Aproximações numéricas para soluções de problemas de Cauchy

Vitor Nirschl | vitor.nirschl@usp.br | Instituto de Física da USP | Nº USP 13685771

Palavras-chave: Problema de Cauchy, Lei de Resfriamento de Newton, Modelo Lotka-Volterra, Métodos Numéricos, Interpolação Polinomial, Splines.

São propostos dois modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias com condições iniciais (problemas de Cauchy), sendo o primeiro unidimensional (Lei de resfriamento de Newton) e, o segundo, multidimensional (modelo de Lotka-Volterra), descrito por duas variáveis de estado. Aqui, eles são apresentados na forma normal.

Lei de resfriamento de Newton

Considere um corpo incrompressível com capacidade térmica constante C, cuja temperatura é dada ao longo do tempo por $T(t)$. Se o ambiente no qual o corpo se encontra permanece a temperatura fixa T_{amb} (sendo aqui idealizado como um reservatório térmico), então o fluxo de calor perdido pelo corpo para o ambiente q (dado em unidades de potência por área) é descrito pela equação

$$q = h(T(t) - T_{\text{amb}}) \tag{1}$$

Integrando sobre toda a área do corpo, A, encontramos a taxa de transferência de calor do corpo $\dot{Q}$, dada em unidades de potência,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_A \mathrm{d}A\, h(T(t) - T_{\text{amb}}) = hA(T(t) - T_{\text{amb}}) \tag{2}$$

Mas sabemos que a capacidade térmica de um corpo incompressível é dada por

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \quad \text{em que } U \text{ é a energia interna do corpo} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

e, sendo $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, finalmente podemos agrupar as constantes e reescrever a Lei de resfriamento de Newton na forma

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = r(T(t) - T_{\text{amb}}) \tag{4}$$

em que $T(t)$ representa a temperatura do corpo no instante t, T_{amb} representa a temperatura ambiente e r é o coeficiente de transferência térmica, dado em unidades de frequência (inverso de tempo).

Dada a temperatura num instante inicial, $T(0) \equiv T_0$, podemos determinar a temperatura do corpo em qualquer outro instante. [1–3]

Adimensionalização do modelo

Podemos adimensionalizar a equação da Lei de Resfriamento de Newton. Para isso, começamos estabelecendo o “tempo adimensional”, dado pela relação entre a variável temporal t e um tempo de referência, aqui escolhido t_0. Ele será dado por $t^* = t/t_0$. Com isso, podemos escrever a temperatura do corpo como uma função do tempo adimensional, $T(t) = T(t_0 t^*)$. Mais ainda, podemos definir convenientemente uma função de temperatura adimensional $T^*(t^*)$, fazendo simplesmente

$$T^*(t^*) \equiv \frac{T(t_0 t^*) - T_{\text{amb}}}{T_0} \tag{5}$$

Veja que podemos derivar essa expressão com respeito a t^* e usar a regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{1}{T_0}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t^*} = \frac{1}{T_0}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*} = rt_0\frac{T(t_0 t^*) - T_{\text{amb}}}{T_0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t^*} = rt_0 T^*(t^*) \tag{6}$$

de modo a encontrar uma EDO adimensional para nosso problema.

Modelo de caça-presa de Lotka-Volterra

O modelo matemático de Lotka-Volterra consiste num sistema de equações diferenciais que descrevem a evolução temporal de sistemas biológicos compostos por duas espécies interagentes, uma como predadora e outra como presa. Trata-se de uma idealização primitiva que lida com um sistema isolado e desconsidera outros fatores influentes na dinâmica de um biossistema, como doenças e competição entre espécies.

Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as densidades populacionais de uma espécie de presas e uma de predadores ao longo do tempo t, dadas em quantidade de indíviduos por unidade de área; digamos, por exemplo, de coelhos e raposas.

O sistema de Lotka-Volterra é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t)\end{aligned} \tag{7}$$

em que α descreve a taxa máxima de crescimento populacional da presa, dada em unidades de frequência, β descreve a influência da espécie predadora na taxa de mortalidade da espécie presa, em unidades de frequência vezes área, γ descreve a taxa de mortalidade per capita da espécie predadora, em unidades de frequência, e δ descreve a influência da presença da espécie presa na taxa de crescimento da espécie predadora, em unidades de frequência vezes área. Todos esses parâmetros são positivos e reais.

Sendo $X(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$, podemos reescrever o sistema na forma normal como

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = MX(t) + G(X(t)) \tag{8}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G(X(t)) = \begin{pmatrix} -\beta x(t) y(t) \\ \delta x(t) y(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Dadas as condições iniciais do sistema, isto é, as densidades populacionais num instante fixo t_0, $x(t_0) \equiv x_0$ e $y(t_0) \equiv y_0$ (ou, na forma vetorial, $X(t_0) = \binom{x_0}{y_0} \equiv X_0$), podemos determinar $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante. [4–7]

Bibliografia

[1] J. H. Lienhard V e J. H. Lienhard IV, *A Heat Transfer Textbook*, 6th ed. (Phlogiston Press, Cambridge, MA, 2024).

[2] T. Bergman, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (Wiley, 2011).

[3] V. Sagar, R. Agarwal, P. Ragupathi, e M. Harageri, *Fundamentals And Application Of Heat And Mass Transfer* (AG PUBLISHING HOUSE (AGPH Books), 2022).

[4] F. Brauer e C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Springer New York, 2001).

[5] L. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Editora Livraria da Física, 2002).

[6] J. Hofbauer e K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems: Mathematical Aspects of Selection* (Cambridge University Press, 1988).

[7] J. C. A. Barata, Notas para um Curso de Física-Matemática, (2025).