Problemas de Cauchy

Vitor Nirschl | vitor.nirschl@usp.br | Nº USP 13685771

São propostos dois modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias com condições iniciais (problemas de Cauchy), sendo o primeiro unidimensional (pêndulo simples) e, o segundo, multidimensional (modelo de Lotka-Volterra), descrito por duas variáveis de estado.

O pêndulo simples

Um modelo ideal de pêndulo simples consiste em um corpo massivo puntiforme conectado a uma corda inextensível, com massa desprezível, cuja extremidade encontra-se fixa num ponto do teto. A massa encontra-se confinada a um plano, de modo que sua posição pode ser descrita utilizando o ângulo da corda em relação à vertical, θ. Seja ℓ o comprimento da corda e g a aceleração da gravidade, assumida localmente constante, essa posição é descrita pela equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{1}$$

Dada a condição inicial do sistema $\theta_0 = \theta(t_0)$, o ângulo do pêndulo num instante fixo t_0, o sistema pode ser determinado em qualquer outro instante t. [1–4]

Modelo de caça-presa de Lotka-Volterra

O modelo matemático de Lotka-Volterra consiste num sistema de equações diferenciais que descrevem a evolução temporal de sistemas biológicos compostos por duas espécies interagentes, uma como predadora e outra como presa. Trata-se de uma idealização primitiva que lida com um sistema isolado e desconsidera outros fatores influentes na dinâmica de um biossistema, como doenças e competição entre espécies.

Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as densidades populacionais de uma espécie de presas e uma de predadores ao longo do tempo t, dadas em quantidade de indíviduos por unidade de área; digamos, por exemplo, de coelhos e raposas.

O sistema de Lotka-Volterra é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned} \tag{2}$$

em que α descreve a taxa máxima de crescimento populacional da presa, dada em unidades de frequência, β descreve a influência da espécie predadora na taxa de mortalidade da espécie presa, em unidades de frequência vezes área, γ descreve a taxa de mortalidade per capita da espécie predadora, em unidades de frequência, e δ descreve a influência da presença da espécie presa na taxa de crescimento da espécie predadora, em unidades de frequência vezes área. Todos esses parâmetros são positivos e reais. Dadas as condições iniciais do sistema, isto é, as densidades populacionais num instante fixo t_0, podemos determinar $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante. [5–7]

Bibliografia

[1] H. Nussenzveig, *Curso de física básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor* (Editora Blucher, 2018).

[2] L. Landau, E. Lifshitz, e J. Sykes, *Mechanics: Volume 1* (Butterworth-Heinemann, 1976).

[3] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Pearson, 2011).

[4] N. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, 2007).

[5] F. Brauer e C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Springer New York, 2001).

[6] L. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Editora Livraria da Física, 2002).

[7] J. Hofbauer e K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems: Mathematical Aspects of Selection* (Cambridge University Press, 1988).