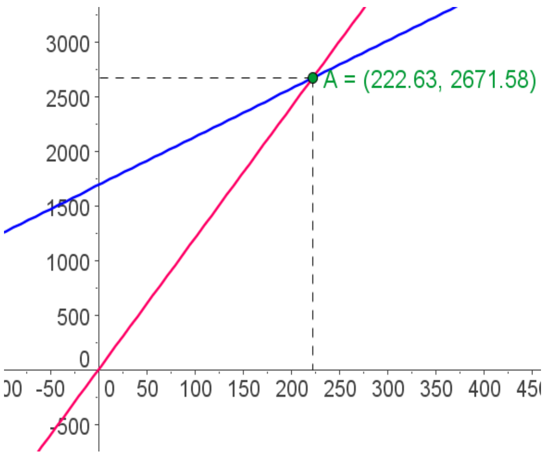
$$12x = 4{,}4x + 1\,692$$

$$12x - 4{,}4x = 1\,692$$

$$7{,}6x = 1\,692$$

$$x = \frac{1\,692}{7{,}6}$$

$$x = 222{,}63$$



Portanto, o ponto de equilíbrio físico, ou seja, número mínimo de peças vendidas para não ter prejuízo é, aproximadamente, 222,63 peças.

Substituindo o valor de *x* em qualquer uma das duas funções, temos:

$$R = 12 \cdot x \qquad CT = 4{,}4 \cdot x + 1\,692$$

$$R = 12 \cdot 222{,}63 \qquad CT = 4{,}4 \cdot 222{,}63 + 1\,692$$

$$R = 2\,671{,}58 \qquad CT = 2\,671{,}58$$

Portanto, o ponto de equilíbrio financeiro, ou seja, o valor mínimo em reais para não ter prejuízo é R$ 2 671,58.

**Exercícios:**

1. Esboce o gráfico das seguintes funções de uma empresa. Para determinar os dois pontos da reta, sugerimos usar *x* igual a 0 e *x* igual a 300. Elabore os gráficos cada um em um Plano Cartesiano.
   a. R = 12*x*
   b. CV = 4,4*x*
   c. CT = 4,4*x* + 1.692
   d. LB = 7,6*x* – 1692

2. Determine o ponto de encontro entre as seguintes retas. Em seguida esboce o gráfico representando cada par de retas em um Plano Cartesiano
   a. $y_1 = x - 3$ e $y_2 = -x + 3$
   b. $y_1 = -2x + 3$ e $y_2 = 2x + 1$
   c. $y_1 = 5x - 4$ e $y_2 = 4x - 2$
   d. $y_1 = 3x$ e $y_2 = -2x + 5$

3. Em uma determinada loja, o salário mensal fixo de um vendedor é de R$ 240,00. Além disso, ele recebe R$ 12,00 por unidade vendida.
   a. Expresse o ganho mensal (S) desse vendedor em função do número (u) de unidades vendidas.
   b. Quantas unidades ele deve vender para receber um salário de R$ 720,00?

4. Um botijão de cozinha contém 13 kg de gás. Sabendo que em média é consumido, por dia, 0,5 kg de gás:
   a. Expresse a massa (m) de gás no botijão, em função do número (t) de dias de consumo.
   b. Esboce o gráfico desta função.
   c. Depois de quantos dias o botijão estará vazio?

5. Uma empresa de assistência médica oferece dois planos de saúde aos seus associados. No plano A, o associado paga R$ 30,00 por mês, mais R$ 6,00 por consulta; no plano B, a mensalidade é de R$ 45,00, mas a consulta

custa apenas R$ 4,00. Calcule o número máximo de consultas mensais que podem ser feita por um associado, de modo a tornar o plano A mais vantajoso.

6. Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida. Sendo $x$ o número de peças unitárias produzidas, determine:
   a. A lei da função que fornece o custo da produção de $x$ peças;
   b. Calcule o custo de produção de 400 peças.

7. Um motorista de táxi cobra R$ 4,50 de bandeirada mais R$ 0,90 por quilômetro rodado. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número de quilômetros rodados, calcule o preço a ser pago por uma corrida em que se percorreu 22 quilômetros?

8. Uma pessoa, pesando atualmente 70kg, deseja voltar ao peso normal de 56kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200g por semana. Fazendo essa dieta, a pessoa alcançará seu objetivo ao fim de
   a. 67 semanas.
   b. 68 semanas.
   c. 69 semanas.
   d. 70 semanas.
   e. 71 semanas.

9. A empresa Radox produz componentes eletrônicos utilizados na fabricação de rádios portáteis. O custo unitário de produção do rádio é de R$ 95,00 e o custo fixo é de R$ 3750,00. O preço de venda do referido rádio portátil é de R$ 175,00. Determinar:
   a. A função de custo total
   b. A função de receita total
   c. A função lucro total
   d. A produção necessária para um lucro de R$ 20.000,00
   e. Esboce o gráfico do custo total e da receita destacando o ponto de encontro entre as duas retas (ponto de equilíbrio).

10. Um fabricante de bonés opera a um custo fixo de R$1.200,00 por mês (correspondente a aluguel, seguro e prestações de máquinas). O custo variável por boné é de R$2,00. Atualmente são comercializadas 1.000 unidades mensalmente, a um preço unitário de R$5,00. Devido à concorrência no mercado, será necessário haver uma redução de 30% no preço unitário de venda. Para manter seu lucro mensal, de quanto deverá ser o aumento na quantidade vendida?

# ***Funções Quadráticas ou Polinomiais do 2º Grau***

### ***Conceito:***

Uma função é chamada de quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in R$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in R$ em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

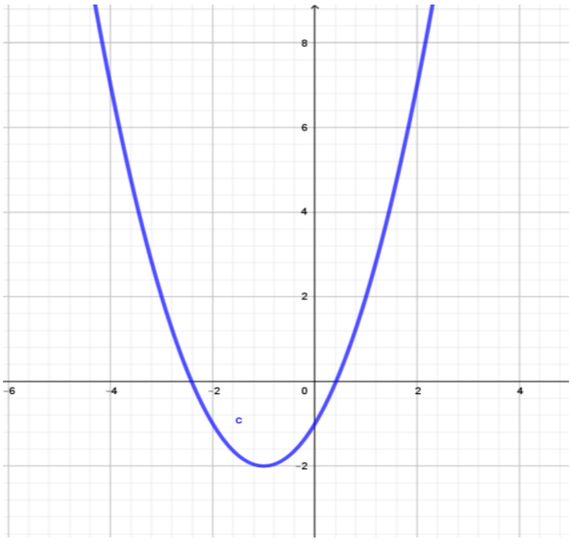
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

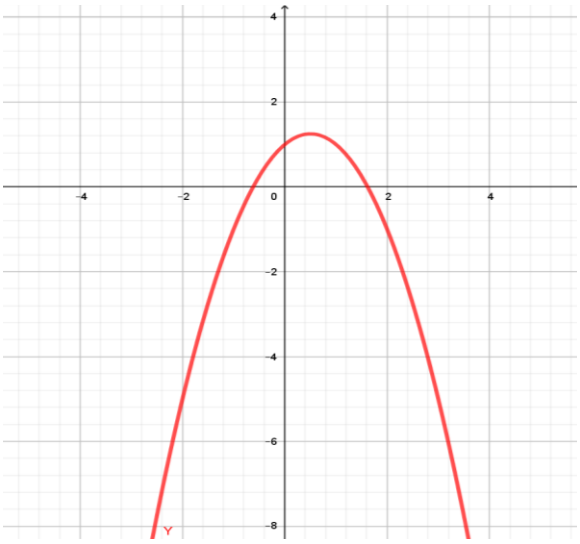
Exemplos de funções do 2º grau

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2 - 3x + 2$ | a = 1 | b = - 3 | c = 2 |
| $f(x) = x^2 - 4$ | a = 1 | b = 0 | c = - 4 |
| $f(x) = -2x^2 + 5x$ | a = – 2 | b = 5 | c = 0 |

### ***O gráfico da função quadrática é uma parábola.***

Observação: Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:





- se $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
- se $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**.

### ***Zero ou Raízes da função do 2º Grau***

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais $x$ tais que $f(x) = 0$.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula:

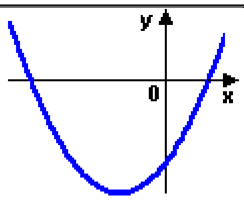
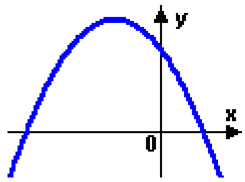
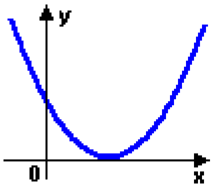
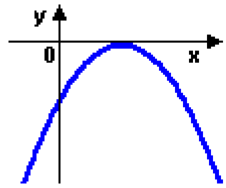
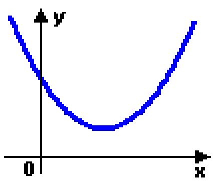
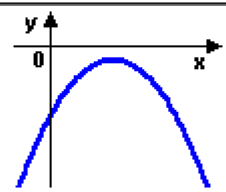
$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observação

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante.

