CÁLCULO NUMÉRICO
AULA 2 – 06/08/2025

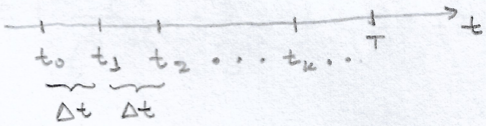
Na última aula, obtivemos a formulação integral de uma solução para o problema de Cauchy.

$$y(T) - y(t_0) = \int_{t_0}^{T} f(t, y(t))\, dt$$

Para que seja possível resolver essa integral numericamente, com um computador, precisamos discretizar nosso problema. Para tanto, começaremos com uma discretização uniforme do domínio de definição,

$\Delta t = \dfrac{T - t_0}{n}$, com n um número inteiro arbitrariamente escolhido

Assim, $t_k = t_0 + k\Delta t$, com $k = 0, 1, \dots, n$



Agora que discretizamos o domínio, precizamos discretizar as EDOs. Em outras palavras, o que queremos fazer é tranformá-las num conjunto de equações algébricas. Para isso, podemos usar uma porção de métodos, lineares ou não lineares. Um desses métodos é o <u>método de Taylor</u> (que, em 1ª ordem, é o método de Euler):

$y_0 = y(t_0)$
$\Delta t = (T - t_0)/n$

em que $y(t_0)$ e n são dados

laço temporal
$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\, f(t_k, y_k) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{df}{dt}(t_k, y_k)$$

Observe que se quisermos usar métodos de Taylor dados por polinômios de graus diferentes, teríamos que fazer isso alterando diretamente o programa principal, o que seria muito inconveniente. Como resolver isso?

Definimos um método auxiliar, $\phi(t_k, y_k, \Delta t)$, separado do programa principal.

$y_0 = y(t_0)$
$\Delta t = (T - t_0)/n$

ϕ chama-se uma função de discretização

laço temporal
$\to k = 0, 1, \dots, n-1$
$y_{k+1} = y_k + \Delta t\, \phi(t_k, y_k, \Delta t)$
$t_{k+1} = t_0 + (k+1)\Delta t$
$\Rightarrow$ impressão (t_{k+1}, y_{k+1})

em que $\phi(t_k, y_k, \Delta t)$ é definido fora do programa principal

Por exemplo,

$$\phi(t_k, y_k, \Delta t) = f(t_k, y_k) \quad \text{ou} \quad \phi(t_k, y_k, \Delta t) = f(t_k, y_k) + \frac{\Delta t}{2}\frac{df}{dt}(t_k, y_k) \quad \text{etc...}$$

Veja que para o método de Taylor em ordem ≥ 2 necessita de derivadas de f.

Quem são elas? Pela regra da cadeia,

$$\frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{pois} \quad \frac{dy}{dt} = f$$

Daí, podemos definir o operador diferencial $D := \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{df}{dt} = Df$

E a segunda derivada, como fica? ☆Tarefa: verifique!

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Veja que temos um problema! Se quisermos ganhar precisão aumentando a ordem do método de Taylor, rapidamente as coisas se complicam!

☆Tarefa: Faça, para o dia 20, o problema modelo com o Δt utilizado na melhor aproximação e uma tabela com 10 pontos (t_k, y_k) para fazermos interpolações.

Por causa dessa rápida complicação, é bom conhecer outras classes de métodos de aproximação da solução do problema de Cauchy.

Método de Runge-Kutta clássico (erro $\sim \Delta t^4$) $\rightarrow |e(t_k, \Delta t)| = |y_k - y(t_k)| \propto \Delta t^4$

$$y_0 = y(t_0)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\, \phi(t_k, y_k, \Delta t)$$

em que $\phi(t_k, y_k, \Delta t) = \frac{1}{6}\left[K_1(t_k, y_k, \Delta t) + 2K_2(t_k, y_k, \Delta t) + 2K_3(t_k, y_k, \Delta t) + K_4(t_k, y_k, \Delta t)\right]$

Com $K_1(t_k, y_k, \Delta t) = f(t_k, y_k)$

$$K_2(t_k, y_k, \Delta t) = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, y_k + \frac{\Delta t}{2}K_1\right)$$

$$K_3(t_k, y_k, \Delta t) = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, y_k + \frac{\Delta t}{2}K_2\right)$$

$$K_4(t_k, y_k, \Delta t) = f\left(t_k + \Delta t, y_k + \Delta t K_3\right)$$

Métodos de um passo explícitos

São aqueles estruturados como $y_{k+1} = y_k + \Delta t \, \phi(t_k, y_k, \Delta t)$

Conceitos fundamentais para métodos de um passo

- Erro de discretização local

$$\tau(t_k, \Delta t) := \tau_k := \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\Delta t} - \phi(t_k, y(t_k), \Delta t)$$

Veja que esse erro é escrito usando a solução exata $y(t_k)$!

No limite para $\Delta t \to 0$, se $\tau_k \to 0$ então $\phi(t, y(t), \Delta t) \to f(t, y(t))$

De fato, para o método ser útil, queremos $\lim_{\Delta t \to 0} \tau_k = 0$

Quando $\lim_{\Delta t \to 0} \phi(t, y(t), \Delta t) = f(t, y(t))$, dizemos que o método numérico

de um passo é consistente com a EDO.

Portanto, ϕ deve ser contínua em Δt.