



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

**Series Temporales Avanzadas: Modelos Heterocedásticos ARCH y
GARCH**

Victor Eduardo Romero Cueva

Director: Francisco Alonso Morales

Universidad de Granada

Escuela Internacional de Posgrado - UGR

Granada, España 2024

Series Temporales Avanzadas: Modelos Heterocedásticos ARCH y GARCH

Victor Eduardo Romero Cueva

Trabajo de Fin de Máster presentado como requisito parcial para optar al título de:
Máster en Estadística Aplicada

Director: Doctor, Francisco Alonso Morales

Línea de Investigación: Series Temporales Avanzadas

Escuela Internacional de Posgrado - UGR

Granada, España 2024

Agradecimientos

Quiero dar las gracias al Dr. Francisco Alonso Morales, mi tutor, por su invaluable guía, apoyo y paciencia durante todo este proceso. Su conocimiento y experiencia han sido fundamentales para llevar a cabo y finalizar este proyecto.

Un tributo especial a Marlyn, por su apoyo en todas las formas posibles durante el desarrollo de este trabajo. Su aliento y presencia hicieron la diferencia en muchos momentos cruciales.

También quiero reconocer a Jenna, una amiga de cuatro patas que llegó justo cuando comenzaba este máster. Aunque ella no va a leer esto, su compañía y energía me han dado alegría y alivio en los momentos más difíciles.

Finalmente, gracias a la Universidad de Granada por darme la oportunidad de realizar estos estudios y por el apoyo recibido durante mi formación.

Gracias a todos por hacer posible este proyecto.

Abstract

En el contexto financiero actual, caracterizado por su volatilidad e incertidumbre, es fundamental contar con herramientas robustas para la modelización y predicción de la volatilidad de los mercados financieros. Este trabajo se centra en la teoría y aplicación de los modelos con heterocedasticidad condicional autorregresiva ARCH y GARCH, los cuales son eficaces en la captura de la volatilidad en series temporales financieras. Específicamente, se aplicaron estos modelos a las acciones de Corporación Favorita, una empresa destacada en el mercado bursátil ecuatoriano.

Para llevar a cabo este análisis, se utilizaron datos de precios de cierre de las acciones de Corporación Favorita, y la metodología de Box-Jenkins fue empleada en el proceso de modelado, que incluyó la identificación, estimación y verificación de los modelos adecuados. Los resultados demostraron la capacidad de estos modelos para predecir la volatilidad futura, ofreciendo así una herramienta valiosa para los analistas financieros en su toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Este trabajo no solo proporcionó una aplicación práctica de los modelos ARCH y GARCH en datos reales de mercado, sino que también evaluó su efectividad en el pronóstico de volatilidad. Con estos modelos, se contribuye a la mejora de estrategias de inversión y a la mitigación de riesgos en un entorno financiero dinámico.

In the current financial context, characterized by its volatility and uncertainty, it is essential to have robust tools for modeling and predicting market volatility. This paper focuses on the theory and application of conditional autoregressive heteroscedasticity (ARCH and GARCH) models, which are effective in capturing volatility in financial time series. Specifically, these models were applied to the stock prices of Corporación Favorita, a prominent company in the Ecuadorian stock market.

Data on the closing prices of Corporación Favorita's stocks were used, and the Box-Jenkins methodology was employed in the modeling process, which included the identification, estimation, and verification of the appropriate models. The results demonstrated the ability of these models to predict future volatility, thus providing a valuable tool for financial analysts in making decisions under conditions of uncertainty.

This work not only provided a practical application of ARCH and GARCH models to real market data but also evaluated their effectiveness in forecasting volatility. These models contribute to improved investment strategies and risk mitigation in a dynamic financial environment.

Contents

Abstract	v
Introducción	1
Objetivo General	2
Objetivos Específicos	2
Fundamentos y nociones preliminares	3
Modelos ARIMA	3
Modelo AR (AutoRegresivo)	3
Modelo MA (Media Móvil)	4
Modelo ARMA (AutoRegresivo y Media Móvil)	4
Modelo ARIMA (Auto Regresivo Integrado de Media Móvil)	5
Estimación de Parámetros en Modelos ARIMA	5
Selección de Orden mediante ACF y PACF	5
Función de Autocorrelación (ACF)	6
Función de Autocorrelación Parcial (PACF)	6
Implementación de ACF y PACF	6
Análisis de ACF y PACF	7
Modelos ARCH y GARCH	8
Precio de Cierre	9
Rendimiento	9
Volatilidad Agrupada	11
Modelos ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)	13
Definición y Formalización Matemática	13

Modelos GARCH (Generalized ARCH)	15
Definición y Formalización Matemática	15
Comportamiento de los Modelos GARCH	16
Herramientas para Verificar Hipótesis sobre Efectos ARCH/GARCH	17
Estimación de Parámetros en Modelos ARCH y GARCH	19
Selección del modelo GARCH	21
Metodología Box – Jenkins	27
Aplicación usando el software R	27
Datos	27
Identificación del modelo	27
Análisis de Retornos	28
Pruebas Efectos ARCH-GARCH	32
Estimación del modelo ARIMA	33
Estimación del Modelo GARCH	41
Modelado GARCH: Especificación de modelos GARCH	41
Ajuste de modelos GARCH potenciales: ARCH (2,0), ARCH(3,0) y GARCH(2,1)	42
Análisis Comparativo de los Modelos ARCH(2), ARCH(3) y GARCH(2,1)	52
Validación del modelo final	54
Pronóstico	56
Conclusión	57
Bibliografía	58
Anexos	60
Código R	60

Introducción

El análisis de la volatilidad del mercado es fundamental para comprender las dinámicas financieras y tomar decisiones informadas en el ámbito de las inversiones. Los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) y GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) se han establecido como herramientas esenciales en el análisis financiero debido a su capacidad para modelar y prever la volatilidad de series temporales financieras que exhiben fluctuaciones intensas y aparentemente aleatorias. Estos modelos son especialmente aptos para series temporales extensas y no estacionarias, como es común en los datos financieros, donde las tendencias y las variaciones estacionales pueden alterar significativamente la interpretación y el pronóstico.

La volatilidad de los mercados financieros no solo es una medida de la variabilidad de los precios de los activos, sino también un indicador crucial del riesgo financiero. Comprender y predecir la volatilidad es esencial para inversores, gestores de riesgo y responsables de políticas financieras. Los modelos ARCH y GARCH son especialmente valorados en el análisis financiero por su capacidad para modelar la heterocedasticidad condicional, una característica prominente de muchas series temporales financieras donde la volatilidad varía a lo largo del tiempo.

Corporación Favorita C.A., una empresa ecuatoriana destacada en el sector minorista, cuenta con aproximadamente 12,000 colaboradores directos y una estructura de negocio diversificada en tres divisiones principales: Comercial, Industrial e Inmobiliaria. A pesar de su alta liquidez en el mercado, las acciones de Corporación Favorita han sufrido una notable pérdida de valor, alcanzando su mínimo histórico de \$1.57 el 2 de abril de 2024. Este descenso ha generado preocupación entre sus aproximadamente 20 mil accionistas, quienes reciben dividendos tanto en acciones como en efectivo, especialmente entre aquellos que adquirieron sus acciones a más de \$2 (Corporación Favorita, n.d.). La empresa, que anteriormente se consideraba una inversión sólida, no ha logrado recuperarse completamente desde los impactos de la pandemia.