### *Relacionamento entre o discriminante e a concavidade*

Podemos construir uma tabela que relaciona o sinal do discriminante com o sinal do coeficiente do termo dominante da função polinomial.

| Δ | **A parábola no plano cartesiano** | **a > 0**<br>**concavidade para cima** | **a < 0**<br>**concavidade para baixo** |
|---|---|---|---|
| Δ > **0** | Corta o eixo horizontal em 2 pontos |  |  |
| Δ = **0** | Toca em 1 ponto do eixo horizontal |  |  |
| Δ < **0** | Não corta o eixo horizontal |  |  |

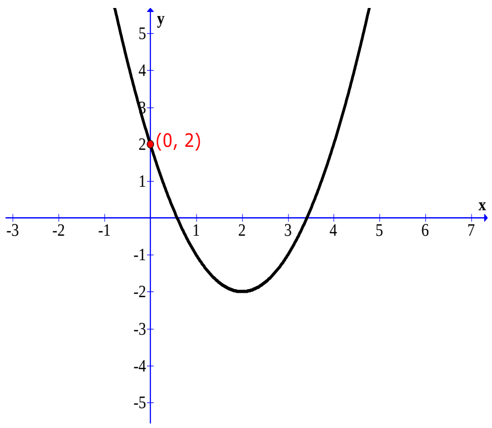
### *O ponto em que a parábola intercepta o eixo y*

Considere a função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do ponto em que a parábola correspondente intercepta o eixo y são (0, c).

**Exemplos:**

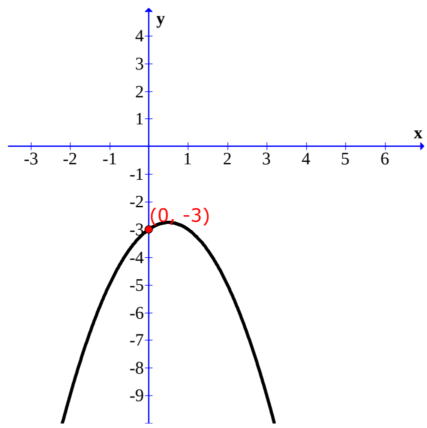
$f(x) = x^2 - 4x + 2$

$f(0) = 0^2 - 4.0 + 2 = 2$




$f(x) = -x^2 + x - 3$

$f(0) = -0^2 + 0 - 3 = -3$



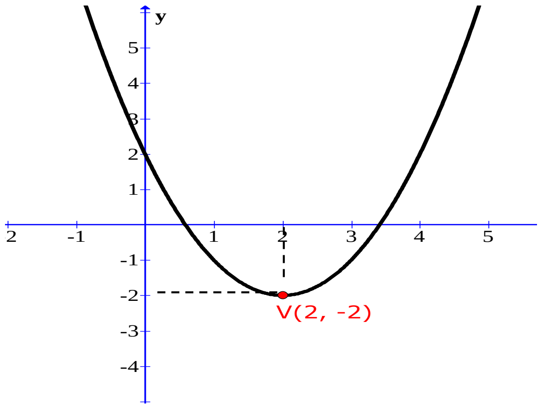
***O vértice da parábola (gráfico de f) é o ponto***

$$V(x_V, y_V)$$

$$x_V = \frac{-b}{2 \cdot a} \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4 \cdot a} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

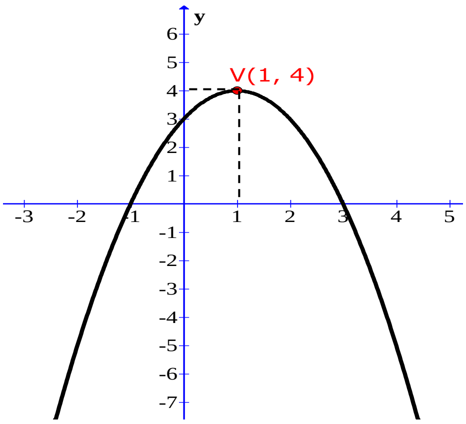
Quando a > 0, V é ponto mínimo de f

$f(x) = x^2 - 4x + 2$




Quando a < 0, V é ponto máximo de f.

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$




***Construção do gráfico da função quadrática***

Para esboçar o gráfico correspondente a uma função quadrática, devemos determinar os pontos principais:

- As raízes
- A intersecção com o eixo y
- As coordenadas do vértice
- Relacionar a concavidade

***Exemplo:***

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$, devemos determinar:

- As raízes

$x^2 - 2x - 3 = 0$

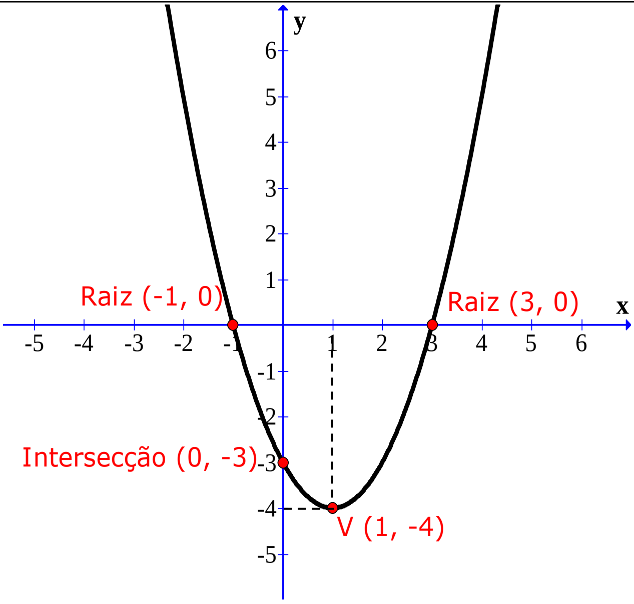
$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

As raízes da função são **(3, 0)** e **(-1, 0)**.




- A intersecção com o eixo y

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$f(0) = 0^2 - 2.0 - 3 = -3$

A intersecção com o eixo y é **(0, -3)**

- As coordenadas do vértice

$$x_V = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4 \cdot a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$$

A coordenada do vértice é V**(1, - 4)**.

- Relacionar a concavidade

Como a = 1 (positivo), a concavidade da parábola é **voltada para cima**.

**Exercícios**

1. Determine a raiz da função:
   a) $y = x^2 - 3x + 2$
   b) $y = 3x^2 - 7x + 2$

2. As equações abaixo definem funções do 2º grau. Para cada uma dessas funções, ache as coordenadas do vértice que a representa:
   a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$
   b) $f(x) = -x^2 + 6x - 2$

3. Esboce o gráfico das seguintes funções, determinando os pontos principais do gráfico:
   a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
   b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
   c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$
   d) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

4. A Receita Total em função do Preço de um produto é dada pela função $\boldsymbol{R = -50Pv^2 + 900PV}$. Esboce o gráfico da função R.

5. Uma sorveteria, a partir de exaustivos estudos, descobriu que a função $LB = -100x^2 + 400x - 100$ expressa o lucro bruto diário que obtém em função do preço. Pergunta-se:
   a) Quais os intervalos de preço que fazem a empresa trabalhar no prejuízo?
   b) Qual o intervalo de preço em que a empresa opera com lucro?
   c) Qual o preço que propicia o maior lucro? Qual é este lucro?

# ***Função Exponencial***

**Definição:** Dado um número real $a$ , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base $a$ a função $f(x) = a^x$ , definida para todo $x$ real, isto é , D($f$) = R.

- No caso de $a > 1$, a função será crescente.
- No caso de $0 < a < 1$, a função será decrescente

Juros do dinheiro acumulado, crescimento ou decrescimento de populações, desintegração radioativa e outros fenômenos podem ser descritos por meio da função exponencial.

Para melhor entendimento, vamos esboçar o gráfico de algumas funções.

## *Equação exponencial*

As equações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente. Observe os exemplos:

$$2^x = 256 \qquad 2^{x+2} = 512$$

$$3^x = \frac{1}{243} \qquad 4^x = 1024$$

As equações exponenciais possuem um método de resolução diferenciado, precisamos igualar as bases para aplicarmos a propriedade de igualdade entre os expoentes.

Muitas vezes precisamos decompor um número em fatores primos para transformá-lo em uma potência que nos ajudará na resolução da equação.

Em alguns casos, para solucioná-la, transformamos a equação exponencial em uma equação do primeiro grau, em outros as transformamos em uma equação do segundo grau.

Vamos demonstrar como utilizar estes artifícios na resolução das cinco equações exponenciais acima.

## *Solucionando Equações Exponenciais*

Observe a resolução da seguinte equação:

$5^x = 625$ ***(fatorando 625 temos: $5^4$)***

$5^x = 5^4$

$x = 4$ A solução da equação exponencial será $x = 4$.

Observação: fatorar significa decompor o número em fatores primos, isto é, escrever o número através de uma multiplicação de fatores iguais utilizando as regras de potenciação.

*Acompanhe outro exemplo:*

Vamos determinar a solução da equação $2^{x+8} = 512$ .

Devemos escrever 512 na forma fatorada, $512 = 2^9$. Então:

$$2^{x+8} = 2^9$$
$$x + 8 = 9$$
$$x = 9 - 8$$
$$x = 1$$

**Exercícios**

1. O lançamento de um produto.

   O departamento de marketing de uma empresa desenvolveu uma campanha para o lançamento de um produto. Está previsto um crescimento exponencial para o volume de vendas, de forma que o Número de produtos Vendidos (NPV) de peças em função do tempo (meses) deverá obedecer à seguinte equação:

$$\boldsymbol{NPV = 2^{t} - 1}$$

   Determine:

   a) Qual o número aproximado de produtos que estará sendo vendido ao final do oitavo mês? Se o preço médio de venda de cada produto é de R$ 100,00 qual foi a receita para esse período?
   b) O ponto de equilíbrio desta nova linha de produtos acontece quando ela vende por mês 511 produtos. Quanto tempo levará para atingir este ponto?
   c) Por outro lado, se o mercado não responder conforme esperado, e o Número de produtos Vendidos (NPV) em função do Tempo vier a obedecer à $\boldsymbol{NPV = 3^{(t-4)} - 218}$, quanto tempo levará, aproximadamente, para atingir o ponto de equilíbrio, considerando os mesmos 511 produtos?

