

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Curso de Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Sistemas e Controle

Renato Vilela Lopes

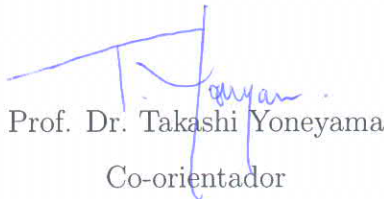
MODELAGEM E CONTROLE PREDITIVO DE UM HELICÓPTERO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão

Orientador



Prof. Dr. Takashi Yoneyama

Co-orientador

Prof. Dr. Homero Santiago Maciel

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro

São José dos Campos, SP - Brasil

2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Lopes, Renato Vilela

Modelagem e Controle Preditivo de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade / Renato Vilela Lopes.

São José dos Campos, 2007.

136f.

Tese de Mestrado – Curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2007. Orientador: Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão. Co-orientador: Prof. Dr. Takashi Yoneyama.

1. Controle Preditivo. 2. Restrições. 3. Aeroespacial. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Sistemas e Controle. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPES, Renato Vilela. **Modelagem e Controle Preditivo de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade**. 2007. 136f. Tese de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Renato Vilela Lopes

TÍTULO DO TRABALHO: Modelagem e Controle Preditivo de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2007

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Renato Vilela Lopes

Rua: Cardeal Leme, 300, Bloco A3, Apartamento 12

CEP 14.030-270 – Ribeirão Preto - SP

MODELAGEM E CONTROLE PREDITIVO DE UM HELICÓPTERO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Renato Vilela Lopes

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Takashi Yoneyama	Co-orientador	-	ITA
Prof. Dr. Alberto Adade Filho	Membro	-	ITA
Prof. Dr. Edvaldo Assunção	Membro Externo	-	UNESP
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury	Membro Externo	-	FEI

A minha mãe, Maria Tereza
Mendes Vilela, por todo amor,
carinho, esforço, dedicação e
abdicação de seus sonhos em
prol dos meus.

Agradecimentos

A Deus fonte de todo conhecimento e sabedoria, que sempre me amparou nos momentos de dificuldade e me deu iluminação nos momentos certos (*“Lux Dei”*) tornando possível a realização desse sonho.

A minha tia Vera Lúcia Vilela, pelo apoio, incentivo e respaldo durante toda a minha jornada.

Ao Prof. Roberto Kawakami Harrop Galvão pela orientação, ajuda, paciência, entusiasmo, amizade e principalmente pela referência que é para mim.

Ao Prof. Takashi Yoneyama, por suas longas discussões com o Prof. Kawakami sobre o modelo do helicóptero e pelas palavras de incentivo e tranquilidade principalmente na reta final deste trabalho.

Ao Engenheiro Anderson de Paulo Milhan pela participação no desenvolvimento do modelo do helicóptero 3DOF, sem o seu apoio técnico o modelo nunca teria saído.

Ao Derso, por todos esses anos de amizade, lealdade e companheirismo. Minha vida se divide em antes e depois de te conhecer.

Aos meus irmãos, Cleiton Rodrigo de Oliveira, Igor Augusto Guzzo e Everton Rossi Júlio por aguentarem meu mau humor, manias e, principalmente, por estarem ao meu lado em todos os momentos.

Ao Engenheiro Eduardo Paiva Baeta, pela paciência, incentivo e, principalmente, por ter me dado a primeira oportunidade de emprego, acreditando no meu potencial e confiando na minha capacidade de conciliar os meus dois sonhos.

Ao Prof. Victor M. Bezerra, pelas idéias valiosas e ajuda no projeto do Filtro de Kalman.

Aos meus familiares por entenderem os momentos de ausência e a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

*"Lux Dei Est,
Consilium Capere Nostrum."*
— CLEITON RODRIGO DE OLIVEIRA

Resumo

Métodos de controle preditivo têm encontrado grande aceitação industrial, principalmente devido a sua capacidade de fazer respeitar restrições operacionais, o que reduz o número de paradas de emergências de um sistema. No entanto, suas aplicações em geral têm sido voltadas a sistemas estritamente estáveis e de dinâmica lenta. Neste trabalho, é implementada uma lei de controle preditivo no espaço de estados para um helicóptero de três graus de liberdade com duas variáveis de entrada. A dinâmica do sistema é não-linear, de 6ª ordem, com amortecimento muito pequeno. Linearizando-se um modelo físico nominal em torno de um ponto de equilíbrio, obteve-se um modelo de predição marginalmente estável. A implementação em tempo real envolve a solução de um problema de Programação Quadrática a cada período de amostragem de $50ms$. Os resultados experimentais são empregados para estudar o efeito de alterações nos horizontes de predição e controle, bem como para ilustrar a capacidade do controlador em fazer respeitar restrições de saída. Por fim, a lei de controle é alterada com a inclusão de um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares do helicóptero e, assim, melhorar o desempenho da malha de controle.

Abstract

Predictive control methods have become widespread in industrial practice, mainly due to their capacity to make operational constraints respectful, which reduces the number of emergency stops and system downtime. However, their applications have generally focused on strictly stable systems with slow dynamics. In this work, a state-space predictive control law is implemented for a three-degree-of-freedom helicopter with two input variables. The system has nonlinear, 6th order dynamics with very small damping. By linearizing a nominal physical model around an equilibrium point, a marginally stable prediction model was obtained. The real-time implementation involves the solution of a Quadratic Programming problem at each 50ms sampling period. Experimental results are employed to investigate the effect of changes on the prediction and control horizons, as well as to illustrate the ability of the controller to enforce output constraints. Finally, the control law is changed with the inclusion of a Kalman Filter to estimate the helicopter angle rate and, thus, enhance the control network efficiency.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xvi
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xvii
LISTA DE SÍMBOLOS	xviii
1 INTRODUÇÃO	24
1.1 Apresentação do Trabalho	24
1.2 Motivação e Proposta do Trabalho	26
1.3 Organização do Trabalho	27
2 MODELAGEM DO HELICÓPTERO 3DOF	29
2.1 Apresentação do sistema	29
2.2 Modelagem do Helicóptero	32
2.2.1 Eixo de elevação e deslocamento	41
2.2.2 Eixo de arfagem	49
2.3 Linearização e Discretização	50
3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO	54
3.1 Formulação de MPC adotada	57

3.1.1	Solução na ausência de restrições	65
3.1.2	Tratamento de restrições	67
4	MATERIAIS E MÉTODOS	73
4.1	Simulação do Modelo	73
4.1.1	Materiais utilizados	73
4.1.2	Procedimento de simulação	73
4.2	Implementação em tempo real	76
4.2.1	Materiais utilizados	76
4.2.2	Ensaio realizados	80
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	88
5.1	Resultados da Simulação do Modelo	88
5.2	Validação Experimental do Modelo	90
5.2.1	Regime Permanente	90
5.2.2	Regime Transitório	94
5.3	Resultados dos Ensaio com o MPC	95
5.3.1	Ajuste dos horizontes de predição e controle	95
5.3.2	Tratamento de restrições	98
5.4	Resultados da Malha de Controle com o Filtro de Kalman	100
6	CONCLUSÃO	105
6.1	Contribuições do Trabalho	106
6.2	Sugestões para Trabalho Futuros	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
	APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS UTILIZADOS NA MODELAGEM	110

A.1	Formalismo de Lagrange	110
A.1.1	Formulação de Lagrange	111
A.2	Matrizes de Transformação Homogênea	113
APÊNDICE B – FILTRO DE KALMAN		120
B.1	Formulação do filtro de Kalman	121
B.1.1	Conceitos Preliminares	121
B.1.2	Filtro de Kalman em tempo discreto	128
ANEXO A – EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DO HELICÓPTERO 3DOF		135
GLOSSÁRIO		137

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – (a) Helicóptero 3DOF utilizado nesse trabalho. (b) Helicóptero com duas asas rotativas conhecido comercialmente como “Chinook”.	29
FIGURA 2.2 – Detalhe do acessório de perturbação ativa existente no aparato 3DOF.	30
FIGURA 2.3 – Vista lateral do helicóptero. A linha pontilhada a 27° da horizontal corresponde à posição do braço de sustentação quando o helicóptero está apoiado sobre a mesa. P_M , P_{CP} , P_B e P_P são os pesos do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa, respectivamente. . . .	33
FIGURA 2.4 – Vista do corpo do helicóptero no plano ortogonal ao braço de sustentação. As letras F e B denotam o motor dianteiro (<i>Front</i>) e traseiro (<i>Back</i>), respectivamente.	33
FIGURA 2.5 – Vista superior do helicóptero.	34
FIGURA 2.6 – Curva experimental da relação entre tensão fornecida a cada motor e magnitude da força gerada F_{MF} (ou F_{MB}). Vale destacar que a curva mostrada é a interpolação dos pontos experimentais obtidos.	39
FIGURA 3.1 – Esquema básico de um controlador preditivo empregando realimentação de estado.	55
FIGURA 3.2 – Ilustração dos conceitos de horizontes de predição e controle.	56
FIGURA 4.1 – Diagrama de simulação do helicóptero 3DOF sob a ação de um controlador preditivo.	74
FIGURA 4.2 – Detalhe da implementação do controlador preditivo em ambiente Matlab/Simulink. O bloco identificado como “ <i>mpcv1</i> ” é a S-Function que implementa a lei de controle.	75

FIGURA 4.3 – Sinais de referência para os ângulos de deslocamento e elevação.	76
FIGURA 4.4 – Configuração da montagem do experimento com o helicóptero 3DOF.	78
FIGURA 4.5 – Detalhe da implementação da malha de controle em tempo real em ambiente Matlab/Simulink.	82
FIGURA 4.6 – Sinais de referência utilizados na validação do modelo não-linear.	83
FIGURA 4.7 – Sinal de referência adotado para o ângulo de deslocamento.	84
FIGURA 4.8 – Filtro de Kalman implementado no ambiente Matlab/Simulink. Na figura a) é mostrado a preparação dos sinais para a entrada no filtro, nesta os valores dos sinais de controle e os fornecidos pelos encoders são subtraídos dos valo- res do ponto de operação do sistema. Na figura b) é mostrado em detalhes a implementação do Filtro de Kalman propriamente dito.	86
FIGURA 4.9 – Detalhe da implementação da malha de controle com o Filtro de Kalman em ambiente Matlab/Simulink.	87
FIGURA 5.1 – Respostas fornecidas pelo modelo ao serem aplicados os sinais de referência mostrados na figura 4.3.	88
FIGURA 5.2 – Sinais de controle gerados pelo controlador preditivo para realizar as manobras descritas na figura 4.3.	89
FIGURA 5.3 – Comparação dos sinais obtidos com modelo não-linear e com helicóptero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 20°.	91
FIGURA 5.4 – Comparação dos sinais de controle obtidos com modelo não-linear e com helicóp- tero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 20°.	92
FIGURA 5.5 – Comparação dos sinais de controle obtidos com modelo não-linear e com helicóp- tero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 27°. Vale notar que nesta condição os valores de equilíbrio são praticamente iguais.	93
FIGURA 5.6 – Comparação dos sinais obtidos através do modelo não-linear e do helicóptero 3DOF.	94

FIGURA 5.7 – Efeitos das variações no horizonte de predição para um horizonte de controle fixo em $M = 5$	96
FIGURA 5.8 – Efeitos das variações no horizonte de controle para um horizonte de predição fixo em $N = 40$	97
FIGURA 5.9 – Ângulo de arfagem obtido durante a manobra de deslocamento para as condições com e sem restrições. Os limites superior e inferior definidos para o ângulo de arfagem (-5° e 13°) são mostrados nas linhas horizontais.	98
FIGURA 5.10 – Ângulos de deslocamento e elevação obtidos durante a manobra de deslocamento para as condições com e sem restrições.	99
FIGURA 5.11 – Efeitos das variações no horizonte de predição para um horizonte de controle fixo em 5 para a malha de controle utilizando um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares.	101
FIGURA 5.12 – Efeitos das variações no horizonte de controle para um horizonte de predição fixo em 60 para a malha de controle utilizando um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares.	102
FIGURA 5.13 – Comparação entre as respostas da malha de controle sem e com o Filtro de Kalman. No cenário sem o filtro os parâmetros utilizados no controlador foram $N = 40$ e $M = 10$, já na configuração com o filtro, os parâmetros foram $N = 60$ e $M = 5$	103
FIGURA A.1 – Rotação de um sistema de coordenadas sobre um eixo de rotação OC	114
FIGURA B.1 – Ilustração da formulação Preditor-Corretor.	130

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Valores dos parâmetros físicos do helicóptero 3DOF.	36
TABELA 2.2 – Resultados experimentais obtidos para determinação da relação entre a magnitude da força e a tensão em cada motor.	38

Lista de Abreviaturas e Siglas

MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
3DOF	Helicóptero com três graus de liberdade (<i>3 Degree of Freedom</i>)
DC	Corrente Contínua (<i>Direct Current</i>)
CG	Centro de Gravidade
ZOH	Segurador de Ordem Zero (<i>Zero Order Hold</i>)
RAM	Memória de Acesso Aleatório (<i>Random Access Memory</i>)
FK	Filtro de Kalman
LMS	<i>Least Mean Square</i>

Lista de Símbolos

T	Ângulo de deslocamento
\dot{T}	Velocidade de deslocamento
P	Ângulo de atitude
\dot{P}	Velocidade de arfagem
E	Ângulo de elevação
\dot{E}	Velocidade de elevação
$x(t), u(t), y(t)$	Vetores de estados, entradas e saídas no instante t
u_1 e u_2	Tensão no motor dianteiro e traseiro
$\dot{x}(t) = f(x, u)$	Equações não-lineares que descrevem a dinâmica de uma planta
β	Ângulo do corpo do helicóptero
γ	Ângulo do braço de sustentação
α	Ângulo do contrapeso
λ	Ângulo da massa de perturbação ativa
O	Ponto de apoio do helicóptero
O'	Ponto de fixação do braço de sustentação do helicóptero
r_{cp}	Distância entre o ponto de apoio O e o centro de gravidade do contrapeso
r_h	Distância entre o ponto O e o centro de gravidade do corpo do helicóptero

r_b	Distância entre o ponto O e o centro de gravidade do braço de sustentação
r_p	Distância entre o ponto O e o centro de gravidade da massa de perturbação ativa
r_m	Distância entre o centro da armação retangular e o centro dos motores
r_t	Distância entre o ponto O e o centro do motores
r	Distância entre o ponto O e o ponto de fixação do corpo do helicóptero
m_{cp}	Massa do contrapeso
m_h	Massa do corpo do helicóptero
m_b	Massa total do braço de sustentação
m_p	Massa da perturbação
g	Aceleração da gravidade
F_{MF}, F_{MB}	Força do motor dianteiro, traseiro e força total dos motores
T_B^T	Matriz de transformação de coordenadas do sistema localizado no eixo de deslocamento para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base
T_T^H	Matriz de transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do corpo do helicóptero para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento
T_T^{CP}	Matriz de transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do contrapeso para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento

T_T^{BA}	Matriz de transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do braço de sustentação para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento
T_T^P	Matriz de transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa da perturbação ativa para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento
T_B^H	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do corpo do helicóptero para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base
T_B^{CP}	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do contrapeso para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base
T_B^{BA}	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do braço de sustentação para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base
T_B^P	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do centro de massa da perturbação ativa para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base
$\mathbf{R}_h, \mathbf{R}_{cp}, \mathbf{R}_b, \mathbf{R}_p$	Vetor posição do centro de massa do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa
V_h, V_{cp}, V_b, V_p	Energia potencial do corpo do helicóptero o contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa
V	Energia potencial total do sistema

z_h, z_{cp}, z_b, z_p	Alturas das massas do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa
K_h, K_{cp}, K_b e K_p	Energia cinética do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da perturbação ativa
K	Energia cinética total do sistema
L	Lagrangeano do sistema
$\frac{\partial L}{\partial E}$	Derivada do Lagrangeano em relação ao ângulo de elevação
$\frac{\partial L}{\partial T}$	Derivada do Lagrangeano em relação ao ângulo de deslocamento
$\frac{\partial \bullet}{\partial t}$	Derivada do vetor \bullet
Q_E, Q_T	Forças generalizadas externas do eixo de elevação e deslocamento
\ddot{P}	Aceleração do movimento de arfagem
J_P	Momento de inércia do corpo do helicóptero
\bar{x}, \bar{y}	Representação das variáveis de estado e controle no equilíbrio
\sim	Símbolo que denota pequenas variações em torno do equilíbrio
$\dot{\tilde{x}}, \tilde{y}$	Equação de estado e saída da planta na forma espaço de estados
A_c, B_c, C_c, D_c	Matrizes de estados, controle, saída e transmissão direta
A, B, C, D	Matrizes de estados, controle, saída e transmissão direta discretizadas
k	Representa o instante atual
$u(k), y(k), r(k)$	Vetor de controle, vetor de saída e sinal de referência no instante k
p	Número de entradas do sistema

q	Número de saídas da planta
n	Ordem do sistema
$\tilde{x}(k+1), \tilde{y}(k)$	Equação de estado e saída da planta na forma discretizada
T	Período de amostragem
$\hat{y}(k+i k)$	Saídas previstas com base nas informações disponíveis até o instante k , para $i = 1, \dots, N$
u^*	Vetor de controle ótimo
M	Horizonte de controle
N	Horizonte de predição
$x(k+1), y(k)$	Modelo de predição em espaço de estado
$\Delta u(k), \Delta x(k), \Delta y(k)$	Variações no sinal de controle, estado e saída do sistema
J	Função custo
ρ	Parâmetro do projeto que representa o peso do controle
μ	Parâmetro do projeto que representa o peso do erro de rastreamento
W_y, W_u	Matrizes dos pesos de entrada e saída
$u(k-1+i)$	Sinal de controle a ser aplicado até o passo de predição para $i = 1, \dots, M$
$\hat{y}(k), \hat{u}(k), \hat{x}(k)$	Saída estimada, entrada estimada e estado estimado
$R, \hat{Y}, \Delta \hat{U}$	Vetor de referencia, de saída prevista e de controle na forma matricial
I_q	Matriz identidade de dimensão $q \times q$
I_p	Matriz identidade de dimensão $p \times p$
0_p	Matriz nula de dimensão $p \times p$

F	Matriz denominada resposta livre do sistema
$\Delta u_{min}, \Delta u_{max}$	Limites para a taxa de variações do controle
u_{min}, u_{max}	Limites o sinal de controle
y_{min}, y_{max}	Limites o sinal de saída da planta
I_{pM}	Matriz identidade de dimensão pM
$Bl_M[\bullet]$	Operador que empilha M cópias de um dado vetor coluna
$Bl_N[\bullet]$	Operador que empilha N cópias de um dado vetor coluna
Q_f, R_f	Matriz de covariância do ruído de processo e de ruído de medida.

1 Introdução

1.1 Apresentação do Trabalho

Nas últimas décadas, as empresas, de modo geral, vêm sofrendo uma forte pressão para reduzir o custo de produção e, ao mesmo tempo, melhorar a qualidade do produto em consequência da acirrada competição industrial promovida principalmente pela globalização. Para que isso seja alcançado, são necessárias novas idéias e métodos que propiciem a melhora dos processos industriais possibilitando, assim, incrementos reais de produtividade, assegurando a qualidade e mantendo os custos em níveis mais baixos.

Neste contexto, as técnicas de controle baseadas em otimização estão ganhando cada vez mais espaços na indústria. Uma dessas técnicas é a estratégia de controle conhecida como Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control*, MPC) desenvolvida na década de 70 por grupos de pesquisa associados à indústria petroquímica (RICHALET *et al.*, 1978), (CUTLER; RAMAKER, 1980), mas cuja aplicação vem sendo cada vez mais difundida em outros setores. Esta estratégia consiste basicamente na solução de um problema de controle ótimo (que minimiza uma função objetivo de horizonte finito) em tempo real, a qual é re-iterada em intervalos periódicos (usualmente a cada instante de amostragem) com base nas informações obtidas dos sensores da planta (CAMACHO;

BORDONS, 1999). Assim, as ações de controle são determinadas com base em seu impacto futuro no comportamento da planta ao invés de considerar somente os efeitos mais imediatos.

As principais características que têm contribuído para a crescente popularidade de controladores preditivos, segundo Maciejowski (MACIEJOWSKI, 2002), são a capacidade de lidar com plantas de dimensão elevada e atrasos de transporte, bem como de fazer respeitar restrições operacionais, reduzindo o número de paradas de emergências de um sistema. Além disso, um MPC pode ser formulado de forma a minimizar a variância do erro de saída possibilitando melhorias na qualidade do produto em processos de fabricação.

As principais dificuldades para a implementação de um controlador preditivo dizem respeito à necessidade de um modelo adequado do processo e também à elevada carga computacional requerida. Este último aspecto limitou as aplicações do MPC, de forma geral, a sistemas estritamente estáveis e cuja dinâmica seja lenta em relação à velocidade de processamento do aparato computacional utilizado na implementação. Contudo, a melhoria contínua dos recursos computacionais para aplicações de tempo real e o desenvolvimento de algoritmos numéricos eficientes para a resolução de problemas de MPC (CANNON, 2004), (LEE *et al.*, 1995), (ROSSITER; KOUVARITAKIS, 1994) têm tornado possível a difusão desse paradigma de controle para sistemas de dinâmica mais rápida.

Nesse contexto, leis de controle preditivo poderão ser de valia no setor aeroespacial, (WAN; BOGDANOV, 2001), (SINGH; FULLER, 2001), (MEHRA; PRASANTH; GOPALASWAMY, 1998) principalmente para expandir o envelope de voo de aeronaves avançadas onde motores, propulsores laterais, controles de separação de vórtex e superfícies aerodinâmicas precisam ser utilizados de maneira coordenada e perto de seus limites de saturação (MACIEJOWSKI, 2002). Assim, a capacidade do MPC em respeitar restrições operacionais

como, por exemplo, restrições de atuadores (excursão e tempo de resposta), poderia ser utilizada para garantir que as variáveis de controle atuem próximas do limite de atuação sem comprometer a segurança da operação.

Além disso, essa característica é particularmente interessante para a reconfiguração da lei de controle de voo após a ocorrência de falhas que reduzam a excursão ou a eficácia aerodinâmica das superfícies de comando ([KALE; CHIPPERFIELD, 2002](#)), ([HUZMEZAN; MACIEJOWSKI, 1998](#)), ([GOPINATHAN *et al.*, 1998](#)), ([BOSKOVIC; MEHRA, 2000](#)). Com efeito, danos a uma superfície de comando, com conseqüente redução na habilidade para produzir forças aerodinâmicas, acarretam uma maior demanda na deflexão do atuador, o que agrava o problema de saturação do controle ([PACHTER; CHANDLER; MEARS, 1995](#)).

1.2 Motivação e Proposta do Trabalho

A motivação para realização deste trabalho foi a constatação de que na literatura, embora encontrados muitos trabalhos referentes ao desenvolvimento de estratégias de controle preditivo para as mais diversas aplicações, na área de controle de aeronaves os trabalhos com MPC ainda são escassos.

Além disso, foram motivações para o desenvolvimento deste trabalho o reconhecimento das potencialidades do uso do MPC para implementação de leis de controle de voo reconfigurável e a perspectiva de comprovar a possibilidade de uso do MPC em sistemas mecânicos de dinâmica rápida.

A proposta deste trabalho é a implementação de uma lei de controle preditivo em espaço de estados para uma aplicação do setor aeronáutico, cuja planta é de dinâmica relativamente rápida, não-linear e com amortecimento muito pequeno. Em particular, a

estratégia de controle desenvolvida foi voltada à operação de uma planta-piloto na forma de um helicóptero de três graus de liberdade (3DOF).

O projeto do controlador foi baseado em um modelo de predição obtido através de um modelo não-linear da planta linearizado em torno de um ponto de operação. O controlador resultante foi utilizado em simulações no ambiente Matlab/Simulink, utilizando para isso o modelo não-linear, e também na implementação em tempo real utilizando a planta-piloto. Além disso, foi incorporado um Filtro de Kalman Estacionário na lei de controle para estimar as velocidades angulares e o desempenho do controlador foi comparado com o desempenho utilizando filtros derivativos.

Os resultados foram empregados para avaliar o efeito das alterações nos horizontes de predição e controle, bem como para ilustrar a capacidade do controlador em fazer respeitar restrições de saída.

1.3 Organização do Trabalho

Esta tese está dividida em seis capítulos. Os próximos capítulos estão estruturados da seguinte forma.

- **Capítulo 2** - Apresentação e modelagem teórica do helicóptero 3DOF empregando o formalismo de Lagrange. Além disso, é descrita a linearização e discretização do modelo físico para obtenção do modelo de predição utilizado no controlador preditivo.
- **Capítulo 3** - Descrição da formulação da lei de controle preditivo em espaço de estados adotada nesse trabalho. Além disso, é apresentada a formulação utilizada

para o tratamento de restrições.

- **Capítulo 4** - Apresentação dos materiais utilizados no desenvolvimento do trabalho, descrição dos ensaios experimentais e definição das manobras realizadas com o helicóptero 3DOF.
- **Capítulo 5** - Análise do modelo não-linear do helicóptero 3DOF baseada em simulações realizadas em ambiente Matlab/Simulink. Validação do modelo através de comparações com resultados experimentais na planta-piloto. Por fim, apresentação dos resultados práticos obtidos no helicóptero e análise do desempenho do controlador sem e com Filtro de Kalman para a aplicação em tempo real.
- **Capítulo 6** - Conclusões finais do trabalho e descrição das possibilidades para continuidade da pesquisa.

2 Modelagem do Helicóptero 3DOF

2.1 Apresentação do sistema

A estratégia de controle preditivo desenvolvida nesse trabalho foi direcionada à operação de uma planta piloto (modelo de laboratório) na forma de um helicóptero com três graus de liberdade (Helicóptero 3DOF), figura 2.1 (a), fabricado pela empresa canadense Quanser Consulting[®]. Esta planta procura representar de forma simplificada a dinâmica de um helicóptero real com dois motores contra-rotativos que dispensa a necessidade de um rotor de cauda, conhecido comercialmente como “*Chinook*”, figura 2.1 (b).



(a)



(b)

FIGURA 2.1 – (a) Helicóptero 3DOF utilizado nesse trabalho. (b) Helicóptero com duas asas rotativas conhecido comercialmente como “Chinook”.

Em termos construtivos, o helicóptero comercializado pela Quanser possui dois motores DC (*Direct Current*) montados em pontos opostos de uma armação retangular e cada um

deles é responsável por uma hélice. Essas, quando em movimento, criam vetores empuxo paralelos entre si e normais à armação. O conjunto armação, motores e hélices será denominado corpo do helicóptero.

O corpo do helicóptero, por sua vez, é montado sobre a extremidade de um braço de sustentação que possui no lado oposto um contrapeso que tem a função de diminuir as forças necessárias para manter o conjunto suspenso no ar. Por fim, esse braço é apoiado sobre uma torre instrumentada (base), como pode ser observado na figura 2.1 (a).

Adicionalmente, o sistema é dotado de um acessório de perturbação ativa (figura 2.2), que permite deslocar uma massa ao longo do braço de sustentação, simulando, assim, a existência de uma perturbação externa agindo sobre o sistema. Esse acessório não será utilizado neste trabalho.