Las acciones de Corporación Favorita representan el 60% de las transacciones del mercado bursátil de Ecuador, lo que las convierte en un componente vital para el análisis del mercado financiero local (Bolsa de Valores Guayaquil, n.d.). Estos modelos ofrecen ventajas significativas sobre otros métodos tradicionales de análisis de series temporales, ya que incorporan la volatilidad de los periodos anteriores para predecir la volatilidad futura. Esto es especialmente pertinente en los mercados

financieros, donde los eventos pasados y las condiciones de mercado influyen notablemente en la volatilidad actual y futura.

En este contexto, se analizará la serie temporal de los precios de las acciones de Corporación Favorita. Dada su relevancia en el mercado bursátil ecuatoriano, este estudio busca entender mejor su comportamiento volátil, identificar patrones y realizar predicciones precisas que puedan guiar decisiones de inversión más informadas y estrategias de mitigación de riesgos. Utilizando el software R, se implementarán y evaluarán los modelos ARCH y GARCH para lograr estos objetivos.

La robustez y eficacia de estos modelos para producir pronósticos precisos es crucial para la toma de decisiones informadas en la gestión de inversiones y en la política financiera. La aplicación de estos modelos permite a los investigadores y profesionales entender mejor la dinámica del mercado, evaluando cómo reaccionan los mercados ante diversas condiciones económicas y políticas. Este estudio no solo busca aplicar estos modelos a datos reales para predecir la volatilidad, sino también explorar su potencial para mejorar las estrategias de mitigación de riesgos y optimizar las carteras de inversión.

En última instancia, la relevancia de este trabajo reside en proporcionar una comprensión más profunda de los factores que impulsan la volatilidad del mercado y en ofrecer herramientas efectivas para su gestión, lo cual es esencial en el actual ambiente económico globalizado y rápidamente cambiante.

Objetivo General

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar y validar modelos ARCH y GARCH, con el fin de predecir la volatilidad de los precios de las acciones utilizando datos históricos de series temporales financieras.

Objetivos Específicos

1. Comprender la teoría subyacente a los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva, incluyendo sus definiciones, características distintivas y propiedades.
2. Identificar qué tipos de series temporales son adecuadas para estos modelos, las

transformaciones necesarias para su modelado y las técnicas esenciales para implementarlos correctamente.

3. Aplicar estas técnicas a las series temporales financieras de Corporación Favorita, con el objetivo de modelarlas adecuadamente utilizando el modelo que mejor se ajuste a los datos específicos de esta.

Este análisis se llevará a cabo utilizando el software R, una herramienta poderosa para el análisis estadístico, que facilita la implementación y evaluación de modelos complejos. Los datos utilizados en este estudio incluirán precios de acciones de Corporación Favorita recopilados del mercado bursátil ecuatoriano, más específicamente de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG), proporcionando una base sólida para evaluar la efectividad de los modelos ARCH y GARCH en un escenario real de mercado.

Fundamentos y nociones preliminares

Modelos ARIMA

Antes de adentrarnos en los modelos GARCH y ARCH, es esencial comprender los fundamentos de los modelos ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average), que son la piedra angular en el análisis de series temporales. Los modelos ARIMA permiten modelar series temporales que son no estacionarias al diferenciar los datos, lo que los hace estacionarios y, por tanto, más fáciles de analizar. Esta revisión incluirá una exploración detallada de los componentes que forman la base de los modelos ARIMA, empezando por los modelos AutoRegresivos (AR) y de Media Móvil (MA), seguido por los modelos combinados AutoRegresivos y de Media Móvil (ARMA), culminando con el modelo ARIMA que integra todos estos aspectos con un componente adicional de diferenciación.

Modelo AR (AutoRegresivo)

El modelo AR intenta predecir valores futuros utilizando una combinación lineal de valores pasados. Un modelo AR de orden p , $AR(p)$, se define matemáticamente como:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Esta relación también se puede expresar de manera compacta como:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde:

- y_t es el valor de la serie en el tiempo t ,
- c es una constante,
- ϕ_i es el coeficiente correspondiente para cada retardo previo y_{t-i} ,
- ε_t es el término de error, que se asume es ruido blanco.

Modelo MA (Media Móvil)

El modelo MA predice valores futuros basándose en los errores de pronóstico pasados. Un modelo MA de orden q , MA(q), se expresa como:

$$y_t = c + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Esta relación se puede expresar de manera más compacta como:

$$y_t = c + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

donde θ_j es el coeficiente correspondiente para cada error previo ε_{t-j} .

Modelo ARMA (AutoRegresivo y Media Móvil)

El modelo ARMA es una fusión de los modelos AR y MA. Un modelo ARMA(p , q) se define como:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Donde:

- p es el orden del componente AR del modelo, indicando el número de retardos del valor de la serie a incluir.
- q es el orden del componente MA del modelo, indicando el número de términos de error pasado a considerar.

Modelo ARIMA (Auto Regresivo Integrado de Media Móvil)

Extendiendo el modelo ARMA, el modelo ARIMA incluye un componente de diferenciación que lo hace adecuado para modelar series no estacionarias. Se denota como ARIMA(p, d, q), donde d indica el número de diferenciaciones necesarias para estabilizar la serie. La forma general del modelo ARIMA es:

$$ARIMA(p, d, q) : (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i)(1 - L)^d y_t = (1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j) \epsilon_t$$

donde L es el operador de retardo, definido como $Ly_t = y_{t-1}$. Esto significa que el operador L aplicado a una variable en el tiempo t desplaza su valor al tiempo $t - 1$. De manera más general, $L^k y_t = y_{t-k}$, donde k es el número de periodos de retardo. En la ecuación, ϕ_i son los parámetros autorregresivos, θ_j son los parámetros de media móvil, y ϵ_t es el término de error.

Estimación de Parámetros en Modelos ARIMA

Para que los modelos ARMA y ARIMA funcionen de manera efectiva, es crucial llevar a cabo una estimación precisa de sus parámetros, incluyendo los coeficientes Φ y θ , así como determinar los órdenes óptimos p y q del modelo.

Selección de Orden mediante ACF y PACF

La determinación de los órdenes adecuados para los modelos ARMA y ARIMA suele realizarse a través del análisis de la Función de Autocorrelación (ACF) y la Función de Autocorrelación Parcial (PACF), dos herramientas estadísticas fundamentales para este propósito.

Las Funciones de Autocorrelación (ACF) y Autocorrelación Parcial (PACF) son fundamentales en el análisis estadístico de series temporales, particularmente útiles en la determinación de estructuras para modelos como el ARIMA. Estas herramientas analíticas desvelan la estructura de correlación de

la serie temporal y son clave para establecer el orden de los componentes de modelos autoregresivos y de media móvil.

Función de Autocorrelación (ACF)

La Función de Autocorrelación evalúa cómo las observaciones en una serie temporal están correlacionadas con otras observaciones en puntos temporales separados por retardos específicos. Esta función se formula como sigue:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

donde:

- $\hat{\rho}_k$ representa la autocorrelación muestral para el retardo k ,
- Y_t es el valor de la serie en el tiempo t ,
- \bar{Y} es el promedio de la serie,
- n es el número total de observaciones.

Función de Autocorrelación Parcial (PACF)

La PACF se diferencia de la ACF en que mide la correlación entre puntos en la serie después de eliminar el efecto de los retardos intermedios. Específicamente, la PACF en el retardo k refleja la correlación entre los valores de la serie temporal separados por k periodos, ajustada por las correlaciones en los retardos menores.