2. Juros Compostos

   A expressão que representa o montante de um capital aplicado ao longo do tempo a uma taxa de juros é dado pela fórmula:

$$M = C \cdot (1 + i)^{n}$$

   M = Montante; C = Capital; i = taxa de juros (% ÷ 100); n = período de aplicação.

   Neste problema, o seu objetivo é responder à pergunta de um empresário que pretende aplicar um excedente de capital, por 3 anos, tempo que pretende se organizar para montar uma filial. Ele tem a proposta de três bancos. O primeiro banco oferece uma taxa de 1,1% ao mês. O segundo banco paga a taxa de 6,9% por semestre e o terceiro banco paga 14% ao ano. Qual seria a aplicação que o final de três anos resultaria no maior montante?

# 2ª Lista de Exercícios de Matemática Discreta

*OBS.: Todas as questões devem ser apresentadas com os cálculos justificando sua resposta, mesmo as com alternativas e deve ser entregue na data estipulada pelo professor.*

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 1\}$ e $C = \{-1, 0, 2\}$ represente os elementos os seguintes produtos:
   a. $A \times B =$
   b. $C \times A =$

2. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B | x + y = 2\}$:
   a. Enumere os pares ordenados pertencentes a relação R.
   b. Represente por meio do diagrama de flechas.
   c. Represente por meio da matriz da relação.
   d. Determine o domínio e a imagem da relação.
   e. Determine a relação inversa de R.
   f. Essa relação é considerada função? Por que?

3. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ construa o grafo orientado da relação R em A dada por $R = \{(x, y) \in A^2 | x - y \geq 0\}$.

4. Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, indicar os elementos das relações binárias, a diagrama de flechas e determine se as relações definem ou não uma função e justifique:
   a. $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$
   b. $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y + x = 5\}$

5. Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a 60% do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 7.875,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

6. Construa os gráficos das seguintes funções lineares e determine o valor dos coeficientes angulares e lineares e se são crescentes ou decrescentes:
   a. $y = 3x + 2$
   b. $y = -3x - 4$

7. Determine se possível, o ponto de encontro entre as seguintes retas. Em seguida esboce o gráfico representando cada par de retas em um Plano Cartesiano
   a. $y = 3x$ e $y = -2x + 5$
   b. $y = -2x + 5$ e $y = -3x + 2$

8. Em Itu uma empresa A de torneiras cobra R$50,00 por um certo modelo e outra empresa B cobra R$ 60,00 pelo mesmo modelo. O proprietário de uma obra em Salto necessita comprar várias dessas torneiras, porém deverá contar com os serviços de frete da empresa na qual irá comprar as torneiras. A empresa A cobra R$ 150,00 de frete até Salto, mas a empresa B não cobra frete algum.
   a. Escreva as leis que relacionam o preço a ser pago pelo dono da obra, em reais, e o número $x$ de torneiras, no caso de ele comprar em A ou no caso de comprar em B;
   b. Encontre o número de torneiras para que seja indiferente comprar na empresa A ou na empresa B;
   c. Esboce os gráficos das duas funções num mesmo plano cartesiano;
   d. Considerando os dados do enunciado e as análises que você desenvolveu até o item (c) deste exercício, responda à seguinte pergunta: em que situação valerá a pena, ao proprietário da obra, comprar as torneiras na empresa A?

9. A função $P = -h^2 + 12h + 64$, representa a produção de um colaborador em relação ao número de horas que o mesmo trabalha.
   a. Esboce o gráfico dessa função ressaltando os principais pontos.
   b. Em que momento a produção é máxima? E em que momento o funcionário não consegue mais produzir?

10. Numa certa cidade, o número de habitantes, num raio de r km a partir do seu centro é dado por $P(r) = 3 \cdot 2^{3r}$, em que r > 0.
   a) Quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?
   b) Se há 98 304 habitantes qual é o raio r, em km?

# ***Mudança de base***

A maioria dos computadores trabalham na base β, onde β é um inteiro ≥ 2, e é normalmente escolhido como uma potência de 2. Assim um número pode ser representado em mais de uma base. Além de que , através de uma mudança de base, é sempre possível determinar a representação em uma nova base. Vejamos então, como se faz mudança de base.

A **base numérica** representa a quantidade de símbolos possíveis para representar um determinado número. Veja a tabela abaixo, sobre quais símbolos podem ser utilizados em cada sistema de numeração.

| **Base Numérica** | **Símbolos** |
|---|---|
| Decimal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 |
| Binário | 0 e 1 |
| Octal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 |
| Hexadecimal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F |

Olhando pra essa tabela é mais fácil perceber que, ao contarmos, quando chegamos no último símbolo precisamos incrementar o número da esquerda para representar o próximo. Por exemplo, ao contarmos na base **decimal**, quando chegamos no 9, precisamos do símbolo 1 para formar o próximo número 10. O mesmo vale para as outras bases numéricas. Por exemplo, no **octal**, quando chegamos no 7, o próximo número é 10, ao chegar no 17, o próximo é 20 e assim sucessivamente. No **binário**, contamos assim: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, …

## ***Mudança da base 10 para a base 2***

**Número inteiro**

Para obter o equivalente binário de um número inteiro da base 10 utiliza-se o procedimento a seguir.

I. Divide-se o número por 2;
II. Divide-se por 2 o quociente da divisão anterior;
III. Observe-se que se trata de divisão inteira, ou seja, com resto. O processo é repetido até que seja obtido quociente igual a zero.

O número binário é formado pela concatenação dos restos das divisões, tomados do último para o primeiro.

1. <u>Seja o numeral 13 na base 10, para base 2:</u>

Dividindo sucessivamente por 2, vem:

$$\begin{array}{llll} 13 & \underline{|2} & & \\ \ 1 & 6 & \underline{|2} & \\ & 0 & 3 & \underline{|2} \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

Observe os algarismos de baixo para cima: 1101 Portanto, 13 na base 10 é representado por 1101 na base

$$(13)_{10} = (1101)_2$$

2. <u>1101 da base 2, para a base 10,</u>

Neste caso o procedimento é multiplicar cada algarismo do número na base 2 por potências crescente de 2, da direita para a esquerda e somar todas as parcelas. Assim:

$$1101 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13\ .$$

Logo, $(1101)_2 = (13)_{10}$.

**<u>Número fracionário</u>**

Para obter o equivalente binário de um número fracionário da base 10 o procedimento é o seguinte.

I. Multiplica-se o número por 2;

II. A parte inteira do resultado obtido é o primeiro dígito do número na base 2 e, a parte fracionária é, novamente, multiplicada por 2;

III. O processo é repetido até que se obtenha a parte fracionária nula.

3. <u>Seja representar o numeral 0,375, da base 10, na base 2.</u>

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0},375 & 0,750 & 0,500 \\ \underline{\times\ 2} & \underline{\times\ 2} & \underline{\times\ 2} \\ \mathbf{0},750 & \mathbf{1},500 & \mathbf{1},000 \end{array}$$

Portanto, 0,375 na base 10, é representado por 0,011 na base 2.

$$(0{,}375)_{10} = (0{,}011)_2$$

Tem-se, então, de acordo com o apresentado que $(13)_{10} = (1101)_2$, portanto, 13,375, da base 10, é representado, na base 2, da forma:

$$(13{,}375)_{10} = (1101{,}011)_2$$

4. <u>Seja, agora, a representação do numeral 0,1, da base 10, na base 2.</u>

$$\begin{array}{cccccc} 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,8 & 0,6 & 0,2 \\ \underline{x\ 2} & \underline{x\ 2} & \underline{x\ 2} & \underline{x\ 2} & \underline{x\ 2} & \underline{x\ 2} \\ 0,2 & 0,4 & 0,8 & 1,6 & 1,2 & 0,4 \end{array}$$

Observe-se que as multiplicações começam a se repetir, impossibilitando que se chegue a um resultado com a parte fracionária nula. Portanto o 0,1, da base 10 , tem a seguinte representação na base 2:

$$(0,1)_{10} = (0,0001100110011...)_2$$

Ou seja, 0,10 da base 10 não tem representação finita na base 2 podendo ser representado, nesta base, somente de forma aproximada.

Em um computador com tamanho de palavra de 16 bits, $(0,1)_{10}$ é armazenado como $(0,0001100110011001)_2$.

Que, quando convertido para a base 10, resulta em $(0,0999908447265625)_{10}$. Produzindo, portanto, um erro da ordem de $9 \times 10^{-6}$.

5. <u>0,110 da base 2, para a base 10,</u>

Neste caso o procedimento é multiplicar cada algarismo do número na base 2, após o ponto, por potências decrescente de 2, da esquerda para a direita e somar todas as parcelas. Assim:

$$0,110 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = 0,75 \ .$$

Logo, $(0,110)_2 = (0,75)_{10}$.

6. <u>3,95 da base 10, para a base 2.</u>

O procedimento neste caso é transformar a parte inteira seguindo o item (3.) o que nos fornece:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

Logo, $(3)_{10} = (11)_2$ e da parte decimal, obtemos:

$0,95 \times 2 = \mathbf{1},9$

$0,9 \times 2 = \mathbf{1},8$

$0,8 \times 2 = \mathbf{1},6$

$0,6 \times 2 = \mathbf{1},2$

$0,2 \times 2 = \mathbf{0},4$

$0,4 \times 2 = \mathbf{0},8$ ...

Logo, $(3.95)_{10} = (11,1111001100\ .\ .\ .)_2$.

Portanto o número $(3,95)_{10}$ não tem representação exata na base 2. Esse exemplo ilustra também o caso de erro de arredondamento nos dados.

Nos exemplos acima, mudamos a representação de números na base 10 para a base 2 e vice-versa. O mesmo procedimento pode ser utilizado para mudar da base 10 para uma outra base qualquer e vice-versa. A pergunta que surge naturalmente é: qual o procedimento para representar um número que está numa dada base β1 em uma outra base β2, onde β1 ≠ β2 ≠ 10? Nesse caso devemos seguir o seguinte procedimento: inicialmente representamos o número que está na base β1 na base 10 e a seguir o número obtido na base 10, na base β2.