FIGURA 2.2 – Detalhe do acessório de perturbação ativa existente no aparato 3DOF.

Os movimentos do helicóptero são controlados apenas pela tensão aplicada nos dois motores. Os três graus de liberdade citados, permitem ao sistema realizar os seguintes movimentos.

1. Elevação: É definido como o movimento vertical do corpo do helicóptero, ou seja,

corresponde à rotação do braço de sustentação em torno do eixo horizontal. Para mudar a elevação do helicóptero basta alterar, de forma igual, as tensões fornecidas aos motores.

2. Arfagem: É definido como o movimento de rotação do corpo do helicóptero em torno do eixo do braço de sustentação. Mudanças no ângulo de arfagem são obtidas aplicando-se tensões diferentes a cada motor. Com efeito, as forças geradas pelos motores serão diferentes proporcionando o desequilíbrio do sistema.
3. Deslocamento: É definido como o movimento de rotação de todo o conjunto em torno do eixo vertical. Esse movimento é influenciado pelo ângulo de arfagem, pois, nessa condição, as forças geradas pelos motores se decompõem gerando uma força perpendicular ao braço de sustentação e proporcionando o movimento do helicóptero.

O sistema possui ainda três encoders que são responsáveis por fornecer a posição do helicóptero em cada instante de tempo. Os encoders referentes ao movimento de elevação e arfagem possuem resolução de 4096 pulsos por rotação, enquanto que o encoder que fornece a posição do movimento de deslocamento possui resolução de 8192 pulsos por rotação. Vale destacar ainda que o encoder do movimento de elevação está posicionado na base instrumentada, o de arfagem na base do corpo do helicóptero e o de deslocamento no braço de sustentação.

2.2 Modelagem do Helicóptero

A dinâmica do helicóptero pode ser descrita por um modelo não-linear de 6ª ordem, com estados correspondendo aos ângulos de deslocamento (T , *travel*), arfagem (P , *pitch*), elevação (E , *elevation*) e suas respectivas velocidades (velocidade de deslocamento (\dot{T}), velocidade de arfagem (\dot{P}) e velocidade de elevação (\dot{E})). Dessa forma, a equação de estados pode ser expressa como:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

em que $x = [T \ \dot{T} \ P \ \dot{P} \ E \ \dot{E}]^T$ e $u = [u_1 \ u_2]^T$, sendo as variáveis de controle u_1 e u_2 correspondentes às tensões fornecidas aos motores dianteiro e traseiro, respectivamente.

As figuras 2.3, 2.4 e 2.5 mostram a representação esquemática do helicóptero 3DOF empregada para fins de modelagem. Como hipótese simplificadora, considerou-se que a inércia do helicóptero possa ser representada por massas pontuais associadas ao corpo do helicóptero, ao contrapeso, ao centro de gravidade do braço de sustentação e à massa de perturbação ativa, figura 2.3.

Além disso, foram desprezados os efeitos de atrito nas juntas, o arrasto aerodinâmico e o efeito gerado pelo movimento das hélices que giram no mesmo sentido. Considerou-se, também, que as forças geradas pelas hélices não dependem do movimento relativo do corpo do helicóptero em relação ao ar. Por fim, desprezou-se a dinâmica eletromecânica dos conjuntos motor-hélice, que é muito mais rápida que a dinâmica de movimento do sistema como um todo.

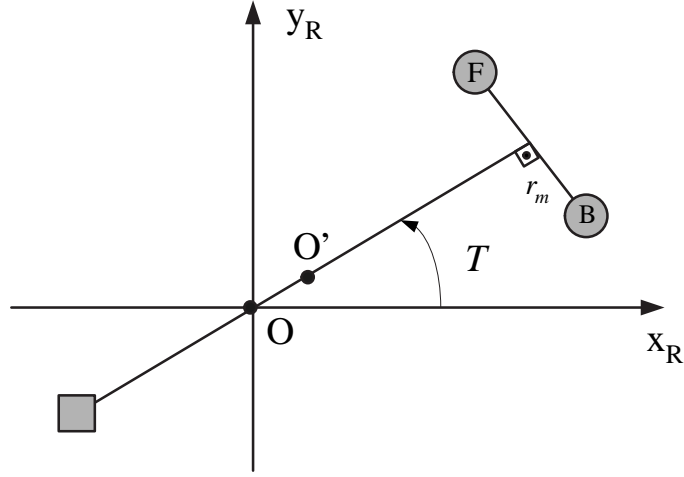


FIGURA 2.5 – Vista superior do helicóptero.

A orientação dos ângulos T , P e E foi escolhida de modo que um aumento na tensão u_1 do motor dianteiro provoque um aumento no ângulo de arfagem P e, conseqüentemente, uma redução na velocidade de deslocamento \dot{T} . Os outros ângulos envolvidos no modelo são:

- Ângulo do corpo do helicóptero (β) - Definido como sendo o ângulo formado entre a linha que liga o ponto de apoio O ao centro de gravidade do corpo do helicóptero e a linha paralela ao braço de sustentação que passa pelo ponto de apoio O . Em todos os movimentos realizados pelo helicóptero esse ângulo se mantém constante.
- Ângulo do braço de sustentação (γ) - Definido como o ângulo formado entre a linha que liga o ponto O ao centro de gravidade do braço de sustentação e a linha paralela ao braço de sustentação que passa pelo ponto de apoio O . Considerando que o centro de gravidade do braço de sustentação não sofra alteração quando a massa de perturbação ativa se movimenta, esse ângulo também se mantém constante durante todos os movimentos do helicóptero.
- Ângulo do contrapeso (α) - Definido como sendo o ângulo formado entre linha que

liga o ponto O ao centro de gravidade do contrapeso e a linha paralela ao braço de sustentação que passa pelo ponto O . Esse ângulo pode variar de acordo com a posição de fixação do contrapeso no braço de sustentação. No entanto, uma vez determinada a posição do contrapeso o ângulo se mantém constante.

- Ângulo da massa de perturbação ativa (λ) - Definido como sendo o ângulo formado entre a linha que liga o ponto de apoio O ao centro de gravidade da massa de perturbação ativa e a linha paralela ao braço de sustentação que passa pelo ponto O . O valor de λ pode variar conforme a massa se desloca ao longo do braço de sustentação. Se a massa for mantida fixa esse ângulo se mantém constante.

Os parâmetros físicos envolvidos no modelo (referentes às figuras 2.3, 2.4, 2.5) são os seguintes.

- r_{cp} - Distância entre o ponto de apoio O e o centro de gravidade do contrapeso.
- r_h - Distância entre o ponto O e o centro de gravidade do corpo do helicóptero.
- r_b - Distância entre o ponto O e o centro de gravidade do braço de sustentação.
- r_p - Distância entre o ponto O e o centro de gravidade da massa de perturbação ativa.
- r_m - Distância entre o centro da armação retangular e o centro dos motores.
- r_t - Distância entre o ponto O e o centro dos motores (ponto de aplicação da força).
- r - Distância entre o ponto O e o ponto de fixação do corpo do helicóptero.
- m_{cp} - Massa do contrapeso.

- m_h - Massa do corpo do helicóptero.
- m_b - Massa total do braço de sustentação.
- m_p - Massa de perturbação.
- g - Aceleração da gravidade.

Os valores medidos de todas as constantes físicas e os valores calculados dos ângulos, mencionados anteriormente, são apresentados na tabela 2.1. As medidas foram realizadas utilizando uma trena e um paquímetro e os ângulos obtidos através de relações geométricas simples. As massas foram determinadas com o auxílio de uma balança digital (Coleman[©] BN12-1200).

TABELA 2.1 – Valores dos parâmetros físicos do helicóptero 3DOF.

Parâmetro	Valor
r_{cp}	0.508 m
r_h	0.647 m
r_b	0.169 m
r_p	0.166 m
r_m	0.178 m
r_t	0.643 m
r	0.641 m
m_{cp}	1.884 kg
m_h	1.343 kg
m_b	1.476 kg
m_p	0.01 kg
g	9.8 m/s ²
α	4.58°
β	7.73°
γ	17.42°
λ	17.72°

Todos os parâmetros físicos determinados e apresentados na tabela 2.1 são importantes para obtenção de um modelo adequado. No entanto, a correta representação de dois detalhes, que não aparecem explicitamente, é de fundamental importância para o

desenvolvimento de um modelo adequado para fins de controle. Com efeito, tais detalhes interferem diretamente no amortecimento e na estabilidade do sistema.

O primeiro, é o ângulo formado entre o braço de sustentação do helicóptero e o braço que fixa o contrapeso em uma de suas extremidades. Este ângulo, provoca o deslocamento do centro de gravidade (CG) do sistema para cima. Dessa forma, a distância existente entre o CG e o ponto de pivoteamento (O) diminui. Com efeito, a força de restituição do sistema diminui o que torna a força necessária para elevar o helicóptero menor.

O segundo detalhe é a distância existente entre braço de sustentação e o ponto de pivoteamento que mantém o centro de gravidade do conjunto sempre abaixo da linha horizontal que passa pelo ponto O , mesmo na condição onde um ângulo de elevação é comandado. Dessa forma, a intensidade da força restauradora aumenta conforme o ângulo de elevação, o que confere uma estabilidade natural à dinâmica de elevação. Esse fenômeno também é facilmente visualizado em um pêndulo simples.

Os dois últimos parâmetros determinados foram as forças (F_{MF} e F_{MB}) geradas por cada propulsor. Conforme já mencionado, estas forças foram consideradas como sendo normais ao plano da hélice, conforme mostrado na figura 2.4. A relação existente entre a magnitude das forças e a tensão em cada motor foi determinada experimentalmente colocando-se o braço de sustentação na posição horizontal com o corpo do helicóptero sobre uma balança digital (Coleman[©] BN12-1200). Em seguida, aplicaram-se diferentes níveis de tensão nos motores verificando as respectivas indicações da balança. Esse procedimento foi repetido seis vezes e os resultados obtidos estão mostrados na tabela 2.2.

TABELA 2.2 – Resultados experimentais obtidos para determinação da relação entre a magnitude da força e a tensão em cada motor.

Tensão nos motores (V)	Ensaio 1 massa(kg)	Ensaio 2 massa(kg)	Ensaio 3 massa(kg)	Ensaio 4 massa(kg)	Ensaio 5 massa(kg)	Ensaio 6 massa(kg)
0.0	0.587	0.599	0.570	0.591	0.583	0.595
0.5	0.583	0.593	0.564	0.584	0.577	0.590
1.0	0.565	0.575	0.542	0.566	0.558	0.572
1.5	0.532	0.542	0.509	0.538	0.526	0.539
2.0	0.475	0.488	0.458	0.487	0.470	0.485
2.5	0.414	0.423	0.408	0.420	0.408	0.419
3.0	0.346	0.357	0.340	0.347	0.339	0.349
3.5	0.269	0.279	0.271	0.272	0.270	0.277
4.0	0.191	0.191	0.197	0.197	0.199	0.197

Uma observação importante é que os valores de tensão mostrados na tabela 2.2 correspondem à tensão enviada ao conversor digital-analógico (D/A). No entanto, na saída desse conversor existem amplificadores de potência que fornecem um ganho de 5 vezes no sinal entregue aos motores.

Os valores das massas mostrados na tabela 2.2 são referentes às indicações mostradas na balança. No entanto, o que interessa é a massa que os motores conseguem erguer para cada valor de tensão aplicada. Assim, subtraiu-se de cada medição realizada o valor inicial fornecido pela balança e dividiram-se os valores resultantes por dois para determinar a massa efetiva submetida a cada um dos motores.

Em seguida, determinou-se o valor médio para cada valor de tensão aplicada entre os seis ensaios realizados e plotou-se o gráfico da força nos motores em função da tensão aplicada. A figura 2.6 apresenta o resultado obtido para F_{MF} (ou F_{MB}).

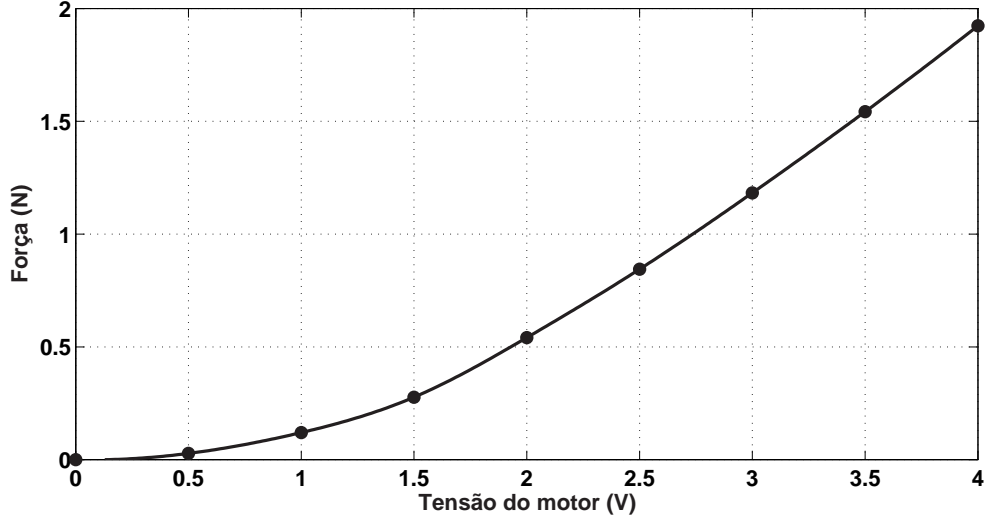


FIGURA 2.6 – Curva experimental da relação entre tensão fornecida a cada motor e magnitude da força gerada F_{MF} (ou F_{MB}). Vale destacar que a curva mostrada é a interpolação dos pontos experimentais obtidos.

Como se pode observar na figura acima, os pontos experimentais foram interpolados por um polinômio do segundo grau e a função *FIT* do Matlab foi utilizada para determinar os coeficientes da equação resultante. O resultado obtido está mostrado abaixo:

$$F_{MF} = 0.1117 u_1^2 + 0.04492 u_1 \quad (2.2)$$

em que, a tensão u_1 pode ser substituída pela tensão u_2 para se obter o valor da força F_{MB} gerada pelo motor traseiro.

Vale destacar que a força total de sustentação é dada pela soma das forças geradas por cada um dos motores:

$$\begin{aligned} F_M &= F_{MF} + F_{MB} \\ &= 0.1117 (u_1^2 + u_2^2) + 0.04492 (u_1 + u_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Com todos os parâmetros físicos determinados utilizou-se o Formalismo de Lagrange

(ver Apêndice A) para obter-se o modelo não-linear em espaço de estados. A escolha desse método de modelagem foi devida à complexidade do sistema mecânico em estudo, que apresenta acoplamento entre os três eixos descritos, além de partes que podem sofrer deslocamentos rotacionais relativos. Dessa forma, a abordagem lagrangeana que utiliza somente quantidades associadas ao corpo, energias cinética e potencial, torna o problema mais simples, visto que, a energia é uma quantidade escalar, assim a função lagrangeana para o sistema é invariante para as transformações de coordenadas.

No entanto, mesmo utilizando o Formalismo de Lagrange uma nova simplificação foi necessária, qual seja, desacoplar a dinâmica do eixo de arfagem das outras duas dinâmicas. O motivo dessa simplificação foi a alta carga computacional de cálculo simbólico requerida para o desenvolvimento do modelo com os três eixos acoplados, visto que o Symbolic Toolbox do Matlab 7.0, utilizado para realização dos cálculos, após várias horas de execução retornava uma mensagem de falta de memória para finalização dos cálculos. Apesar disso, acredita-se que essa simplificação não interfira de forma significativa nos resultados por três motivos:

1. As velocidades angulares nos outros eixos são pequenas, de forma que os efeitos giroscópicos e de Coriolis podem ser desprezados.
2. O atrito nos rolamentos foi desprezado.
3. Foi considerado que a força gerada pelas hélices não depende do movimento relativo com relação ao ar.

Dessa forma, a descrição da modelagem será feita em duas partes. Na primeira, será apresentada a formulação para os eixos de elevação e deslocamento e na segunda parte a equação do eixo de arfagem.

2.2.1 Eixo de elevação e deslocamento

Antes de aplicar a equação de Lagrange é necessário determinar a energia cinética e potencial de todo o conjunto. Para isso, foi necessário definir as matrizes de mudança de coordenadas (matrizes de transformação homogênea, ver Apêndice A) para transladar cada conjunto de coordenadas mostrados nas figuras 2.3 e 2.5 para um mesmo referencial. O referencial adotado nesse trabalho foi o sistema de coordenadas posicionado sobre o ponto fixo O , mostrado na figura 2.3, e que será chamado de eixo da base. Essa escolha foi feita por esse ser um ponto fixo durante todos os movimentos do helicóptero, assim, o sistema de coordenadas não sofre qualquer tipo de movimento.

Além disso, cada uma das massas pontuais definidas apresenta um sistema de coordenadas próprio, localizado sobre o respectivo centro de massa. Esses sistemas serão chamados de sistemas de coordenadas do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e sistema de coordenadas da massa de perturbação ativa. Foi definido ainda um outro sistema de coordenadas sobre o ponto fixo O e que acompanha o movimento de deslocamento do helicóptero. Por isso, esse último sistema será chamado de sistema do eixo de deslocamento.

As matrizes de transformação homogênea definidas entre os conjuntos de coordenadas são as seguintes:

- T_B^T : representa a transformação de coordenadas do sistema localizado no eixo de deslocamento para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base.

$$T_B^T = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T & 0 & 0 \\ -\sin T & \cos T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- T_T^H : representa a transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do corpo do helicóptero para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento.

$$T_T^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E & -\sin E & r_h \cos(E - \beta) \\ 0 & \sin E & \cos E & r_h \sin(E - \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- T_T^{CP} : representa a transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do contrapeso para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento.

$$T_T^{CP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E & -\sin E & -r_{cp} \cos(E - \alpha) \\ 0 & \sin E & \cos E & -r_{cp} \sin(E - \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

- T_T^{BA} : representa a transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa do braço de sustentação para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento.

$$T_T^{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E & -\sin E & r_B \cos(\gamma - E) \\ 0 & \sin E & \cos E & -r_B \sin(\gamma - E) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

- T_T^P : representa a transformação de coordenadas do sistema localizado no centro de massa da perturbação ativa para o sistema de coordenadas localizado no eixo de deslocamento.

$$T_T^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E & -\sin E & r_P \cos(\lambda - E) \\ 0 & \sin E & \cos E & -r_P \sin(\lambda - E) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Observe que, as matrizes T_T^H , T_T^{CP} , T_T^{BA} e T_T^P realizam a transformação de cada sistema de coordenadas para o eixo de deslocamento e não para o eixo da base. Assim, é necessário realizar rotações sucessivas para obter todas as coordenadas em relação ao mesmo referencial. As matrizes referentes a essas transformações sucessivas estão mostradas abaixo.

- T_B^H : representa a transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do corpo do helicóptero para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base.

$$T_B^H = T_B^T \cdot T_T^H = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \cos E & -\sin T \sin E & r_h \sin T \cos(\beta - E) \\ -\sin T & \cos T \cos E & \cos T \sin E & r_h \cos T \cos(\beta - E) \\ 0 & \sin E & \cos E & -r_h \sin(\beta - E) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- T_B^{CP} : representa a transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do contrapeso para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base.

$$T_B^{CP} = T_B^T \cdot T_T^{CP} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \cos E & -\sin T \sin E & -r_{cp} \sin T \cos(\alpha - E) \\ -\sin T & \cos T \cos E & -\cos T \sin E & -r_{cp} \cos T \cos(\alpha - E) \\ 0 & \sin E & \cos E & r_{cp} \sin(\alpha - E) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- T_B^{BA} : representa a transformação de coordenadas do sistema do centro de massa do braço de sustentação para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base.

$$T_B^{BA} = T_B^T \cdot T_T^{BA} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \cos E & -\sin T \sin E & r_b \sin T \cos(E - \gamma) \\ -\sin T & \cos T \cos E & -\cos T \sin E & r_b \cos T \cos(E - \gamma) \\ 0 & \sin E & \cos E & r_b \sin(E - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

- T_B^P : representa a transformação de coordenadas do sistema do centro de massa da perturbação ativa para o sistema de coordenadas localizado no eixo da base.

$$T_B^P = T_B^T \cdot T_T^P = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \cos E & -\sin T \sin E & r_p \sin T \cos(E - \lambda) \\ -\sin T & \cos T \cos E & -\cos T \sin E & r_p \cos T \cos(E - \lambda) \\ 0 & \sin E & \cos E & r_p \sin(E - \lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

O último passo para determinar as coordenadas de cada uma das massas pontuais em relação ao sistema referencial adotado é a multiplicação das matrizes de transformações (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) pelo vetor posição de cada uma dessas massas em relação ao

próprio sistema de coordenadas, ou seja:

$$\mathbf{R}_i = T_B^i \overline{\mathbf{R}}_i \quad (2.13)$$

em que \mathbf{R}_i é o vetor posição de cada massa em relação ao sistema referencial adotado, T_B^i é a matriz de transformação entre cada um dos sistemas de coordenadas e $\overline{\mathbf{R}}_i$ é o vetor posição de cada massa em relação ao próprio sistema de coordenadas.

Observe que o vetor $\overline{\mathbf{R}}_i$ é igual para todas as massas consideradas, uma vez que, os sistemas de coordenadas foram definidos exatamente sobre cada uma das massas pontuais.

Assim,

$$\overline{\mathbf{R}}_h = \overline{\mathbf{R}}_{cp} = \overline{\mathbf{R}}_b = \overline{\mathbf{R}}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

Vale destacar que o resultado da multiplicação em (2.13) é uma matriz de dimensão 4×1 , no entanto, apenas os três primeiros termos referem-se às coordenadas das massas em relação ao sistema referencial. Abaixo estão as coordenadas de cada uma das massas consideradas em relação ao sistema referencial.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h &= \begin{bmatrix} r_h \sin T \cos(\beta - E) \\ \cos T r_h \cos(\beta - E) \\ -r_h \sin(\beta - E) \end{bmatrix} & \mathbf{R}_{cp} &= \begin{bmatrix} -r_{cp} \sin T \cos(\alpha - E) \\ -r_{cp} \cos T \cos(\alpha - E) \\ r_{cp} \sin(\alpha - E) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_b &= \begin{bmatrix} r_b \sin T \cos(E - \gamma) \\ r_b \cos T \cos(E - \gamma) \\ r_b \sin(E - \gamma) \end{bmatrix} & \mathbf{R}_p &= \begin{bmatrix} r_p \sin T \cos(E - \lambda) \\ r_p \cos T \cos(E - \lambda) \\ r_p \sin(E - \lambda) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que, \mathbf{R}_h , \mathbf{R}_{cp} , \mathbf{R}_b e \mathbf{R}_p são, respectivamente, o vetor posição do centro de massa do

corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa.

Determinadas as posições das massas em relação ao sistema referencial adotado pode-se calcular a energia potencial e cinética de todo o conjunto.

- Energia potencial do corpo do helicóptero V_h .

$$\begin{aligned} V_h &= m_h g z_h \\ &= -m_h g r_h \text{sen}(\beta - E) \end{aligned} \quad (2.16)$$

- Energia potencial do corpo do contrapeso V_{cp} .

$$\begin{aligned} V_{cp} &= m_{cp} g z_{cp} \\ &= -m_{cp} g r_{cp} \text{sen}(E - \alpha) \end{aligned} \quad (2.17)$$

- Energia potencial do braço de sustentação V_b .

$$\begin{aligned} V_b &= m_b g z_b \\ &= m_b g r_b \text{sen}(E - \gamma) \end{aligned} \quad (2.18)$$

- Energia potencial da massa de perturbação ativa V_p .

$$\begin{aligned} V_p &= m_p g z_p \\ &= m_p g r_p \text{sen}(E - \lambda) \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que, z_h , z_{cp} , z_b , z_p correspondem, respectivamente, às alturas (coordenada z dos vetores posição encontrados) das massas do corpo do helicóptero, do contrapeso, do braço de sustentação e da massa de perturbação ativa.

A energia potencial total (V) do conjunto é dada por:

$$\begin{aligned} V &= V_h + V_{cp} + V_b + V_p \\ &= -g [m_{cp}r_{cp}\text{sen}(E - \alpha) + m_hr_h\text{sen}(\beta - E) - m_br_b\text{sen}(E - \gamma) + m_pr_p\text{sen}(\lambda - E)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

As expressões obtidas para a energia cinéticas estão mostradas abaixo:

- Energia cinética do corpo do helicóptero K_h .

$$\begin{aligned} K_h &= \frac{1}{2}m_h \left[\left(\frac{\partial x_h}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_h}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_h}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m_hr_h^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\beta - E) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

- Energia cinética do corpo do contrapeso K_{cp} .

$$\begin{aligned} K_{cp} &= \frac{1}{2}m_{cp} \left[\left(\frac{\partial x_{cp}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{cp}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_{cp}}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m_{cp}r_{cp}^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \alpha) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

- Energia cinética do corpo do braço de sustentação K_b .

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{1}{2}m_b \left[\left(\frac{\partial x_b}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_b}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m_br_b^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \gamma) \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

- Energia cinética do corpo da massa de perturbação ativa K_p .

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2}m_p \left[\left(\frac{\partial x_p}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_p}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_p}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m_pr_p^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\lambda - E) \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, a energia cinética total (K) do conjunto é dada por:

$$\begin{aligned}
 K &= K_h + K_{cp} + K_b + K_P \\
 &= \frac{1}{2}m_{cp}r_{cp}^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \alpha) \right) + \frac{1}{2}m_h r_h^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\beta - E) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2}m_b r_b^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \gamma) \right) + \frac{1}{2}m_p r_p^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\lambda - E) \right) \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se definir o Lagrangeano (L) do sistema mecânico da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 L &= K - V \quad (2.26) \\
 &= \frac{1}{2}m_{cp}r_{cp}^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \alpha) \right) + \frac{1}{2}m_h r_h^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\beta - E) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2}m_b r_b^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(E - \gamma) \right) + \frac{1}{2}m_p r_p^2 \left(\dot{E}^2 + \dot{T}^2 \cos^2(\lambda - E) \right) + \\
 &+ m_{cp}gr_{cp}\sin(E - \alpha) + m_h gr_h \sin(\beta - E) - m_b gr_b \sin(E - \gamma) + m_p gr_p \sin(\lambda - E)
 \end{aligned}$$

Para determinar as equações que descrevem a dinâmica dos eixos de elevação e deslocamento aplicou-se a equação de Lagrange considerando o Lagrangeano obtido acima e como coordenadas generalizadas os ângulos de cada um desses eixos.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{E}} \right) - \frac{\partial L}{\partial E} = Q_E \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial T} = Q_T$$

em que, as forças generalizadas externas Q_E e Q_T são dadas por:

$$Q_E = r \cos P (0.1117u_1^2 + 0.04492u_1) + r \cos P (0.1117u_2^2 + 0.04492u_2) \quad (2.28)$$

$$Q_T = -r_t \sin P (0.1117u_1^2 + 0.04492u_1) - r_t \sin P (0.1117u_2^2 + 0.04492u_2)$$

Os cálculos acima foram realizados no software Matlab 7.0, empregando-se para isso o pacote de computação simbólica (*Symbolic Math Toolbox*). Devido à extensão das equações resultantes, as mesmas encontram-se no Anexo A.

