CÁLCULO NUMÉRICO
AULA 08 - 27/09/2025

Recordemos brevemente os métodos de um passo explícitos, dados pelo algoritmo

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

$$y_0 = y(t_0)$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \Delta t\, \phi(t_k, y_k, \Delta t) \\ t_{k+1} = t_k + \Delta t \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

em que $\phi(t_k, y_k, \Delta t)$ é a função de discretização característica de nosso método de escolha. No caso dos métodos de Taylor, somos inspirados pela aproximação de Taylor, de modo que, por exemplo, em 3ª ordem,

$$\phi_{T3}(t_k, y_k, \Delta t) = \frac{d}{dt} y(t)\Big|_{\substack{t=t_k \\ y=y_k}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2}{dt^2} y(t)\Big|_{\substack{t=t_k \\ y=y_k}} + \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{d^3}{dt^3} y(t)\Big|_{\substack{t=t_k \\ y=y_k}}$$

enquanto que Runge-Kutta clássico nos diz que

$$\phi_{RK4}(t_k, y_k, \Delta t) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{, em que}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k) \text{ , } \quad k_2 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, y_k + \frac{\Delta t}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, y_k + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \text{ , } \quad k_4 = f\left(t_k + \Delta t, y_k + \Delta t\, k_3\right)$$

Agora, vamos explorar outros métodos de um passo explícitos.

Método de Heun (ou trapézio explícito)

Aqui, a função de discretização é dada por

$$\phi_H(t_k, y_k, \Delta t) = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{, em que } k_1 = f(t_k, y_k)$$
$$\text{e } k_2 = f\left(t_k + \Delta t, y_k + \Delta t\, k_1\right)$$

Ele é um método de Runge-Kutta.
Há também os métodos de um passo implícitos. Quem são eles?

Método implícito de Euler

Agora, o algoritmo é dado por

$$y_0 = y(t_0)$$
$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \Delta t f(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ t_{k+1} = t_k + \Delta t \end{cases}$$

Por exemplo, se $\frac{dy}{dt} = t y(t) \operatorname{sen}(y(t))$, então, pelo método de Euler implícito,

$$y_0 = y(t_0)$$
$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \left[t_{k+1} y_{k+1} \operatorname{sen}(y_{k+1}) \right]$$

Note que chamamos y_{k+1} recursivamente! Como determinamos ele então?

y_{k+1} é tal que a seguinte relação seja resolvida em x,

$$g(x) = x - \Delta t \left[t_{k+1} x \operatorname{sen}(x) \right] - y_k = 0$$

Erro de discretização local

Relembramos que ele é dado por $\tau_k = \frac{y(t_k+\Delta t) - y(t_k)}{\Delta t} - \phi(t_k, y(t_k), \Delta t)$

Por exemplo, considere o método de Euler, ou seja, $\phi(t_k, y(t_k), \Delta t) = f(t_k, y(t_k))$

Então $\underset{\text{Euler}}{\tau_k(\Delta t)} = \frac{y(t_k+\Delta t) - y(t_k)}{\Delta t} - f(t_k, y(t_k)) = \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2}{dt^2} y(\xi_k)$, com $\xi \in (t_k, t_{k+1})$

A função de discretização é consistente com a EDO se $\lim_{\Delta t \to 0} \tau_k(\Delta t) = 0$.

Para Euler, sabemos que $|\tau_k(\Delta t)| \leq C \Delta t^2$, com $C = \frac{1}{2} \max |\ddot{y}|$, em $[t_0, t_f]$

Evidentemente, quanto maior o grau se usarmos o método de Taylor, mais preciso ele será. O erro de discretização local converge para zero muito mais rápido com Δt.

E como procedemos para determinar a ordem do erro local de discretização do método de Heun?

$$\underset{\text{Heun}}{\tau_k(\Delta t)} = \frac{y(t_k+\Delta t) - y(t_k)}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left[\underbrace{f(t_k, y(t_k))}_{k_1 = \dot{y}} + f(t_k + \Delta t, y(t_k) + \Delta t f(t_k, y(t_k))) \right]$$

Aqui, usaremos a aproximação de Taylor em 2ª ordem:

$f(t_k+\Delta t, y(t_k) + \Delta t f(t_k, y(t_k))) = \dot{y}(t_k+\Delta t, y(t_k) + \Delta t \dot{y}(t_k, y(t_k))) =$

$= \dot{y}(t_k + \Delta t, y(t_k) + \Delta y)$.

Fazendo a expansão de Taylor convenientemente, mostre que τ_k
$\tau_k(\Delta t) = \Theta(\Delta t^2)$

∇ ATENÇÃO: Vemos que se o método explícito de um passo tiver o erro local de discretização (ou, equivalentemente, consistência) de ordem p, $(\Theta(\Delta t^p))$, então o erro de discretização global

$$|e_k(\Delta t)| = |\underset{\substack{\downarrow \\ t=t_k}}{y(t)} - \eta(\Delta t)| = \Theta(\Delta t^p)$$

$\eta(\Delta t)$ → aproximação numérica com Δt

Receitinha: depuração de código

1) Tome $\dot{y} = f(t,y)$ com solução conhecida

2) Construa a tabela de convergência para uma amostra de instantes de tempo.