**Exercícios**

1. Converter os seguintes números para a base binária:

a) $10_{10}$

b) $121_{10}$

c) $5{,}12_{10}$

2. Converter os seguintes números para a base octal:

a) $64_{10}$

b) $1255_{10}$

c) $49{,}7_{10}$

3. Converter os seguintes números para a base decimal:

a) $10_{2}$

b) $64_{8}$

c) $101_{2}$

d) $101{,}1001_{2}$

e) $512_{8}$

f) $111110000{,}11110_{2}$

g) $77_{8}$

4. Converter os seguintes números para as bases indicadas:

a) $11_{2}$ → octal

b) $644_{8}$ → hexadecimal

c) $255_{16}$ → binário

d) $512_{8}$ → ternário (base 3)

e) $111000111_{2}$ → octal

5. Qual é a soma de $111001_{2}$ e $11000011_{2}$? (Dê o resultado em base 2 e 10).

6. Qual é a soma de $12211_{3}$ e $12112_{3}$?

7. Qual é a soma de $332211_{4}$ e $132132_{4}$?

# ***Noções De Lógica***

## *Princípios da lógica.*

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio. São eles:

- **Princípio de Identidade**
  O que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio. Isso não é um simples jogo de palavras; na verdade, é possível defender a noção oposta, de que a realidade é fluida, de que nada permanece igual a si próprio, e que qualquer raciocínio sobre objetos é uma ficção.
- **Princípio da Não Contradição**
  Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.
- **Princípio do Terceiro Excluído**
  Todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

Sobre esses princípios repousa todo o arcabouço da Lógica Clássica.

## *Proposições Simples.*

O primeiro passo na construção de uma linguagem simbólica, mais adequada à formulação dos conceitos da Lógica, é a apresentação do que chamamos proposição simples. Em linhas gerais, uma proposição simples (ou enunciado, ou sentença), é uma declaração que exprime um pensamento com sentido completo.

Considere, por exemplo, as seguintes sentenças:

a) A Lua é um satélite da Terra.
b) Sócrates é um homem.
c) 1 + 1 = 2.
d) 2 + 2 = 3.
e) Todos os homens são mortais.
f) Aonde você está indo?
g) Faça seu dever de casa.

Em geral, as proposições simples são constituídas por um sujeito, um verbo, e seus complementos. Dessas sentenças, (f) e (g) não são proposições e das demais apenas (d) é falsa, enquanto as (a), (b), (c) e (e) são verdadeiras.

Além das proposições, a Lógica dispõe de uma função, chamada "valor lógico" (representada por VL), que associa a cada proposição simples um de dois valores lógicos, chamados "verdadeiro" (representado por V) ou falso (representado por F). Geralmente, o valor lógico V ou F é associado à proposição, em consonância com o significado da proposição no mundo real, embora isso não seja essencial.

Em linguagem simbólica, costumamos representar as proposições simples pelas letras p, q, r, s, t, etc.

### *Proposições Compostas.*

Proposições como "se não chover, vou à praia", ou "vou aprender a dirigir e comprar um carro" são chamadas proposições compostas, e são o resultado de operações sobre proposições simples, como veremos a seguir.

As proposições são chamadas *compostas*, quando são formadas de subproposições e vários conectivos.

**Exemplos:**

- "Rosas são vermelhas e violetas são azuis" é uma proposição composta com as subproposição "rosas são vermelhas" e "violetas são azuis".
- "João é inteligente ou estuda toda noite" é uma proposição composta com as subproposições "João é inteligente" e "João estuda toda noite".
- "Paris fica na França" é uma proposição simples, pois não pode ser subdividida em proposições mais simples.

## *Cálculo proposicional*

### *Negação*

A partir de uma proposição p qualquer sempre podemos construir outra, denominada *negação de p* e indicada pelo símbolo ~p

**Exemplos**

a) p: $9 \neq 5$
~p: $9 = 5$

b) p: $7 > 3$
~p: $7 \leq 3$

c) p: $2 \in \mathbf{Z}$
~p: $2 \notin \mathbf{Z}$

d) p: $3 \mid 11$
~p: $3 \nmid 11$

Para que ~p seja realmente um proposição devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira (V) ou falsa (F). Podemos então postular que:

***A proposição ~p tem sempre o valor oposto de p, isto é , ~p é verdadeira quando p é falsa e ~p é falsa quando p é verdadeira.***

Esse critério está resumido na tabela denominada ***<u>tabela-verdade</u>*** da proposição ~p.

| ***p*** | ***~p*** |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

## *Conectivos*

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos: conectivo $\wedge$ (lê-se: **e**) e o conectivo $\vee$ ( lê-se: **ou**) .

### 1. Conectivo $\wedge$ - Conjunção

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições $p$ e $q$ , obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças $p$ e $q$. Se conhecermos o valor verdade dos fatores de uma conjunção, o que podemos dizer do valor verdade da conjunção? Ora, a expressão

**João é magro e José é alto**

será verdadeira unicamente no caso em que os dois fatores forem verdadeiros, isto é, se João for magro e José for alto; se um dos dois fatores (ou ambos) for falso, a conjunção é falsa.

**Exemplos:**

1º) p: $2 > 0$
q: $2 \neq 1$
$p \wedge q$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$

2º) p: $2 \mid 5$
q: $3 \mid 5$
$p \wedge q$: $2 \mid 5$ e $3 \mid 5$.

Podemos então postular que:

***A conjunção p ∧ q é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então p ∧ q é falsa.***

O valor lógico do resultado da operação de conjunção pode ser apresentado através da tabela-verdade abaixo, onde p e q são proposições quaisquer:

| ***p*** | ***q*** | ***p ∧ q*** |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |

### 2. Conectivo $\vee$ - Disjunção

Colocando o conectivo $\vee$ entre duas proposições $p$ e $q$, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada *disjunção* das sentenças $p$ e $q$.

Às vezes, a língua portuguesa encerra alguma ambiguidade no uso do conectivo "ou"; a utilização de "ou" entre dois fatos indica que um deles é verdadeiro, mas pode não deixar claro se ambos o são; normalmente, na linguagem natural, procura-se resolver a ambiguidade utilizando-se o contexto. Por exemplo, na frase:

**Maria foi à praia ou ao mercado**

parece que apenas um dos fatos é verdadeiro, pois é difícil alguém ir à praia e ao mercado simultaneamente; no entanto, se não houver exigência se simultaneidade, pode ocorrer que Maria tenha ido à praia e depois ao mercado, e ambos os fatos são verdadeiros.

Abaixo, a tabela que apresenta o resultado da operação de disjunção inclusiva; p e q são proposições quaisquer.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

**Exemplos:**

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das sentenças:

1º. $2 > 0$ e $2 \neq 1$

$p$: $2 > 0$ **(V)**

$q$: $2 \neq 1$ **(V)**

*Então*: $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$ **(V)**

2º. $-2 < -1 \ e \ (-2)^2 < (-1)^2$

$p$: $-2 < -1$ **(V)**

$q$: $(-2)^2 < (-1)^2$ **(F)**

*Então*: $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$: $-2 < -1 \ e \ (-2)^2 < (-1)^2$ **(F)**

3º. $5 > 0 \ ou \ 5 > 1$

$p$: $5 > 0$ **(V)**

$q$: $5 > 1$ **(V)**

*Então*: $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$: $5 > 0 \ ou \ 5 > 1$ **(V)**

4º. $2 \mid 5$ ou $3 \mid 5$

$p$: $2 \mid 5$ **(F)**

$q$: $3 \mid 5$ **(F)**

*Então*: $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$: $2 \mid 5$ ou $3 \mid 5$ **(F)**

## *Condicionais*

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições através do emprego de outros dois símbolos lógicos chamados de condicionais:

- o condicional se ...então...(símbolo:$\rightarrow$ )
- o condicional ... se e somente se... ( símbolo:$\leftrightarrow$ )

## *1.* Condicional →

Colocando o condicional → entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \to q$ , que se lê: *" se p então q", " p é condição necessária para q", " q é condição suficiente para p"*

*Exemplos:*

1º) p: 2 | 4
q: 4 | 12
p → q: 2 | 4 → 4 | 12

2º) p: 10 = 5.2
q: 3 | 10
p → q: 10 = 5.2 → 3 | 10

Postulando um critério de classificação para a proposição p → q com base nos valores lógicos de p e q, temos:

**O condicional *p → q* é falso somente quando *p* é verdadeira e *q* é falsa; caso contrário, *p → q* é verdadeiro.**

A tabela que indica o resultado da operação de condicionamento é apresentada abaixo.

| *p* | *q* | *p → q* |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

O conectivo "se ... então" tem vários *sinônimos*; se representarmos por *p* a frase "a chuva continuar a cair", e por *q* a frase "o rio vai transbordar", então $p \to q$ pode representar qualquer das expressões abaixo:

- "Se a chuva continuar a cair, então o rio vai transbordar"
- "Se a chuva continuar a cair, o rio vai transbordar"
- "O rio vai transbordar, se a chuva continuar a cair"
- "O fato de a chuva continuar a cair implica em o rio transbordar"
- "A chuva continuar a cair é condição suficiente para o rio transbordar".

## 2. Condicional ↔ Bicondicional

Colocando o condicional ↔ entre duas preposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, que se lê: "! *p* se e somente se *q*", " *p* é condição necessária e suficiente para *q*", "*q* é condição necessária e suficiente para *p*" ou " se *p* então *q* e reciprocamente".

