Problemas de Cauchy

Vitor Nirschl | vitor.nirschl@usp.br | Nº USP 13685771

São propostos dois modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias com condições iniciais (problemas de Cauchy), sendo o primeiro unidimensional (Lei de resfriamento de Newton) e, o segundo, multidimensional (modelo de Lotka-Volterra), descrito por duas variáveis de estado. Aqui, eles são apresentados na forma normal.

Lei de resfriamento de Newton

A Lei de resfriamento de Newton relaciona a taxa de perda de temperatura de um corpo com a diferença entre sua temperatura e a do ambiente, desde que essa seja pequena. Além disso, assume-se que o coeficiente térmico do corpo permaneça constante. Além disso, assume-se que o ambiente seja um reservatório térmico, no sentido de que sua temperatura não varia pela troca de calor. Matematicamente, o modelo é dado por

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = r(T(t) - T_{\mathrm{amb}}) \tag{1}$$

em que $T(t)$ representa a temperatura do corpo no instante t, T_{amb} representa a temperatura ambiente e r é o coeficiente de transferência térmica, dado em unidades de frequência (inverso de tempo). Dada a temperatura num instante inicial, $T(0)$, podemos determinar a temperatura do corpo em qualquer outro instante. [1–3]

Modelo de caça-presa de Lotka-Volterra

O modelo matemático de Lotka-Volterra consiste num sistema de equações diferenciais que descrevem a evolução temporal de sistemas biológicos compostos por duas espécies interagentes, uma como predadora e outra como presa. Trata-se de uma idealização primitiva que lida com um sistema isolado e desconsidera outros fatores influentes na dinâmica de um biossistema, como doenças e competição entre espécies.

Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as densidades populacionais de uma espécie de presas e uma de predadores ao longo do tempo t, dadas em quantidade de indíviduos por unidade de área; digamos, por exemplo, de coelhos e raposas.

O sistema de Lotka-Volterra é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned} \tag{2}$$

em que α descreve a taxa máxima de crescimento populacional da presa, dada em unidades de frequência, β descreve a influência da espécie predadora na taxa de mortalidade da espécie presa, em unidades de frequência vezes área, γ descreve a taxa de mortalidade per capita da espécie predadora, em unidades de frequência, e δ descreve a influência da presença da espécie presa na taxa de crescimento da espécie predadora, em unidades de frequência vezes área. Todos esses parâmetros são positivos e reais. Dadas as condições iniciais do sistema, isto é, as densidades populacionais num instante fixo t_0, podemos determinar $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante. [4–6]

Bibliografia

[1] J. H. Lienhard V e J. H. Lienhard IV, *A Heat Transfer Textbook*, 6th ed. (Phlogiston Press, Cambridge, MA, 2024).

[2] T. Bergman, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (Wiley, 2011).

[3] V. Sagar, R. Agarwal, P. Ragupathi, e M. Harageri, *Fundamentals And Application Of Heat And Mass Transfer* (AG PUBLISHING HOUSE (AGPH Books), 2022).
[4] F. Brauer e C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Springer New York, 2001).
[5] L. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Editora Livraria da Física, 2002).
[6] J. Hofbauer e K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems: Mathematical Aspects of Selection* (Cambridge University Press, 1988).