Implementación de ACF y PACF

En la práctica, tanto ACF como PACF se visualizan comúnmente a través de correlogramas. En estos gráficos, el eje horizontal representa el retardo y el eje vertical la fuerza de la correlación. Al gráfico se le añaden las líneas horizontales, también llamadas “bandas de confianza”, que indican los niveles de significancia estadística. Esto ayuda a identificar retardos con autocorrelaciones significativas.

ACF y PACF no solo revelan detalles críticos sobre la correlación dentro de las series temporales, sino que también orientan en la selección y la interpretación adecuada de los modelos estadísticos, facilitando el análisis en profundidad requerido para modelar complejidades como las encontradas en los modelos ARIMA.

Análisis de ACF y PACF

Desde ACF:

- **Decaimiento Gradual:** Indica una influencia que disminuye con el tiempo de los valores pasados, típico en modelos AR, donde eventos anteriores tienen un impacto decreciente sobre eventos futuros. Las correlaciones se reducen gradualmente hasta alcanzar las bandas de confianza, lo que sugiere una correlación significativa al principio, pero que se desvanece con el tiempo.
- **Corte Abrupto:** Sugiere que solo los primeros retardos tienen correlaciones significativas, apuntando a un modelo de media móvil donde los efectos de choques pasados son temporales. Si las autocorrelaciones caen rápidamente dentro de las bandas de confianza después de unos pocos retardos, esto es indicativo de un modelo MA.

Desde PACF:

- **Corte Claro en un Retardo p :** Denota la cantidad de retardos en términos AR que deberían considerarse, mostrando la correlación directa entre observaciones que están separadas por p períodos. Un corte claro en la PACF después de un cierto retardo sugiere un orden específico para el término AR en el modelo.
- **Decaimiento Lento:** Sugiere la inclusión de términos MA, donde el ajuste de retardos intermedios aún deja una correlación residual significativa. La PACF muestra cómo disminuye la correlación de las observaciones a medida que aumenta el número de retardos, indicando la necesidad de modelar estos retardos.

Estos análisis ayudan a precisar la estructura óptima para los modelos ARIMA, esencial para desarrollar predicciones confiables y modelos efectivos en contextos de series temporales.

Estas fórmulas proporcionan una base sólida y precisa para la comprensión y aplicación de los modelos ARIMA en el análisis de series temporales, fundamentales para los estudios avanzados en finanzas y economía.

Entender los modelos ARIMA facilita la transición a modelos más complejos que incorporan volatilidad, como los GARCH y ARCH, permitiendo una modelización más precisa de la heterocedasticidad condicional observada en los mercados financieros. Los estudios realizados por Tsay (2005) y otros han demostrado que la aplicación adecuada de modelos ARIMA puede mejorar significativamente la precisión de los pronósticos en entornos financieros donde los datos presentan patrones complejos y no estacionarios.

Modelos ARCH y GARCH

Antes de adentrarnos en la especificidad de los modelos ARCH y GARCH, es esencial comprender algunos conceptos fundamentales que subyacen en el análisis de series temporales financieras. El análisis de los precios de cierre y los rendimientos diarios es crucial para entender la dinámica de los mercados financieros. Estos conceptos nos proporcionan las herramientas necesarias para evaluar la rentabilidad, el riesgo y la volatilidad de los activos financieros, y sientan las bases para la modelización avanzada que se realizará con modelos como ARCH y GARCH. Según Andersen, Davis, Kreiß, y Mikosch (2009), una evaluación preliminar de los rendimientos logarítmicos diarios, sus cuadrados y los rendimientos absolutos puede revelar patrones cruciales, como la volatilidad agrupada. La observación de estos comportamientos permite identificar períodos de alta y baja volatilidad, lo que es característico de muchas series temporales financieras. La volatilidad agrupada, donde altos valores de volatilidad son seguidos por más altos valores y viceversa, es una propiedad común en las series temporales financieras y es precisamente esta característica la que los modelos ARCH y GARCH buscan capturar y modelar de manera efectiva.

Para esclarecer estas características, recurrimos a los rendimientos del NASDAQ Composite. Estos datos no son el foco principal de nuestro estudio, pero ofrecen una clara ventana a las propiedades que los modelos ARCH y GARCH buscan capturar. En la Tabla 1 se presenta un resumen de las métricas descriptivas de estos rendimientos, tanto diarios como mensuales.

Entendiendo esto, se hace necesario comenzar con los puntos esenciales mencionados.

Precio de Cierre

Este se define como el valor al cual una acción se transa por última vez en una jornada de operaciones bursátiles. Este valor es determinado al final del día de negociación y refleja el consenso del mercado sobre el valor de la acción en ese momento. Es uno de los precios más significativos y utilizados en el análisis financiero y bursátil, ya que incorpora todas las transacciones y la información disponible hasta el cierre del mercado.

El precio de cierre es fundamental para diversas aplicaciones en el análisis de series temporales financieras. Según la teoría financiera, este precio es considerado un indicador fiable del valor de una acción, ya que representa la evaluación final del mercado después de considerar toda la información pública durante el día. Además, es un punto de referencia crucial para calcular el rendimiento diario de una acción, evaluar la tendencia de los precios, y analizar la volatilidad de los activos.

Técnicamente, el precio de cierre se utiliza en modelos econométricos y estadísticos para predecir comportamientos futuros del mercado. Modelos como ARCH y GARCH dependen en gran medida del precio de cierre para modelar y prever la volatilidad, ya que estos modelos capturan la variabilidad condicional de los precios basándose en la información histórica (Alexander, 2021).

Rendimiento

La variación porcentual en el precio de cierre de una acción de un día al siguiente se conoce como rendimiento diario. Esta métrica es fundamental para evaluar la rentabilidad y el riesgo asociado con una acción, y se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

donde P_t es el precio de cierre en el día t y P_{t-1} es el precio de cierre en el día $t - 1$. El rendimiento diario permite analizar el desempeño de la acción a corto plazo y es crucial en el análisis de series temporales financieras. Esta medida no solo ayuda a entender las fluctuaciones diarias en los precios de las acciones, sino que también es esencial para calcular otros indicadores financieros, como el Value at Risk (VaR) y el Conditional Value at Risk (CVaR), que miden el riesgo de pérdida en un portafolio de inversiones.

La relevancia del rendimiento diario radica en su capacidad para capturar la volatilidad diaria y

proporcionar una visión detallada de las dinámicas del mercado. Según Hull (2018), el rendimiento diario es una de las métricas más utilizadas en la modelización financiera debido a su capacidad para reflejar cambios rápidos en el mercado y su influencia en la volatilidad y el riesgo de los activos financieros.

En el ámbito de las series temporales financieras, es útil también considerar los rendimientos logarítmicos, definidos como $R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$. Los rendimientos logarítmicos presentan varias ventajas, como la facilidad de sumar rendimientos a lo largo del tiempo y la aproximación a una distribución normal, lo cual simplifica muchos modelos financieros. Por ejemplo, el rendimiento logarítmico acumulado sobre un periodo de tiempo es simplemente la suma de los rendimientos logarítmicos diarios. Esta propiedad aditiva es especialmente valiosa en la modelización de series temporales, ya que permite una manipulación matemática más directa y precisa.