***Exemplo:*** Considere a proposição

**João será aprovado se e somente se ele estudar.**

Nesse caso, temos duas proposições "João será aprovado" e "ele estudar", ligadas pelo conectivo "se e somente se". Em Lógica Simbólica, essa operação é chamada de "bicondicionamento", e seu conectivo é representado pelo símbolo ↔.

Então, se $p$ e $q$ são proposições, a expressão $p \leftrightarrow q$ é chamada bicondicional de $p$ e $q$. Dizemos que a bicondicional é verdadeira quando ambos os termos são verdadeiros ou ambos são falsos; quando um é falso e outro é verdadeiro, a bicondicional é falsa.

Na a expressão citada, o conectivo "se e somente se" indica que se João estudar será aprovado, e que essa é a única possibilidade de João ser aprovado, isto é, se João não estudar, não será aprovado. Os dois acontecimentos serão ambos verdadeiros ou ambos falsos, não existindo possibilidade de uma terceira opção.

Podemos postular que:

**O condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro somente quando $p$ e $q$ são verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer o condicional $\leftrightarrow$ é falso.**

A tabela do bicondicionamento é apresentada abaixo.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |

Além do "se e somente se", a operação bicondicional é indicada por termos como "unicamente se", "exceto se" e outras análogas; por exemplo, as expressões

- "João será aprovado se e somente se estudar"
- "João será aprovado unicamente se estudar"
- "João não será aprovado, exceto se estudar"
- "João estudar é condição necessária e suficiente para ser aprovado"

**<u>Exercícios</u>**

1. Quais das sentenças abaixo são proposições? E quais delas são verdadeiras?

   a) $5 . 4 = 20$ b) $5 . 4 = 3$ c) $2 + 7 . 3 = 5 . 4 + 3$

   d) $5(3 + 1) = 5.3 + 5.1$ e) $1 + 3 \neq 1 + 6$ f) $11 – 4.2$

2. Qual a negação de cada uma destas proposições? Que negações são verdadeiras?

   a) $6.4 = 24$ b) $5.7 -2 \leq 5.6$ c) $3.2 + 1 > 5.6$

   d) $3.(11 - 7) \neq 5$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ f) $\sqrt{2} < 1$

3. Classificar como verdadeira ou falsa cada uma das proposições compostas:

   a) $3 > 1$ e $4 > 2$

   b) $3 > 1$ ou $3 = 1$

c) $2 \mid 4$ ou $2 \mid (4 + 1)$

d) $3(5 + 2) = 3.5 + 3.2$ e $3 \mid 7$

e) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $5 \mid 11$

f) $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$

4. Classificar em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo:

a) $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3.4$

b) $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

c) $5 + 7.1 = 10 \rightarrow 3.3 = 9$

d) mdc $(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$ é número primo.

e) $2 \mid 8 \rightarrow$ mmc $(2, 8) = 2$

f) $6 \leq 2 \leftrightarrow 6 - 2 \geq 0$

5. Admitindo que ***p*** e ***q*** são verdadeiras e ***r*** é falsa, determine o valor (V ou F) de cada proposição abaixo:

a) $p \rightarrow r$

b) $p \leftrightarrow q$

c) $r \rightarrow p$

d) $p \vee r \leftrightarrow q$

# ***Ordem de precedência das operações***

Com o auxílio dos conectivos podemos construir proposições compostas mais elaboradas. Por exemplo, considere a seguinte proposição:

**"Se o déficit persistir e a arrecadação não aumentar, então ou aumentamos os impostos ou haverá inflação."**

Com a representação:

- ***p:*** o déficit persistir
- ***q:*** a arrecadação aumentar
- ***r:*** aumentamos os impostos
- ***s:*** haverá inflação

a proposição poderá ser escrita na forma simbólica:

$$p \wedge \sim q \rightarrow r \vee s$$

A construção de expressões mais complexas, na forma simbólica, no entanto, apresenta alguns problemas; por exemplo, considere a expressão:

**"Se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa."**

Sua transcrição em termos lógicos, $p \wedge q \rightarrow r$, onde

- ***p:*** Mário foi ao cinema
- ***q:*** João foi ao teatro
- ***r:*** Marcelo ficou em casa

pode indicar duas expressões distintas:

- "Se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa" ou
- "Mário foi ao cinema, e, se João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa"

Para decidir qual proposição está sendo indicada, é necessário saber qual o conectivo que atua primeiro, se o conectivo da conjunção ou da condicional. Por esse motivo é necessário estabelecer uma hierarquia de operação dos conectivos. Tal hierarquia (ou ordem de precedência) é a seguinte:

**1º. ~ (negação)**

**2º. $\wedge$ e $\vee$ (conjunção e disjunção, o que vier primeiro)**

**3º. $\rightarrow$ (condicional)**

**4º. $\leftrightarrow$ (bicondicional)**

Essa ordem de precedência indica que a operação de negação é a primeira a ser executada; em seguida, as operações de conjunção e disjunção na ordem em que estiverem dispostas; depois deve ser executada a operação de condicionamento, e, por fim, a de bicondicionamento.

*Algoritmo Ordem de Precedência*

Passo 1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem.

Passo 2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, nessa ordem.

Passo 3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem.

Passo 4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

Dessa forma, as operações da expressão $\mathbf{p \wedge \sim q \rightarrow r \vee s}$ serão executadas na seguinte ordem:

$$p \wedge \sim q \rightarrow r \vee s$$

$$\mathbf{F \wedge \sim V \rightarrow F \vee V}$$

$$\mathbf{F \wedge F \rightarrow F \vee V}$$

$$\mathbf{F \rightarrow V}$$

$$\mathbf{V}$$

Um caso especial é a utilização de negações consecutivas; por exemplo, a proposição "é falso que eu não tenha saído" pode ser simbolizada por $\sim\sim p$ (onde $p$ representa "eu tenha saído"); nesse caso, a segunda negação deve ser executada antes.

Para simplificar a determinação do valor lógico de uma expressão proposicional, podemos construir uma pequena tabela, na qual dispomos em colunas os valores lógicos das proposições componentes, e, a seguir, os valores lógicos das operações, na ordem de precedência. Por exemplo, determinar o valor lógico da expressão acima, na qual *p* e *r* são falsas, e *q* e *s* verdadeiras:

| ***p*** | ***q*** | ***r*** | ***s*** |
|---|---|---|---|
| F | V | F | V |

| $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $r \vee s$ | $p \wedge \sim q \rightarrow r \vee s$ |
|---|---|---|---|
| F | F | V | V |

Para que a construção da tabela fique unicamente determinada, podemos convencionar que as proposições componentes fiquem dispostas em ordem alfabética.

Quando for necessário modificar a ordem de precedência, podemos utilizar parênteses. Assim, no exemplo dado, a expressão $p \wedge q \rightarrow r$ significa "se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa", e a expressão $p \wedge (q \rightarrow r)$ significa "Mário foi ao cinema, e, se João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa".

A utilização dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ pode causar ambiguidade até mesmo em linguagem natural; por exemplo a expressão

**Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia**

representada por $p \wedge q \vee s$, não deixa claro seu significado; tanto pode significar "Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa, ou então Maria foi à praia", representada por $(p \wedge q) \vee s$, como pode significar "Mário foi ao cinema e ou Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia", representada por $p \wedge (q \vee s)$, que são claramente afirmações distintas.

Segundo a ordem de precedência da Lógica, a expressão dada corresponde à primeira forma apresentada, mas, para evitar qualquer mal-entendido, aconselhamos a utilizar parênteses, nesses casos.

Utilizando parênteses e conectivos, as expressões simbólicas podem assumir aspectos ainda mais complexos, como, por exemplo,

$$(p \leftrightarrow q \vee (\sim r \rightarrow s)) \wedge \sim t$$

Para determinar o ordem de execução das operações no caso em que a expressão possui parênteses, podemos utilizar o algoritmo abaixo:

<u>Algoritmo Ordem de Precedência com Parênteses</u>

Passo 1. Percorra a expressão até encontrar o primeiro ")".

Passo 2. Volte até encontrar o "(" correspondente, delimitando assim um trecho da expressão sem parênteses.

Passo 3. Execute o <u>Algoritmo Ordem de Precedência</u> sobre a expressão delimitada.

Passo 4. Elimine o par de parênteses encontrado.

Passo 5. Volte ao Passo 1.

$$(p \leftrightarrow q \vee (\sim r \rightarrow s)) \wedge \sim t$$
$$(F \leftrightarrow V \vee (\sim F \rightarrow V)) \wedge \sim V$$
$$(F \leftrightarrow V \vee (V \rightarrow V)) \wedge F$$
$$(F \leftrightarrow V \vee V) \wedge F$$
$$(F \leftrightarrow V) \wedge F$$
$$F \wedge F$$
$$F$$

Tabela verdade de: $p \wedge q \rightarrow r$

| **p** | **q** | **r** | **p ∧ q** | **p∧q →r** |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | **V** |
| V | V | F | V | **F** |
| V | F | V | F | **V** |
| V | F | F | F | **V** |
| F | V | V | F | **V** |
| F | V | F | F | **V** |
| F | F | V | F | **V** |
| F | F | F | F | **V** |

**Exercícios:**

1. Sabendo que os valores-verdade das proposições ***p*** e ***q*** são respectivamente V e F, determine o valor lógico (V e F) de cada uma das seguintes proposições.
   a) $p \wedge \sim q$
   b) $\sim p \vee q$
   c) $\sim p \wedge \sim q$
   d) $p \wedge (\sim p \vee q)$
   e) $p \vee \sim (p \wedge q)$
   f) $\sim (p \vee q) \vee p \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

2. Determine o valor lógico de p – VL ($p$) – em cada um dos seguintes casos:
   a) VL ($q$) = V e VL ($p \wedge q$) = F
   b) VL ($q$) = F e VL ($p \vee q$) = F
   c) VL ($q$) = F e VL ($p \rightarrow q$) = F
   d) VL ($q$) = F e VL ($q \rightarrow p$) = V
   e) VL ($q$) = V e VL ($p \leftrightarrow q$) = F
   f) VL ($q$) = F e VL ($q \leftrightarrow p$) = V

3. Construa tabelas-verdade das seguintes fórmulas :
   a. $p \rightarrow \sim q$
   b. $p \wedge \sim q \rightarrow \sim p \vee q$
   c. $(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
   d. $q \vee p \rightarrow p \wedge \sim q$

# *Tautologias*

Seja **v** uma proposição formada a partir de outras (p, q, r,...), mediante emprego de conectivos (∧ ou ∨) ou de modificador (~) ou de condicionais ( → ou ↔). Dizemos que **v** é uma *tautologias ou proposição logicamente verdadeira* quando **v** tem valor lógico V (verdadeiro) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim a tabela-verdade de uma tautologia **v** apresenta só V na coluna de **v**.

