Lista 1

DFT (4305360)
Vitor Nirschl
13685771

Problema 1

Mostre que, sendo $\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$ uma lagrangiana que satisfaz a equação de Euler-Lagrange, se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, então a identidade de Beltrami é satisfeita,

$$\mathcal{L} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = C, \text{em que } C \text{ é constante} \tag{1}$$

Resolução

Começamos partindo da derivada ordinária de $\mathcal{L}$ com respeito a x. Sabemos imediatamente que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

entretanto, por hipótese, temos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, de modo que essa igualdade se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

Sabemos que $\mathcal{L}$ satisfaz Euler-Lagrange, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right) \tag{4}$$

então substituimos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}$ em Eq. 3 e obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

e pela regra do produto, vemos imediatamente que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] \tag{6}$$

passando tudo para o lado esquerdo, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = 0 \tag{7}$$

o que imediatamente implica que a expressão entre colchetes deve ser constante, levando à identidade de Beltrami,

$$\mathcal{L} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = C, \text{em que } C \text{ é constante.} \tag{8}$$