Tanto los rendimientos simples como los logarítmicos son herramientas cruciales en el análisis financiero, proporcionando diferentes perspectivas y ventajas dependiendo del contexto y el objetivo del análisis. La elección entre uno u otro depende de la naturaleza del análisis y de las propiedades específicas que se desean explotar en los datos.

De hecho, como se dijo antes, en la Tabla 1 se presenta un resumen de estadísticas descriptivas en torno a los rendimientos. Puede verse que los rendimientos diarios muestran una media cercana a cero y una alta curtosis, lo que indica colas pesadas en la distribución. La asimetría negativa sugiere que hay más valores extremos negativos que positivos. El estadístico de Jarque-Bera es alto, indicando una desviación significativa de la normalidad. Los rendimientos mensuales, aunque también presentan alta curtosis y asimetría negativa, muestran una menor desviación de la normalidad en comparación con los rendimientos diarios.

Activo	Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Desv. Estd	Asimetría	Curtosis	JB
Retornos Diarios								
NASDAQ ¹	0.00023	0.000906	-0.131492	0.132546	0.015758	-0.138859	9.176995	9846.43366
Retornos Mensuales								
NASDAQ	0.005002	0.012031	-0.260088	0.175588	0.064226	-0.760514	4.695091	63.539062
¹ Notas: Período de muestra es 2000-01-03 a 2024-07-30 dando 6181 observaciones diarias.								

Tabla 1: Estadísticas descriptivas de los rendimientos diarios y mensuales del NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Aunque este trabajo se centra en el análisis de rendimientos diarios, es importante notar que la volatilidad condicional tiende a aumentar con la frecuencia de muestreo. Según Martens (2002), los modelos GARCH ajustados a rendimientos diarios pueden producir mejores previsiones de la volatilidad semanal y mensual en comparación con modelos ajustados directamente a rendimientos semanales o mensuales. Esta observación subraya la importancia de considerar la agregación temporal al modelar series temporales financieras, aunque el enfoque principal aquí sea a nivel diario.

Volatilidad Agrupada

La volatilidad agrupada es un fenómeno común en las series temporales financieras, donde periodos de alta volatilidad tienden a ser seguidos por más periodos de alta volatilidad, y lo mismo ocurre con los periodos de baja volatilidad. Este comportamiento se puede observar mediante el análisis de los rendimientos logarítmicos, sus cuadrados y sus valores absolutos. La volatilidad agrupada indica que la varianza de los rendimientos no es constante a lo largo del tiempo, lo que sugiere la necesidad de modelos que puedan capturar esta característica.

En la Figura 1 se presentan los rendimientos logarítmicos diarios, los rendimientos logarítmicos al cuadrado y los rendimientos logarítmicos absolutos del índice NASDAQ Composite. Estos gráficos muestran claramente la presencia de volatilidad agrupada, con periodos de alta volatilidad seguidos por más periodos de alta volatilidad, y periodos de baja volatilidad seguidos por más periodos de baja volatilidad. Este patrón es un indicio claro de la heterocedasticidad condicional en la serie temporal.

La figura ilustra cómo los rendimientos logarítmicos muestran fluctuaciones en los precios a lo largo del tiempo, mientras que los rendimientos logarítmicos al cuadrado y los rendimientos logarítmicos absolutos destacan los periodos de alta y baja volatilidad. Estos patrones de volatilidad agrupada indican que eventos de alta volatilidad tienden a agruparse, seguidos por periodos de menor volatilidad.

En el gráfico superior, los rendimientos logarítmicos del NASDAQ Composite muestran fluctuaciones a lo largo del tiempo. Se pueden identificar periodos de alta volatilidad, como durante la burbuja de las puntocom a principios de los 2000, la crisis financiera de 2008, y la pandemia de COVID-19

en 2020. Estos eventos son seguidos por periodos de menor volatilidad, lo que indica la presencia de volatilidad agrupada. El gráfico del medio destaca los periodos de alta volatilidad con picos pronunciados, especialmente visibles durante los eventos mencionados anteriormente. Los valores elevados en estos periodos indican grandes variaciones en los precios, lo que refuerza la necesidad de modelar la volatilidad condicional. El gráfico inferior muestra una imagen similar, con los rendimientos logarítmicos absolutos indicando periodos de alta y baja volatilidad. La persistencia de estos patrones en ambos gráficos (al cuadrado y absolutos) es una fuerte indicación de la presencia de heterocedasticidad en la serie temporal.

[1] "IXIC"

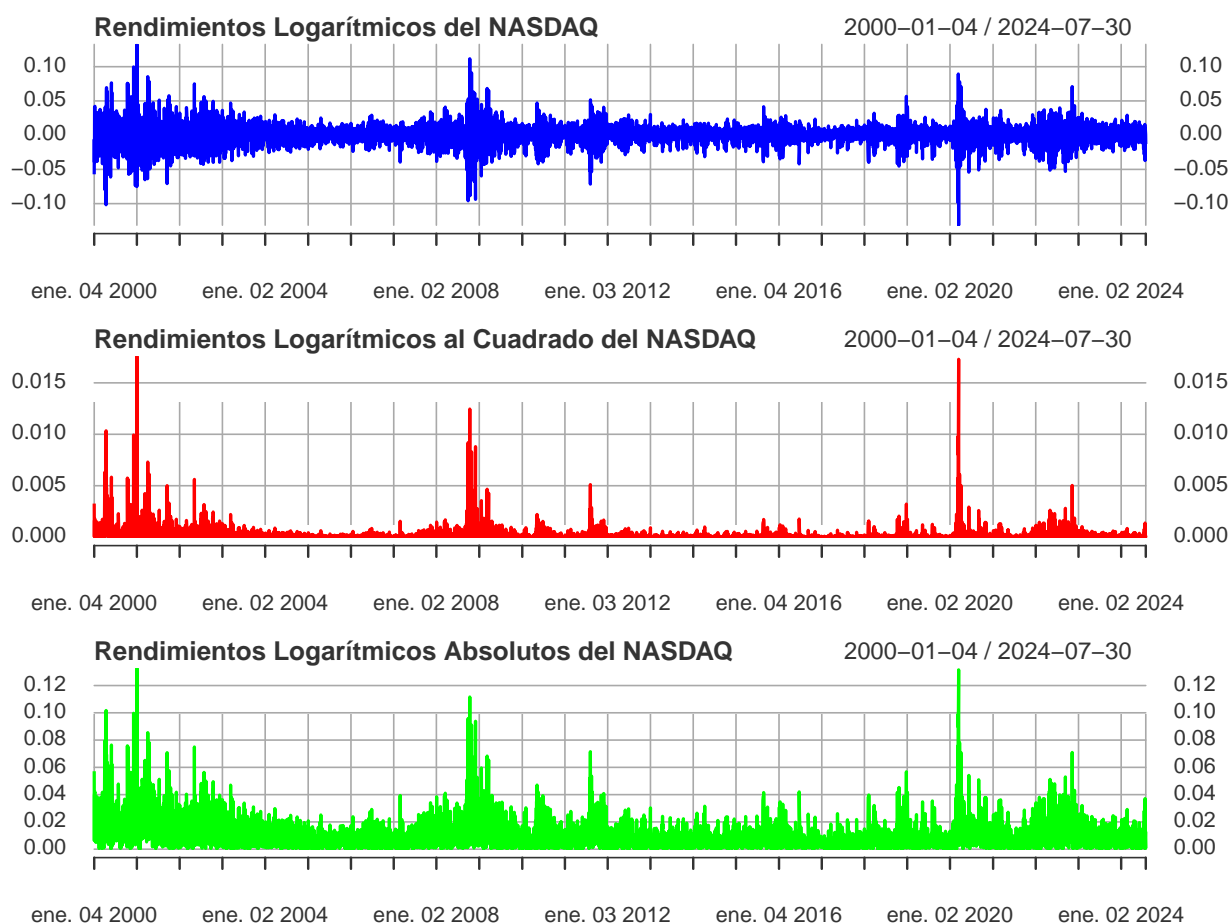


Figura 1: Rendimientos Logarítmicos, Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado y Rendimientos Logarítmicos Absolutos del NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia Fuente con datos de Yahoo Finance

