CÁLCULO NUMÉRICO
AULA 1 – 04/08/2025

ATÉ DIA 13 → Selecionar dois problemas da física modelados por EDOs. Um deles deve ser dado por uma EDO escalar e, outro, por uma EDO multi-dimensional.

TÓPICO 1: Métodos numéricos para aproximar soluções de EDOs

▷ Problemas de Cauchy: São EDOS sujeitas a certas condições iniciais sobre a solução.

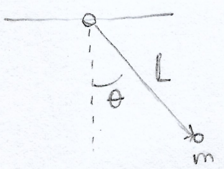
Exemplos de problemas de Cauchy:

1. Decaimento radioativo

Para $\lambda > 0$, o Nº de partículas $N(t)$ é dado por

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \text{ para } t \in [t_0, T], \text{ com } N(t_0) = N_0 \in \mathbb{N}^+$$

2. Pêndulo simples com atrito e resistência



$$\begin{cases} mL^2\ddot{\theta} = -mgL\,\mathrm{sen}\,\theta - b\dot{\theta} - cL^2\dot{\theta}|\dot{\theta}| + h(t), \text{ com } t \in [t_0, T] \\ \theta(t_0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \end{cases}$$

Forma normal ou formatação padrão é aquela em que a EDO se apresenta como

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t)), \text{ para } t \in [t_0, T], \text{ com } y(t_0) = y_0 \text{ constante}$$

Como fica nosso pêndulo simples na forma normal?

Façamos $y_1(t) = \theta(t)$ e $y_2(t) = \dot{\theta}(t)$, de modo que

$$\dot{y}_1(t) = \dot{\theta}(t) \quad \text{e} \quad \dot{y}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,y_1 - \frac{b}{mL^2}y_2 - \frac{c}{m}y_2|y_2| + \frac{1}{mL^2}h(t)$$

Matricialmente,

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,y_1 - \frac{b}{mL^2}y_2 - \frac{c}{m}y_2|y_2| + \frac{1}{mL^2}h(t) \end{bmatrix} = f(t, y(t))$$

e note que podemos expressar a dependência apenas em termos de $y(t)$ (e não suas componentes) fazendo $y_1(t) = y(t) \cdot \hat{e}_1$ e $y_2(t) = y(t) \cdot \hat{e}_2$

Na forma integral, por outro lado, a EDO é expressa como

$$\int_{t_0}^{T} \dot{y}(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} F(t, y(t))\,dt \longrightarrow y(T) - y_0 = \int_{t_0}^{T} F(t, y(t))\,dt$$

Agora, ataquemos o seguinte problema: queremos aproximar a única solução de $\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Seja $h \in \mathbb{R}$ um parâmetro arbitrariamente pequeno. Então podemos aproximar suficientemente bem

$$\frac{y(t_k+h) - y(t_k)}{h} \simeq \dot{y}(t_k) = F(t_k, y(t_k)) \Rightarrow y(t_k+h) \simeq y(t_k) + hF(t_k, y(t_k))$$

Isso nos inspira um método iterativo no tempo (método de Euler):

Seja $y_k = y(t_k)$, $y_{k+1} \simeq y_k + hF(y_k, t)$, com $y_0 = y(t_0)$.

Colocando num laço para cobrir todo o intervalo de tempo,

$$y_0 = y(t_0)$$

$$\left[\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right.$$

Passo-a-passo para a discretização do problema:

1º passo: discretize o domínio de definição $[t_0, T]$:

$h = \frac{T - t_0}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^+$ é o passo de integração

$t_k = t_0 + kh$, para $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}^+$

2º passo: discretize a EDO, isto é, transforme-a num conjunto de equações algébricas.

Por Euler, por exemplo, fazemos $y_0 = y(t_0)$, $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y(t_k))$, com $k = 0, \dots, n-1$.

Extrapolando o método de Euler, propomos o método de Taylor de ordem p:

$$y_0 = y(t_0)$$

$$\left[\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{\substack{t=t_k \\ y=y_k}} + \dots + \frac{h^p}{p!} \left.\frac{d^p}{dt^{p-1}} f\right|_{\substack{t=t_k \\ y=y_k}} \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right.$$