ATIVIDADE 1 - AULA 06
CÁLCULO NUMÉRICO (MAP0214)
VITOR NIRSCHL 13685171

i	t_i	$y[t_i]$
0	1,2	327
1	1,3	325
2	1,4	322
3	1,5	320
4	1,6	317
5	1,7	315

Queremos aproximar a temperatura em $t = 1,23$. Para isso, fazemos o polinômio interpolador de Lagrange, de 1º grau, entre t_0 e t_1.

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - 1,3}{1,2 - 1,3} \qquad \mathcal{L}_1(x) = \frac{x - 1,2}{1,3 - 1,2}$$

então $P_1(x) = 327\,\mathcal{L}_0(x) + 325\,\mathcal{L}_1(x)$

ou seja, $P_1(1,23) = 327\,\mathcal{L}_0(1,23) + 325\,\mathcal{L}_1(1,23) = 326,4$

E como usamos o polinômio interpolador na forma de Newton?

As diferenças divididas pertinentes serão

$y[t_0] = 327$, $y[t_1] = 325$ e $y[t_0, t_1] = \dfrac{y[t_0] - y[t_1]}{t_0 - t_1} = \dfrac{2}{0,1} = 20$

Daí o polinômio em 1ª ordem será

$$P_1(x) = 327 + (x - 1,2) \times 20$$

e, então, $P_1(1,23) = 327 + (1,23 - 1,2) \times 20 = 326,4 \Rightarrow$ o polinômio interpolador é único! :)

E qual será o erro cometido ao fazer essa aproximação? Façamos uma estimativa de erro em $x = 1,23$.

$$E(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi)$$

$$|E(x)| \leq \left|\prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(n+1)!}\right| \max_{\xi \in I} |y^{(n+1)}(\xi)|$$

Daí, $|E(1,23)| = |y(1,23) - P_1(1,23)| \leq \left|\dfrac{(1,23 - 1,2)(1,23 - 1,3)}{2!}\right| \max\limits_{\xi \in (1,2,\, 1,23)} |y^{(2)}(\xi)|$

* Tarefa para casa: qual o resultado para $y^{(2)}(\xi)$ exata (conhecida) de nosso problema?

Claro, conhecemos essa derivada, mas se não conhecêssemos o que faríamos?

Podemos estimá-la fazendo

$$y^{(n)}(\theta) = y[x_0, x_1, \ldots, x_n]\, n!$$

em nosso caso, $n = 2$. Então agora fazemos a tabela de dif. div.

i	t_i	$y[t_i]$	$y[t_i, t_{i+1}]$	$y[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]$
0	1,0	333	$-3/0,1 = -30$	0
1	1,1	330	$-3/0,1 = -30$	50
2	1,2	327	$-2/0,1 = -20$	-50
3	1,3	325	$-3/0,1 = -30$	50
4	1,4	322	$-2/0,1 = -20$	
5	1,5	320		

Então existem $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ em que

$$y^{(2)}(\theta_1) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(\theta_2) = 50 \times 2! = 100 \; , \; y^{(2)}(\theta_3) = -50 \times 2! = 100$$

$$y^{(2)}(\theta_4) = 50 \times 2! = 100$$

Então, usaremos $\max\limits_{\xi \in (1,2,1,5)} |y^{(2)}(\xi)| = 100$. Essa é certamente uma aproximação um tanto quanto arriscada, pois temos poucos pontos em nossa tabela. Quanto mais pontos, melhor.

* Tarefa para casa: Gerar polinômios de grau 2 e 3 e, em $x = 1,23$, obter as aproximações e decidir qual ensaio usar.