2.2.2 Eixo de arfagem

A simplificação realizada em desacoplar a dinâmica do eixo de arfagem das outras dinâmicas tornou a modelagem desse eixo extremamente simples. Com efeito, apenas realizou-se a somatória dos torques mostrados na figura 2.4, conforme mostrado abaixo.

$$J_p \ddot{P} = F_{MF} r_m - F_{MB} r_m \quad (2.29)$$

assim,

$$\ddot{P} = \frac{r_m (0.1117u_1^2 + 0.04492u_1) - r_m (0.1117u_2^2 + 0.04492u_2)}{J_p} \quad (2.30)$$

em que, J_p é o momento de inércia do corpo do helicóptero sobre o eixo de arfagem. A expressão utilizada para determinação do valor deste momento de inércia está mostrada abaixo:

$$\begin{aligned} J_p &= J_{MF} + J_{MB} \\ &= \frac{m_h}{2} r_h^2 + \frac{m_h}{2} r_h^2 \\ &= m_h r_h^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim,

$$J_p = 0.0426 \text{ kg } m^2 \quad (2.32)$$

Com a dinâmica do três eixos determinadas pode-se escrever a equação de estados como mostrado na equação (2.1). A apresentação completa deste modelo está no anexo A.

2.3 Linearização e Discretização

Para fins de projeto de uma lei de controle, obteve-se um modelo linearizado em torno de uma condição de voo com ângulo de elevação ($E = 20^\circ$) e todos os outros ângulos e velocidades iguais a zero. Nessa configuração, os valores de equilíbrio para o estado x e para a entrada u são dados por $\bar{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 20^\circ \ 0]^T$ e $\bar{u} = [2.8045 \ 2.8045]^T$. O valor de \bar{u} foi encontrado a partir da solução numérica da equação de equilíbrio $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, utilizando-se para isso a função `fsolve` do *Matlab Optimization Toolbox*.

O modelo linearizado foi obtido com uma aproximação de Taylor de primeira ordem da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A_c \tilde{x} + B_c \tilde{u} \\ \tilde{y} &= C_c \tilde{x} + D_c \tilde{u}\end{aligned}\tag{2.33}$$

em que $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$. As matrizes A_c e B_c contêm as derivadas parciais das componentes de $f(x, u)$ com respeito às variáveis de estado e de controle, respectivamente, no ponto de equilíbrio (\bar{x}, \bar{u}) considerado, conforme mostrado abaixo:

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}\tag{2.34}$$

em que (f_1, \dots, f_n) são as componentes do campo vetorial f .

Empregando-se novamente o *Symbolic Math Toolbox* obteve-se as seguintes matrizes:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2571 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1916 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.8056 & -2.8056 \\ 0 & 0 \\ 0.3946 & 0.3946 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Neste trabalho, as variáveis de saída escolhidas foram os ângulos de deslocamento, arfagem e elevação ($y = [T, P, E]^T$). Dessa forma, a matriz C_c foi definida da seguinte forma:

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Além disso, como não há transmissão direta entre a entrada e a saída da planta a matriz $D_c = 0$.

Como pode ser verificado, a matriz A_c possui quatro autovalores em 0 e dois em $\pm 1.0916j$, mostrando que a dinâmica descrita pelo modelo linearizado é marginalmente estável. Isso se deve ao fato de terem sido desprezados os termos dissipativos associados ao arrasto aerodinâmico e ao atrito viscoso nas juntas do sistema.

Os quatro auto-valores em zero se referem ao processo de dupla integração (de torque para posição angular) nos eixos de arfagem e deslocamento, enquanto que o par complexo conjugado está relacionado com a dinâmica de elevação, que é similar à de um pêndulo de haste rígida sem amortecimento.

Para permitir o projeto de controladores digitais, o modelo linearizado foi discretizado na forma:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + B\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= C\tilde{x}(k)\end{aligned}\tag{2.37}$$

em que a notação (k) representa o k -ésimo instante de amostragem.

Para realizar a discretização, considerou-se que o sinal de controle u permanece constante entre os instantes de amostragem. Tal hipótese é razoável, dado que a maioria das placas usadas para conversão digital-analógica dispõem de seguradores de ordem zero ("Zero-Order-Hold") (HEMERLY, 2000). Utilizando-se a função "c2d" do Matlab com um período de amostragem $T = 50ms$, obtêm-se as matrizes A e B mostradas abaixo. Vale destacar que o valor de $50ms$ para o período de amostragem foi adotado porque foi constatado, através de experimentos na planta piloto, que valores maiores não são apropriados para o controle da dinâmica do eixo de arfagem, que é o modo mais rápido do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.0016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0629 & -0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9985 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0596 & 0.9985 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0035 & -0.0035 \\ 0.1403 & -0.1403 \\ 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0197 & 0.0197 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Assim como a matriz A_c possui autovalores sobre o eixo imaginário, a matriz A possui autovalores sobre a circunferência unitária (quatro autovalores em 1 e dois em $0.9985 \pm 0.0546j$), novamente mostrando que a dinâmica linearizada é marginalmente

estável ([HEMERLY, 2000](#)).

Um teste de controlabilidade realizado com base no par (A, B) mostra que o modelo linearizado é completamente controlável a partir das duas entradas disponíveis (tensões nos motores dianteiro e traseiro).

3 Controle Preditivo Baseado em Modelo

A idéia principal de um controlador preditivo é encontrar a melhor seqüência de controle para levar a saída do sistema até um sinal de referência definido. Para isso, as ações de controle são determinadas com base na minimização de uma função custo, levando em consideração a relação dinâmica entre o sinal de controle u e a saída do sistema y . Dessa forma, um controlador preditivo é composto basicamente de um modelo matemático do processo e um otimizador.

A figura [3.1](#) apresenta um esquema básico para uma malha de controle preditivo, empregando, neste caso, realimentação de estado e otimização de incrementos no controle. Este diagrama apresenta os elementos essenciais de um controlador MPC.

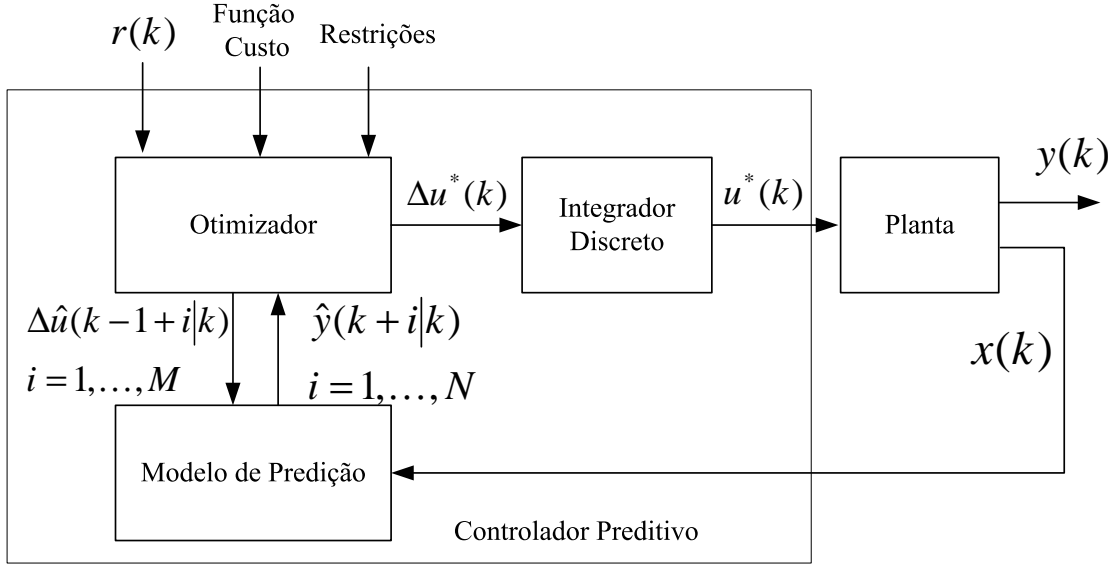


FIGURA 3.1 – Esquema básico de um controlador preditivo empregando realimentação de estado.

Na figura acima, as variáveis $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$, $r(k) \in \mathbb{R}^q$ denotam as variáveis manipuladas (entradas da planta), controladas (saídas de interesse) e sinais de referência, respectivamente. Os incrementos no controle são denotados por $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$. O símbolo $\hat{\cdot}$ em $\Delta \hat{u}(k+i-1|k)$ denota que a seqüência de controle otimizada no instante k pode ainda sofrer alterações posteriores. Adicionalmente, $\hat{y}(k+i|k)$ denota a predição das saídas no instante $k+i$ efetuada com base no estado $x(k)$ lido no instante k e nos controles a serem aplicados entre os instantes k e $k+i$. Vale ressaltar que, caso o estado da planta não esteja inteiramente disponível para realimentação, pode-se lançar mão de um observador de ordem completa ou reduzida para estimá-lo. O controle efetivamente aplicado à planta no instante k é denotado por $u^*(k)$.

O princípio básico de funcionamento de um controlador preditivo pode ser descrito da seguinte forma. A cada instante de tempo os sensores fornecem informações sobre o estado atual $x(k)$ da planta. Assim, o modelo de predição, mostrado na figura 3.1, é empregado para realizar predições de até N passos à frente, sendo N conhecido como “**horizonte de predição**”. O horizonte de predição denota múltiplos do período de amostragem e pode

ser entendido como sendo o intervalo de tempo definido para o problema de otimização. Tais previsões são realizadas com base nas informações disponíveis até o instante atual (k), sendo ainda dependentes da seqüência de controle que venha a ser aplicada.

O algoritmo de otimização, então, determina a seqüência $\{\Delta u^*(k-1+i), i=1, \dots, M\}$ que minimiza a função de custo especificada para o problema, atendendo a possíveis restrições sobre a entrada, saída e/ou estado da planta. Tipicamente, o valor de M (dito “**horizonte de controle**”) é menor que N , pois possibilita uma diminuição na carga computacional requerida para a aplicação. Para isso, impõe-se que $\Delta \hat{u}(k-1+i|k) = 0$ para $M < i \leq N$, ou seja, $\hat{u}(k+i|k)$ permanece constante para $M-1 \leq i < N$. O valor de M também denota múltiplos do período de amostragem. A figura mostrada abaixo ilustra os conceitos dos horizontes de previsão e controle.

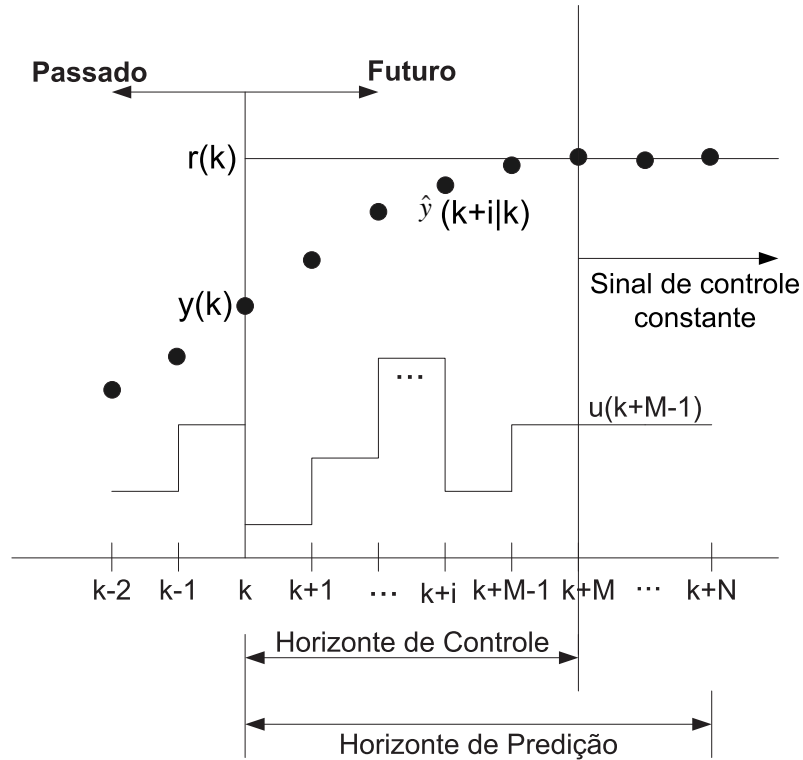


FIGURA 3.2 – Ilustração dos conceitos de horizontes de previsão e controle.

Uma vez obtida a seqüência de controle ótima, apenas o primeiro elemento dessa

seqüência é aplicado ao processo, pois no próximo instante de amostragem as informações dos sensores são atualizadas e um novo processo de otimização é realizado. Tal conceito é conhecido como **estratégia de horizonte retrocedente**. Essa estratégia é importante para obter robustez com respeito a incertezas ou aproximações feitas no modelo, bem como para compensar o efeito de perturbações exógenas.

Por fim, vale destacar que a acurácia do modelo de predição é fundamental para o sucesso de um controlador preditivo. Este modelo deve ser capaz de representar de maneira satisfatória a dinâmica do processo e, ao mesmo tempo, deve ser suficientemente simples para poder ser usado em tempo real com o algoritmo de otimização. Neste trabalho, optou-se por usar um modelo no espaço de estados, devido à simplicidade com que tal formulação trata processos multivariáveis.

3.1 Formulação de MPC adotada

O esquema mostrado na figura 3.1 foi considerado como base para uma formulação de MPC onde a planta considerada possui p entradas e q saídas. Para o modelo de predição considerou-se um modelo em espaço de estados representado por:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} \quad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Para a função custo foi adotada uma formulação que penaliza o erro de rastreamento das q saídas do sistema e as variações do sinal de controle das p entradas, conforme mostrado na equação (3.3). Além disso, esse custo leva em consideração as saídas preditas $\hat{y}(k+i|k)$ estimadas ao longo do horizonte de predição (N) tendo como base as informações disponíveis até o instante atual k .

$$J(\Delta\hat{u}(k+i-1|k)) = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^N \mu_j [\hat{y}_j(k+i|k) - r_j(k+i)]^2 + \sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^M \rho_l [\Delta\hat{u}_l(k-1+i|k)]^2 \quad (3.3)$$

em que $\Delta\hat{u}(k+i-1|k) = \hat{u}(k+i-1|k) - \hat{u}(k+i-2|k)$ denota as variações do controle e $\mu_j \geq 0$; $j = 1, \dots, q$ e $\rho_l > 0$; $l = 1, \dots, p$, são parâmetros de projeto que devem ser escolhidos de modo a refletir um compromisso entre a minimização do erro de rastreamento da referência em cada canal de saída e a minimização das variações em cada variável manipulada.

O uso de variações do controle na formulação do custo tem por objetivo conferir ação integral ao controlador, permitindo realizar o rastreamento de referências constantes com erro de regime nulo (MACIEJOWSKI, 2002).

Essa função custo pode ser reescrita na forma matricial. Para isso, deve-se definir uma matriz de pesos de saída W_y da seguinte forma.

$$W_y = \begin{bmatrix} \Sigma(\mu) & 0_{q \times q} & \cdots & 0_{q \times q} \\ 0_{q \times q} & \Sigma(\mu) & \cdots & 0_{q \times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{q \times q} & 0_{q \times q} & \cdots & \Sigma(\mu) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

em que, $0_{q \times q}$ é uma matriz de zeros com dimensão $q \times q$ e

$$\Sigma(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_q \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Deve-se também definir, de forma similar, uma matriz de pesos de entrada W_u utilizando-se os pesos ρ_l .

$$W_u = \begin{bmatrix} \Sigma(\rho) & 0_{q \times q} & \cdots & 0_{q \times q} \\ 0_{q \times q} & \Sigma(\rho) & \cdots & 0_{q \times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{q \times q} & 0_{q \times q} & \cdots & \Sigma(\rho) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

em que

$$\Sigma(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_q \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dessa forma, a função custo pode ser reescrita como:

$$J(\Delta \hat{U}) = (\hat{Y} - R)W_y(\hat{Y} - R)^T + \Delta \hat{U}W_u\Delta \hat{U}^T \quad (3.8)$$

em que

$$R = \begin{bmatrix} r(k+1) \\ \vdots \\ r(k+N) \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}, \Delta\hat{U} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Neste ponto vale destacar que vários autores explicitam a relação entre \hat{Y} e $\Delta\hat{U}$ reescrevendo a equação de estado em função das variações no sinal de controle ΔU . Para isso o estado do sistema é aumentado com uma componente adicional $u(k-1)$. Neste trabalho, no entanto, será adotada uma abordagem diferente e a relação entre \hat{Y} e $\Delta\hat{U}$ será expressa por uma equação de predição baseada em um modelo em espaço de estados incremental, conforme apresentado abaixo.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ (-) \quad x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $\Delta x(k+1) = x(k+1) - x(k)$ e $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$.

Da mesma forma, tem-se que:

$$\Delta y(k) = y(k) - y(k-1) = C\Delta x(k) \quad (3.11)$$

Assim, o modelo em espaço de estados incremental pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \\ \Delta y(k) &= C\Delta x(k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dessa forma, conhecendo-se o valor do estado atual da planta $x(k)$ no início do horizonte de predição e armazenando-se os últimos valores dos estados $x(k-1)$ e o último sinal de controle $u(k-1)$ aplicado à planta, pode-se obter a equação de predição do sistema utilizando-se as seguintes relações.

$$\Delta\hat{x}(k+i+1|k) = \begin{cases} A\Delta x(k) + B\Delta\hat{u}(k|k), & i = 0 \\ A\Delta\hat{x}(k+i|k) + B\Delta\hat{u}(k+i|k), & i > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\Delta\hat{y}(k+i|k) = C\Delta\hat{x}(k+i|k) \quad (3.14)$$

em que $i = 0, \dots, N-1$.

Expandindo essa recursão obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{x}(k+1|k) &= A\Delta x(k) + B\Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{x}(k+2|k) &= A\Delta\hat{x}(k+1|k) + B\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &= A[A\Delta x(k) + B\Delta\hat{u}(k|k)] + B\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &= A^2\Delta x(k) + AB\Delta\hat{u}(k|k) + B\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &\vdots \\ \Delta\hat{x}(k+N|k) &= A\Delta\hat{x}(k+N-1|k) + B\Delta\hat{u}(k+N-1|k) \\ &= A^N\Delta x(k) + A^{N-1}B\Delta\hat{u}(k|k) + A^{N-2}B\Delta\hat{u}(k+1|k) + \dots + B\Delta\hat{u}(k+N-1|k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Essas equações podem ser combinadas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\Delta \hat{Y} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{y}(k+1|k) \\ \Delta \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix} \Delta x(k) \quad (3.16)$$

Vale destacar que, se for usado um horizonte de controle de M passos, as variações $\Delta \hat{u}(k-1+i|k)$ serão nulas para $i > M$. Dessa forma, o problema de otimização se restringe a determinar a sequência $\{\Delta \hat{u}^*(k-1+i|k), i = 1, \dots, M\}$. Assim, a equação (3.16) pode ser simplificada da seguinte forma.

$$\Delta \hat{Y} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 & | & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CA^{N-M}B & | & CA^{N-M-1}B & \cdots & CB \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix} \Delta x(k) \quad (3.17)$$

que resulta em:

$$\Delta\hat{Y} = \overbrace{\begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CA^{N-M}B \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta\hat{U}} + \overbrace{\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}}^Q \Delta x(k) \quad (3.18)$$

$$\Delta\hat{Y} = P\Delta\hat{U} + Q\Delta x(k)$$

Observe que a equação de predição obtida acima está em função de $\Delta\hat{Y}$ e a equação do custo (3.8) em função de \hat{Y} . No entanto, as predições \hat{Y} podem ser expressas em relação a $\Delta\hat{Y}$. Com efeito, uma vez que:

$$y(k) = \Delta y(k) + y(k-1) \quad (3.19)$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &= \Delta\hat{y}(k+1|k) + y(k) \\
\hat{y}(k+2|k) &= \Delta\hat{y}(k+2|k) + \hat{y}(k+1|k) \\
&= \Delta\hat{y}(k+2|k) + \Delta\hat{y}(k+1|k) + y(k) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+N|k) &= \Delta\hat{y}(k+N|k) + \Delta\hat{y}(k+N-1|k) + \dots + \Delta\hat{y}(k+1|k) + y(k)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Na forma matricial tem-se que:

$$\hat{Y} = \overbrace{\begin{bmatrix} I_q & 0 & \cdots & 0 \\ I_q & I_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_q & I_q & I_q & I_q \end{bmatrix}}^{T_N^{I_q}} \Delta\hat{Y} + \overbrace{\begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix}}^{\Gamma_N^{I_q}} y(k) \tag{3.21}$$

em que I_q é uma matriz identidade de dimensão $q \times q$.

Portanto,

$$\hat{Y} = T_N^{I_q} \Delta\hat{Y} + \Gamma_N^{I_q} y(k) \tag{3.22}$$

Substituindo-se a equação (3.18) na equação (3.22), obtém-se a equação de predição em função apenas de $\Delta x(k)$, $\Delta\hat{U}$ e $y(k)$.

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= T_N^{I_q} \left[Q\Delta x(k) + P\Delta\hat{U} \right] + \Gamma_N^{I_q} y(k) \\
\hat{Y} &= G\Delta\hat{U} + F
\end{aligned} \tag{3.23}$$

em que $G = T_N^{I_q} P$ e $F = T_N^{I_q} Q \Delta x(k) + \Gamma_N^{I_q} y(k)$.

Por fim, substituindo-se a equação de predição obtida acima na função custo (3.8) chega-se a:

$$\begin{aligned} J(\Delta \hat{U}) &= \left(G \Delta \hat{U} + F - R \right)^T W_y \left(G \Delta \hat{U} + F - R \right) + \Delta \hat{U}^T W_u \Delta \hat{U} \\ &= \Delta \hat{U}^T \left(G^T W_y G + W_u \right) \Delta \hat{U} + 2(F - R)^T W_y G \Delta \hat{U} \\ &\quad + (F - R)^T W_y (F - R) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, a função custo pode ser escrita como:

$$J(\Delta \hat{U}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{U}^T \mathcal{G} \Delta \hat{U} + f^T \Delta \hat{U} + c \quad (3.25)$$

em que $(1/2)\mathcal{G} = G^T W_y G + W_u$, $f^T = 2(F - R)^T W_y G$ e $c = (F - R)^T W_y (F - R)$.

A função custo (3.25) é quadrática em $\Delta \hat{U}$. Desse modo, na ausência de restrições, a minimização de $J(\Delta \hat{U})$ possui solução analítica exata se a matriz \mathcal{G} for não singular. Se existirem restrições expressas na forma de limites de excursão para u , Δu e \hat{y} , o problema de otimização assume uma forma de Programação Quadrática, que pode ser resolvida em tempo real através do uso de algoritmos numéricos eficientes ([MACIEJOWSKI, 2002](#)), ([CAMACHO; BORDONS, 1999](#)).

3.1.1 Solução na ausência de restrições

Considerando a equação obtida na equação (3.25), o ponto de mínimo $\Delta \hat{U}^*$ deve anular o gradiente de $\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{U}}$. Assim, convencionando-se que o gradiente seja um vetor linha, temos que:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{U}} = \Delta \hat{U}^T \mathcal{G} + f^T \quad (3.26)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{U}} &= 0 \Rightarrow \Delta \hat{U}^T \mathcal{G} + f^T = 0 \stackrel{\mathcal{G}^T = \mathcal{G}}{\Rightarrow} \mathcal{G} \Delta \hat{U}^T + f^T = 0 \\ \Delta \hat{U}^* &= -\mathcal{G}^{-1} f = -\left(\frac{1}{2} (G^T W_y G + W_u)\right)^{-1} 2(F - R)^T W_y G \\ \Delta \hat{U}^* &= (G^T W_y G + W_u)^{-1} G^T W_y^T (R - F) \end{aligned} \quad (3.27)$$

A matriz $(G^T W_y G + W_u)$ é sempre positivo-definida para quaisquer valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \geq 0$ e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p > 0$. Em particular, esses parâmetros podem ser utilizados para controlar a suavidade do sinal de controle. Com efeito, uma redução no valor dos parâmetros ρ_l tende a deixar a malha mais rápida, à custa de um maior esforço de controle e uma maior sensibilidade a ruído de medida.

A matriz \mathcal{G} é a matriz Hessiana do custo e como ela é positiva-definida a solução de fato corresponde a um mínimo. Assim, no instante k a variação do controle a ser aplicado corresponde ao primeiro elemento do vetor $\Delta \hat{U}^*$, ou seja, $\Delta \hat{u}^*(k|k) = K_{MPC}(R - F)$, em que K_{MPC} é a primeira linha da matriz $(G^T W_y G + W_u)^{-1} G^T W_y^T$. Dessa forma, pode-se calcular e armazenar K_{MPC} antes do início da operação.

A matriz F é denominada resposta “livre do sistema” e corresponde à resposta do sistema devido às condições iniciais no instante k mantendo-se o controle constante. Vale destacar que o controlador preditivo atua somente quando a resposta livre não é igual à referência estabelecida.

3.1.2 Tratamento de restrições

Qualquer sistema físico apresenta restrições físicas ou de segurança nas variáveis de saída e limitações operacionais, seja em atuadores que possuem uma faixa limite de operação e uma taxa de variação limitada, seja nos sensores que também possuem limites de funcionamento e acabam inserindo limites máximos e mínimos nas variáveis do processo.

Neste trabalho foi considerado o tratamento de três tipos de restrições, a saber, limitações sobre a taxa de variação do controle, sobre a excursão do controle e sobre a excursão da saída da planta. Essas restrições foram expressas em função do vetor $\Delta\hat{U}$ como descrito a seguir.

3.1.2.1 Restrições na taxa de variação do controle

Como o modelo do processo já está expresso em termos das variações no controle, torna-se simples a formulação dessa restrição. Para isso, denotam-se os limites da variação de controle, por período de amostragem, como Δu_{min} e Δu_{max} .

$$\Delta u_{min} = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,min} \\ \Delta u_{2,min} \\ \vdots \\ \Delta u_{p,min} \end{bmatrix} \quad \Delta u_{max} = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,max} \\ \Delta u_{2,max} \\ \vdots \\ \Delta u_{q,max} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Dessa forma, essa restrição pode ser expressa como:

$$\Delta u_{min} \leq \Delta\hat{u}(k-1+i|k) \leq \Delta u_{max}, i = 1, \dots, M \quad (3.29)$$

em que as desigualdades se aplicam elemento a elemento.

Em notação matricial tem-se que:

$$Bl_M[\Delta u_{min}] \leq I_{pM} \Delta \hat{U} \leq Bl_M[\Delta u_{max}] \quad (3.30)$$

em que I_{pM} é uma matriz identidade de dimensão pM e $Bl_M[\bullet]$ é um operador que empilha M cópias de um dado vetor coluna.