*Exemplos:*

1º) (p ∧ ~p) → (q ∨ p) é uma tautologia pois:

| *P* | *q* | *~p* | *p ∧ ~p* | *q ∨ p* | *(p ∧ ~p) → (q ∨ p)* |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | **V** |
| V | F | F | F | V | **V** |
| F | V | V | F | V | **V** |
| F | F | V | F | F | **V** |

2º) ~(p ∧ q) ↔ (~p ∨ ~q) é uma tautologia pois

| *p* | *q* | *p ∧ q* | *~( p ∧ q)* | *~p* | *~q* | *~p ∨ ~q* | *~(p ∧ q) ↔ (~p ∨ ~q)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | F | **V** |
| V | F | F | V | F | V | V | **V** |
| F | V | F | V | V | F | V | **V** |
| F | F | F | V | V | V | V | **V** |

## *Proposições Logicamente Falsas Ou Contradição*

Seja **f** uma proposição formada a partir de outras (p, q, r,...), mediante emprego de conectivos (∧ ou ∨) ou de modificador (~) ou de condicionais ( → ou ↔). Dizemos que **f** é uma *proposição logicamente falsa* ou *contradição* quando **f** tem valor lógico F (falsa) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim a tabela-verdade de uma proposição logicamente falsa **f** apresenta só F na coluna de **f**.

*Exemplo:*

(p ∨ ~q) ↔ (~p ∧ q)

| *p* | *q* | *~q* | *~p* | *p ∨ ~q* | *~p ∧ q* | *(p ∨ ~q) ↔ (~p ∧ q)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | F | **F** |
| V | F | V | F | V | F | **F** |
| F | V | F | V | F | V | **F** |
| F | F | V | V | V | F | **F** |

### *Contingência*

Quando uma proposição não é tautológica nem contradição, a chamamos de contingência ou proposição contingente ou proposição indeterminada.

### *Equivalência Lógica*

Duas proposições $p$ e $q$ são ditas *logicamente equivalentes* ou, simplesmente, *equivalentes* ou *iguais*, denotando-se por

$$\boldsymbol{p \equiv q} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$$

se elas têm tabelas-verdade idênticas. Considere, por exemplo, as tabelas-verdade de **~ (*p* ∧ *q*)** e **~ *p*** ∨ **~ *q***:

| *p* | *q* | *p* ∧ *q* | ~ (*p* ∧ *q*) |
|---|---|---|---|
| V | V | V | **F** |
| V | F | F | **V** |
| F | V | F | **V** |
| F | F | F | **V** |

| *p* | *q* | ~*p* | ~*q* | ~ *p* ∨ ~ *q* |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | **F** |
| V | F | F | V | **V** |
| F | V | V | F | **V** |
| F | F | V | V | **V** |

Observe que as duas são iguais, isto é, ambas as proposições são falsas no primeiro caso e verdadeiras nos outros três. Consequentemente, podemos escrever

$$\sim (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv \sim\boldsymbol{q} \vee \sim\boldsymbol{p} \quad \text{ou} \quad \sim (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{q} \vee \sim\boldsymbol{p}$$

Em outras palavras, as proposições são logicamente equivalentes.

Considere a declaração:

***"Não é verdade que rosas são vermelhas e violetas são azuis"***

Essa declaração pode ser escrita na forma $\sim (p \wedge q)$, onde:

$p$ é "rosas vermelhas" e $q$ é "violetas são azuis".

Entretanto, como observado acima, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim q \vee \sim p$. Por conseguinte, a declaração

***"Rosas não são vermelhas ou violetas não são azuis"***

Tem o mesmo significado que a declaração dada.

**Exercícios:**

1. Construa tabelas-verdade das seguintes fórmulas e identifique as que são tautologias, contradições ou contingências:
   a) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$
   b) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
   c) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$
   d) $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
   e) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

2. Verifique, através de tabelas-verdades, a validade das equivalências :

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

d) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

---

# Como negar proposições compostas

### *Negação de uma conjunção*

Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

***Exemplo:***

$p: a \neq 0$

$q: b \neq 0$

$p \wedge q: a \neq 0$ e $b \neq 0$

$\sim(p \wedge q): a = 0$ ou $b = 0$

### *Negação de uma disjunção*

Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

***Exemplo:***

$p: a = 0$

$q: b = 0$

$p \vee q : a= 0$ ou $b =0$

$\sim(p \vee q): a \neq 0$ e $b \neq 0$

### *Negação de um condicional simples*

Já que $\sim(p\rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p\rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

***Exemplo:***

$p: 2 \in Z$

$q: 2 \in Q$

$p \rightarrow q: 2 \in Z \rightarrow 2 \in Q$

$\sim(p \rightarrow q): 2 \in Z$ e $2 \notin Q$

### *Negação de uma bicondicional*

Já que $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$, podemos estabelecer que a negação de $p \leftrightarrow q$ é a proposição $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

***Exemplo:*** p: $2 \in Z$

q: $2 \in Q$

$p \leftrightarrow q$: $2 \in Z \leftrightarrow 2 \in Q$

$\sim(p \leftrightarrow q)$: $(2 \in Z \wedge 2 \notin Q) \vee (2 \in Q \wedge 2 \notin Z)$

| PROPOSIÇÃO | NEGAÇÃO |
|---|---|
| $p \wedge q$ | $\sim p \vee \sim q$ |
| $p \vee q$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
| $p \rightarrow q$ | $p \wedge \sim q$ |
| $p \leftrightarrow q$ | $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ |

<u>**Exercícios:**</u>

1) Dizer qual é a negação de cada proposição abaixo:

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ou $3 \cdot 10 \neq 6 \cdot 5$

b) $\frac{3}{7} \geq 1$ e $-3 \geq -7$

c) $2^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

d) $(-3)^2 = 9 \leftrightarrow \sqrt{9} \neq -3$

e) $2 \leq 5 \rightarrow 3^2 \leq 5^2$

f) O número 2 é primo ou é par

2) Classifique em V ou F as negações construídas no exercício anterior.

3) Qual a negação de cada uma das sentenças abaixo?

a) Se ela trabalhará, ganhará dinheiro.

b) Faz frio e chove.

c) Ele nada, se e somente se, a água está morna.

d) Se o Brasil reduzir o custo do comércio exterior, então aumentará o fluxo de trocas bilaterais com outros países.

e) Se um número é múltiplo de 10, então termina por zero.

# $3^a$ Lista de Exercícios de Matemática Discreta

*OBS.: Todas as questões devem ser apresentadas com os cálculos justificando sua resposta, mesmo as com alternativas e deve ser entregue na data estipulada pelo professor.*

1. Faça as conversões de base numérica indicadas:
   a. $135_{10}$ → binária
   b. $5\ 345_6$ → decimal
   c. $0{,}1218_{10}$ → binária
   d. $33{,}023_4$ → octal
   e. $101101_2$ → hexadecimal
   f. $11{,}0101_2$ → decimal
   g. $8CB2_{16}$ → binária

2. Se a = 1011 e b = 11001 estão na base 2, então o número a + b no sistema binário será:
   a. 110110 b. 100100 c. 11101 d. 111110

3. Sejam as proposições: p: Gosto de viajar e q: Visitei o Chile. Escreva as sentenças verbais que estão representadas pelas proposições abaixo:
   a. $\sim q \rightarrow \sim p$
   b. $(p \ \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
   c. $q \wedge \sim p$

4. Descreva as sentenças abaixo em termos de proposições simples e operadores lógicos:
   Exemplo: Se 1 > 2 então qualquer coisa é possível.
   p: 1 > 2 q: qualquer coisa é possível frase: $p \rightarrow q$
   a. Se elefantes podem subir em árvores, então 3 é um número irracional.
   b. É proibido fumar cigarro ou charuto.
   c. Não é verdade que π > 0 se e somente se π > 1.
   d. Se as laranjas são amarelas, então os morangos são vermelhos.
   e. É falso que se Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil.
   f. Se é falso que Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil.

5. Ache as tabelas-verdade para:
   a. $\sim p \wedge \sim q$
   b. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
   c. $p \vee \sim r \rightarrow q \vee \sim r$
   d. $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

6. Considerando $p$ e $q$ proposições verdadeiras, e $r$ e $s$ proposições falsas, determine o valor lógico das proposições abaixo:
   a. $\big((\sim r \wedge \sim s) \vee (p \rightarrow q)\big) \leftrightarrow (r \vee q)$
   b. $\Big((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee \big(\sim(p \wedge \sim q)\big)\Big) \rightarrow (r \vee s)$

7. Verifique se a proposição $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ é um tautologia, uma contradição ou uma contingência.