Siguiendo con lo dicho anteriormente, la Figura 2 presenta las autocorrelaciones de los rendimientos

logarítmicos, sus cuadrados y sus valores absolutos del NASDAQ Composite. Los rendimientos logarítmicos muestran algunas autocorrelaciones significativas, mientras que sus cuadrados y valores absolutos presentan autocorrelaciones significativas en varios retardos, confirmando la volatilidad agrupada observada previamente.

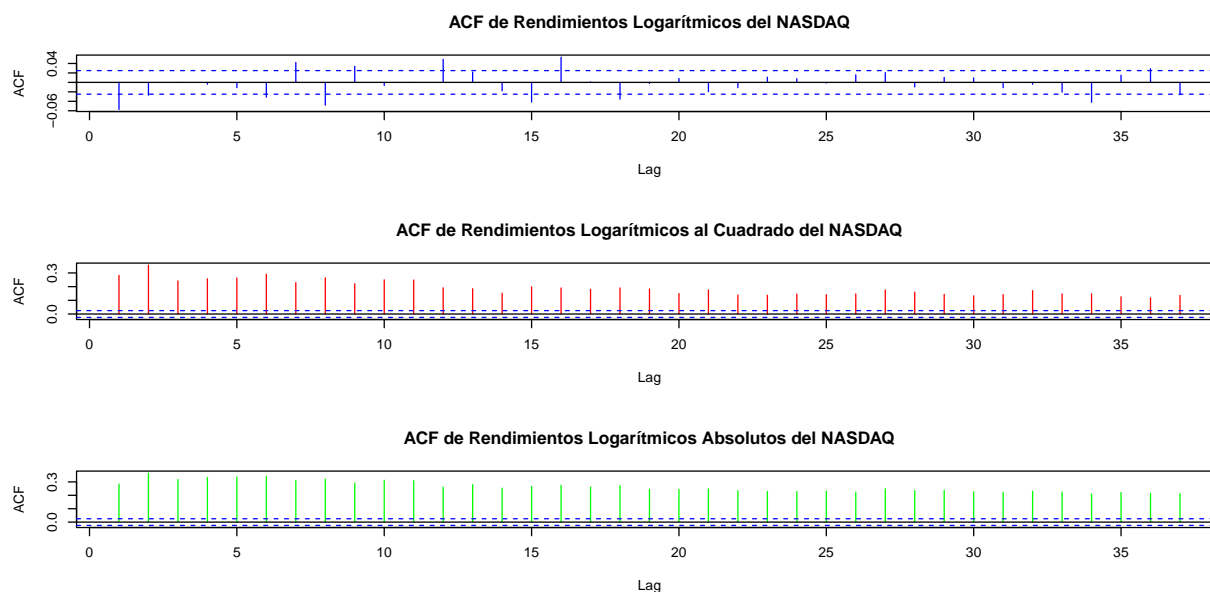


Figura 2: Autocorrelaciones de Rendimientos Logarítmicos, Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado y Rendimientos Logarítmicos Absolutos del NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance

Modelos ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)

Los modelos ARCH, introducidos por Engle en 1982, son fundamentales para la modelización de la volatilidad en series temporales financieras. La característica principal de los modelos ARCH es su capacidad para capturar la heterocedasticidad condicional, donde la varianza de los errores depende de los errores pasados (Engle, 1982).

Definición y Formalización Matemática

Un modelo ARCH(p) se define como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

donde:

- ϵ_{t-i}^2 representa el error al cuadrado en el tiempo $t - i$,
- σ_t^2 es la varianza condicional en el tiempo t ,
- $\alpha_0 > 0$ es una constante (intercepto),
- $\alpha_i \geq 0$ son los coeficientes del modelo.

El término α_0 asegura que la varianza condicional sea siempre positiva, y los coeficientes α_i determinan el grado en que los errores pasados afectan la varianza actual.

Un modelo ARCH también puede describirse de la siguiente manera:

$$y_t = \mathbb{E}_{t-1}[y_t] + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t$$

donde z_t es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria.

Para que el proceso sea estacionario, se requiere que la suma de los coeficientes α_i sea menor que uno:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$$

Esta condición asegura que el impacto de los errores pasados en la varianza condicional disminuya con el tiempo. La ecuación para σ_t^2 puede reescribirse como un proceso AR(p) para ϵ_t^2 :

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + u_t$$

Los modelos ARCH se utilizan en la evaluación de riesgos financieros, permitiendo predecir períodos de alta volatilidad y ajustar estrategias de inversión en consecuencia. También se aplican en la modelización de la volatilidad de precios de acciones, tasas de cambio y otros instrumentos financieros. Una ventaja significativa de los modelos ARCH es su capacidad para capturar cambios rápidos en la volatilidad. Sin embargo, presentan limitaciones cuando se trata de modelar la persistencia en la

volatilidad, lo que llevó al desarrollo de modelos más sofisticados como el GARCH (Engle, 1982; Andersen et al., 2009).

Modelos GARCH (Generalized ARCH)

Tim Bollerslev extendió el modelo ARCH en 1986, creando el modelo GARCH, que incluye términos autoregresivos y de media móvil en la varianza condicional. Esto permite una mayor flexibilidad y capacidad para capturar la persistencia en la volatilidad (Bollerslev, 1986).

Definición y Formalización Matemática

El modelo GARCH(p, q) se define como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde:

- ϵ_{t-i}^2 representa el error al cuadrado en el tiempo $t - i$,
- σ_t^2 es la varianza condicional en el tiempo t ,
- $\alpha_0 > 0$ es una constante (intercepto),
- $\alpha_i \geq 0$ son los coeficientes de los términos ARCH,
- $\beta_j \geq 0$ son los coeficientes de los términos GARCH.

El modelo GARCH generaliza el modelo ARCH al incluir una parte autoregresiva en la varianza condicional, permitiendo modelar mejor la persistencia de la volatilidad. La suma de los coeficientes α_i y β_j menor que uno asegura la estacionariedad del proceso. Este modelo puede ser descrito de manera similar a un modelo ARMA para los residuos al cuadrado. En el caso específico del modelo GARCH(1,1), que es el más común y será detallado más adelante, se tiene, por ejemplo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Este modelo puede reescribirse como:

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\epsilon_{t-1}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1}$$

lo cual es un modelo ARMA(1,1) para ϵ_t^2 con $u_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$.