A desigualdade (3.30) pode ser reescrita em duas desigualdades da seguinte forma:

$$\begin{cases} I_{pM} \Delta \hat{U} \leq Bl_M[\Delta u_{max}] \\ -I_{pM} \Delta \hat{U} \leq -Bl_M[\Delta u_{min}] \end{cases} \quad (3.31)$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \end{bmatrix} \Delta \hat{U} \leq \begin{bmatrix} Bl_M[\Delta u_{max}] \\ -Bl_M[\Delta u_{min}] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.1.2.2 Restrições na excursão de controle

Os limites mínimo e máximo da excursão de controle serão denotados, respectivamente, por u_{min} e u_{max} , em que:

$$u_{min} = \begin{bmatrix} u_{1,min} \\ u_{2,min} \\ \vdots \\ u_{p,min} \end{bmatrix} \quad u_{max} = \begin{bmatrix} u_{1,max} \\ u_{2,max} \\ \vdots \\ u_{p,max} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Assim, esta restrição pode ser expressa como:

$$u_{min} \leq \hat{u}(k+i-1|k) \leq u_{max}, i = 1, \dots, M \quad (3.34)$$

Vale destacar que, se o modelo tiver sido linearizado em torno de um valor de equilíbrio \bar{u} para o controle, os limites u_{min} e u_{max} estarão se referindo a diferenças com respeito a \bar{u} .

A desigualdade (3.34) pode ser reescrita em termos das variações no controle Δu . Para isso, deve-se obter uma relação entre u e Δu , conforme apresentado a seguir.

$$\begin{aligned} \hat{u}(k|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &\vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \dots + \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Na forma matricial tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \dots + \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A expressão obtida acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{U}} = \overbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{Bl_M[u(k-1)]} + \overbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \\ I_p & I_p & \cdots & 0_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0_p \\ I_p & I_p & \cdots & I_p \end{bmatrix}}^{H_{pM}} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta\hat{U}} \quad (3.37)$$

em que I_p é uma matriz identidade de dimensão $p \times p$ e 0_p é uma matriz nula também de dimensão $p \times p$.

Assim,

$$\hat{U} = Bl_M[u(k-1)] + H_{pM}\Delta\hat{U} \quad (3.38)$$

Reescrevendo a equação (3.34) na forma matricial $Bl_M[u_{min}] \leq \hat{U} \leq Bl_M[u_{max}]$ e substituindo nessa expressão a equação (3.38) tem-se que:

$$Bl_M[u_{min}] \leq Bl_M[u(k-1)] + H_{pM}\Delta\hat{U} \leq Bl_M[u_{max}] \quad (3.39)$$

ou,

$$Bl_M[u_{min} - u(k-1)] \leq H_{pM}\Delta\hat{U} \leq Bl_M[u_{max} - u(k-1)] \quad (3.40)$$

Essa desigualdade ainda pode ser reescrita em duas desigualdades da seguinte forma:

$$\begin{cases} H_{pM}\Delta\hat{U} \leq Bl_M[u_{max} - u(k-1)] \\ -H_{pM}\Delta\hat{U} \leq -Bl_M[u_{min} - u(k-1)] \end{cases} \quad (3.41)$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} H_{pM} \Delta \hat{U} \\ -H_{pM} \Delta \hat{U} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Bl_M [u_{max} - u(k-1)] \\ -Bl_M [u_{min} - u(k-1)] \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

3.1.2.3 Restrições na excursão do sinal de saída

Denotando-se por y_{min} e y_{max} os limites para o sinal de saída da planta, em que:

$$y_{min} = \begin{bmatrix} y_{1,min} \\ y_{2,min} \\ \vdots \\ y_{q,min} \end{bmatrix} \quad y_{max} = \begin{bmatrix} y_{1,max} \\ y_{2,max} \\ \vdots \\ y_{q,max} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Esta restrição pode ser expressa como:

$$y_{min} \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{max}, i = 1, \dots, N \quad (3.44)$$

ou na forma matricial:

$$Bl_N[y_{min}] \leq \hat{Y} \leq Bl_N[y_{max}] \quad (3.45)$$

em que $Bl_N[\bullet]$ é um operador que empilha N cópias de um dado vetor coluna.

Substituindo-se a equação de predição (3.23) na expressão acima pode-se obter esta desigualdade em função de $\Delta \hat{U}$. Para isso, de

$$Bl_N[y_{min}] \leq G \Delta \hat{U} + F \leq Bl_N[y_{max}] \quad (3.46)$$

segue que:

$$Bl_N[y_{min}] - F \leq G\Delta\hat{U} \leq Bl_N[y_{max}] - F \quad (3.47)$$

ou

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta\hat{U} \leq \begin{bmatrix} Bl_N[y_{max}] - F \\ -Bl_N[y_{min}] - F \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Por fim, pode-se expressar de forma resumida as desigualdades (3.32), (3.43) e (3.48) em uma única restrição de desigualdade.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \\ H_{pM} \\ -H_{pM} \\ G \\ -G \end{bmatrix}}^S \Delta\hat{U} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} Bl_M[\Delta u_{max}] \\ -Bl_M[\Delta u_{min}] \\ Bl_M[u_{max} - u(k-1)] \\ -Bl_M[u_{min} - u(k-1)] \\ Bl_N[y_{max}] - F \\ -Bl_N[y_{min}] - F \end{bmatrix}}^b \quad (3.49)$$

ou ainda, de forma mais compacta:

$$S\Delta\hat{U} \leq b \quad (3.50)$$

em que a matriz S tem dimensão $(4pM + 2qN) \times pM$ e a matriz b tem dimensão $(4pM + 2qN) \times 1$.

Dessa forma, o problema de otimização consiste em minimizar a função custo quadrática (3.25) sujeito às desigualdades lineares (3.49). Conforme já mencionado anteriormente, esse problema pode ser resolvido em cada período de amostragem por um algoritmo de Programação Quadrática (problema quadrático no custo e linear nas restrições).

4 Materiais e Métodos

O desenvolvimento do trabalho pode ser dividido em duas etapas distintas, quais sejam, simulação do modelo não-linear em ambiente Matlab/Simulink e implementação em tempo real do controlador preditivo utilizando o helicóptero 3DOF. A seguir, será descrito o procedimento e os materiais utilizados em cada uma destas etapas.

4.1 Simulação do Modelo

4.1.1 Materiais utilizados

Na parte de simulação os únicos materiais utilizados foram:

- Microcomputador com processador Pentium IV 3.0GHz, 1 GHz de memória RAM e sistema operacional Windows XP Service Pack 2;
- Software Matlab/Simulink versão 7.0;

4.1.2 Procedimento de simulação

Para avaliação do modelo do helicóptero 3DOF e da lei de controle preditivo em malha fechada, utilizou-se o diagrama de simulação mostrado abaixo implementado em ambiente

Matlab/Simulink.

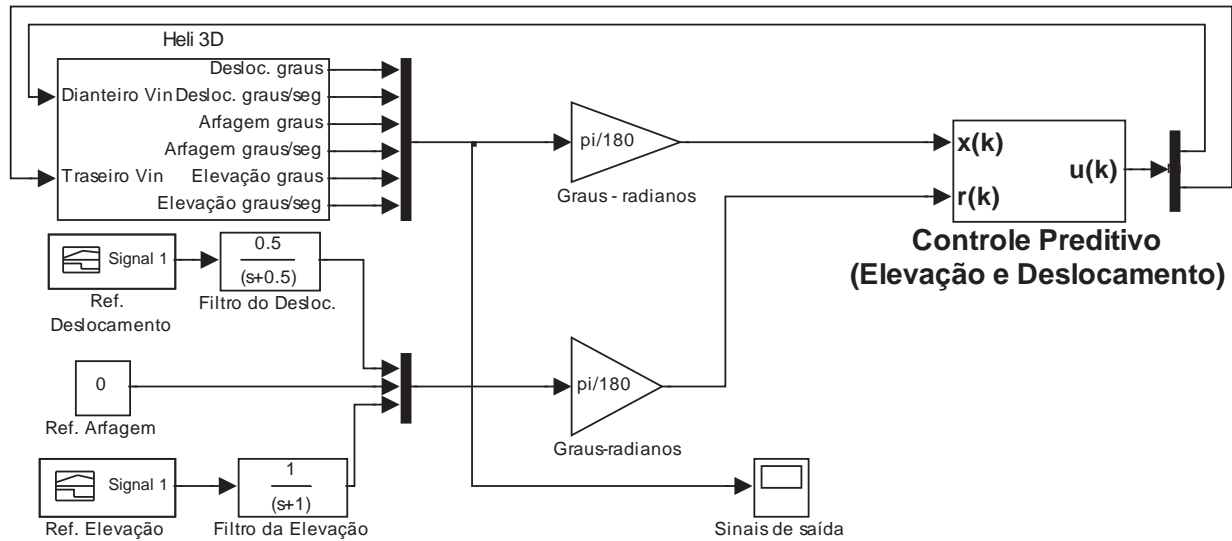


FIGURA 4.1 – Diagrama de simulação do helicóptero 3DOF sob a ação de um controlador preditivo.

Vale ressaltar que a dinâmica do helicóptero é simulada com base nas equações diferenciais não-lineares obtidas pelo formalismo de Lagrange (Capítulo 2), ao passo que o controlador emprega um modelo de predição linearizado, como descrito anteriormente. As duas implementações foram realizadas através de S-Functions ([MATHWORKS, 2003](#)).

Conforme já mencionado, para o tratamento de restrições utilizou-se a função *quadprog* do *Matlab Optimization Toolbox* para resolver o problema de programação quadrática resultante.

O diagrama de blocos mostrado abaixo ilustra detalhes do bloco de implementação do controlador preditivo.

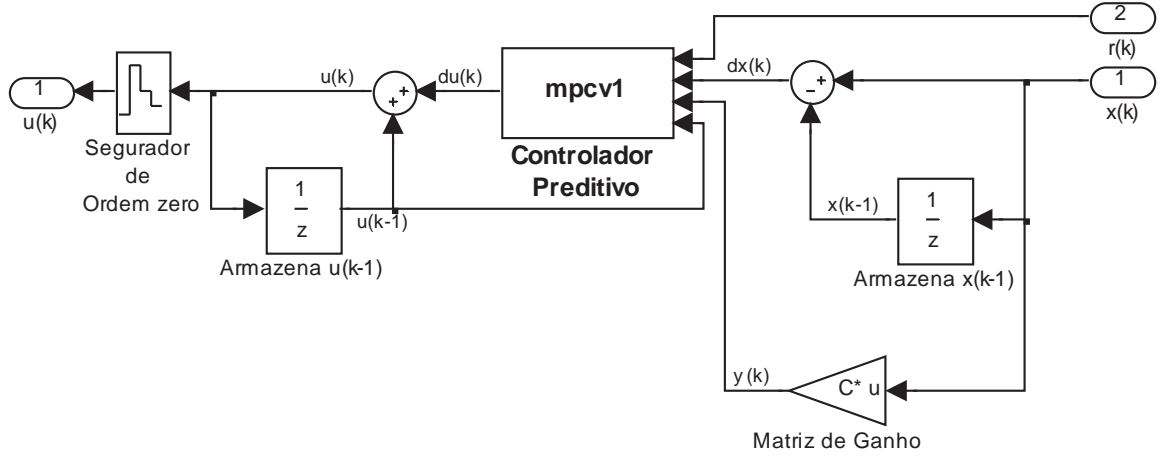


FIGURA 4.2 – Detalhe da implementação do controlador preditivo em ambiente Matlab/Simulink. O bloco identificado como “*mpcv1*” é a S-Function que implementa a lei de controle.

O controle foi efetuado com um período de amostragem de 50ms e todas as simulações realizadas com passos de integração fixos de 10ms utilizando o método de Euler de 1ª ordem.

Nas simulações, os pesos do controle para o motor dianteiro e traseiro foram fixados em $\rho = [1, 1]$. Além disso, os valores do controle ficaram restritos na faixa de 0 a 5V. Essa restrição é necessária devido a limitação dos amplificadores de potência utilizados nos ensaios experimentais com o helicóptero (figura 4.4).

Os pesos de saída para os ângulos de deslocamento, arfagem e elevação foram fixados em $\mu = [1, 0, 1]$, respectivamente. O peso para a arfagem foi fixado em zero porque nenhuma referência externa será imposta para essa variável.

As velocidades angulares, \dot{T} , \dot{P} e \dot{E} , foram estimadas através de filtros derivativos com funções de transferência $(20s/(s+20))$, $(50s/(s+50))$ e $(50s/(s+50))$, respectivamente, como sugerido pelo fabricante do helicóptero.

Conforme já mencionado, as variáveis controladas são os ângulos de deslocamento e elevação. Assim, os dois sinais de referência definidos para simulação estão mostrados

abaixo.

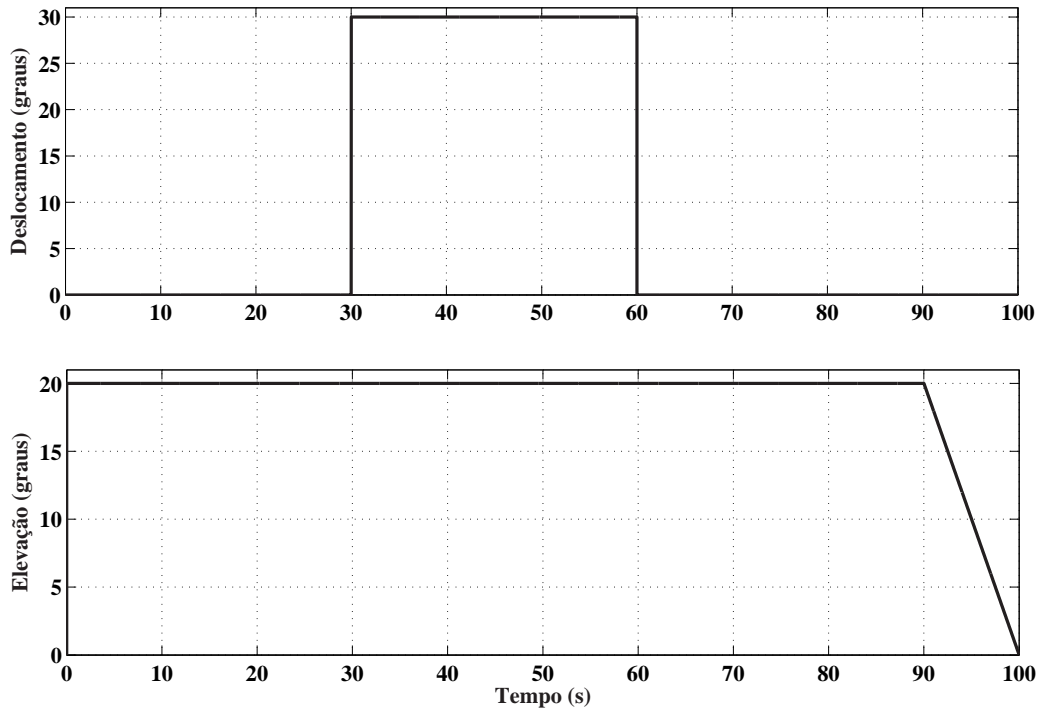


FIGURA 4.3 – Sinais de referência para os ângulos de deslocamento e elevação.

Vale destacar que esses sinais ainda sofrem um processo de pré-filtragem para evitar que o helicóptero realize movimentos bruscos. Os filtros utilizados foram $(0.5/(s + 0.5))$ e $(1/(s + 1))$ para o deslocamento e elevação, respectivamente. Esses filtros podem ser observados na figura 4.1.

4.2 Implementação em tempo real

4.2.1 Materiais utilizados

Para implementação do controlador preditivo em tempo real foi utilizado o seguinte aparato:

- Helicóptero 3DOF fabricado pela empresa Quanser Consulting [®];

- Microcomputador com processador Pentium IV 3.0GHz, 1 GHz de memória RAM e sistema operacional Windows XP Service Pack 2;
- Software Ardence RTX Runtime ver 6.10;
- Placa de aquisição de dados Quanser Q4;
- Software Quanser Wincon 5.0/Build 21 para controle em tempo real empregando a plataforma Matlab/Simulink 7.0;

4.2.1.1 Ardence RTX Runtime

Um sistema de controle em tempo real é aquele onde o sistema computacional deve monitorar e atuar sobre um determinado número de eventos externos relacionados ao funcionamento da planta controlada. Estes eventos podem ser periódicos ou esporádicos e isto impõe restrições temporais bastante sérias sobre os programas que implementam os algoritmos de controle e sobre os sistemas operacionais que os suportam. Afinal os dados relativos a um determinado evento devem ser lidos antes que percam o significado, como por exemplo, uma ação de controle deve ser executada antes que as condições que a determinaram se modifiquem.

Dessa forma, nesses sistemas o atendimento aos eventos relacionados com a dinâmica do processo controlado é fundamental. Com efeito, um sistema operacional para suportar aplicações de tempo real deve possuir características bem definidas quanto ao tempo de resposta a eventos externos e quanto ao custo incorrido pelo uso de seus serviços. Além disso, os valores de tempo de resposta a interrupções e de custo dos serviços devem ser conhecidos para que seja possível a previsão do comportamento do controlador nas várias combinações possíveis de eventos e estados da planta.

Dessa forma, o Windows XP não é um sistema operacional adequado para o controle em tempo real, embora haja a declaração de classe tempo real dentro de seu escalonador, pois o sistema não possui, por exemplo, garantias da latência determinística de interrupções.

Assim, é necessário a utilização do Software Ardence RTX Runtime versão 6.10 que, de maneira simplificada, é um suporte que garante que o Windows XP trabalhe de forma dedicada executando os processos de interesse em tempo real.

4.2.1.2 Descrição do software da placa de aquisição de dados

A figura mostrada abaixo ilustra a configuração de ligação de todos equipamentos utilizados na implementação em tempo real.

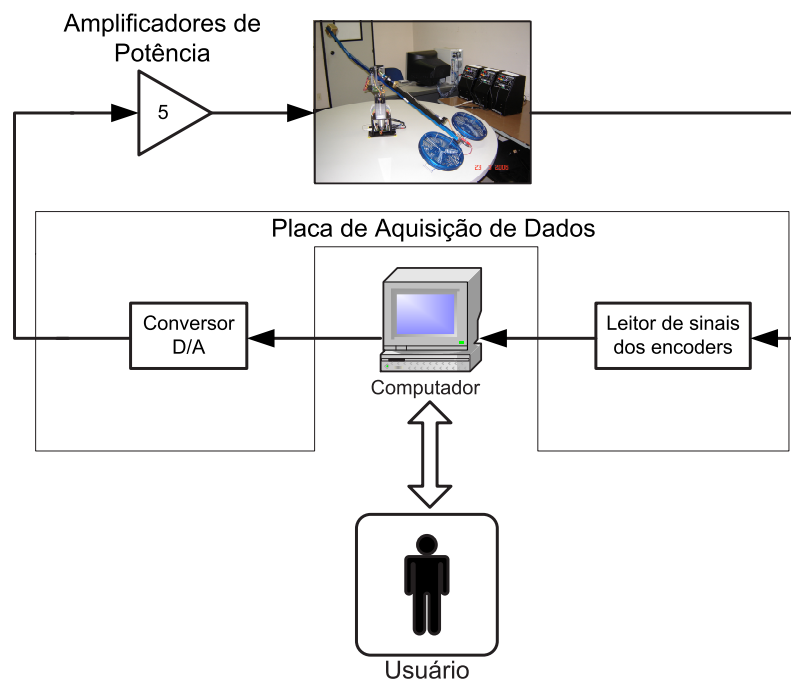


FIGURA 4.4 – Configuração da montagem do experimento com o helicóptero 3DOF.

A comunicação entre a placa de aquisição de dados e o controlador preditivo é realizada através de um aplicativo fornecido pela própria Quanser Consulting, chamado de WinCon.

O WinCon versão 5.0 é um aplicativo em tempo real para ambiente Windows XP cuja função básica é executar o código gerado em Simulink utilizando o pacote Real-Time Workshop do Matlab em um computador. O WinCon constitui-se de um cliente (WinCon WxpClient) e um servidor (WinCon WxpServer), sendo que cada servidor é capaz de se comunicar com vários clientes e cada cliente pode se comunicar com vários servidores.

O WinCon pode operar com várias configurações diferentes, como por exemplo, em um único computador (sem rede), em dois computadores (conexão direta ou Internet), com um servidor e vários clientes (Internet), ou ainda com vários servidores e vários clientes (Internet). Neste trabalho, o servidor e o cliente foram executados no mesmo computador.

- **Servidor WinCon:** É responsável por executar as seguintes tarefas:

1. Iniciar e interromper a execução do cliente WinCon;
2. Manter a comunicação via TCP/IP com o cliente WinCon;
3. Manter a comunicação com o Simulink para realizar alterações em tempo real nos parâmetros do cliente WinCon;
4. Converter um diagrama do Simulink em um driver de dispositivo virtual executável para computador usando o Real-Time Workshop;
5. Compilar e linkar o código usando o Visual C++;
6. Enviar o código executável para execução em um cliente WinCon;
7. Traçar gráficos, em tempo real, informações obtidas de um cliente WinCon escolhido;
8. Salvar informações em disco;

- **Cliente WinCon:** Responsável pela execução do código gerado a partir do diagrama Simulink com uma taxa de amostragem especificada. Além disso, pode executar as seguintes funções:

1. Manter a comunicação com um servidor WinCon.
2. Fornecer informações em tempo real para o servidor que as solicita.
3. Receber do servidor o código do controlador;
4. Executar o código do controlador em tempo real;

4.2.2 Ensaios realizados

O aplicativo Wincon responsável por executar o código do controlador em tempo real só aceita algoritmos escritos na linguagem C. Dessa forma, para os ensaios a lei de controle teve que ser implementada em uma S-Function escrita em C. Para resolução do problema de programação quadrática foi utilizado um algoritmo de domínio público desenvolvido por K. Schittkowski ([SCHITTKOWSKI, 1992](#)).

Em todos os ensaios realizados adotou-se um período de amostragem de 50ms e passos de integração fixos de 10ms utilizando o método de Euler de 1ª ordem. Este método foi escolhido pois forneceu resultados práticos melhores do que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Além disso, os pesos do controle foram fixados em $\rho = [1, 1]$ e restritos na faixa de 0 a 5V, e os pesos de saída mantidos em $\mu = [1, 0, 1]$, procurando, assim, manter as mesmas condições definidas nas simulações.

4.2.2.1 Validação do Modelo

Validar um modelo analítico significa determinar se o modelo apresentado é uma representação adequada do sistema real.

Neste trabalho, foram adotados dois procedimentos para validação do modelo não-linear obtido no Capítulo 2. O primeiro, foi a análise qualitativa dos gráficos gerados através da simulação do modelo em malha fechada empregando o controlador preditivo. O segundo, foi comparar os resultados obtidos através de simulações com os resultados obtidos em ensaios experimentais onde a planta foi submetida às mesmas condições do modelo de simulação.

As simulações utilizadas nas comparações foram realizadas nas mesmas condições descritas na seção 4.1.2. No entanto, acrescentou-se quantizadores na malha de controle para simular os efeitos causados pelos três encoders.

Para os ensaios utilizou-se a configuração ilustrada na figura 4.4 e o diagrama de blocos mostrado abaixo implementado em ambiente Matlab/Simulink.

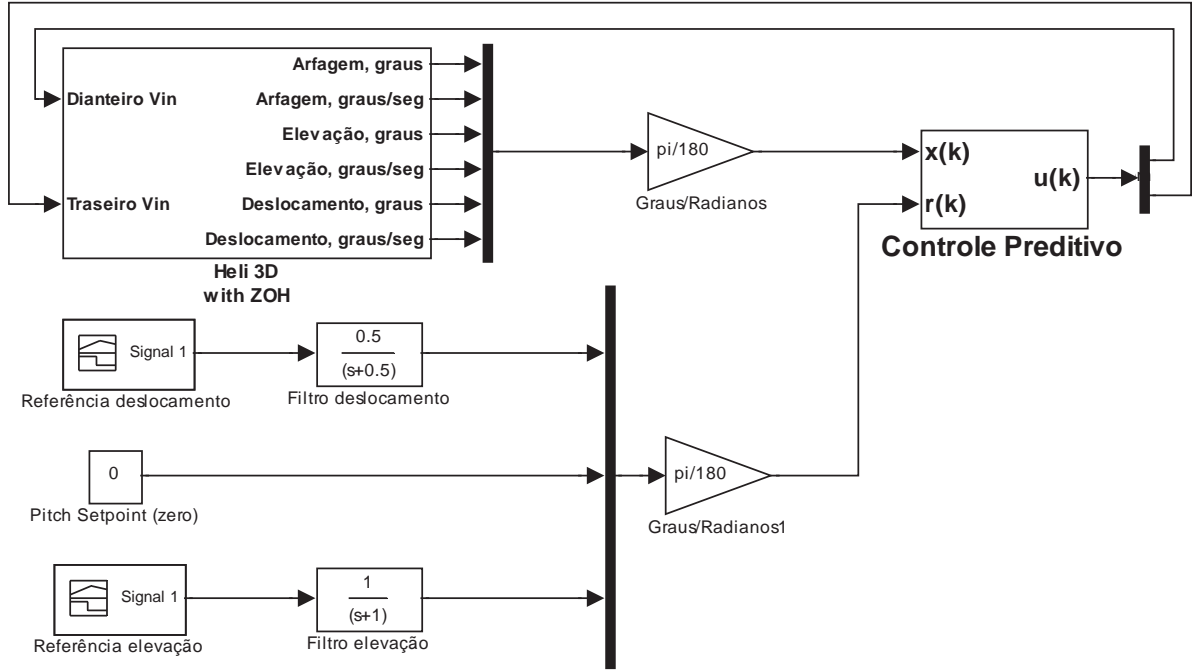


FIGURA 4.5 – Detalhe da implementação da malha de controle em tempo real em ambiente Matlab/Simulink.

O bloco identificado como “Heli 3D with ZOH” foi fornecido pelo próprio fabricante do helicóptero e tem a função de se comunicar com a placa de aquisição de dados. Além disso, contém os filtros derivativos que estimam as velocidades angulares \dot{T} , \dot{P} e \dot{E} .

O procedimento de realização dos experimentos e análise dos resultados foi dividido em duas partes distintas, a saber:

- **Regime Permanente**

Nesta etapa, foram realizados dois experimentos com o intuito de analisar o comportamento do sistema durante o período de regime permanente. No primeiro, o helicóptero foi mantido a uma altitude constante $E = 20^\circ$ e sem movimento de deslocamento ($T = 0^\circ$). No segundo, apenas alterou-se a elevação para 27° . O mesmo procedimento foi realizado nas simulações.

Os resultados obtidos foram utilizados para comparar os valores de regime das variáveis

de interesse.

- **Regime Transitório**

Nesta análise, as comparações foram feitas sobrepondo-se os gráficos das variáveis de saída fornecidas pelo modelo analítico com os gráficos obtidos nos ensaios com helicóptero 3DOF.

Os sinais de referência aplicados à planta são apresentados na figura abaixo. Repare que, no início do experimento o helicóptero já possui uma elevação de 10° . Isso foi necessário para evitar que a inércia inicial das hélices provoque diferenças entre os gráficos, uma vez que essa inércia não foi considerada na modelagem.