8. Use as tabelas-verdade para mostrar que: $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p$.

9. Qual a negação de cada uma das seguintes sentenças?
   a. O gato mia e o rato chia.
   b. João não é tricolor e não é flamenguista.
   c. Pimenta nos olhos dos outros é refresco ou colírio.
   d. Se vergonha matasse, Gabriela já teria morrido.
   e. Se o cavalo é velho, o remédio é capim novo.
   f. Se Maomé vai a montanha, a montanha vem até Maomé.
   g. 2 é par e 3 é ímpar.

10. Como fica a negação da seguinte frase?

    *Falar é prata, se, e somente se, calar for ouro.*

    Use as tabelas-verdade para mostrar a equivalência entre a frase e sua negação.

# Álgebra De Matrizes

## *Introdução*

Na Ciência da computação, uma **estrutura de dados** é um modo particular de armazenamento e organização de dados em um computador de modo que possam ser usados eficientemente.

Diferentes tipos de estrutura de dados são adequadas a diferentes tipos de aplicação e algumas são altamente especializadas, destinando-se a algumas tarefas específicas.

Dados são frequentemente organizados em *arrays*, isto é, conjuntos cujos elementos são indexados por um ou mais índices. Normalmente, um *array* unidimensional é chamado de vetor, e um *array* bidimensional é chamado de matriz. Apresentamos aqui a motivação para estas estruturas e sua notação.

## *Matrizes*

Uma matriz A é um *array* retangular de números e normalmente representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Matriz de ordem *m* x *n* :** Podemos considerar uma matriz como sendo uma tabela retangular de números reais (ou complexos) dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas. Diz-se então que a matriz tem ordem $m \times n$ (lê-se: ordem $m$ por $n$).

**Exemplos:**

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 5}$ : **Uma** linha e **cinco** colunas (matriz de ordem 1 por 5 ou 1 x 5)
- $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times 1}$ : B é uma matriz de **quatro** linhas e **uma** coluna, portanto de ordem 4 x 1.

**Notas:**

1. Se $m = n$ , então dizemos que a matriz é quadrada de ordem $n$.

   **Exemplo:**

   $X = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ **:** A matriz X é uma matriz quadrada de ordem 3x3 , dita simplesmente de ordem 3 .

2. Uma matriz $A$ de ordem $m$ x $n$, pode ser indicada como $A = (a_{ij})_{mxn}$ , onde $a_{ij}$ é um elemento da linha $i$ e coluna $j$ da matriz. Assim , por exemplo, na matriz $X$ do exemplo anterior , temos $a_{23} = 2$, $a_{31} = 4$, $a_{33} = 3$ $a_{3,2} = 5$, etc.

***Exemplo:*** Determinar a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ é a matriz genérica e seus elementos serão calculados da seguinte forma:

$a_{ij} = 2 \cdot i + j$

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ | $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$ | $a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$ |
| $a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$ | $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6$ | $a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ |

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

3. **Matriz Identidade de ordem $\boldsymbol{n \times n}$**: A matriz identidade $n \times n$ ou matriz unitária, denotada por $I_n$, ou simplesmente $I$ é a matriz com 1 na diagonal principal e 0 em todas as outras entradas:

   $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$ , onde $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

   Assim a matriz identidade de 2ª ordem ou seja de ordem 2x2 ou simplesmente de ordem 2 é:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   A matriz identidade de 3ª ordem ou seja de ordem 3x3 ou simplesmente de ordem 3 é:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **Transposta de um matriz *A***: é a matriz $A^t$ obtida de $A$ permutando-se as linhas pelas colunas e vice-versa.

   **Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \to A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

   **Notas:**

   4.1) Se $A = A^t$, então dizemos que a matriz $A$ é simétrica.

   4.2) Se $A = -A^t$, dizemos que a matriz $A$ é anti-simétrica.

   É óbvio que as matrizes simétricas e anti-simétricas são quadradas.

   4.3) Sendo $A$ uma matriz anti-simétrica, temos que $A + A^t = \mathbf{0}$ (matriz nula).

***Operações com Matrizes***

**Definição:** A *soma* de duas matrizes de *mesmo tamanho* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de $A$ e $B$, ou seja, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ; para $i = 1; : : ; m$ e $j = 1; : : ; n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

**Exemplo:** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de $C$ a soma das duas matrizes $A$ e $B$, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+5 & -3+(-2) \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

O produto da matriz *A* pelo escalar *k*, denotado por $k \cdot A$ ou simplesmente *kA*, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de *A* por *k*. Isto é:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \ldots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} \ldots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Também definimos :

$$-A = (-1)A \quad \text{e} \quad A - B = A + (-B)$$

A matriz –*A* é chamada de oposto da matriz *A* e a matriz *A* – *B* é chamada de diferença de *A* e *B*. A soma de matrizes de tamanho diferentes não é definida.

**Exemplo:** Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$. Então:

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.(-2) & 2.3 \\ 2.0 & 2.4 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.4 & -3.6 & -3.8 \\ -3.1 & -3.(-3) & -3.(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -18 & -24 \\ -3 & 9 & 21 \end{bmatrix} =$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{bmatrix}$$

***Produto de Matrizes***

Para que exista o produto de duas matrizes *A* e *B*, o número de colunas de *A*, tem de ser igual ao número de linhas de *B*.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times q} = C_{m \times q}$$

Observe que se a matriz *A* tem ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ e a matriz *B* tem ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{q}$, a matriz produto *C* tem ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{q}$.

Vamos mostrar o produto de matrizes com um exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot2+1\cdot7 & 3\cdot0+1\cdot5 & 3\cdot3+1\cdot8 \\ 2\cdot2+0\cdot7 & 2\cdot0+0\cdot5 & 2\cdot3+0\cdot8 \\ 4\cdot2+6\cdot7 & 4\cdot0+6\cdot5 & 4\cdot3+6\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+7 & 0+5 & 9+8 \\ 4+0 & 0+0 & 6+0 \\ 8+42 & 0+30 & 12+48 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 17 \\ 4 & 0 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

Observe que o produto de uma matriz de ordem $3 \times 2$ por outra $2 \times 3$, resultou na matriz produto *P* de ordem $3 \times 3$.

**Nota:** O produto de matrizes é uma operação não comutativa, ou seja: $A \times B \neq B \times A$

# Determinantes

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo $n \times n$).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de determinante.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

## *Determinante de 1ª ordem*

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M = [a_{11}]$, o seu determinante é o número real $a_{11}$:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

**Por exemplo:**

$$M = [5] \Rightarrow \det M = |5| = 5 \qquad\qquad M = [-3] \Rightarrow \det M = |-3| = -3$$

## *Determinante de 2ª ordem*

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a M, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

*Sendo* $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, *temos*:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 . 5 - 4 . 3 = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

## *Determinante de 3ª ordem*

### *Regra de Sarrus*

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado regra de Sarrus.

Acompanhe como aplicamos essa regra para
$$B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$B = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right.$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

$$B = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right.$$

$$6 + 0 + 16 = 22$$

3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal ( a soma deve ser precedida do sinal negativo):

$$B = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right.$$

$$-24 + 0 + 80 = 56$$

4º passo: Realizar a diferença da soma do produto das diagonais principais e o produto das diagonais secundárias:

$$Det\ B = 22 - 56 = -34$$

**<u>Exercícios</u>**

1. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

2. Construa as seguintes matrizes:

   a. $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

   b. $B = (b_{ij})_{3x3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + 2j, se\ i \neq j \\ i - 3j, se\ i = j \end{cases}$

3. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. Ache:
   a. $A + B$
   b. $3A$
   c. $-4B$
   d. $2A - 3B$

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Ache:
   a. $A \cdot B$
   b. $A^2$
   c. $B \cdot A$

5. Calcule:
   a. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

6. Calcule:
   a. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

7. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 8 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -4 & 6 & -9 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

# ***Análise Combinatória***

O objetivo de se estudar análise combinatória é desenvolver métodos que permitam contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob condições predeterminadas.

### ***Introdução:***

A ciência muitas vezes percorre caminhos aparentemente estranhos para desenvolver suas teorias. A partir da necessidade de se calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar, desenvolveu-se a Análise Combinatória, que estuda os métodos de contagem. Esses estudos se iniciaram no século XVI pelo matemático italiano *Nicollo Fontana*, conhecido como *Tartaglia*, mas como ramo da Ciência, iniciou-se no século XVII. Mas desenvolveu-se em vários estudos de P Femat, B Pascal< W. Leibniz, J. Bernouilli, entre outros.

### ***Princípio Fundamental da Contagem – PFC***

Vamos começar por um exemplo:

Um rapaz possui 4 bermudas e 3 camisas. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas roupas?

Vamos indicar bermuda com a letra *b* e camisa com a letra *c* e dispor as maneiras possíveis em um quadro:

| Bermuda / Camisa | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $c_1 \cdot b_1$ | $c_1 \cdot b_2$ | $c_1 \cdot b_3$ | $c_1 \cdot b_4$ |
| $c_2$ | $c_2 \cdot b_1$ | $c_2 \cdot b_2$ | $c_2 \cdot b_3$ | $c_2 \cdot b_4$ |
| $c_3$ | $c_3 \cdot b_1$ | $c_3 \cdot b_2$ | $c_3 \cdot b_3$ | $c_3 \cdot b_4$ |

O quadro mostra que existem $3 \cdot 4 = 12$ modos distintos.

O princípio fundamental da contagem diz que um acontecimento ocorre em duas situações sucessivas e independentes, sendo que a 1ª situação ocorre de $\boldsymbol{a}$ maneiras e a 2ª situação ocorre de $\boldsymbol{b}$ maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto $\boldsymbol{a \cdot b}$.

**Outros exemplos:**

(1) Em quantas ordens diferentes 4 pessoas podem se sentar num sofá de 4 lugares?

