CÁLCULO NUMÉRICO
AULA 5 - 19/08/2025

Vamos olhar para um exemplo de interpolação. Seja $y(x) = 1/x$.

Montamos a tabela

x	2	2,25	4
$y(x)$	1/2	100/225	1/4

Como temos 3 pontos, vamos usar um polinômio interpolador, na forma de Lagrange, de grau 2. Precisamos, portanto, de $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$.

Sabemos que

$$L_0(x) = \frac{(x-2,25)(x-4)}{(2-2,25)(2-4)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2,25-2)(2,25-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2,25)}{(4-2)(4-2,25)}$$

então o polinômio interpolador será $p_2(x) = \frac{1}{2} L_0(x) + \frac{100}{225} L_1(x) + \frac{1}{4} L_2(x)$

Agora, se quisermos estimar $y(3)$, fazemos $y(3) \approx p_2(3)$. O erro exato dessa aproximação é

$$E_{exato}(3) = |y(3) - p_2(3)|$$

claro, nem sempre conhecemos $y(3)$, então precisamos de uma estimativa de erro para essa aproximação. Para isso,

$$|E(x)| \leq \frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|}{(n+1)!} \max_{\xi \in I} |y^{(n+1)}(\xi)| \text{, com } \xi \in I$$

então, em $x = 3$,

$$|E(3)| \leq \frac{|(3-2)(3-2,25)(3-4)|}{3!} \left(\frac{6}{16}\right) \rightarrow \text{pois } |y^{(3)}(x)| = \frac{6}{x^4}, \quad x \in [2,4]$$

Forma de Newton para o polinômio interpolador

A ideia é interpolar recursivamente os pontos de base.
Seja nossa tabela dada por

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{matrix}$$

então nossos polinômios serão

$$P_0(x) = y(x_0) = y_0$$

$$P_1(x) = P_0(x) + (x - x_0)\frac{y(x_1) - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)\frac{y(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)\frac{y(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)}$$

Definição: diferenças divididas

- $y[x_i] = y(x_i)$ é a diferença dividida de ordem 0
- $y[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{y(x_{i+1}) - P_i(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$ é a diferença dividida de ordem 1
- $y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{y(x_{i+2}) - P_i^{i+1}(x_{i+2})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}$ é a dif. div. de ordem 2

Hämmerlin et al. mostram que

$$y[x_0] = y(x_0) = y_0$$

$$y[x_0, x_1] = \frac{y[x_1] - y[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$y[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_1, x_2, x_3] - y[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Então o polinômio interpolador na forma de Newton será

$$P_n(x) = y[x_0] + (x - x_0)\,y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\,y[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$

$+ \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\, y[x_0, x_1, \dots, x_n]$

Vamos fazer um exemplo de tabela de diferenças divididas. Retomemos nossa tabela do começo da aula.

x	2	2,25	4
$y(x)$	1/2	100/225	1/4

$$y[2] = \frac{1}{2} \qquad y[2{,}25] = \frac{100}{225} \qquad y[4] = \frac{1}{4}$$

$$y[2;\, 2{,}25] = \frac{y[2{,}25] - y[2]}{0{,}25} = 4\left(\frac{100}{225} - \frac{1}{2}\right)$$

$$y[2;\, 4] = \frac{y[4] - y[2]}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$y[2{,}25;\, 4] = \frac{y[4] - y[2{,}25]}{1{,}75} = \frac{1}{1{,}75}\left(\frac{1}{4} - \frac{100}{225}\right)$$

$$y[2;\, 2{,}25;\, 4] = \frac{y[4;\, 2{,}25] - y[2{,}25;\, 2]}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1{,}75}\left(\frac{1}{4} - \frac{100}{125}\right) - 4\left(\frac{100}{125} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

— " —

Como estimar derivadas de uma função tabelada?

Imagine que tenhamos uma função tabelada $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$

Sabemos que $E(x) = y(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi(x))$

$E(x)$ tem $(n+1)$ raízes $\rightarrow$ $E'(x)$ tem (n) raízes $\rightarrow$ $E^{(n)}(x)$ tem 1 raiz

Tomemos θ raiz de $E^{(n)}(x)$. Então

$$E^{n}(\theta) = 0 = y^{(n)}(\theta) - \underbrace{(n!)\, y[x_0, \dots, x_n]}$$

pois abrimos $P_n(x)$ na forma de Newton

então podemos estimar

$$y^{(n)}(\theta) = n!\, y[x_0, \dots, x_n] \quad \text{(só não sabemos quem é } \theta\text{)}$$