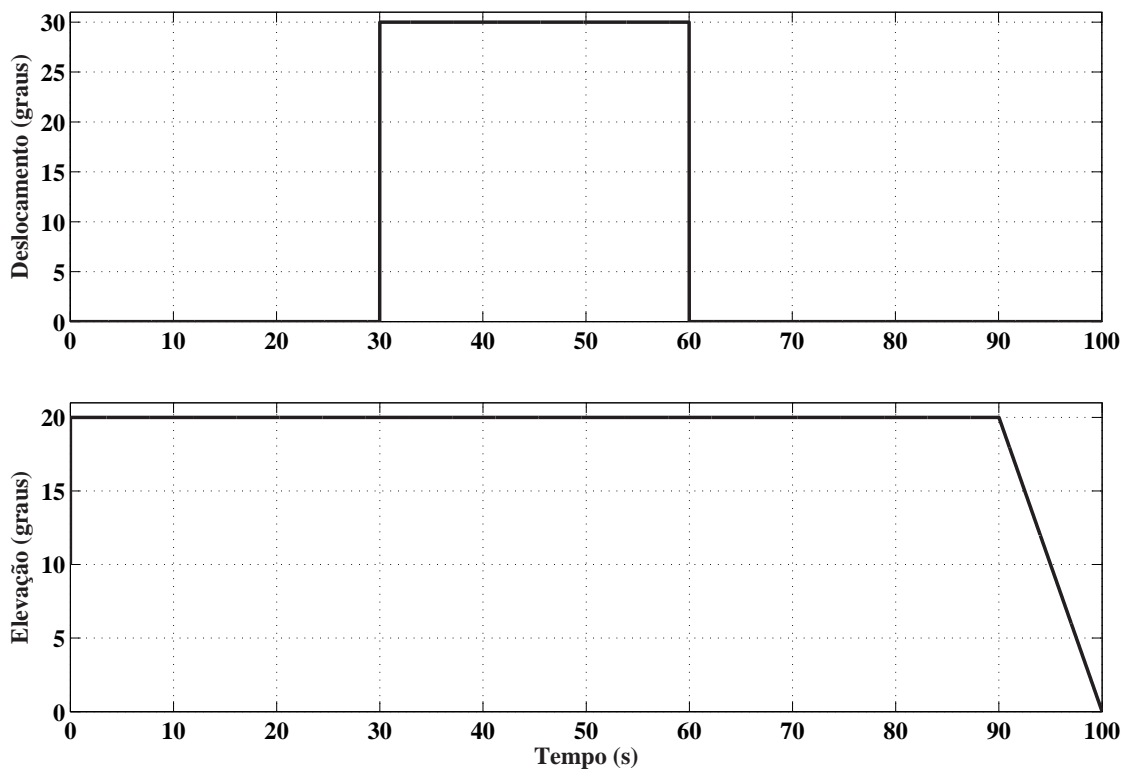


FIGURA 4.6 – Sinais de referência utilizados na validação do modelo não-linear.

4.2.2.2 Desempenho do Controlador Preditivo

No estudo do controlador preditivo foram considerados dois casos distintos. No primeiro deles, o sistema foi mantido livre de restrições (a não ser pela restrição na amplitude do sinal de controle) e investigaram-se os efeitos das alterações nos horizontes de predição (N) e controle (M). No segundo caso, ilustrou-se a capacidade do controlador preditivo em respeitar restrições. Para isso, foram impostas restrições na amplitude do ângulo de arfagem.

O diagrama Simulink utilizado nos ensaios é o mesmo da figura 4.5. A manobra definida para o experimento foi manter o ângulo de elevação fixo em 20° e aplicar uma onda quadrada com variação de 0 até 30° para o ângulo de deslocamento, conforme mostrado na figura abaixo.

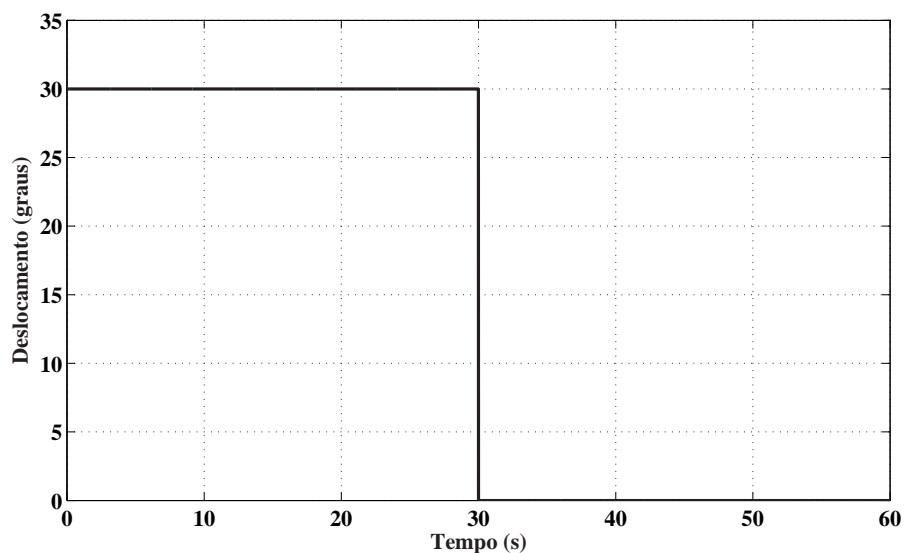


FIGURA 4.7 – Sinal de referência adotado para o ângulo de deslocamento.

4.2.2.3 Controlador Preditivo com Filtro de Kalman

Conforme será visto no próximo capítulo desta tese, a utilização de filtros derivativos para estimar as velocidades angulares afeta negativamente o desempenho do controlador preditivo, pois insere um nível muito grande de ruído na malha de controle.

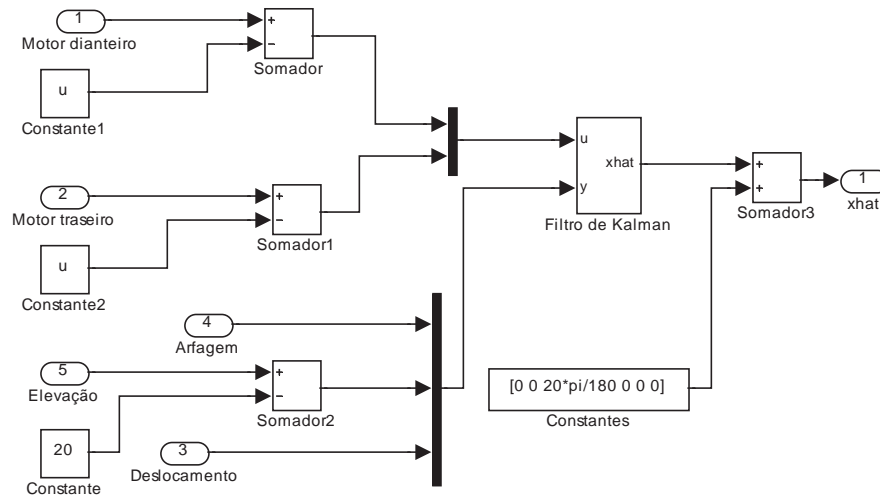
Assim, para melhorar o desempenho do controlador a lei de controle foi alterada com a inclusão de um Filtro de Kalman (FK) para estimar as velocidades angulares. A formulação adotada para o filtro foi o equacionamento “a posteriori” em estado estacionário (vide apêndice B). O ganho do FK foi calculado utilizando a função “*dlqe*” do Matlab e as matrizes de covariância adotadas no projeto do filtro estão mostradas abaixo.

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_f = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

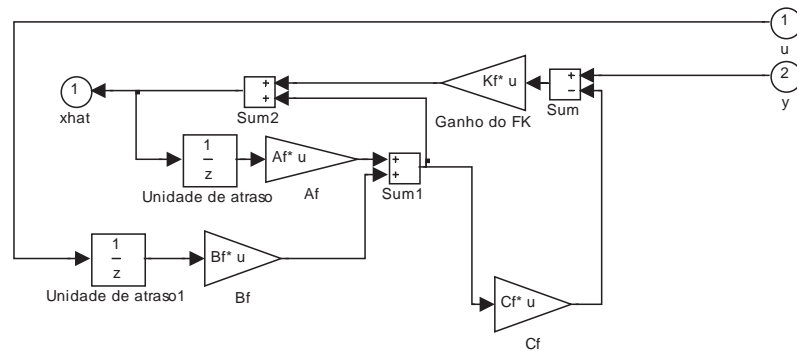
em que Q_f é a covariância do ruído de processo e R_f é a covariância do ruído de medida.

As matrizes Q_f e R_f não podem ser calculadas e são muito difíceis de serem medidas. Assim, estas devem ser estimadas e se constituem nos únicos parâmetros de ajuste do Filtro de Kalman. Neste trabalho, as matrizes foram escolhidas de modo que a resposta fornecida pelo Filtro de Kalman e a saída do sistema apresentasse um erro relativamente pequeno. Vale destacar, no entanto, que nesse ajuste se atribuiu uma confiança maior às medidas dos sensores, conforme pode ser observado em (4.1).

A figura abaixo mostra a implementação do filtro em ambiente Simulink.



a)



b)

FIGURA 4.8 – Filtro de Kalman implementado no ambiente Matlab/Simulink. Na figura a) é mostrado a preparação dos sinais para a entrada no filtro, nesta os valores dos sinais de controle e os fornecidos pelos encoders são subtraídos dos valores do ponto de operação do sistema. Na figura b) é mostrado em detalhes a implementação do Filtro de Kalman propriamente dito.

O diagrama de blocos mostrado abaixo, ilustra a malha de controle com o Filtro de Kalman implementada em ambiente Matlab/Simulink. Os sinais de referência aplicados foram os mesmos definidos no ensaio anterior.

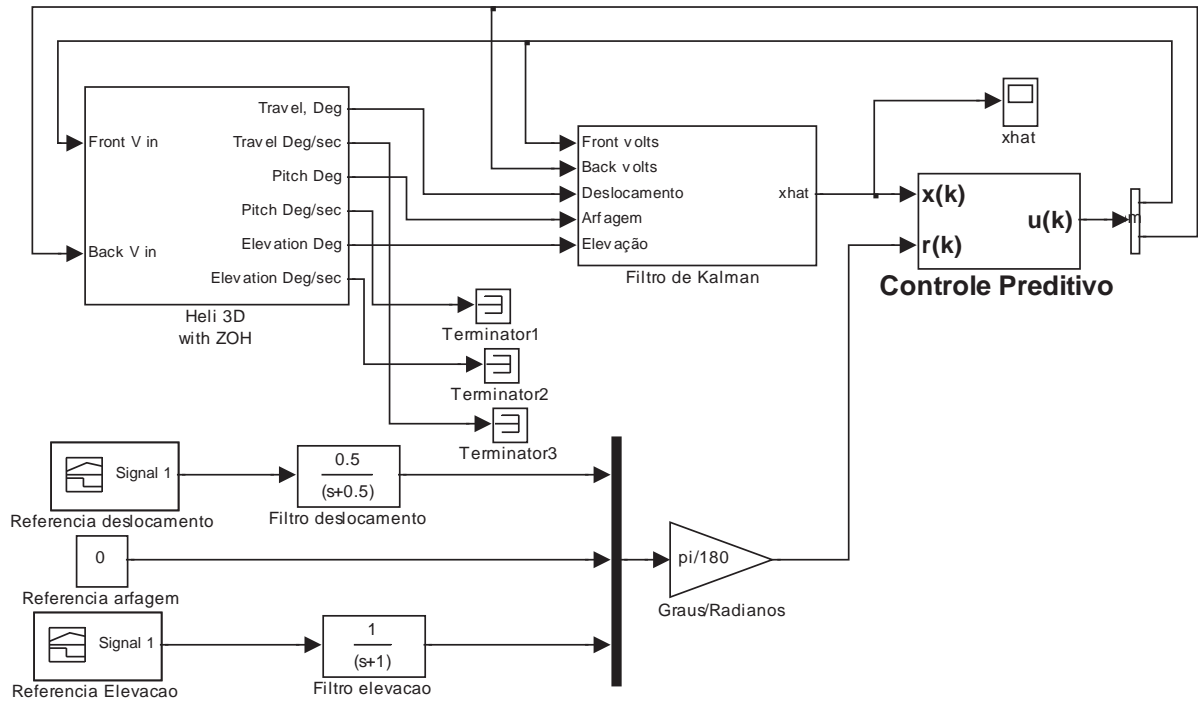


FIGURA 4.9 – Detalhe da implementação da malha de controle com o Filtro de Kalman em ambiente Matlab/Simulink.

Para avaliar as melhorias causadas pela inclusão do Filtro de Kalman na malha de controle, determinaram-se os valores dos horizontes de predição e controle que proporcionam o melhor desempenho do sistema e foi realizada a comparação com os resultados obtidos anteriormente.

5 Resultados e Discussão

5.1 Resultados da Simulação do Modelo

As figuras 5.1 e 5.2 apresentam a resposta da malha de controle aos sinais de referência mostrados na figura 4.3. Os horizontes de predição e controle foram fixados, respectivamente, em $N = 40$ e $M = 10$, e nenhuma restrição adicional foi imposta ao sistema além da restrição na amplitude dos sinais de controle (0 a 5V).

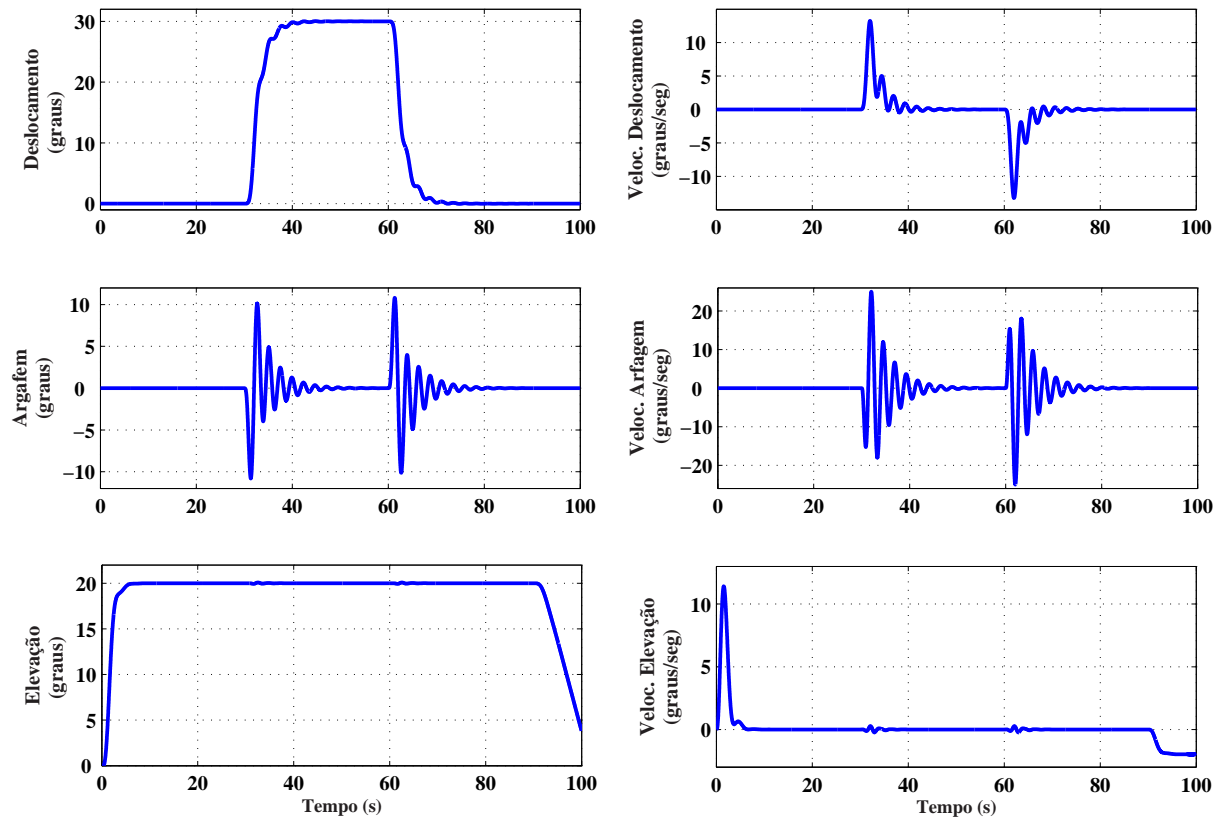


FIGURA 5.1 – Respostas fornecidas pelo modelo ao serem aplicados os sinais de referência mostrados na figura 4.3.

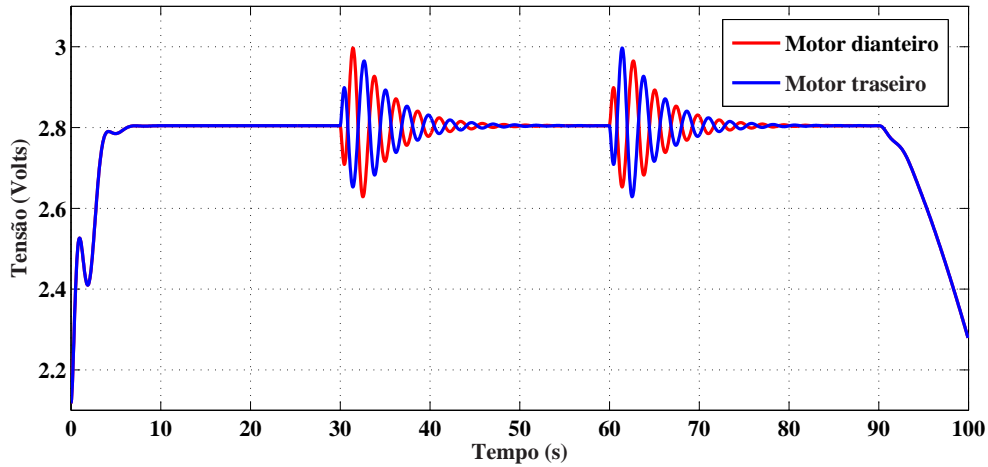


FIGURA 5.2 – Sinais de controle gerados pelo controlador preditivo para realizar as manobras descritas na figura 4.3.

Como se pode observar, a elevação desejada é atingida sem erro de regime. Para realizar a manobra de aumentar o ângulo de elevação, o controlador aumenta da mesma forma a potência do motor dianteiro e traseiro, como pode ser visto na figura 5.2. Com efeito, o helicóptero ganha altitude sem sofrer nenhum movimento de arfagem e, conseqüentemente, de deslocamento.

O ângulo de deslocamento desejado também é obtido sem erro de regime. Repare que, para realizar essa manobra o controlador, inicialmente, precisa aumentar a potência do motor traseiro em relação ao dianteiro, provocando uma redução no ângulo de arfagem P (isto é, uma inclinação do helicóptero “para frente”). As variações no ângulo de arfagem observadas nos instantes seguintes são correções que o controlador realiza para não permitir sobre-sinal no ângulo de deslocamento que é a variável de saída controlada.

Além disso, observe que é possível visualizar nos gráficos de elevação e velocidade de elevação (figura 5.1), nos instantes em que o deslocamento é comandado, o acoplamento existente (e previsto) entre as dinâmicas dos eixos de elevação e deslocamento. Apesar desse acoplamento, o controlador preditivo conseguir evitar, de maneira satisfatória, grandes variações no ângulo de elevação durante os movimentos de deslocamentos.

Os resultados obtidos na simulação indicam que o modelo está consistente com os resultados teóricos esperados. No entanto, a validação formal será feita na próxima seção desta tese. Além disso, os resultados sugerem a eficiência do controlador preditivo para o controle da planta em questão, uma vez que, as variáveis controladas atingem a referência desejada sem apresentar erro de regime e/ou sobre-sinal.

5.2 Validação Experimental do Modelo

Nos experimentos realizados para validação do modelo, os horizontes de predição e controle foram fixados, respectivamente, em $N = 40$ e $M = 10$. Além disso, nenhuma restrição adicional foi imposta ao sistema.

5.2.1 Regime Permanente

Nos dois experimentos realizados, a elevação e o deslocamento atingem a referência desejada sem apresentar erros de regime. No entanto, o helicóptero apresenta variações na dinâmica do eixo de arfagem em torno de 5° , conforme pode ser visto na figura 5.3, que ilustra as respostas obtidas no experimento onde a elevação foi mantida constante em 20° .

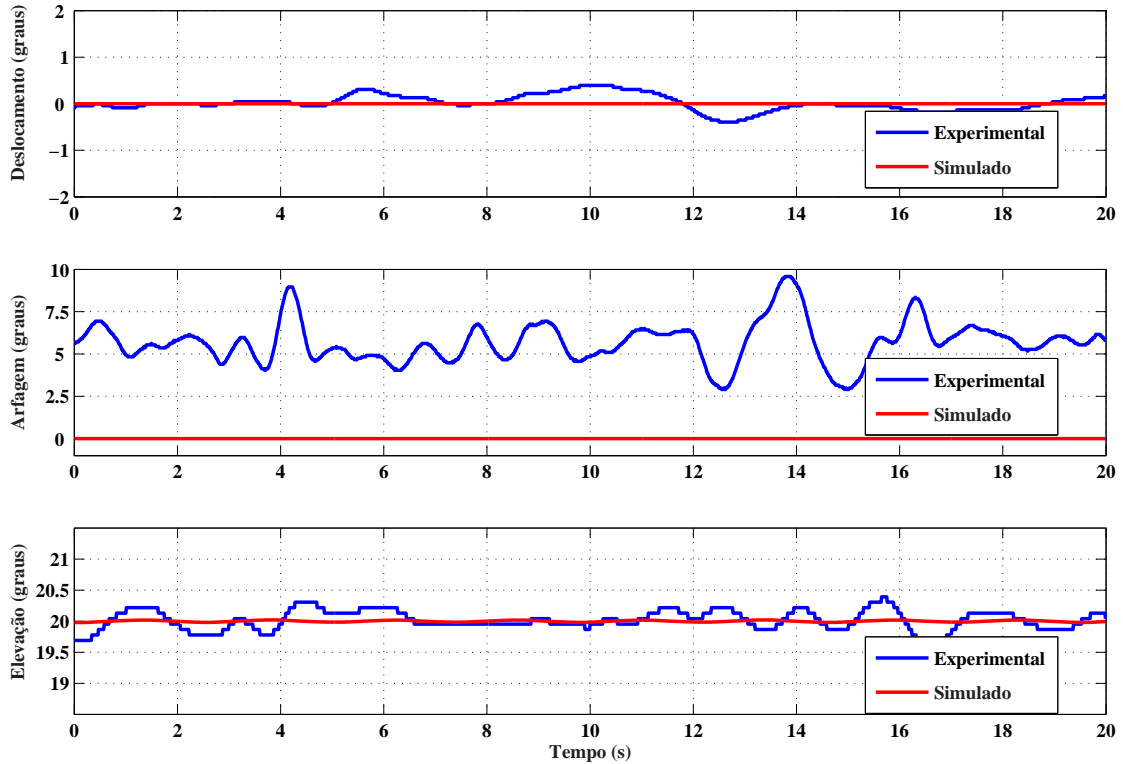


FIGURA 5.3 – Comparação dos sinais obtidos com modelo não-linear e com helicóptero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 20° .

Esse comportamento da dinâmica de arfagem já era esperado, uma vez que, as duas hélices do helicóptero giram no mesmo sentido provocando o aparecimento de um momento angular que tende a fazer todo o conjunto girar (no sentido de provocar um ângulo de deslocamento positivo). Desse modo, o controlador precisa aplicar um ângulo de arfagem positivo para compensar o efeito desse torque e manter o helicóptero imóvel em uma determinada posição.

Vale destacar que esse fenômeno não aparece na resposta fornecida pelo modelo não-linear, pois conforme foi dito anteriormente, o momento angular das hélices foi desprezado na modelagem.

A figura 5.4 apresenta a comparação dos valores da tensão de equilíbrio nos motores no experimento onde a elevação foi mantida fixa em 20° . Vale ressaltar que, o valor da tensão no modelo foi encontrada a partir da solução numérica da equação de equilíbrio

$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, utilizando-se para isso a função *fsolve* do Matlab Optimization Toolbox.

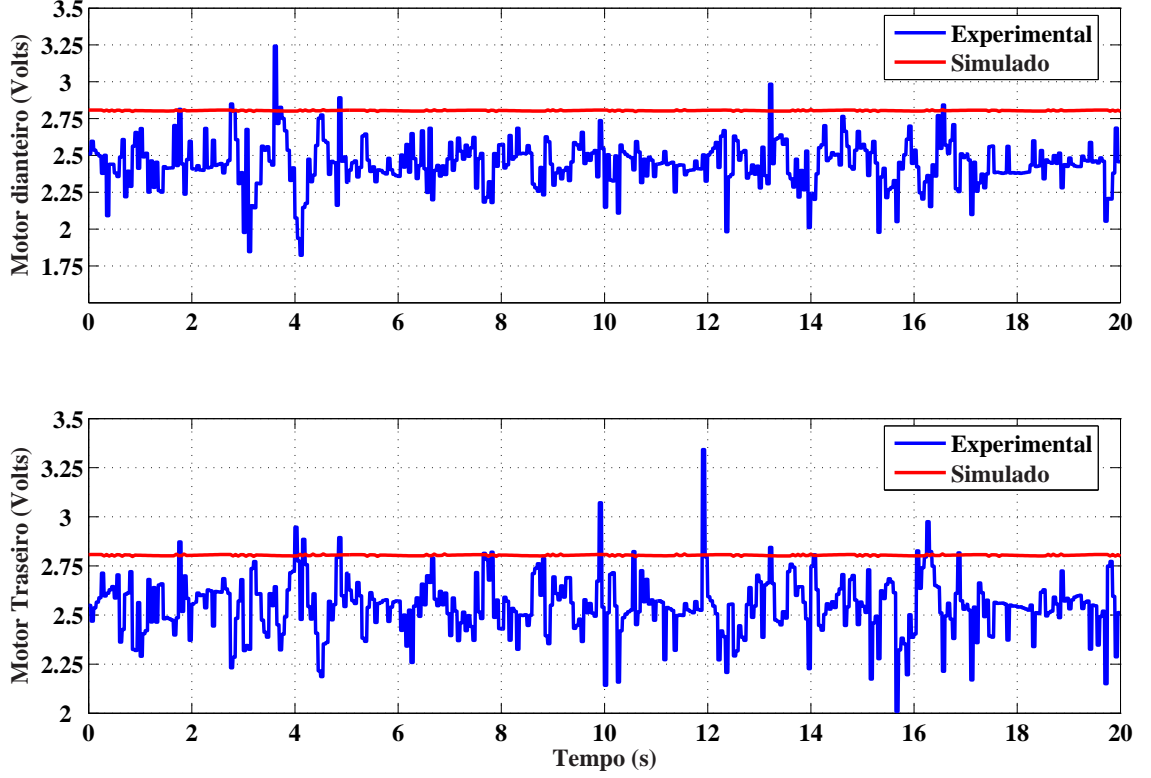


FIGURA 5.4 – Comparação dos sinais de controle obtidos com modelo não-linear e com helicóptero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 20° .

Como se pode observar na figura 5.4, as tensões de equilíbrio encontradas no modelo não-linear e no helicóptero 3DOF são diferentes. Fazendo uma comparação entre os valores teóricos ($\cong 2,8V$) e experimentais ($\cong 2,55V$) encontra-se um erro percentual de aproximadamente 10%.