Para que el modelo sea estacionario en covarianza, se requiere que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. La persistencia de σ_t^2 se mide por $\alpha_1 + \beta_1$, y la varianza incondicional de ϵ_t es:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

Los modelos GARCH son esenciales para calcular el valor en riesgo (VaR), una medida que estima la pérdida potencial máxima en un horizonte temporal dado con un nivel de confianza específico. También se utilizan en la valoración de opciones y otros derivados financieros, donde la volatilidad es crucial en la determinación de precios. Los modelos GARCH son preferidos sobre los ARCH debido a su capacidad para capturar la persistencia en la volatilidad. Sin embargo, presentan limitaciones, como la dificultad para modelar cambios estructurales en la volatilidad y la necesidad de estimar un mayor número de parámetros (Bollerslev, 1986; Andersen et al., 2009).

El modelo GARCH(p, q) es una extensión importante del modelo ARCH, ya que reemplaza la representación AR(p) con una formulación ARMA(p, q). Esta generalización permite que los modelos GARCH capten mejor las dinámicas de volatilidad presentes en las series temporales financieras, proporcionando una herramienta más robusta para la modelización de la volatilidad (Hansen & Lunde, 2004).

Comportamiento de los Modelos GARCH

Los modelos GARCH son útiles para capturar varios comportamientos característicos de las series temporales financieras, tales como el agrupamiento de la volatilidad, colas gruesas, reversión a la media y asimetría.

Como se ha mencionado anteriormente, el fenómeno de agrupamiento de volatilidad implica que grandes fluctuaciones en los retornos de los activos financieros suelen ser seguidas por otras grandes fluctuaciones, mientras que las pequeñas fluctuaciones tienden a seguir a otras pequeñas fluctuaciones. Este comportamiento es bien modelado por el modelo GARCH(1,1). En los modelos GARCH, el coeficiente α_1 suele estar alrededor de 0.09 y el coeficiente β_1 suele estar alrededor de 0.9 para

muchas series temporales financieras diarias o semanales. Este valor sugiere que grandes valores de σ_{t-1}^2 serán seguidos por grandes valores de σ_t^2 , y pequeños valores de σ_{t-1}^2 serán seguidos por pequeños valores de σ_t^2 (Andersen et al., 2009, p. 120).

Además, se sabe que la distribución de los retornos financieros de alta frecuencia tiende a presentar colas más gruesas que una distribución normal. Esto implica una mayor frecuencia de eventos extremos en comparación con lo esperado bajo una distribución normal. Bollerslev (1986) demostró que la curtosis de un proceso GARCH(1,1) con errores normales es mayor que 3, indicando la presencia de colas gruesas. Esta capacidad de los modelos GARCH para capturar colas gruesas es fundamental para replicar los patrones observados en los datos financieros.

Los mercados financieros pueden experimentar periodos de volatilidad excesiva, pero esta tiende a estabilizarse a largo plazo. En un modelo GARCH(1,1) estacionario, la varianza incondicional de ϵ_t se define como $\bar{\sigma}^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$. Esta ecuación garantiza que la volatilidad no sea infinita, permitiendo que el modelo sea estable y útil para predecir la volatilidad. La condición $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ es esencial, asegurando que el modelo GARCH sea estacionario y evitando que la volatilidad crezca indefinidamente. Esto también implica que la varianza condicional tiende hacia su nivel de largo plazo, lo que permite al modelo capturar adecuadamente la persistencia de la volatilidad y proporcionar pronósticos más precisos. Este fenómeno de estabilización a largo plazo se conoce como reversión a la media (Andersen et al., 2009, p. 121).

Finalmente, la asimetría en la distribución de los retornos financieros es otra característica significativa. Los modelos GARCH estándar con errores normales suponen una distribución simétrica para y_t , lo cual no permite capturar la asimetría observada en los retornos financieros. Sin embargo, la asimetría se puede incorporar en el modelo GARCH permitiendo que ϵ_t tenga una distribución asimétrica o modelando explícitamente el comportamiento asimétrico en la ecuación de varianza condicional (Andersen et al., 2009, p. 121).

Estos patrones observados, tal como se describen en Andersen et al. (2009), son fundamentales para comprender y modelar adecuadamente las series temporales financieras.

Herramientas para Verificar Hipótesis sobre Efectos ARCH/GARCH

Identificar la presencia de efectos ARCH/GARCH en las series temporales financieras es crucial para modelar correctamente la volatilidad y hacer predicciones precisas. Estos efectos de volatilidad

agrupada, característicos de estos modelos, se manifiestan como autocorrelación en los retornos al cuadrado o en los retornos absolutos (como se discutió previamente con los datos de NASDAQ).

Para evaluar la presencia de estos efectos, se pueden utilizar diversas pruebas estadísticas y gráficas.

Primero, la **prueba de Ljung-Box** se aplica a los residuos al cuadrado del modelo porque puede sugerir la presencia de autocorrelación, lo que indica posibles efectos ARCH. Aunque la prueba de Ljung-Box no está específicamente diseñada para detectar efectos ARCH/GARCH, su aplicación a los residuos cuadrados puede sugerir la presencia de autocorrelación y, por lo tanto, indicar posibles efectos ARCH. La estadística de prueba se define como:

$$MQ(p) = T(T+2) \sum_{j=1}^p \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j}$$

donde $\hat{\rho}_j$ es la muestra de autocorrelación en el retardo j de los retornos al cuadrado o absolutos. Un valor significativo de $MQ(p)$ indica la presencia de volatilidad condicional variable en el tiempo (Andersen et al., 2009, p. 122).

Para evaluar la autocorrelación en los retornos crudos, cuando se sospecha la presencia de efectos GARCH, se utiliza la **prueba heteroscedástica robusta** de Diebold y Lopez (1996). La estadística de prueba se define como:

$$MQ^{HC}(p) = T(T+2) \sum_{j=1}^p \frac{1}{T-j} \left(\frac{\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^4 + \hat{\gamma}_j^2} \right) \hat{\rho}_j^2$$

donde $\hat{\sigma}^4$ es una estimación consistente de la varianza incondicional de los retornos al cuadrado, y $\hat{\gamma}_j^2$ es la autocovarianza muestral de los retornos al cuadrado (Andersen et al., 2009, p. 122).

Otra herramienta es la **prueba de multiplicador de Lagrange (LM)** para efectos ARCH propuesta por Engle (1982). Dado que un modelo ARCH implica un modelo autorregresivo para los residuos al cuadrado ϵ_t^2 , la estadística LM se define como:

$$LM = T \cdot R^2$$

donde T es el tamaño de la muestra y R^2 se obtiene de la regresión usando los residuos estimados. La estadística LM tiene una distribución asintótica chi-cuadrado con p grados de libertad (Andersen et al., 2009, p. 122).

Finalmente, Lumsdaine y Ng (1999) señalaron que la prueba LM puede rechazar la hipótesis nula si hay una mala especificación en la ecuación de la media condicional. Si los residuos estimados $\hat{\epsilon}_t$ están correlacionados en serie, esto puede causar que ϵ_t^2 también esté correlacionado en serie. Por lo tanto, es esencial especificar correctamente la ecuación de la media condicional antes de realizar las pruebas de efectos ARCH (Andersen et al., 2009, p. 122).

Resultados de las Pruebas de Efectos ARCH/GARCH

Retardo	Ljung-Box Squared Returns		LM	
	Chi-cuadrado	Valor p	Chi-cuadrado	Valor p
1	492.6727	0.0000	493.7994	0.0000
5	2,481.1637	0.0000	1,198.0942	0.0000
10	4,452.5889	0.0000	1,365.4913	0.0000

Tabla 2: Resultados de las Pruebas de Efectos ARCH/GARCH en los Rendimientos Diarios del NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance

Estimación de Parámetros en Modelos ARCH y GARCH

La estimación de parámetros en los modelos ARCH y GARCH se realiza típicamente mediante el método de máxima verosimilitud (MLE). Este enfoque busca identificar los parámetros que maximizan la función de verosimilitud, la cual evalúa la probabilidad de los datos observados dados ciertos parámetros del modelo.

