CÁLCULO NUMÉRICO
AULA 07 - 25/08/2025

Nem sempre interpolações polinomiais vão ser a melhor opção para realizar aproximações para as soluções que buscamos. Isso pode ser visto no exemplo de Runge. Alternativas às interpolações polinomiais são splines cúbicas, interpolações de Hermite e, também, de Chebischev.

Já vimos que, para o erro $E(x)$ de nossa aproximação polinomial, vale

$$|y(x) - P_n(x)| = |E(x)| \leq \frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|}{(n+1)!} \max_{\xi \in I} \left|y^{(n+1)}(\xi)\right|$$

em que $I = [\min x_i, \max x_i]$. Mas veja, evidentemente, que estamos assumindo que exista uma cota superior para toda $\max|y^{(n+1)}| \leq C$. derivada de qualquer ordem. Mas o fenômeno de Runge nos mostra que nossa hipótese não é sempre válida - e a aproximação pode ficar ainda pior, conforme o grau do polinômio interpolador for maior. Então, se não soubermos <u>nada</u> sobre o problema cuja solução aproximamos, pode ser muito arriscado usar interpolações polinomiais de ordem grande. É melhor usar alternativas.

— // —

<u>Adimensionalização de EDO's</u>

Partimos da Lei de resfriamento de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} = -\beta\left(T(t) - T_{amb}\right) \\ T(t_0) = T_0 \end{cases}$$

Aqui, nosso problema tem como dimensões

$[t_0] \to s \quad [t] \to s \quad [T] \to K$

Podemos definir um "tempo adimensional" usando t_0 como um "tempo característico". Para isso, definimos $t^* = t/t_0$.

Assim,

$$T(t) = T(t^* t_0) \equiv T^*(t^*)\,(T_0 - T_{amb}) + T_{amb}$$

em que na última igualdade é uma conveniente definição. Derivando,

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[T^*(t^*)(T_0 - T_{amb}) + T_{amb}\right] = \frac{dT^*}{dt^*}\frac{dt^*}{dt}(T_0 - T_{amb}) =$$

$$= \frac{T_0 - T_{amb}}{t_0}\frac{dT^*}{dt^*} = -\beta\,(T(t) - T_{amb}) \Rightarrow \frac{dT^*}{dt^*} = -\beta t_0 \frac{T(t) - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}}$$

Mas note que $T(t) = T^*(t^*)(T_0 - T_{amb}) + T_{amb} \Rightarrow T^*(t^*) = \dfrac{T(t) - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}}$

de modo que $\dfrac{dT^*}{dt^*} = -\beta t_0 T^*(t^*)$, com $t^* \in [t_0/t_0,\ t_f/t_0]$. Ainda,

$$T(t_0) = T_0 = T^*(t_0/t_0)(T_0 - T_{amb}) + T_{amb} \Rightarrow T^*(t_0/t_0) = 1.$$

Olhemos para outro exemplo, um pêndulo simples com resistência do ar e atrito na junta:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + \kappa L\left|\frac{d\theta}{dt}\right|\frac{d\theta}{dt} + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Começamos definindo o tempo adimensional, $t^* = t/t_0$. Como θ é adimensional, simplesmente temos $\theta^* = \theta$. Então,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta^*}{dt^*}\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{t_0}\frac{d\theta^*}{dt^*}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t_0}\frac{d\theta^*}{dt^*}\right) = \frac{d}{dt^*}\left(\frac{1}{t_0}\frac{d\theta^*}{dt^*}\right)\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{t_0^2}\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}}$$

Substituindo na EDO original,

$$\frac{mL}{t_0^2}\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{b}{t_0}\frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{\kappa L}{t_0^2}\left|\frac{d\theta^*}{dt^*}\right|\frac{d\theta^*}{dt^*} + mg\,\mathrm{sen}\,\theta^* = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{b t_0}{mL}\frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{\kappa}{m}\left|\frac{d\theta^*}{dt^*}\right|\frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{g}{L}t_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta^* = 0$$