Essa diferença pode ser explicada pela desconsideração do efeito solo no sistema mecânico. Com efeito, a premissa de que as forças geradas pelos motores são normais ao plano das hélices só é válida para a condição onde o braço do helicóptero está na posição horizontal ($E = 27^\circ$). Dessa forma, a relação determinada na figura 2.6 para magnitude da força e a tensão nos motores também é válida apenas na posição em que o experimento foi realizado ($E = 27^\circ$), em outras posições as forças geradas pelas hélices são ligeiramente menores do que foi modelado, como pode ser visto na figura 5.4.

Essa justificativa pode ser comprovada no segundo experimento, onde a elevação foi mantida fixa em 27° . A figura abaixo apresenta os resultados obtidos para as tensões de equilíbrio nos motores.

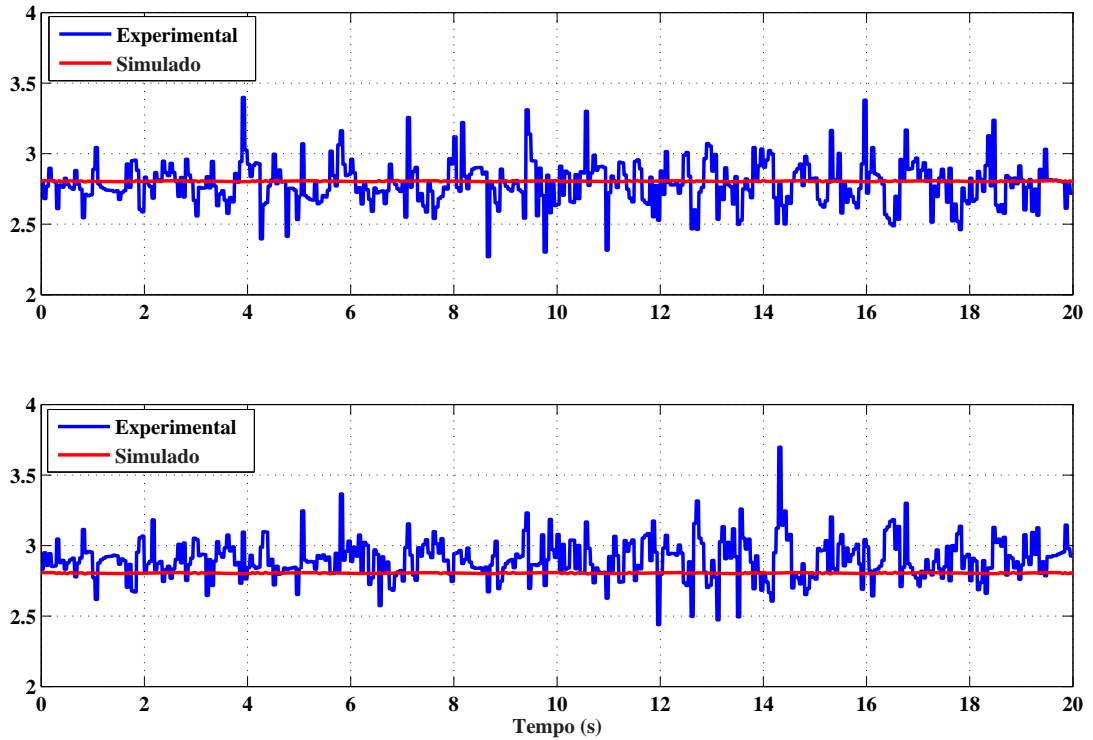


FIGURA 5.5 – Comparação dos sinais de controle obtidos com modelo não-linear e com helicóptero 3DOF em regime permanente no experimento onde a elevação foi mantida constante em 27° . Vale notar que nesta condição os valores de equilíbrio são praticamente iguais.

Para essa condição, nota-se que o valor da tensão de equilíbrio do modelo não-linear ($\cong 2.81V$) e o valor médio do sinal do helicóptero real ($\cong 2.79V$) são praticamente iguais. Esse resultado comprova que a relação determinada para a magnitude da força e a tensão nos motores está correta, porém a existência do efeito solo no sistema mecânico provoca o aparecimento de erros no modelamento quando o helicóptero está operando com ângulos de elevação diferentes de 27° .

Contudo, o erro percentual encontrado é relativamente pequeno e a utilização da realimentação no controle do helicóptero compensa esse efeito, de forma que, esse fato não torna o modelo inadequado para o controle.

5.2.2 Regime Transitório

A figura 5.6 apresenta a comparação dos sinais obtidos através da simulação do modelo não-linear com os resultados obtidos nos ensaios experimentais no helicóptero 3DOF. Os sinais de referência utilizados estão mostrados na figura 4.6.

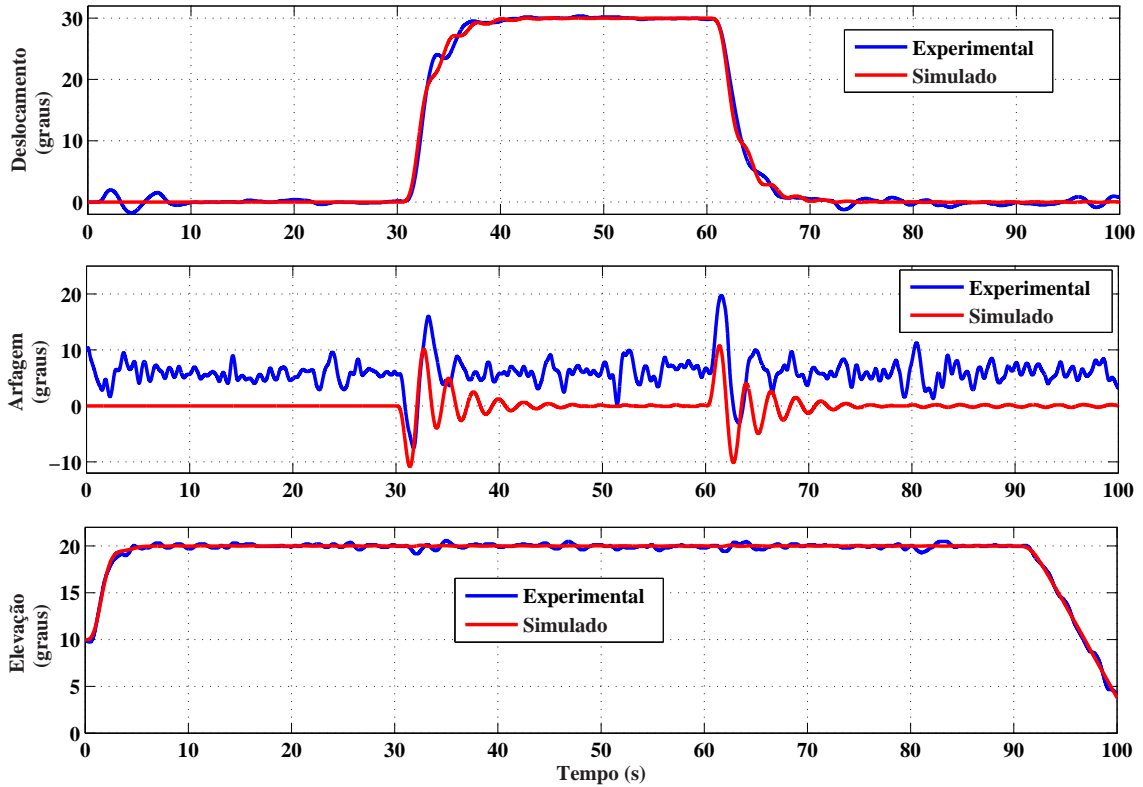


FIGURA 5.6 – Comparação dos sinais obtidos através do modelo não-linear e do helicóptero 3DOF.

Como se pode observar na figura acima, o modelo fornece respostas bem próximas para os eixos de elevação e deslocamento. No entanto, a resposta obtida para a dinâmica de arfagem apresenta diferenças mais expressivas com relação ao helicóptero real.

Conforme já discutido, a principal diferença é o fato das variações no ângulo de arfagem ficarem em torno de 5° , enquanto que no modelo as variações são em torno de 0° . As demais diferenças observadas podem ser atribuídas à utilização de filtros derivativos para estimar as velocidades angulares que provoca o aumento do descasamento entre a

planta e o modelo. A dinâmica do eixo de arfagem é mais afetada por ser o modo mais rápido do sistema. Com efeito, o filtro utilizado não consegue estimar adequadamente a velocidade de arfagem proporcionando as variações observadas. Adicionalmente, essas diferenças podem ser causadas por algum efeito aerodinâmico existente no sistema e que foi desprezado na modelagem.

Com os resultados apresentados pode-se concluir que o modelo analítico demonstrou uma boa aproximação com o sistema físico real e pode ser considerado adequado para fins de controle, apesar das diferenças observadas principalmente na dinâmica do eixo de arfagem.

5.3 Resultados dos Ensaios com o MPC

5.3.1 Ajuste dos horizontes de predição e controle

Para estudar os efeitos das alterações no horizonte de predição (N), fixou-se o valor do horizonte de controle (M) em 5 e testaram-se cinco diferentes valores de N ($N = 20, 30, 40, 50, 60$). A figura 5.7 ilustra as respostas obtidas. Vale destacar que, inicialmente a única restrição imposta ao sistema foi a limitação na amplitude do sinal de controle.

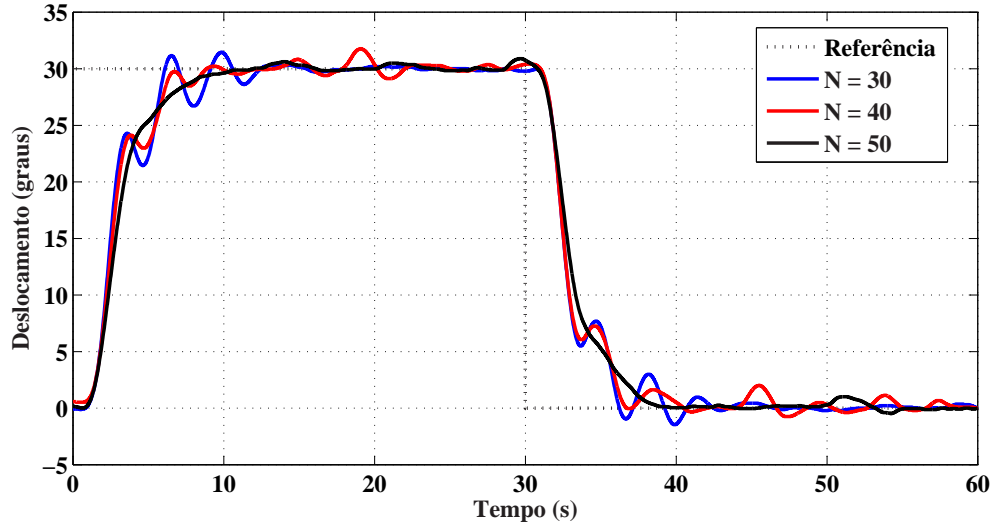


FIGURA 5.7 – Efeitos das variações no horizonte de predição para um horizonte de controle fixo em $M = 5$.

Observou-se que a malha de controle torna-se instável para valores de N menores ou iguais a 20. Pode ser argumentado que, para valores pequenos de horizonte de predição o controlador não consegue levar em conta os efeitos futuros de suas ações e, como resultado, a ação de controle aplicada à planta não é adequada.

Essa instabilidade também foi observada para valores iguais ou maiores que 60. De fato, para modelos instáveis ou marginalmente estáveis, como é o presente caso, as predições podem ser falhas para valores altos de N devido ao descasamento entre planta e modelo (ROSSITER, 2003).

Como se pode observar na figura 5.7, horizontes de predição pequenos ($N = 30$) tendem a produzir uma resposta da malha de controle com baixo amortecimento, conforme argumentado na discussão anterior. Em contrapartida, valores elevados de N tendem a aumentar o esforço computacional e, conseqüentemente, o tempo de processamento. Dessa forma, como as diferenças no comportamento do sistema são pequenas entre $N = 40$ e $N = 50$, o valor $N = 40$ foi adotado para as simulações posteriores. Além disso, garante-se uma margem de segurança com respeito aos valores que causam instabilidade no sistema.

Para investigar os efeitos das variações no horizonte de controle, fixou-se $N = 40$ e três testes adicionais foram realizados variando os valores de M ($M = 5, 10, 20$). A figura mostrada abaixo apresenta os resultados obtidos.

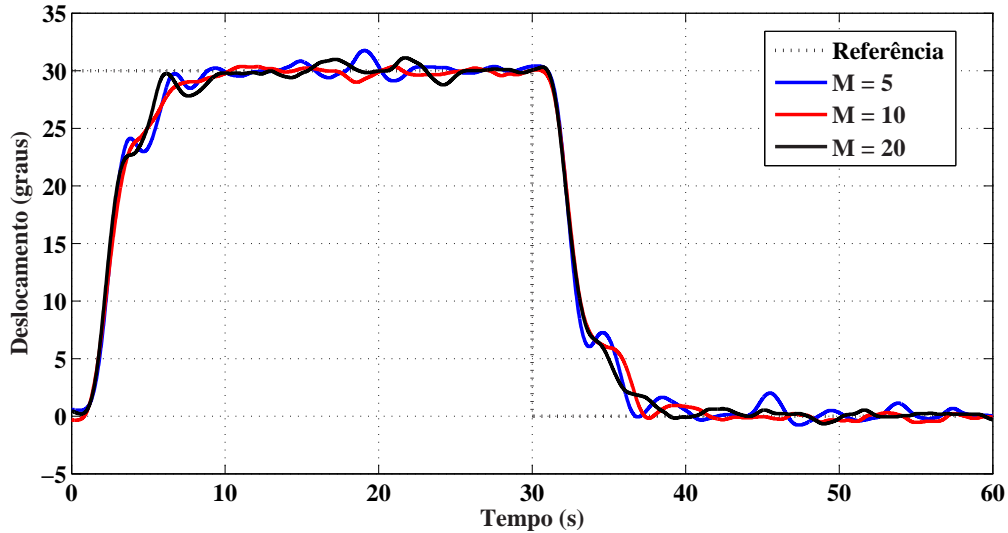


FIGURA 5.8 – Efeitos das variações no horizonte de controle para um horizonte de predição fixo em $N = 40$.

Normalmente, alterações nos valores do horizonte de controle tendem a alterar a velocidade de resposta do sistema (tempo de acomodação) e o sobre-sinal das variáveis controladas. De forma geral, aumentando-se os valores de M obtém-se um aumento do sobre-sinal na resposta da malha de controle, porém o sistema apresenta um tempo de subida menor.

No entanto, no caso em estudo não existem diferenças significativas entre os valores de M testados, como pode ser observado na figura 5.8. Assim, requisitos computacionais apontariam para a escolha de $M = 5$, que está associada a um número menor de variáveis de decisão. Porém, o estudo posterior de tratamento de restrições mostrou que mais graus de liberdade são necessários para obter soluções factíveis no problema de programação quadrática. Dessa forma, o valor adotado foi $M = 10$.

5.3.2 Tratamento de restrições

Para realizar uma manobra de deslocamento, o controlador precisa alterar o ângulo de arfagem do helicóptero no sentido desejado. Assim, foram impostas restrições na variação do ângulo de arfagem para ilustrar a capacidade do MPC em respeitar restrições operacionais. Vale ressaltar que essa escolha é interessante, pois fornece o maior grau de dificuldade ao controlador, uma vez que, a variável controlada é o ângulo de deslocamento e as restrições foram impostas no ângulo de arfagem.

Como pode ser visto na figura 5.9, quando nenhuma restrição é imposta ao ângulo de arfagem (o que é equivalente a usar restrições relaxadas no algoritmo de programação quadrática), seus valores variam entre $-5,45^\circ$ e 18° . Assim, definiu-se que os valores do ângulo de arfagem devem ficar restritos a -5° e 13° .

A figura 5.9 apresenta a resposta da malha de controle ao comando no eixo de deslocamento mostrado na figura 4.7. Como pode ser visto, o controlador preditivo consegue manter o ângulo de arfagem dentro dos limites estabelecidos.

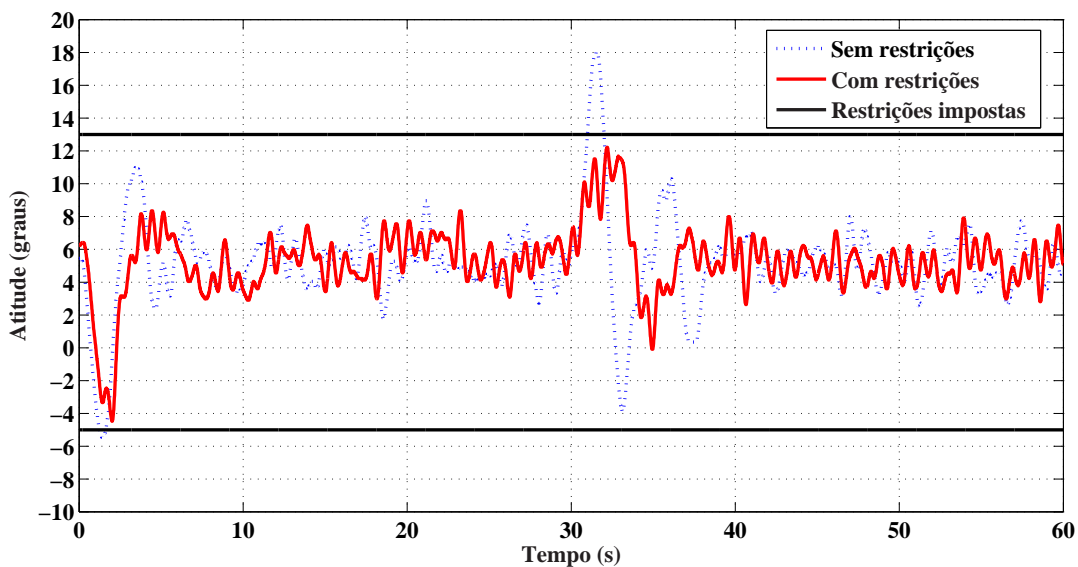


FIGURA 5.9 – Ângulo de arfagem obtido durante a manobra de deslocamento para as condições com e sem restrições. Os limites superior e inferior definidos para o ângulo de arfagem (-5° e 13°) são mostrados nas linhas horizontais.

As respostas obtidas para os ângulos de deslocamento e elevação nas duas condições de ensaio são mostradas na figura 5.10. Como pode ser observado, o “preço pago” pelo controlador para respeitar as restrições impostas é uma resposta ligeiramente mais lenta na dinâmica de deslocamento e amplitudes de variações maiores na dinâmica de elevação. Isso ocorre porque o controlador aplica soluções mais conservadoras à planta para não correr o risco de violar as restrições. Contudo, as diferenças observadas nos dois casos podem ser consideradas pequenas.

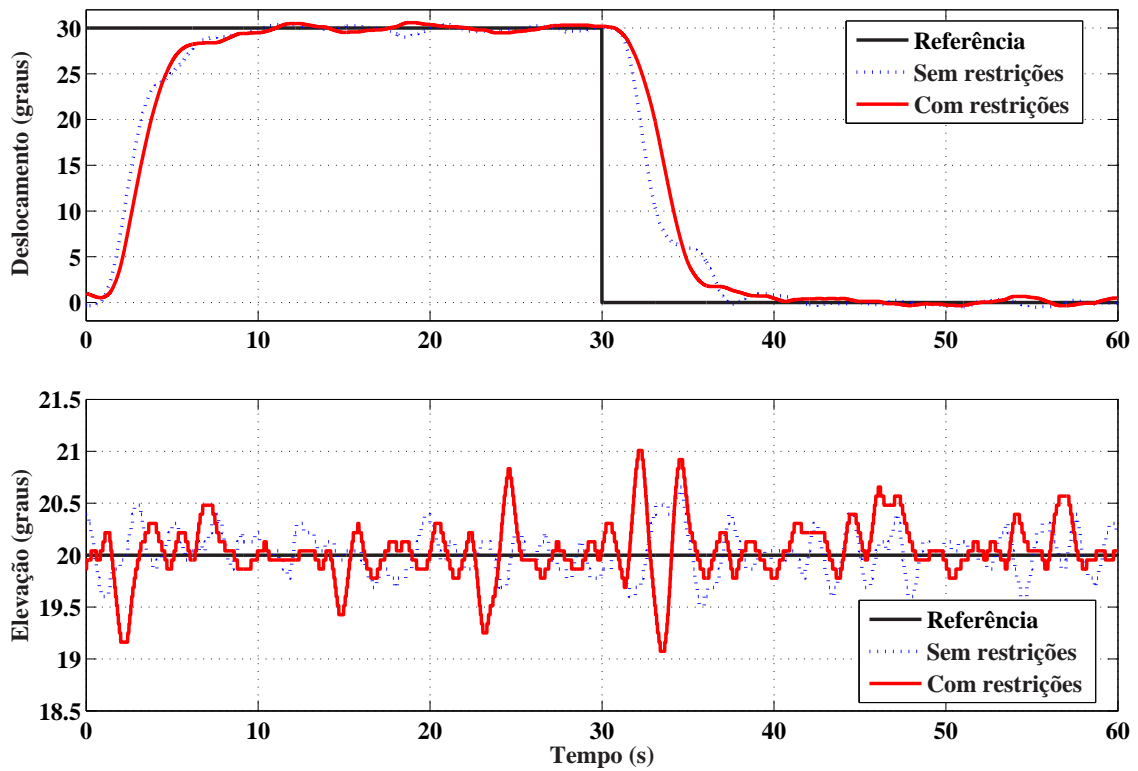


FIGURA 5.10 – Ângulos de deslocamento e elevação obtidos durante a manobra de deslocamento para as condições com e sem restrições.

É interessante destacar que, mesmo no cenário com restrições no ângulo de arfagem, o controlador consegue encontrar soluções viáveis dentro do período de amostragem de $50ms$. De fato, no caso sem restrições, o maior tempo necessário para o MPC realizar os cálculos foi de $1.04ms$ e no caso com restrições esse tempo foi de $1.54ms$.

Por fim, é importante dizer que tentou-se limitar ainda mais as variações no ângulo de

arfagem, ou seja, impor restrições mais duras. No entanto, observou-se instabilidade na malha de controle. Pode-se argumentar que isso ocorre devido ao descasamento existente entre a planta e o modelo, principalmente, na dinâmica do eixo de arfagem. Com efeito, o controlador aplica um controle a planta “esperando” um determinado efeito que não ocorre e, no cenário com restrições, não consegue aplicar ações corretivas para não violar as restrições. Assim, o helicóptero passa a operar em condições que conduzem a não factibilidade da otimização, ou seja, o sistema passa a operar em condições onde o controlador não consegue encontrar solução viável no problema de programação quadrática, o que provoca a instabilidade da malha de controle. De fato, nas simulações onde não existe descasamento entre o modelo de simulação e o modelo de predição não se observa esse problema da instabilidade e consegue-se limitar o ângulo de arfagem o quanto queira.

5.4 Resultados da Malha de Controle com o Filtro de Kalman

Conforme apresentado, o descasamento entre a planta e o modelo é um dos principais fatores que deterioram o desempenho do controlador preditivo. Observou-se inclusive, em determinadas condições, que esse descasamento provoca a instabilidade da malha de controle.

Acredita-se que, no caso em estudo, a principal fonte do descasamento entre a planta e o modelo é a utilização de filtros derivativos para estimar as velocidades angulares. Assim, para diminuir esse descasamento e melhorar o desempenho da malha de controle, alterou-se a lei de controle com a inclusão de um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares, conforme apresentado na figura 4.9.

Para estudar os efeitos causados pela inclusão do Filtro de Kalman na malha de controle, inicialmente realizaram-se ensaios para o ajuste dos parâmetros do controlador (N e M). O procedimento utilizado foi o mesmo adotado anteriormente. A figura abaixo mostra os resultados obtidos para os ensaios onde foram testados diferentes valores para o horizonte de predição ($N = 20, 40, 50, 60, 80, 200$) com o horizonte de controle mantido fixo em $M = 5$.

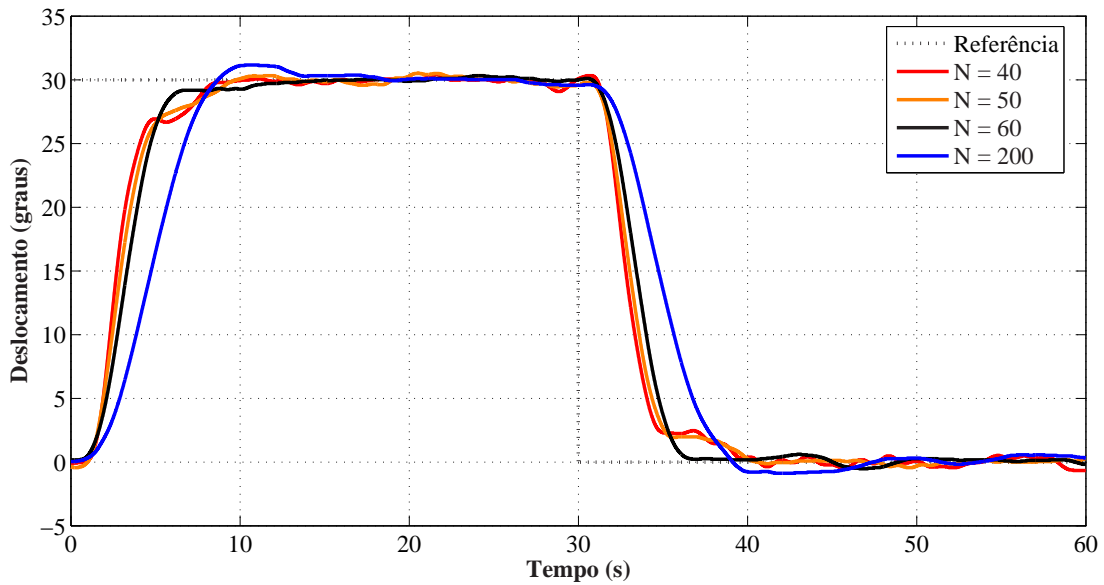


FIGURA 5.11 – Efeitos das variações no horizonte de predição para um horizonte de controle fixo em 5 para a malha de controle utilizando um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares.

Nesta configuração, observou-se que a malha de controle continua apresentando comportamento instável para valores de N menores ou iguais a 20. Isso já era esperado, pois essa instabilidade não está associada com o modelo do processo e sim com o fato do controlador não conseguir “enxergar”, com horizonte de predição pequeno, os efeitos futuros de suas ações, conforme já discutido anteriormente.

O principal resultado, no entanto, foi que a instabilidade observada anteriormente nos ensaios com altos valores de N foi eliminada. De fato, pode-se notar na figura 5.11, que foram testados valores de N até 200 e o sistema manteve-se estável. Esse resultado

comprova que a utilização dos filtros derivativos é uma fonte expressiva do descasamento entre planta e modelo. Com efeito, eliminando os filtros consegue-se aumentar o valor do horizonte de predição e, conseqüentemente, melhorar o desempenho do controlador preditivo.