Para un modelo GARCH(p,q) con errores normales, la función de verosimilitud se formula en términos del logaritmo de la verosimilitud condicional. Suponiendo que ϵ_t sigue una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$, el error de predicción se calcula en función de la historia pasada, y la función de verosimilitud condicional se expresa como:

$$\log L = \sum_{t=1}^{T'} \ell_t = -\frac{T'}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T'} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T'} \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2}$$

donde

$$\ell_t = -\frac{1}{2}(\log(2\pi) + \log \sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2}$$

(Andersen et al., 2009, p. 149)

La log-verosimilitud condicional se utiliza en la práctica debido a que la distribución incondicional de los valores iniciales no se conoce en forma cerrada. Hay varios aspectos prácticos a considerar al maximizar esta función, incluyendo la selección de valores iniciales para los parámetros del modelo c, α_i y β_j , así como la inicialización de ϵ_t^2 y σ_t^2 . Comúnmente, los valores iniciales de σ_t^2 se estiman a partir de los residuos de una regresión de y_t sobre una constante (McCullough y Renfro, 1999).

Una vez que la función de verosimilitud ha sido inicializada, su maximización se logra mediante técnicas de optimización numérica. El método más común es la iteración de Newton-Raphson, expresada como:

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - \lambda_n H(\hat{\theta}_n)^{-1} s(\hat{\theta}_n)$$

donde θ_n representa el vector de parámetros del modelo estimados en la iteración n , λ_n es un parámetro de longitud de paso, y $s(\theta_n)$ y $H(\theta_n)$ denotan el vector gradiente y la matriz Hessiana de la log-verosimilitud en la iteración n , respectivamente (Fiorentini, Calzolari, & Panattoni, 1996). El parámetro de longitud de paso λ_n se elige para asegurar que $\ln L(\theta_{n+1}) \geq \ln L(\theta_n)$. En modelos GARCH, frecuentemente se emplea el algoritmo BHHH, que aproxima la matriz Hessiana utilizando solo derivadas de primer orden:

$$-H(\theta) \approx B(\theta) = \sum_{t=1}^{T'} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta}'$$

En la implementación del algoritmo de Newton-Raphson, se pueden usar derivadas analíticas o numéricas. Las derivadas analíticas se prefieren por su precisión y eficiencia computacional en modelos GARCH (Fiorentini et al., 1996).

Las estimaciones que maximizan la log-verosimilitud condicional se denominan estimaciones de máxima verosimilitud (MLE). Bajo condiciones de regularidad adecuadas, estas estimaciones son consistentes y asintóticamente normales. Además, se puede construir una estimación de la matriz de covarianza asintótica de las estimaciones MLE a partir de la matriz Hessiana final del algoritmo

de optimización (Lumsdaine, 1992). En la práctica, se asume que se cumplen las condiciones de regularidad necesarias para que las estimaciones sean válidas y eficientes.

En modelos GARCH donde la distribución de z_t es simétrica y los parámetros de las ecuaciones de media y varianza condicionales son independientes, la matriz de información de la log-verosimilitud es diagonal por bloques. Esto permite que los parámetros de la ecuación de media condicional se estimen por separado de los de la ecuación de varianza condicional sin pérdida de eficiencia asintótica, simplificando así la estimación (Lee & Hansen, 1993).

Es importante destacar que la estimación de modelos GARCH puede variar según el software utilizado, debido a las diferentes implementaciones de la función de verosimilitud y los algoritmos de optimización. Diversos estudios, como los de McCullough y Renfro (1999) y Brooks et al. (2001), han analizado estas diferencias encontrando que factores como los valores iniciales, la elección del algoritmo de optimización y el uso de derivadas analíticas o numéricas influyen en los resultados. En el caso de este trabajo, ya lo habrán notado antes, se ha optado por utilizar el software R, conocido por su robustez y amplia disponibilidad de paquetes estadísticos.

Por otra parte, considerar la estimación de cuasi-verosimilitud máxima (QMLE) puede ser beneficioso para garantizar la robustez de los resultados en contextos donde la normalidad condicional puede no mantenerse. La matriz de covarianza “sandwich” derivada por Bollerslev y Wooldridge (1992) se utiliza para proporcionar estimaciones robustas frente a violaciones de la normalidad condicional. Matemáticamente, esta matriz se calcula como:

$$\mathbf{H}(\hat{\theta}_{QMLE})^{-1} \mathbf{B}(\hat{\theta}_{QMLE}) \mathbf{H}(\hat{\theta}_{QMLE})^{-1}$$

donde $\hat{\theta}_{QMLE}$ denota el estimador de cuasi-verosimilitud máxima de θ , $\mathbf{H}(\hat{\theta}_{QMLE})$ es la matriz Hessiana de la log-verosimilitud evaluada en $\hat{\theta}_{QMLE}$ y $\mathbf{B}(\hat{\theta}_{QMLE})$ es la matriz de varianza de los residuos. Esta formulación permite obtener errores estándar que son robustos frente a posibles desviaciones de la suposición de normalidad condicional.

Selección del modelo GARCH

Determinar el orden en los modelos ARCH y GARCH es crucial en el análisis de series temporales financieras. Considerando que los modelos GARCH pueden ser tratados como modelos ARMA para

los residuos al cuadrado, se suelen utilizar criterios tradicionales de selección de modelos, como el criterio de información de Akaike (AIC) (Akaike, 1974) y el criterio de información bayesiano (BIC). El AIC tiende a preferir modelos más complejos debido a su menor penalización por el número de parámetros, mientras que el BIC penaliza más los modelos complejos, favoreciendo así modelos más simples. Además, los valores más altos de la verosimilitud indican mejores ajustes del modelo. Para series de retornos diarios, los modelos ARCH seleccionados suelen tener altos valores de p , mientras que en los modelos GARCH(p, q), los criterios AIC y BIC suelen preferir órdenes bajos, típicamente p y q menores o iguales a 2, debido a la parsimonia y la mejor estabilidad numérica en la estimación.

En el análisis de los datos del NASDAQ (ver Tabla 3), se observó que, entre los modelos ARCH evaluados, el modelo ARCH(8) presentó los valores más bajos de AIC y BIC, lo que indica un mejor ajuste en comparación con los modelos de órdenes inferiores. Sin embargo, a pesar de estos resultados, el modelo ARCH(8) implica una complejidad significativa debido al elevado número de parámetros involucrados. Considerando la recomendación de priorizar la parsimonia y evitar la sobreparametrización, se decidió no seleccionar este modelo más complejo. En su lugar, se optó por centrarse en el modelo GARCH(2,1), que con solo tres parámetros, ofrece un balance óptimo entre ajuste y simplicidad. De hecho, este modelo no solo captura adecuadamente la dinámica de la volatilidad, sino que también se destaca por sus bajos valores de AIC y BIC en comparación con los demás modelos, combinando efectivamente la capacidad descriptiva con la parsimonia.

