CÁLCULO NUMÉRICO

AULA 3 - 11/08/2025

Anteriormente, vimos alguns métodos de um passo explícitos para aproximar a solução de alguma EDO que nos dão um conjunto de pontos em que aproximamos essa função.

$$\underbrace{\begin{array}{c|c|c|c|c} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \hline y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array}}_{\text{valores que obtivemos com métodos de um passo com intervalo } \Delta t.}$$

Mas, em geral, vamos querer valores em tempos intermediários que não estão nessa tabela. Então, vamos precisar de métodos para aproximar esses valores no contínuo.

Interpolação Polinomial

(Humes et. al. - pgs 132-153)

Dado o conjunto de pontos tabelados

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

queremos aproximar $y(x)$ com $x \in [x_0, x_n]$. Partimos da hipótese de que $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$. Queremos obter um polinômio $p_n(x)$ que satisfaça

(a) grau de $p_n(x)$ é menor ou igual a n

(b) $p_n(x_i) := y_i$ $\quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$

Tomemos $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Sabemos que

$$\begin{aligned} y_0 &= p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n \\ y_1 &= p_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n \\ &\vdots \\ y_n &= p_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Chamamos essa matriz de Matriz de Vandermonde que denotaremos por V

Teorema: o polinômio $p_n(x)$ tal que $\text{grau}(p_n(x)) \leq n$ e $p_n(x_i) = y_i$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ existe e é único.

Demonstração: Consideremos o sistema $V\vec{a} = 0$. Suponhamos que $\det(V) = 0$. Nesse caso, o sistema tem infinitas soluções.

Tomemos uma solução não nula $\vec{a}' = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ do sistema homogêneo e considere $q(x) = a_0' + a_1' x + \ldots + a_n' x$. Note que isso implica em $q(x_i) = 0$ $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ temos $n+1$ raízes distintas num polinômio de grau $\leq n$ $\Rightarrow$ violação do teorema fundamental da álgebra! Portanto, $\det(V) \neq 0 \Rightarrow$ há um, e só um, $p_n(x)$ que interpole a tabela.

Note que teremos um problema ao usar a matriz de Vandermonde no que concerne às ordens de grandeza de suas componentes. Se elas forem muito pequenas, uma das potências pode acabar se tornando um zero de máquina ao utilizarmos um computador. Isso iria prejudicar a solução do sistema e, exatamente por causa dessa "imprecisão", não resolveremos o sistema de Vandermonde.

Vejamos um EXEMPLO. Considere a seguinte tabela:

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$
$$(x_1, y_1) = (1.1, 1.1)$$
$$(x_2 \cdot y_2) = (1.2, 1.3)$$

queremos determinar o polinômio interpolador $P_2(x)$ usando Vandermonde, aritmética de precisão infinita (frações) e aritmética de 2 algarismos significativos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 1.2 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = 0$$

com aritmética de 2 algarismos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11/10 & \frac{121}{100} \\ 1 & 12/10 & 144/100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11/10 \\ 13/10 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2(x) = 5x^2 - 9.5x + 5.5$$

com aritmética de precisão infinita

Polinômio Interpolador na forma de Lagrange

Vamos definir uma base $\{L_k(x)\}_k$ de polinômios para escrever os polinômios interpoladores.

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

Perceba que $L_k(x_j) = \delta_{kj}$. Assim, podemos escrever qualquer polinômio como

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

☆ Tarefa: Reescreva o polinômio interpolador para a tabela do exemplo anterior na forma de Lagrange.

Delimitação do erro de interpolação

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Nossa hipótese será que $y(x) \in C^{n+1}([x_0, x_n])$.

Para cada $x \in [\min_i\{x_i\}, \max_i\{x_i\}]$, o erro de interpolação é

$$E(x) = y(x) - p_n(x)$$

Considere $G(\theta) = (\theta - x_0)(\theta - x_1)\dots(\theta - x_n)$ e $H(\theta) = E(x)G(\theta) - E(\theta)G(x)$.

$H(\theta)$ é contínua em $\underbrace{[\min_i\{x_i\}, \max_i\{x_i\}]}^{=I}$ e $n+1$ vezes derivável.

Além disso, $G(x_i) = 0 \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, bem como $E(x_i) = 0$. Daí, $H(x_i) = 0$ também. Logo, $H(x_i) = H(x_j) = 0 \Rightarrow$ pelo TVM $\exists\, \xi \in I$ t.q. $H'(\xi) = 0$. Mas em cada intervalo (x_j, x_k) temos uma raiz de H', então H'' também vai ter raízes pelo TVM e assim por diante.

$H \to n+2$ raízes

$H' \to n+1$ raízes

$\vdots$

$H^{(n+1)} \to 1$ raiz

Veja que $H^{(n+1)}(\theta) = E(x)G^{(n+1)}(\theta) + {}$

$$- E^{(n+1)}(\theta)G(x) =$$

$$= E(x)(n+1)! - y^{(n+1)}(\theta)G(x) =$$

$$= E(x)(n+1)! - y^{(n+1)}(\theta)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Assim, $H^{(n+1)}(\theta)=0 \Leftrightarrow E(x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\, y^{(n+1)}(\theta_0)}{(n+1)!}$, com $\theta_0 \in I$ ...