No entanto, conforme já esperado, horizontes de predição muito grandes, além de aumentar o tempo de processamento, aumentam o tempo de resposta do sistema como pode ser visto na figura 5.11. Nessa mesma figura, percebe-se que as diferenças no comportamento do sistema para $N = 40$, $N = 50$ e $N = 60$ são muito pequenas. Assim, requisitos computacionais apontariam para a escolha de $N = 40$. No entanto, ensaios posteriores mostraram que a malha de controle apresenta um comportamento melhor para $N = 60$. Portanto, $N = 60$ foi escolhido para as simulações posteriores.

Para determinar o melhor horizonte de controle, fixou-se o valor do horizonte de predição em $N = 60$ e cinco testes adicionais foram realizados variando os valores de M ($M = 5, 10, 15, 20, 25$). A figura abaixo mostra os resultados obtidos.

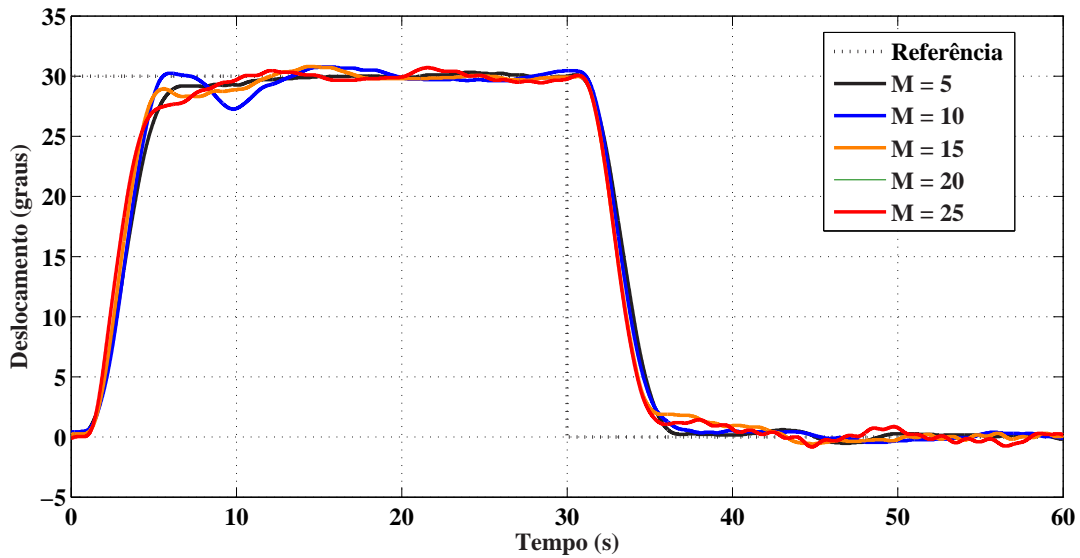


FIGURA 5.12 – Efeitos das variações no horizonte de controle para um horizonte de predição fixo em 60 para a malha de controle utilizando um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares.

Como se pode notar, os resultados obtidos são muito parecidos para todos os valores de M testados. Assim, por motivos computacionais foi fixado $M = 5$ para os ensaios seguintes.

Após ajustar os parâmetros do controlador, foi realizada a comparação entre respostas obtidas com a malha de controle sem e com o Filtro de Kalman. Vale destacar que, essa comparação foi realizada considerando os melhores parâmetros do controlador em cada caso, ou seja, para a malha de controle sem o filtro os parâmetros utilizados foram $N = 40$ e $M = 10$ e para a configuração com o filtro os parâmetros foram $N = 60$ e $M = 5$. A figura abaixo mostra os resultados obtidos.

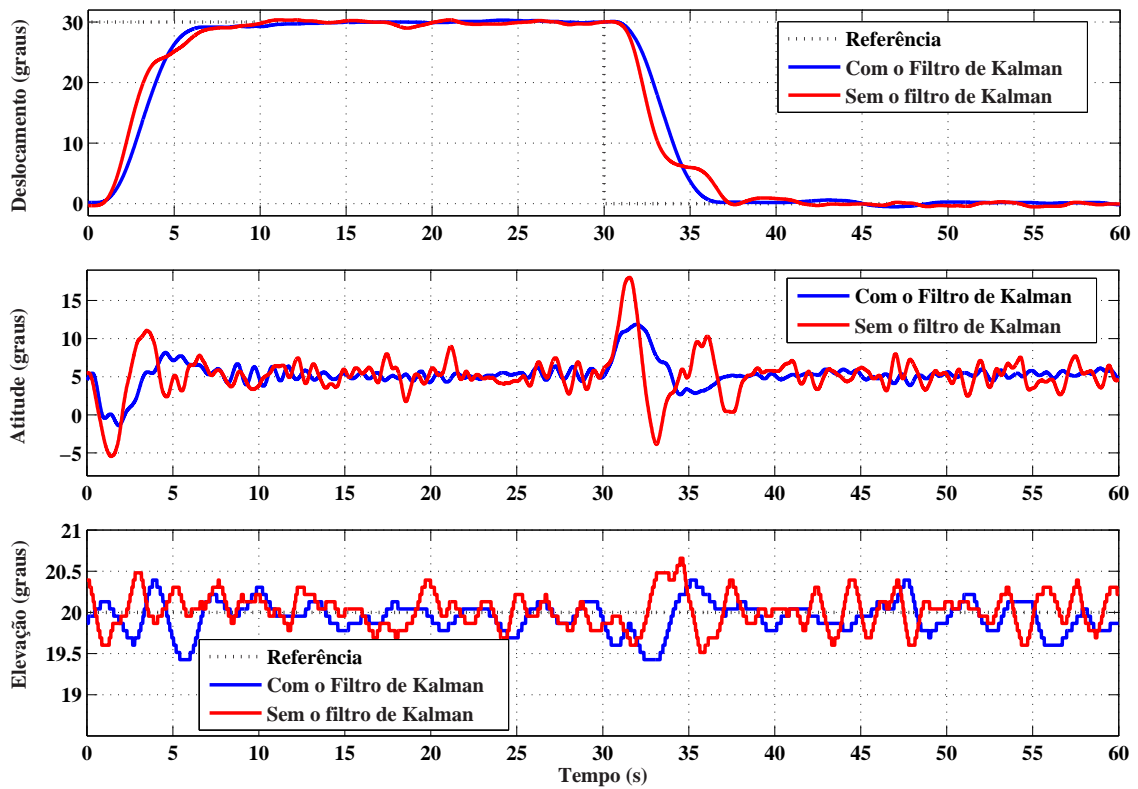


FIGURA 5.13 – Comparação entre as respostas da malha de controle sem e com o Filtro de Kalman. No cenário sem o filtro os parâmetros utilizados no controlador foram $N = 40$ e $M = 10$, já na configuração com o filtro, os parâmetros foram $N = 60$ e $M = 5$.

Como se pode observar na figura 5.13, a inclusão do Filtro de Kalman melhora o desempenho da malha de controle. Para a dinâmica de deslocamento, percebe-se que a inclusão do filtro aumenta ligeiramente o tempo de resposta do sistema, porém as variações no ângulo de deslocamento durante o ensaio são menores. Na dinâmica de elevação, observa-se desempenhos semelhantes entre as duas configurações.

No entanto, o principal ganho da inclusão do FK na malha de controle é no desempenho da dinâmica do movimento de arfagem. Com o FK, percebe-se que as amplitudes do ângulo de arfagem são menores para realizar a mesma manobra de deslocamento, como pode ser observado na figura 5.13. Além disso, percebe-se um comportamento muito mais suave no movimento de arfagem durante todo o ensaio. Esse comportamento já era esperado, uma vez que, as variações observadas no ensaio sem o FK eram causadas pela utilização do filtro derivativo, conforme já discutido anteriormente.

Adicionalmente, pode-se argumentar que o ganho no desempenho da malha de controle com a inclusão do FK ocorre devido a possibilidade de aumento do valor do horizonte de predição. Com efeito, o controlador consegue prever melhor os efeitos futuros de suas ações.

Dessa forma, a inclusão de um Filtro de Kalman na malha de controle se mostrou satisfatória, uma vez que, diminuiu o descasamento entre a planta e o modelo permitindo, assim, aumentar o valor do horizonte de predição, o que ocasionou um ganho real no desempenho da malha de controle.

6 Conclusão

Neste trabalho, investigou-se a possibilidade de implementação em tempo real de uma estratégia de controle preditivo com o tratamento de restrições para uma aplicação do setor aeronáutico, cuja planta é de dinâmica relativamente rápida (em comparação com os processos nos quais o MPC é usualmente empregado), não-linear e com amortecimento muito pequeno.

A formulação adotada no espaço de estados incremental permitiu comportar de forma simples o caráter multivariável da planta, envolvendo duas variáveis manipuladas (tensão nos dois motores) e duas variáveis controladas (ângulo de deslocamento e atitude). Além disso, a utilização de variações no controle na formulação conferiu ação integral ao controlador permitindo o rastreamento de referências constantes com erro de regime nulo.

Os resultados obtidos neste trabalho sugerem que o MPC pode ser uma interessante alternativa para o controle de aeronaves, principalmente pela possibilidade do tratamento de restrições que pode permitir a expansão do envelope de voo. Em particular, tal funcionalidade foi ilustrada através da limitação na variação do ângulo de atitude do helicóptero 3DOF durante uma manobra de deslocamento. É importante destacar que foi possível realizar o tratamento de restrições de saída mesmo utilizando um pequeno período de amostragem de $50ms$ e na presença de descasamento entre a dinâmica não-linear da

planta e o modelo de predição linear utilizado.

Por fim, verificou-se que a utilização de filtros derivativos na estimativa das velocidades angulares afeta negativamente o desempenho do controlador preditivo, visto que, insere um nível muito grande de ruído na malha de controle aumentando, assim, o descasamento entre a planta e o modelo. Dessa forma, a lei de controle foi alterada com a inclusão de um Filtro de Kalman (com equacionamento “a posteriori” em estado estacionário) para estimar essas velocidades. Com efeito, observou-se diminuição dos erros de predição, o que permitiu aumentar o valor do horizonte de predição ocasionando ganhos no desempenho da malha de controle.

6.1 Contribuições do Trabalho

- Modelagem do helicóptero 3DOF utilizando o formalismo de Lagrange.
- Implementação em tempo real de um controlador preditivo para uma aplicação cuja planta é de dinâmica rápida, não-linear e com amortecimento muito pequeno.
- Desenvolvimento de um filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares do helicóptero 3DOF.

6.2 Sugestões para Trabalho Futuros

Trabalhos futuros poderiam objetivar:

- Aperfeiçoamento do modelo não-linear do helicóptero 3DOF, principalmente o equacionamento da dinâmica do movimento de arfagem, com o intuito de diminuir o

descasamento entre a dinâmica não-linear da planta e o modelo de predição linear utilizado.

- Desenvolvimento de uma formulação de MPC robusto para tratar os distúrbios externos que afetam um avião real. Em particular, o acessório de perturbação ativa existente no helicóptero 3DOF poderia ser utilizado para simular o efeito de uma perturbação exógena.
- Implementação de técnicas de relaxamento de restrições. Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que uma das dificuldades associada ao tratamento de restrições é a questão da factibilidade. Um problema de otimização é factível quando a função objetivo é limitada e existem pontos no espaço das variáveis de decisão que satisfazem todas as restrições. No entanto, em alguns casos a região definida pelas restrições pode ser vazia. Nesse caso, a otimização é dita não-factível (Prett, Morari, 1980) apud (DUTRA, 2003). A não-factibilidade pode ocorrer de duas formas distintas, através da definição de objetivos de controle não atingíveis ou existência de perturbações que levam o processo fora de seu ponto de operação. Se o problema de otimização for não-factível o MPC não estará habilitado a calcular o próximo sinal de controle podendo causar problemas de não convergência. Dessa forma, é fundamental a aplicação de técnicas de relaxamento de restrições. O principal método encontrado na literatura consiste em relaxar temporariamente os limites das restrições pelo aumento de seus valores. Uma maneira de fazê-lo, é alterar as restrições duras (*“Hard constraints”*) ($S\Delta U \leq b$) para brandas ($S\Delta U \leq b + \varepsilon$), pela adição de um termo ε à função custo, penalizando qualquer violação da restrição e obtendo um melhor comportamento do sistema controlado (ZHENG; MORARI, 1995).

Referências Bibliográficas

BOSKOVIC, J. D.; MEHRA, R. K. Multi-mode switching in flight control. In: **Proceedings of the 19th Digital Avionics Systems Conferences**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 2, p. 6F2/1 – 6F2/8.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. London: Springer-Verlag, 1999.

CANNON, M. Efficient nonlinear model predictive control algorithms. **Annual Reviews in Control**, v. 28, n. 2, p. 229 – 237, 2004.

CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: **Proc. Joint American Control Conference, San Francisco**. [S.l.: s.n.], 1980.

DUTRA, C. B. S. **Controle Preditivo Multiobjetivo Para Processos Com Atraso**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina., 2003.

GOPINATHAN, M.; BOSKOVIC, J. D.; MEHRA, R. K.; RAGO, C. A multiple model predictive scheme for fault-tolerant flight control design. In: **Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, FL**. [S.l.: s.n.], 1998. v. 2, p. 1376–1381.

HEMERLY, E. M. **Controle Por Computadores de Sistemas Dinâmicos**. 2a. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2000.

HUZMEZAN, M.; MACIEJOWSKI, J. M. Reconfigurable flight control of a high incidence research model using predictive control. In: **Proceedings of the UKACC International Conference on Control**. [S.l.: s.n.], 1998. p. 1169–1174.

KALE, M. M.; CHIPPERFIELD, A. J. Reconfigurable flight control strategies using model predictive control. In: **Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control, Vancouver**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 43 – 48.

LEE, J. H.; CHIKKULA, Y.; YU, Z. H.; KANTOR, J. C. Improving computational - efficiency of model-predictive control algorithm using wavelet transformation. **International Journal of Control**, v. 61, n. 4, p. 859–883, 1995.

LEWIS, F. L. **Optimal Estimation**. [S.l.]: New York: John Wiley and Sons, 1986.

MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive Control with Constraints**. Harlow, England: Prentice Hall, 2002.

MATHWORKS, I. T. Writing s-functions. the mathworks, inc. 2003.

MEHRA, R. K.; PRASANTH, R. K.; GOPALASWAMY. XV - 15 tiltrotor flight control system design using model predictive control. In: **Proceedings of IEEE Aerospace Conference**. [S.l.: s.n.], 1998. v. 2, p. 139–148.

PACHTER, M.; CHANDLER, P. R.; MEARS, M. Reconfigurable tracking control with saturation. **Jornal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 5, p. 1016–1022, 1995.

RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPON, J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. **Automatica**, v. 14, p. 413 – 428, 1978.

ROSSITER, J. A. **Model-Based Predictive Control: A Practical Approach**. Boca Raton: CRC Press, 2003.

ROSSITER, J. A.; KOUVARITAKIS, B. Numerical robustness and efficiency of generalized predictive control algorithms with guaranteed stability. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 141, n. 3, p. 154–162, 1994.

SCHITTKOWSKI, K. Quadratic programming implementation - c version translated from fortran version 1.4 (march 1987) - c translation 1992, modified by m.j.d. powel (university of cambridge), a.l. tits, j.l. zhou and c. lawrence (university of maryland). mathematisches institut, universitaet bayreuth, germany. 1992.

SHABANA, A. A. **Dynamics of Multibody Systems**. New York: John Wiley, 1989.

SINGH, L.; FULLER, J. Trajectory generation for a UAV in urban terrain, using nonlinear MPC. In: **Proceedings of the American Control Conference, Arlington**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 2301–2308.

WAN, E. A.; BOGDANOV, A. A. Model predictive neural control with applications to a 6 DOF helicopter model. In: **Proceedings of the American Control Conference, Arlington**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. 488–493.

ZHENG, A.; MORARI, M. Stability of model predictive control with mixed constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**., v. 40 (10), p. 1918 – 1923, 1995.

Apêndice A - Conceitos básicos

utilizados na modelagem

Neste apêndice são apresentados os conceitos fundamentais envolvidos na modelagem do helicóptero 3DOF realizada no capítulo 2. Inicialmente, será descrito o formalismo de Lagrange e, em seguida, a teoria da rotação de matrizes.

A.1 Formalismo de Lagrange

Muitas aplicações da Mecânica clássica baseiam-se diretamente nas leis de movimento de Newton. Estas leis, quando utilizadas adequadamente fornecem equações matemáticas que descrevem e predizem os resultados de medidas quantitativas precisas. O problema é que em casos onde o fenômeno estudado é muito complexo, como o apresentado neste trabalho, a aplicação dessas leis, sem as simplificações necessárias, torna o trabalho muito árduo.

Assim, para contornar esse problema outras teorias foram desenvolvidas para formular os princípios da Mecânica. Na verdade, não são teorias novas, pois derivam das leis de Newton, mas são formas diferentes de expressar a mesma teoria, por meio de conceitos matemáticos mais avançados e em muitos aspectos mais elegantes que a formulação

newtoniana.

Uma dessas teorias foi desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange e publicada na “*Mécanique Analytique*” em 1788 e ficou conhecida como o Formalismo de Lagrange. A principal característica desse método é utilizar somente quantidades associadas ao corpo, energias cinética e potencial. Isso é importante pois a energia é uma quantidade escalar, assim, a função lagrangeana para um determinado sistema é invariante para transformações de coordenadas. Portanto, é possível passar de determinado sistema de coordenadas (onde as equações de movimento podem ser muito complicadas) para um outro sistema de coordenadas que pode ser escolhido adequadamente para permitir a máxima simplificação do problema.

Vale destacar que nas leis de Newton a ênfase é dada para um agente externo agindo sobre o corpo, a força. Dessa forma, os resultados de uma análise lagrangeana ou newtoniana devem ser os mesmos para qualquer sistema mecânico, somente o método utilizado para se obter os resultados é diferente. No entanto, deve-se destacar que se alguma força interna do sistema for importante o método de modelagem se restringe à aplicação das leis de Newton.

A.1.1 Formulação de Lagrange

Neste tópico, será apresentado, sem dedução, o conjunto de equações diferenciais que compõe o formalismo de Lagrange utilizado neste trabalho. Para isso, é necessário dizer que o equacionamento desenvolvido por Lagrange utiliza o conceito de coordenadas generalizadas que são um conjunto de variáveis necessárias para se determinar completamente o estado de cada partícula do sistema.

Esta é mais uma diferença entre a abordagem lagrangeana e newtoniana, pois no segundo caso, a aplicação das leis resultam em um conjunto de equações de movimento em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. No entanto, em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. Em problemas que envolvem muitas partículas, em geral, é conveniente escolher um sistema que inclui a coordenada do centro de massa, por exemplo.

Uma vez determinado um conjunto de coordenadas generalizadas independentes $q_j, j = 1, 2, \dots, n$, onde n é a quantidade de graus de liberdade do sistema mecânico, define-se o Lagrangeano do sistema como:

$$L = K - V \quad (\text{A.1})$$

em que, K é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema.

Então, as equações de Lagrange são expressas como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j \quad (\text{A.2})$$

em que, τ_j é a força generalizada não conservativa (torque ou força) na direção da coordenada generalizada independente q_j . Uma força não conservativa é aquela que não pode ser obtida por derivação da energia potencial em relação às coordenadas generalizadas.

Observe que, as equações (A.2) constituem um sistema de n equações diferenciais, uma para cada grau de liberdade.

Por fim, vale destacar que a formulação de Lagrange aqui apresentada foi simplificada

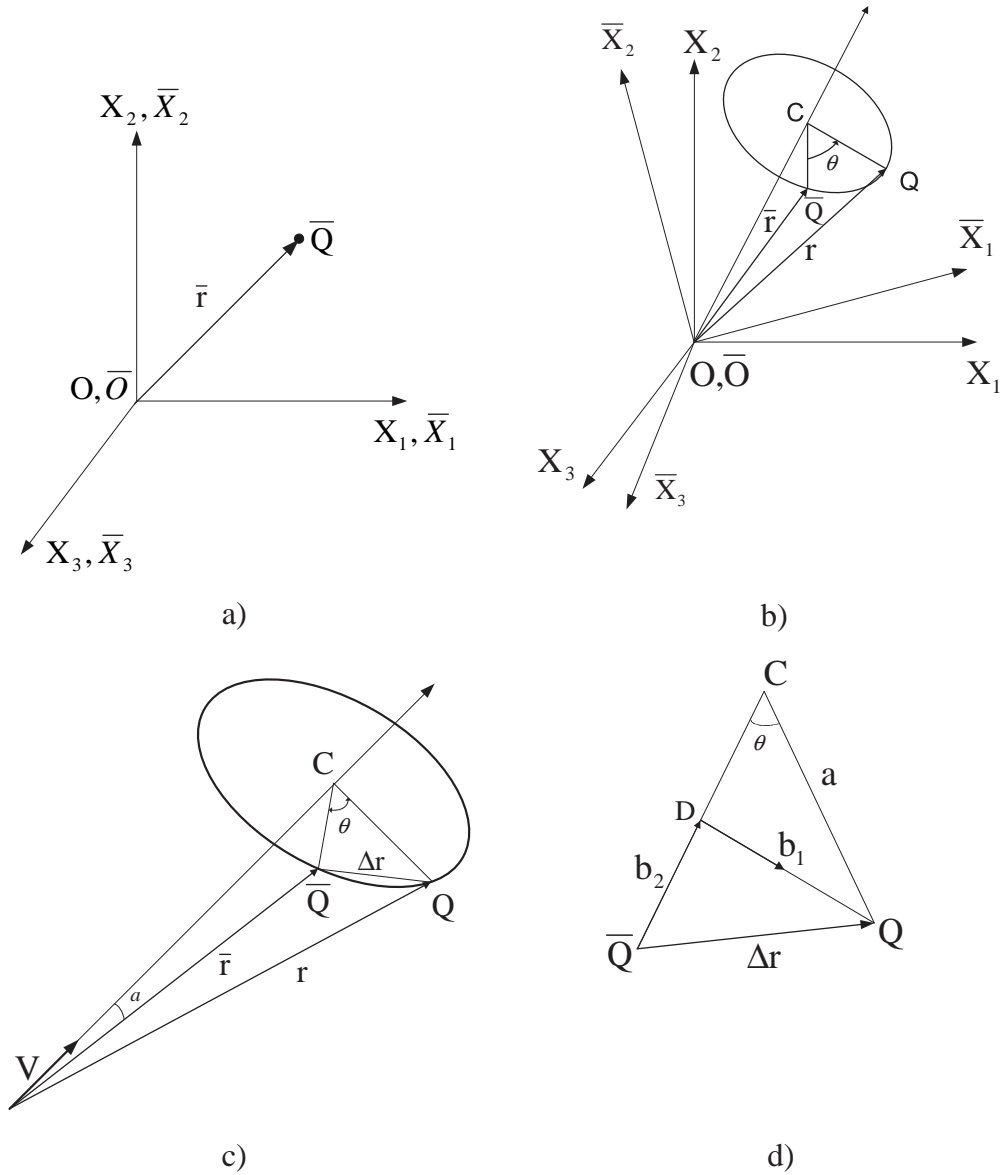
para ficar na forma utilizada neste trabalho. Assim, na equação (A.2) foi desprezado, por exemplo, o termo associado a Dissipação de Rayleigh, uma vez que, na modelagem do helicóptero 3DOF foi desconsiderado qualquer forma de dissipação de energia.

A.2 Matrizes de Transformação Homogênea

Sistemas que apresentam componentes que podem sofrer deslocamentos translacionais e/ou rotacionais relativos são conhecidos como sistemas multicorpos (*multibody systems*). Nesses casos, para definir a configuração de um corpo no espaço, deve-se ser capaz de determinar a localização de cada ponto do corpo com relação a um sistema de referência inercial adotado.

Dessa forma, é conveniente assumir que cada um dos corpos do sistema de vários corpos tenha um próprio sistema de referência no qual é muito mais simples definir vetores posição para os pontos materiais. No entanto, esses vetores posições podem ser encontrados em relação a outros sistemas de coordenadas definindo-se a posição relativa e a orientação do sistema de coordenada do corpo com relação aos outros sistemas de coordenadas.

Segundo Shabana (SHABANA, 1989), seis (6) variáveis são suficientes para determinar a posição e a orientação de um sistema de coordenadas $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ com respeito a outro sistema de coordenadas $X_1X_2X_3$. Para determinar a transformação que define a orientação entre esses dois sistemas de coordenadas será considerado inicialmente, e sem perda de generalidade, que a origem dos dois sistemas de coordenadas são coincidentes, conforme mostrado na figura A.1 (a). Também será considerado que esses dois sistemas de coordenadas são inicialmente paralelos.

FIGURA A.1 – Rotação de um sistema de coordenadas sobre um eixo de rotação OC .

Escolhendo-se um ponto \bar{Q} , qualquer, no espaço, com coordenadas fixas no sistema de coordenadas $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ e definidas pelo vetor posição \bar{r} , antes da rotação entre os sistemas de coordenadas as componentes desse vetor posição são as mesmas para os dois sistemas de coordenadas, figura A.1 (a). Se o sistema $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ for rotacionado de um ângulo Θ sobre o eixo OC , conforme mostrado na figura A.1 (b), o ponto \bar{Q} se movimentará para o ponto Q . O vetor posição desse ponto no sistema de coordenadas $X_1X_2X_3$ será denotado por r . O deslocamento do ponto \bar{Q} para o ponto Q é definido pelo vetor Δr como pode

ser visto na figura A.1 (c). Assim, o novo vetor posição \mathbf{r} pode ser escrito como:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \Delta\mathbf{r} \quad (\text{A.3})$$

O vetor $\Delta\mathbf{r}$ pode ser escrito como sendo a soma de dois outros vetores, conforme mostrado na figura A.1 (d).

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \quad (\text{A.4})$$

O vetor \mathbf{b}_1 é perpendicular ao plano $OC\bar{Q}$ e, assim, tem a direção $(\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}})$, onde \mathbf{v} é o vetor unitário do eixo de rotação OC . Analisando a figura A.1 (c) é fácil perceber que o vetor \mathbf{b}_1 tem magnitude dada por:

$$|\mathbf{b}_1| = a \sin \Theta \quad (\text{A.5})$$

em que, $a = |\bar{\mathbf{r}}| \sin \alpha = |\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}|$. Assim, tem-se que:

$$\mathbf{b}_1 = a \sin \Theta \frac{\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}}{|\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}|} = (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}) \sin \Theta \quad (\text{A.6})$$

Através da figura A.1 (d), pode-se obter que o vetor \mathbf{b}_2 tem a magnitude dada por:

$$|\mathbf{b}_2| = a - a \cos \Theta = (1 - \cos \Theta)a = 2a \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (\text{A.7})$$

e da figura A.1 (c), percebe-se que a direção do vetor \mathbf{b}_2 é a mesma do vetor unitário $(\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}/a)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_2 &= 2a \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}})}{a} \\
&= 2[\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}})] \sin^2 \frac{\Theta}{2}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Utilizando as equações (A.3), (A.4), (A.6) e (A.8) pode-se re-escrever a expressão de \mathbf{r} como:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}}) \sin \Theta + 2[\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}})] \sin^2 \frac{\Theta}{2} \tag{A.9}$$

Segundo Shabana (SHABANA, 1989), tem-se as seguintes identidades:

$$\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{r}} = -\tilde{\bar{\mathbf{r}}}\mathbf{v} \tag{A.10}$$

em que, $\tilde{\mathbf{v}}$ e $\tilde{\bar{\mathbf{r}}}$ são matrizes anti-simétricas dadas por:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\bar{\mathbf{r}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{r}_3 & \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 & 0 & -\bar{r}_1 \\ -\bar{r}_2 & \bar{r}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

em que, v_1 , v_2 e v_3 são os componentes do vetor unitário \mathbf{v} e \bar{r}_1 , \bar{r}_2 e \bar{r}_3 são os componentes do vetor $\bar{\mathbf{r}}$.