No 1º lugar tem 4 pessoas para se sentar, no 2º lugar, como já se sentou 1 pessoa, agora restam 3 pessoas, no 3º lugar tem 2 pessoas e no 4º lugar tem 1 pessoa. Assim:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades das 4 pessoas se sentarem em um sofá de 4 lugares.

(2) Vejamos, por exemplo, o conjunto A = { 1, 2, 3, 4}. Com ele podemos formar:

- Agrupamentos de um só algarismo: 1, 2, 3, 4;
- Agrupamentos de dois algarismos: 12, 21, 11, 22, 13 etc.;
- Agrupamentos de três algarismos: 123, 111, 213, 321, 344, 423 etc.;

(3) Renato, José e Cristina disputam um torneio de xadrez no qual são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. Quais são as premiações possíveis?

Existem $3 \cdot 2 = 6$ maneiras possíveis de premiação, ou seja, para a posição de campeão há 3 possibilidades e para cada uma delas há 2 possibilidades de vice-campeão.

(4) Uma lanchonete tem em seu cardápio 3 tipos de sanduíches( S1, S2 e S3) e 4 tipos de bebidas ( B1, B2, B3 e B4). De quantas maneiras você pode fazer um lanche nessa lanchonete se comer um sanduíche e tomar uma bebida?

Lanches possíveis: S1B,S1B2,S1B3, S1B4,S2B1,S2B2,S2B3,S2B4,S3B1,S3B2,S3B3,S3B4, 12 possibilidades de lanches. É possível concluir que 3×4=12.

## *Fatorial:*

Dado n ∈ℕ, chamamos de fatorial de n, e indicaremos por **n!**, o produto de n fatores decrescentes de n a 1.

- n! = n•(n-1)•(n-2)•...•3• 2• 1 ; n>1
- 1! = 1
- 0! =1

**Exemplos:**

1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
2) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$
3) (n +2)! = (n + 2) · (n + 1) · n · (n – 1) · (n – 2) · ... · 3 · 2 · 1
4) (n – 3)! = (n – 3) · (n – 4) · (n – 5) · ... · 3 · 2 · 1

***Agrupamentos***

## *Arranjos Simples:*

Dado um conjunto com $n$ elementos distintos, chamamos de arranjo dos $n$ elementos tomados $p$ a $p$ ($p \leq n$) a todo agrupamento ordenado formado por $p$ elementos distintos escolhidos entre os $n$ elemento dados.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

***Exemplos:***

1) Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

   *Solução*: Como cada agrupamento possível se diferencia pela ordem dos professores, iremos utilizar o arranjo com $n = 18$ e $p = 3$:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \ \rightarrow \ A_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896$$

2) Sejam conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, determine quantos úmeros de 4 algarismos distintos existem, utilizando os elementos desse conjunto.

   *Solução:* Utilizando o PFC temos: 9 x 8 x 7 x 6 = 3 024. Notemos que, a verdade, estamos fazendo um arranjo de 9 elementos tomados 4 a 4 (o número, por exemplo, 1234 é diferente do número 1243, isto é a **ordem dos elementos importa**):

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} == \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024$$

## ***Permutação Simples:***

Dado um conjunto com *n* elementos distintos chamamos permutação simples de dos *n* elementos ao arranjo simples particular, onde $p = n$.

Sendo assim, os agrupamentos são formados por todos os elementos, simultaneamente e, como no caso do arranjo, são agrupamentos ordenados:

$$P_n = n!$$

**Exemplo1:**

Determine o número de anagramas da palavra LÁPIS, lembrando que um anagrama é uma palavra formada com as mesmas letras da palavra dada, podendo ter ou não sentido na linguagem usual.

*Solução*: como a palavra LÁPIS tem 5 letras, basta calcular:

$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

**Exemplo2:**

Qual é o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra INFINITO?

*Solução:* Se não houvesse elemento repetido, teríamos um total de $P_8 = 8!$ Anagramas.

Mas como temos letras repetidas (a letra I três vezes e N duas vezes) faremos:

$$P_8 = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6720}{2} = 3360 \text{ anagramas}$$

## *Combinação Simples:*

Dado um conjunto com $n$ elementos distintos, chamamos de combinação dos $n$ elementos tomados $p$ a $p$ ($p \leq n$) a todo agrupamento não ordenado formado por $p$ elementos distintos escolhidos entre os $n$ elemento dados.

$$C_{n,p} = C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

**Exemplos:**

1) Seja o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos deste conjunto.

   *Solução:* Inicialmente, verificamos que {a,b} = {b,a}, isto é, a ordem dos elementos no conjunto não importa. Assim, sendo, temos que os subconjuntos de 3 elementos do conjunto dado são {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4} (ou seja 4 subconjuntos).

   Observemos que cada uma dessas combinações dará origem a 6 = 3! Arranjos simples, de classe 3, dos elementos 1, 2, 3, 4 do conjunto:

   - 123 ⇒ 123, 132, 213, 231, 321, 312
   - 124 ⇒ 124, 142, 214, 241, 412, 421
   - 134 ⇒ 134, 143, 314, 341, 413, 431
   - 234 ⇒ 234, 243, 324, 342, 423, 432

   Temos, então, $C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!1} = 4$, portanto, $3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

2) Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?

   *Solução:* Os agrupamentos são combinações, pois um deles se distingue do outro somente quando apresenta pelo menos uma pessoa diferente. Invertendo a ordem dos elementos, não alteramos o grupo.

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{3024}{24} = 126$$

**<u>Exercícios :</u>**

1) Calcule:

   a) $A_{6,4} + A_{5,2}$

   b) $A_{5,3} \times A_{6,2}$

   c) $C_{4,2} + C_{5,3}$

   d) $C_{7,3} \times C_{6,3}$

2) Seja o conjunto {0, 1, 2, 3, 4}. A partir dele, determine:
   a) Quantos números de 3 algarismos existem?
   b) Quantos números têm seus 3 algarismos distintos?
   c) Quantos são os números de 3 algarismos que são pares?

3) *Anagrama* é uma palavra formada pela transposição das letras de outras palavras, ou seja , é apalavra que se obtém de outra, permutando-se as letras. Determine:
   a) Quantos anagramas podemos formar com a palavra ”problema”?
   b) Quantos começam pela letra “p”?
   c) Quantas começam com “p” e terminam com “a”?

4) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra PRINCIPIO?

5) Uma sala de aula tem 20 alunos , sendo 6 meninos e 14 meninas. Quantos grupos de 2 meninos e 3 meninas podem ser formados?

6) São sorteados na Mega Sena 6 números escolhidos entre os números de 1 a 60. Quantos são os resultados possíveis para esse sorteio?

7) Numa festa, três meninos devem ser apresentados a 5 meninas. De quantas maneiras possíveis eles podem ser apresentados cada menino com cada menina?

8) Existem quatro estradas ligando duas cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantos modos diferentes uma pessoa pode se deslocar da cidade A até a cidade C?

9) Uma sala possui 3 portas. Quantas possibilidades existem para que uma pessoa possa entrar e sair desta sala?

10) Quantos grupos de 2 pessoas podem ser montados com 1000 pessoas?

11) Em uma sala existem 40 pessoas, 18 mulheres e 22 homens. Quantas comissões podem ser montadas nesta sala contendo 3 mulheres e 5 homens?

12) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

13) Determine o número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador.

14) Com as 26 letras do alfabeto: A,B,C,D,...,Z e os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,
    a) quantas placas de carros podem ser escritas contendo 3 letras seguidas de 4 algarismos?
    b) E se as letras e os números fossem distintos?

15) Quantos números diferentes maiores do que 1000 e menores do que 10000 podem ser construídos com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6, sendo:
    a) que cada algarismo aparece somente uma vez?
    b) que os algarismos podem repetir?
    c) os números pares sem repetição?
    d) os números ímpares com repetição?

# 4ª Lista de Exercícios de Matemática Discreta

*OBS.: Todas as questões devem ser apresentadas com os cálculos justificando sua resposta, mesmo as com alternativas e deve ser entregue na data estipulada pelo professor.*

1) Seja a matriz A = $(aij)_{3x4}$ tal que aij = $\begin{cases} i + j, se\ \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 2i - 2j, \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}$, então qual o valor de $a_{22} + a_{34}$ ?

2) Determine a soma dos elementos da 3º coluna da matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$ tal que $a_{ij} = 4 + 3i - j$.

3) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

a) $A + C =$ b) $A - B - C =$ c) $2.B - 2.A + 3.B =$

d) $A \cdot B$ e) $B \cdot C$ f) $B^2 =$

4) Calcule o valor do determinante das seguintes matrizes:

a $[-1000]$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5) Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (p). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

| | Camisa A | Camisa B | Camisa C |
|---|---|---|---|
| Botões p | **3** | **2** | **3** |
| Botões G | **6** | **6** | **5** |

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado pela tabela:

| | Maio | Junho |
|---|---|---|
| Camisa A | **100** | **150** |
| Camisa B | **50** | **100** |
| Camisa C | **50** | **50** |

Nestas condições, obter a tabela que dá as quantidades de botões usados em maio e junho.

6) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

7) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os algarismos 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

8) Dentre as permutações das letras da palavra **triângulo**, qual é o número das que começam por vogal?

9) Um indivíduo possui 25 livros. De quantas formas distintas ele poderá empacotar tais livros em grupos de 4 livros?

10) De quantas maneiras 10 meninos podem sentar-se num banco que tem 3 lugares?

11) Numa sala, temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos podemos formar de 2 rapazes e 3 moças?

12) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil (RS, PR e SC), cada um de uma cor?

13) Há 10 pessoas em um local, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas. De quantos modos podemos perfilar todas essas 10 pessoas de modo que os grupos com as camisas de mesma cor fiquem juntos?

14) Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra ARARUNA?

15) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?