Assim, pode-se reescrever a equação (A.9) da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{r}} \sin \Theta + 2(\tilde{\mathbf{v}})^2 \bar{\mathbf{r}} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \tag{A.12}$$

ou:

$$\mathbf{r} = \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} \sin \Theta + 2(\tilde{\mathbf{v}})^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right] \bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A.13})$$

em que, \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 .

A equação (A.13) pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$\mathbf{r} = A \bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A.14})$$

em que, $A = A(\Theta)$ é a matriz de rotação 3×3 definida como:

$$A = \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} \sin \Theta + 2(\tilde{\mathbf{v}})^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right] \quad (\text{A.15})$$

Vale destacar que, a matriz de rotação A é definida apenas em termos do ângulo de rotação e do vetor unitário do eixo de rotação (SHABANA, 1989).

No entanto, a formulação apresentada na equação (A.14) representa apenas uma rotação simples entre dois sistemas de coordenadas. Se ocorrem rotações sucessivas entre dois sistemas deve-se determinar a matriz de rotação equivalente a cada rotação e, em seguida, multiplicá-las para determinar a nova posição ocupada pela vetor posição inicial $\bar{\mathbf{r}}$.

$$\mathbf{r}_2 = A_2 A_1 \bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A.16})$$

Além disso, a equação (A.14) representa apenas a rotação entre os dois sistemas de coordenadas. Se desconsiderarmos a premissa inicial que a origem dos dois sistemas são

coincidentes, então, deve-se acrescentar um termo à equação referente à translação entre os dois eixos, conforme indicado abaixo

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + A\bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A.17})$$

em que \mathbf{R} é um vetor com as coordenadas relativas à distância entre a origem dos dois sistemas de coordenadas.

Pode-se utilizar uma representação alternativa, mais compacta, para representar a equação (A.17) utilizando a transformação 4×4 (transformação homogênea).

$$\mathbf{r}_4 = A_4 \bar{\mathbf{r}}_4 \quad (\text{A.18})$$

em que, \mathbf{r}_4 e $\bar{\mathbf{r}}_4$ são vetores posição de dimensão quatro definidos como:

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{\mathbf{r}}_4 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_1 & \bar{\mathbf{r}}_2 & \bar{\mathbf{r}}_3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

e A_4 é a matriz de transformação 4×4 definida como:

$$A_4 = \begin{bmatrix} A & \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

em que $\mathbf{0}_3$ é um vetor nulo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Dessa forma, qualquer ponto com coordenadas $\bar{\mathbf{r}}$ em um sistema de coordenadas $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ pode ser escrita em função de um outro sistema de coordenadas $X_1X_2X_3$, apenas determinando-se a matriz de transformação A_4 entre os dois sistemas.

Apêndice B - Filtro de Kalman

O filtro de Kalman tem sua origem em um artigo publicado por Rudolph. E. Kalman em 1960 onde é descrita uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de sinais em tempo discreto. O filtro apresentado nada mais é do que um algoritmo recursivo para estimação dos estados de um sistema dinâmico, empregando observações das saídas dos mesmos.

O resultado obtido por Kalman até hoje se constitui no principal procedimento para estimar estados de um sistema dinâmico estocástico representado no espaço de estados. Atualmente, sua utilização é encontrada em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, a área econômica e financeira.

A seguir será realizada a descrição de uma formulação do Filtro de Kalman em tempo discreto baseada em ([LEWIS, 1986](#)).

B.1 Formulação do filtro de Kalman

B.1.1 Conceitos Preliminares

B.1.1.1 Estimação de uma variável aleatória X dada uma variável aleatória

Z

Considere um estimador linear para X com base em Z da seguinte forma:

$$\hat{X}(Z) = AZ + b \quad (\text{B.1})$$

Considerando que Z assumia valores em \mathbb{R}^p e X assumia valores em \mathbb{R}^n , A e b são matrizes $(n \times p)$ e $(n \times 1)$, respectivamente. Vale ressaltar que \hat{X} e Z são variáveis aleatórias dispostas em forma de coluna. Contudo, fixando-se um valor $Z = z$, tem-se um valor $\hat{X}(z) = Az + b$ para a estimativa. Os parâmetros A e b serão tomados de modo a minimizar o erro quadrático médio entre X e \hat{X} definido como:

$$\begin{aligned} J &= E \left\{ \text{tr}(X - \hat{X})^T (X - \hat{X}) \right\} = E \left\{ \text{tr}(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T \right\} \\ &= \text{tr} E \left\{ (X - AZ - b)(X - AZ - b)^T \right\} \\ &= \text{tr} E \left\{ [(X - \bar{X}) - (AZ + b - \bar{X})] [(X - \bar{X}) - (AZ + b - \bar{X})]^T \right\} \\ &= \text{tr} E \left\{ [(X - \bar{X}) - A(Z - \bar{Z}) - b - A\bar{Z} + \bar{X}] [(X - \bar{X})^T - A(Z - \bar{Z}) - b - A\bar{Z} + \bar{X}]^T \right\} \\ &= \text{tr} \{ E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T + A(Z - \bar{Z})(Z - \bar{Z})^T A^T + (b - \bar{X})(b - \bar{X})^T \\ &\quad + A\bar{Z}\bar{Z}^T A^T - 2A(Z - \bar{Z})(X - \bar{X})^T + 2A\bar{Z}(b - \bar{X})^T] \} \\ &= \text{tr} \left\{ P_X + A(P_Z + \bar{Z}\bar{Z}^T)A^T + 2A\bar{Z}(b - \bar{X})^T - 2AP_{ZX} + (b - \bar{X})(b - \bar{X})^T \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

em que $\bar{X} = E\{X\}$ é a estimativa a priori de X , $P_X = E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T]$ é a covariância do erro de estimação a priori, $P_Z = E[(Z - \bar{Z})(Z - \bar{Z})^T]$ é a covariância da variável Z e $P_{ZX} = E[(Z - \bar{Z})(X - \bar{X})^T]$ é a covariância cruzada entre Z e X . Vale ressaltar que $P_X = P_X^T$, $P_Z = P_Z^T$ e $P_{ZX} = P_{XZ}^T$

Assim, para encontrar o valor de A e b basta determinar o gradiente da função custo (B.2) definida acima.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \text{tr} \{ 2A\bar{Z}(b - \bar{X})^T + (b - \bar{X})(b - \bar{X})^T \} \\
 &= \frac{\partial}{\partial b} \{ 2b^T A\bar{Z} + (b - \bar{X})^T (b - \bar{X}) \} \\
 &= 2A\bar{Z} + 2(b - \bar{X}) = 0 \\
 b &= \bar{X} - A\bar{Z}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Da mesma forma tem-se que;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \text{tr} \{ A(P_Z + \bar{Z}\bar{Z}^T)A^T + 2A\bar{Z}(b - \bar{X})^T - 2AP_{ZX} \} \\
 &= 2A(P_Z + \bar{Z}\bar{Z}^T) + 2(b - \bar{X})\bar{Z}^T - 2P_{XZ} = 0
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Substituindo a expressão (B.3) na expressão (B.4), tem-se:

$$A(P_Z + \bar{Z}\bar{Z}^T) - A\bar{Z}\bar{Z}^T - P_{XZ} = 0 \tag{B.5}$$

Portanto,

$$A = P_{XZ}P_Z^{-1} \tag{B.6}$$

Assim, substituindo-se as equações (B.3) e (B.6) em (B.1), obtém-se a expressão para o estimador linear em função da estimativa a priori de X , da covariância cruzada entre X e Z e da incerteza de medida de Z .

$$\begin{aligned}\hat{X}_{LMS}(Z) &= P_{XZ}P_Z^{-1}Z + \bar{X} - P_{XZ}P_Z^{-1}\bar{Z} \\ &= \bar{X} + P_{XZ}P_Z^{-1}(Z - \bar{Z})\end{aligned}\tag{B.7}$$

Nesta expressão, LMS denota “least-mean-squares”.

Com a expressão obtida acima algumas observações importantes podem ser feitas.

- Seja $\tilde{Z} = Z - \bar{Z}$. Se $\tilde{Z} = 0$, então $\hat{X}_{LMS} = \bar{X}$ e nenhuma correção é feita na estimativa “a priori” de X .
- Se $P_{XZ} = 0$, Z não traz nenhuma informação sobre X . Nesse caso, $\hat{X} = \bar{X}$ para qualquer valor de Z .
- Se P_Z for grande, então tem-se pouca confiança em medidas de Z e, como resultado, \tilde{Z} tem pouca influência sobre \hat{X} .

B.1.1.2 Média e Covariância do erro de estimação

A média do erro de estimação pode ser calculada através da expressão:

$$E[\hat{X}_{LMS}] = \bar{X} + P_{XZ}P_Z^{-1}E[Z - \bar{Z}]\tag{B.8}$$

como $E[Z - \bar{Z}] = 0$, tem-se que:

$$E[\hat{X}_{LMS}] = \bar{X}\tag{B.9}$$

Definindo $\tilde{X} = X - \hat{X}$, tem-se que,

$$E[\tilde{X}] = E[X] - E[\hat{X}] = \bar{X} - \bar{X} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Adicionalmente,

$$P_{\tilde{X}} = E\{(\tilde{X} - \bar{\tilde{X}})(\tilde{X} - \bar{\tilde{X}})^T\} = E\{\tilde{X}\tilde{X}^T\} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} &= E\{(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T\} \\ &= E\{[(X - \bar{X}) - P_{XZ}P_Z^{-1}(Z - \bar{Z})][(X - \bar{X}) - P_{XZ}P_Z^{-1}(Z - \bar{Z})]^T\} \\ &= E\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T - (X - \bar{X})(Z - \bar{Z})^T P_Z^{-1} P_{ZX} \\ &\quad - P_{XZ} P_Z^{-1} (Z - \bar{Z})(X - \bar{X})^T + P_{XZ} P_Z^{-1} (Z - \bar{Z})(Z - \bar{Z})^T P_Z^{-1} P_{ZX}\} \\ &= P_X - P_{XZ} P_Z^{-1} P_{ZX} - P_{XZ} P_Z^{-1} P_{ZX} + P_{XZ} P_Z^{-1} P_Z P_Z^{-1} P_{ZX} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

que pode ser reescrita como:

$$P_{\tilde{X}} = P_X - P_{XZ} P_Z^{-1} P_{ZX} \quad (\text{B.13})$$

em que

- P_X é a covariância do erro de estimação a priori $(X - \bar{X})$.
- $P_{XZ} P_Z^{-1} P_{ZX}$ é a redução na incerteza propiciada pela medida de Z .

Se X e Z forem não-correlacionados então $P_{XZ} = P_{ZX} = 0$ e $P_{\tilde{X}} = P_X$, ou seja, a medida de Z não melhora o conhecimento sobre X .

Vale destacar que, se as variáveis X e Z forem conjuntamente gaussianas, a estimativa

linear é ótima para o custo quadrático médio.

B.1.1.3 Sistemas Lineares Estocásticos

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gw(k) \\ z(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \tag{B.14}$$

em que w_k e v_k são ruídos de processo e medida, respectivamente. Além disso, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $z(k) \in \mathbb{R}^q$, $w(k) \in \mathbb{R}^l$, $v(k) \in \mathbb{R}^q$ e:

- $E\{w(k)\} = 0$;
- $E\{w(k_1)w(k_2)^T\} = Q\delta(k_1 - k_2)$;
- $E\{v(k)\} = 0$;
- $E\{v(k_1)v(k_2)^T\} = R\delta(k_1 - k_2)$;

em que $\delta(0) = 1$ e $\delta(k) = 0$ para $k \neq 0$.

O estado inicial x_0 é desconhecido, mas com estatísticas \bar{x}_0 e P_{x_0} conhecidas. Além disso, x_0 , w_k , v_k são não-correlacionados, $\forall k$.

Propagação de médias e covariâncias

A propagação da estimativa de x pode ser determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E\{x(k+1)\} &= E\{Ax(k) + Bu(k) + Gw(k)\} \\ &= AE\{x(k)\} + Bu(k) + GE\{w(k)\} \end{aligned} \tag{B.15}$$

assim,

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k) \quad (\text{B.16})$$

em que, $\bar{x}(k+1)$ é a propagação da estimativa “a priori” de x .

A propagação da covariância é obtida através das relações mostradas abaixo:

$$\begin{aligned} P_{x(k+1)} &= E\{[x(k+1) - \bar{x}(k+1)][x(k+1) - \bar{x}(k+1)]^T\} \\ &= E\{[A(x(k) - \bar{x}(k)) + Gw(k)][A(x(k) - \bar{x}(k)) + Gw(k)]^T\} \\ &= AE\{[x(k) - \bar{x}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T\}A^T + GE\{w(k)[x(k) - \bar{x}(k)]^T\}A^T \\ &+ AE\{[x(k) - \bar{x}(k)]w^T\}G^T + GE\{w(k)w(k)^T\}G^T \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

que pode ser reescrita como:

$$P_{x(k+1)} = AP_{x(k)}A^T + GQG^T \quad (\text{B.18})$$

Vale destacar que a equação obtida acima é uma equação de Lyapunov dinâmica com condição inicial P_{xo} .

Para a equação de saída tem-se que:

$$E\{z(k)\} = CE\{x(k)\} + E\{v(k)\} \quad (\text{B.19})$$

Logo,

$$\bar{z} = C\bar{x}(k) \quad (\text{B.20})$$

A covariância cruzada entre X e Z pode ser determinada através das relações:

$$\begin{aligned}
 P_{x(k)z(k)} &= E\{[x(k) - \bar{x}(k)][z(k) - \bar{z}(k)]^T\} \\
 &= E\{[x(k) - \bar{x}(k)][C(x(k) - \bar{x}(k)) + v(k)]^T\} \\
 &= E\{[x(k) - \bar{x}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T\}C^T + E\{[x(k) - \bar{x}(k)]v(k)^T\} \quad (\text{B.21})
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$P_{x(k)z(k)} = P_{x(k)}C^T \quad (\text{B.22})$$

Para a incerteza de medida tem-se:

$$\begin{aligned}
 P_{z(k)} &= E\{[z(k) - \bar{z}(k)][z(k) - \bar{z}(k)]^T\} \\
 &= E\{[C(x(k) - \bar{x}(k)) + v(k)][C(x(k) - \bar{x}(k)) + v(k)]^T\} \\
 &= CE\{[x(k) - \bar{x}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T\}C^T + C\{[x(k) - \bar{x}(k)]v(k)^T\} \\
 &+ E\{v(k)[x(k) - \bar{x}(k)]^T\}C^T + E\{v(k)v(k)^T\} \quad (\text{B.23})
 \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:

$$P_{z(k)} = CP_{x(k)}C^T + R \quad (\text{B.24})$$

Resumindo,

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{x(k)} & P_{x(k)z(k)} \\ P_{z(k)x(k)} & P_{z(k)} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{B.25})$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ C\bar{x}(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{x(k)} & P_{x(k)}C^T \\ CP_{x(k)} & CP_{x(k)}C^T + R \end{bmatrix} \right) \quad (\text{B.26})$$

Devido à existência de correlação entre $x(k)$ e $z(k)$, a medida de $z(k)$ pode ser usada para melhorar a estimativa de $x(k)$ (com respeito à estimativa “a priori”). Vale destacar que, se x_0 , w_k e v_k forem gaussianas, então, devido à linearidade do sistema, $x(k)$ e $z(k)$ serão gaussianas para todo k . Nesse caso, o primeiro e segundo momentos especificam completamente a densidade de probabilidade conjunta.

B.1.2 Filtro de Kalman em tempo discreto

O melhor estimador linear para a variável aleatória $x(k)$ dada a medida $z(k)$ e as estatísticas a priori $\bar{x}(k)$ e $P_{x(k)}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + P_{x(k)z(k)}P_{z(k)}^{-1}[z(k) - \bar{z}(k)] \\ &= \bar{x}(k) + P_{x(k)}C^T[CP_{x(k)}C^T + R]^{-1}[z(k) - C\bar{x}(k)] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} P_{\tilde{x}(k)} &= P_{x(k)} - P_{x(k)z(k)}P_{z(k)}^{-1}P_{z(k)x(k)} \\ &= P_{x(k)} - P_{x(k)}C^T[CP_{x(k)}C^T + R]^{-1}CP_{x(k)} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Aplicando-se o Lema de inversão de matrizes obtém-se:

$$(A_1^{-1} + A_2 A_3 A_4)^{-1} = A_1 - A_1 A_2 (A_4 A_1 A_2 + A_3^{-1})^{-1} A_4 A_1 \quad (\text{B.29})$$

sendo, $A_1 = P_{x(k)}$, $A_2 = C^T$, $A_3 = R^{-1}$, $A_4 = C$. Assim,

$$P_{\tilde{x}(k)} = [P_{x(k)}^{-1} + C^T R^{-1} C]^{-1} \quad (\text{B.30})$$

em que

- $P_{\tilde{x}(k)}$ é a covariância da estimativa após a incorporação da medida $z(k)$ (estimativa a posteriori).
- $P_{x(k)}$ é a covariância da estimativa antes da incorporação da medida $z(k)$ (estimativa a priori).

Vale notar ainda que

$$\begin{aligned} P_{x(k)} C^T [C P_{x(k)} C^T + R]^{-1} &= P_{x(k)} C^T [C P_{x(k)} C^T + R]^{-1} [(C P_{x(k)} C^T + R) - C P_{x(k)} C^T] R^{-1} \\ &= P_{x(k)} C^T \{I - [C P_{x(k)} C^T + R]^{-1} C P_{x(k)} C^T\} R^{-1} \\ &= \{P_{x(k)} - P_{x(k)} C^T [C P_{x(k)} C^T + R]^{-1} C P_{x(k)}\} C^T R^{-1} \\ &= P_{\tilde{x}(k)} C^T R^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Logo,

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + P_{\tilde{x}(k)} C^T R^{-1} [z(k) - C \bar{x}(k)] \quad (\text{B.32})$$

A idéia do Filtro de Kalman consiste em agregar a atualização temporal (propagação

B.1.2.1 Formulação em termos da estimativa a posteriori

A partir das equações (B.16), (B.18), (B.30) e (B.32), as atualizações de tempo e medida podem ser resumidas da seguinte forma.

- Atualização de tempo (efeito da dinâmica do sistema):

- Covariância do erro:

$$P(k+1)^- = AP(k)A^T + GQG^T \quad (\text{B.33})$$

- Estimativa:

$$\hat{x}(k+1)^- = A\hat{x}(k) + Bu(k) \quad (\text{B.34})$$

- Atualização de medida:

- Covariância do erro:

$$P(k+1) = \{[P(k+1)^-]^{-1} + C^T R^{-1} C\}^{-1} \quad (\text{B.35})$$

- Estimativa:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1)^- + P(k+1)C^T R^{-1}[z(k+1) - C\hat{x}(k+1)^-] \quad (\text{B.36})$$

Substituindo a expressão (B.34) na expressão acima, obtém-se que:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + M(k)[z(k+1) - CA\hat{x}(k) - CBu(k)] \quad (\text{B.37})$$

em que

$$M(k) = P(k+1)C^T R^{-1} \quad (\text{B.38})$$

Pode-se notar ainda que:

$$P(k+1)C^T R^{-1} = P(k+1)^- C^T [CP(k+1)^- C^T + R]^{-1} \quad (\text{B.39})$$

Logo,

$$M(k) = P(k+1)^- C^T [CP(k+1)^- C^T + R]^{-1} \quad (\text{B.40})$$

em que $M(k)$ é conhecido como ganho do Filtro de Kalman.

Substituindo a expressão (B.40) em (B.37) tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= [I - P(k+1)^- C^T [CP(k+1)^- C^T + R]^{-1} C] [A\hat{x}(k) + Bu(k)] \\ &+ P(k+1)^- C^T [CP(k+1)^- C^T + R]^{-1} z(k+1) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

ou

$$\hat{x}(k+1) = [I - M(k)C] [A\hat{x}(k) + Bu(k)] + M(k)z(k+1)$$

Adicionalmente, a equação (B.35) pode ser escrita na forma (B.28) obtida antes da aplicação do Lema de Inversão de Matrizes:

$$P(k+1) = P(k+1)^- - P(k+1)^- C^T [CP(k+1)^- C^T + R]^{-1} CP(k+1)^- \quad (\text{B.42})$$

ou

$$P(k) = P(k)^- - P(k)^- C^T [CP(k)^- C^T + R]^{-1} CP(k)^- \quad (\text{B.43})$$

Assim, substituindo (B.43) em (B.33) obtém-se:

$$P(k+1) = A\{P(k)^- - P(k)^- C^T [CP(k)^- C^T + R]^{-1} CP(k)^-\} A^T + GQG^T \quad (\text{B.44})$$

Formulação em estado estacionário Considerando que a matriz de covariância tenha convergido para uma matriz constante P , ou seja,

$$P(k+1)^- = P(k)^- = P \quad (\text{B.45})$$

Tem-se de (B.44) que:

$$P = APA^T - APC^T [CPC^T + R]^{-1} CPA^T + GQG^T \quad (\text{B.46})$$

Além disso, de (B.41),

$$\hat{x}(k+1) = [I - PC^T [CPC^T + R]^{-1} C] [A\hat{x}(k) + Bu(k)] \quad (\text{B.47})$$

$$+ PC^T[CPC^T + R]^{-1}z(k+1)$$

em que $\hat{x}(k+1)$ é a estimativa a posteriori.

Por fim, denotando

$$M = PC^T[CPC^T + R]^{-1} \quad (\text{B.48})$$

tem-se que:

$$\hat{x}(k+1) = [I - MC][A\hat{x}(k) + Bu(k)] + Mz(k+1)$$

Anexo A - Equações não-lineares do helicóptero 3DOF

Neste anexo são apresentadas as expressões para as equações de estado $\dot{x}_2 = f_2(x, u)$, $\dot{x}_4 = f_4(x, u)$ e $\dot{x}_6 = f_6(x, u)$ obtidas para o helicóptero 3DOF. Vale ressaltar que o modelo foi representado em espaço de estados como $\dot{x} = f(x, u)$, com $x = [T \ \dot{T} \ P \ \dot{P} \ E \ \dot{E}]^T$ e $u = [u_1 \ u_2]^T$. Além disso, temos que $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$ e $\dot{x}_5 = x_6$. As equações completas são:

- Equação $\dot{x}_2 = f_2(x, u)$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 = & -(0.2)^{-4}(5585r_t \text{sen}(x_3)u_1^2 + 100000m_{cp}x_2r_{cp}^2 \cos(\alpha - x_5)\text{sen}(\alpha - x_5)x_6 \\ & + 5585r_t \text{sen}(x_3)u_2^2 + 100000m_hx_2r_h^2 \cos(\alpha - x_5)\text{sen}(\beta - x_5)x_6 \\ & + 100000m_bx_2r_b^2 \cos(\gamma - x_5)\text{sen}(\gamma - x_5)x_6 + 100000m_px_2r_p^2 \cos(\lambda - x_5)\text{sen}(\lambda - x_5)x_6 \\ & + 2246r_t \text{sen}(x_3)u_1 + 2246r_t \text{sen}(x_3)u_2)/(m_hr_h^2 \cos(\beta - x_5)^2 + m_{cp}r_{cp}^2 \cos(\alpha - x_5)^2 \\ & + m_pr_p^2 \cos(\lambda - x_5)^2 + m_br_b^2 \cos(\gamma - x_5)^2)\end{aligned}$$

- Equação $\dot{x}_4 = f_4(x, u)$

$$\ddot{x}_4 = \frac{(r_m(0.1117u_1^2 + 0.04492u_1) - r_m(0.1117u_2^2 + 0.04492u_2))}{J_p}$$

- Equação $\dot{x}_6 = f_6(x, u)$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_6 = & -(0.2)^{-4}(-50000m_{cp}x_2^2r_{cp}^2\cos(\alpha - x_5)\sin(x_5 + \alpha) \\
& - 50000m_hx_2^2r_h^2\cos(\beta - x_5)\sin(\beta - x_5) - 50000m_bx_2^2r_b^2\cos(\gamma - x_5)\sin(\gamma - x_5) \\
& - 50000m_px_2^2r_p^2\cos(\lambda - x_5)\sin(\lambda - x_5) - 50000gm_{cp}r_{cp}\cos(\alpha - x_5) \\
& + 50000gm_hr_h\cos(\beta - x_5) + 50000gm_br_b\cos(\gamma - x_5) + 50000gm_pr_p\cos(\lambda - x_5) \\
& - 5585r\cos(x_3)u_1^2 - 2246r\cos(x_3)u_1 - 5585r\cos(x_3)u_2^2 \\
& - 2246r\cos(x_3)u_2)/(m_hr_h^2 + m_br_b^2 + m_pr_p^2 + m_{cp}r_{cp}^2)
\end{aligned}$$

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TM	2. DATA 07 de agosto de 2007	3. DOCUMENTO Nº CTA/ITA-IEE/TM-012/2007	4. Nº DE PÁGINAS 136
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Modelagem e Controle Preditivo de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade			
6. AUTOR(ES): Renato Vilela Lopes			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão Sistemas e Controle - ITA/IEE			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Controle Preditivo; Controle com Restrições; Programação Quadrática; Controle em Tempo Real; Sistemas Multivariáveis			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Controle com restrições; Predição; Graus de liberdade; Helicópteros; Programação quadrática; Operação em tempo real; Análise estatística multivariada; Sistemas não-lineares; Controle; Engenharia aeronáutica			
10. APRESENTAÇÃO: ITA, São José dos Campos, 2007, 136 páginas		(X) Nacional () Internacional	
11. RESUMO: Métodos de controle preditivo têm encontrado grande aceitação industrial, principalmente devido a sua capacidade de fazer respeitar restrições operacionais, o que reduz o número de paradas de emergências de um sistema. No entanto, suas aplicações em geral têm sido voltadas a sistemas estritamente estáveis e de dinâmica lenta. Neste trabalho, é implementada uma lei de controle preditivo no espaço de estados para um helicóptero de três graus de liberdade com duas variáveis de entrada. A dinâmica do sistema é não-linear, de 6ª ordem, com amortecimento muito pequeno. Linearizando-se um modelo físico nominal em torno de um ponto de equilíbrio, obteve-se um modelo de predição marginalmente estável. A implementação em tempo real envolve a solução de um problema de Programação Quadrática a cada período de amostragem de 50ms. Os resultados experimentais são empregados para estudar o efeito de alterações nos horizontes de predição e controle, bem como para ilustrar a capacidade do controlador em fazer respeitar restrições de saída. Por fim, a lei de controle é alterada com a inclusão de um Filtro de Kalman para estimar as velocidades angulares do helicóptero e, assim, melhorar o desempenho da malha de controle.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			