Así pues, el modelo GARCH(2,1) se consolida como el mejor modelo general en la Tabla 3, al ser consistente en ofrecer un ajuste superior según los criterios de información, tanto AIC como BIC. Además de su capacidad para capturar las dinámicas de volatilidad con mayor parsimonia, este modelo logra un equilibrio ideal entre complejidad y capacidad descriptiva, siendo la elección más adecuada para representar las series temporales de volatilidad del NASDAQ.

Modelo	AIC	BIC	Log Likelihood
ARCH(1)	-5.587477	-5.584210	17268.300
ARCH(2)	-2.145156	-2.140800	6632.531
ARCH(3)	-5.794309	-5.788865	17909.410
ARCH(4)	-5.845644	-5.839111	18069.040
ARCH(5)	-5.884015	-5.876393	18188.610
ARCH(6)	-5.904797	-5.896086	18253.820

ARCH(7)	-5.910692	-5.900892	18273.040
ARCH(8)	-5.916801	-5.905913	18292.920
GARCH(1,1)	-5.932874	-5.928518	18336.580
GARCH(2,1)	-5.935350	-5.929906	18345.230
GARCH(1,2)	-5.931888	-5.926444	18334.530
GARCH(2,2)	-5.935112	-5.928579	18345.500

Tabla 3: Criterios de selección de modelos para los modelos GARCH(p,q) estimados en los rendimientos diarios del NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance

Respecto a los parámetros del modelo GARCH(2,1), puede decirse que los coeficientes α_1 , α_2 y β_1 son menores que 1 y están alrededor de 0.043532, 0.073443 y 0.867392, respectivamente (ver Tabla 4). Estos coeficientes son significativos y estadísticamente diferentes de cero, lo que parece indicar que el modelo captura adecuadamente la dinámica de la volatilidad en las series temporales de retornos.

Activo	Parámetros GARCH				Diagnósticos Residuales		
	a_0^1	a_1^1	a_2^1	b_1^1	MQ(12)	LM(12)	JB
NASDAQ	0.000003	0.043532	0.073443	0.867392	11.64	11.962	445.33
	(0.001110)	(0.000313)	(0.000003)	(0.000000)	(0.475)	(0.4487)	(2.2e-16)
	[0.000001]	[0.012078]	[0.015675]	[0.011766]			

¹Notas: Los errores estándar QML están entre corchetes.

Tabla 4: Estimaciones para modelo GARCH(2,1) con diagnósticos respectivos

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance

Además, el diagnóstico de residuos muestra que no hay autocorrelación significativa en los residuos estandarizados del modelo, como lo demuestra la prueba de Ljung-Box. La prueba ARCH LM no indica la presencia de efectos ARCH remanentes significativos, lo que sugiere que la heterocedasticidad ha sido capturada adecuadamente por el modelo. Sin embargo, la prueba de Jarque-Bera confirma la no normalidad de los residuos, un resultado esperado en series financieras.

La persistencia de la volatilidad, medida por la suma de $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1$, es alta para la serie de NASDAQ, lo que implica una extensa duración de los choques de volatilidad. Específicamente, los choques a la volatilidad de NASDAQ tienen una vida media (half-life) de aproximadamente 40.15 días. La vida media de los choques se calcula usando la fórmula:

$$\text{Half-life} = \frac{\log(0.5)}{\log(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}$$

donde α_1 , α_2 y β_1 son los coeficientes del modelo GARCH(2,1). Esta alta persistencia indica que los choques tienen un efecto prolongado sobre la volatilidad.

La desviación estándar incondicional de los retornos, $\bar{\sigma}$, se calcula como:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1}} \approx 0.01354$$

donde ω es la varianza constante del modelo, y α_1 , α_2 y β_1 son los parámetros del modelo GARCH(2,1). Esta desviación estándar es una medida de la volatilidad promedio de los retornos en ausencia de choques recientes. Cabe destacar que estos valores de la desviación estándar incondicional son muy similares a los de la desviación estándar muestral observados en la Tabla 1, lo cual sugiere que el modelo está representando con cierta precisión la volatilidad subyacente en los retornos.

[1] "IXIC"

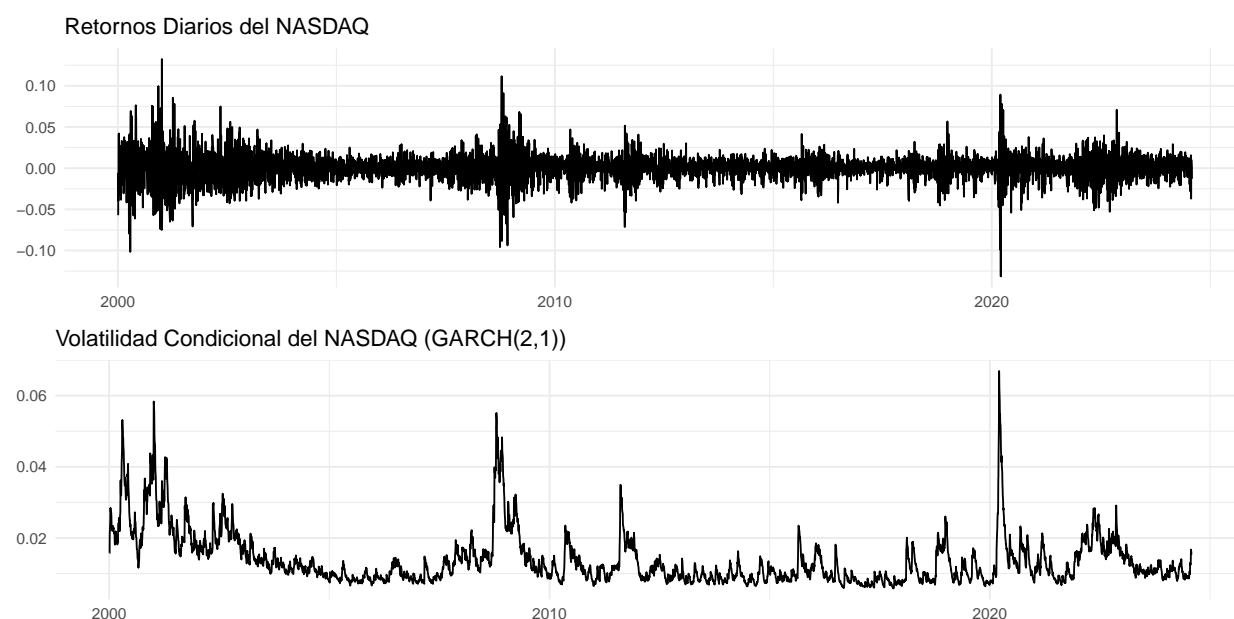


Figura 3: Volatilidad condicional a un paso adelante del modelo ajustado GARCH(2,1) para el NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Los rendimientos diarios del NASDAQ Composite, junto con la volatilidad condicional pronosticada a un paso adelante por el modelo GARCH(2,1), se presentan en la Figura 3. El modelo GARCH(2,1) logra capturar la agrupación de volatilidad observada en los rendimientos de manera eficiente. Este modelo produce estimaciones de volatilidad que son más suaves y persistentes, lo que se alinea con las propiedades teóricas del GARCH, que ofrece una mayor flexibilidad y adaptabilidad en la dinámica de la volatilidad. Esta característica permite al modelo GARCH(2,1) proporcionar una representación más precisa y estable de la evolución de la volatilidad en el tiempo, siendo especialmente útil en la modelización de series financieras como las del NASDAQ Composite.

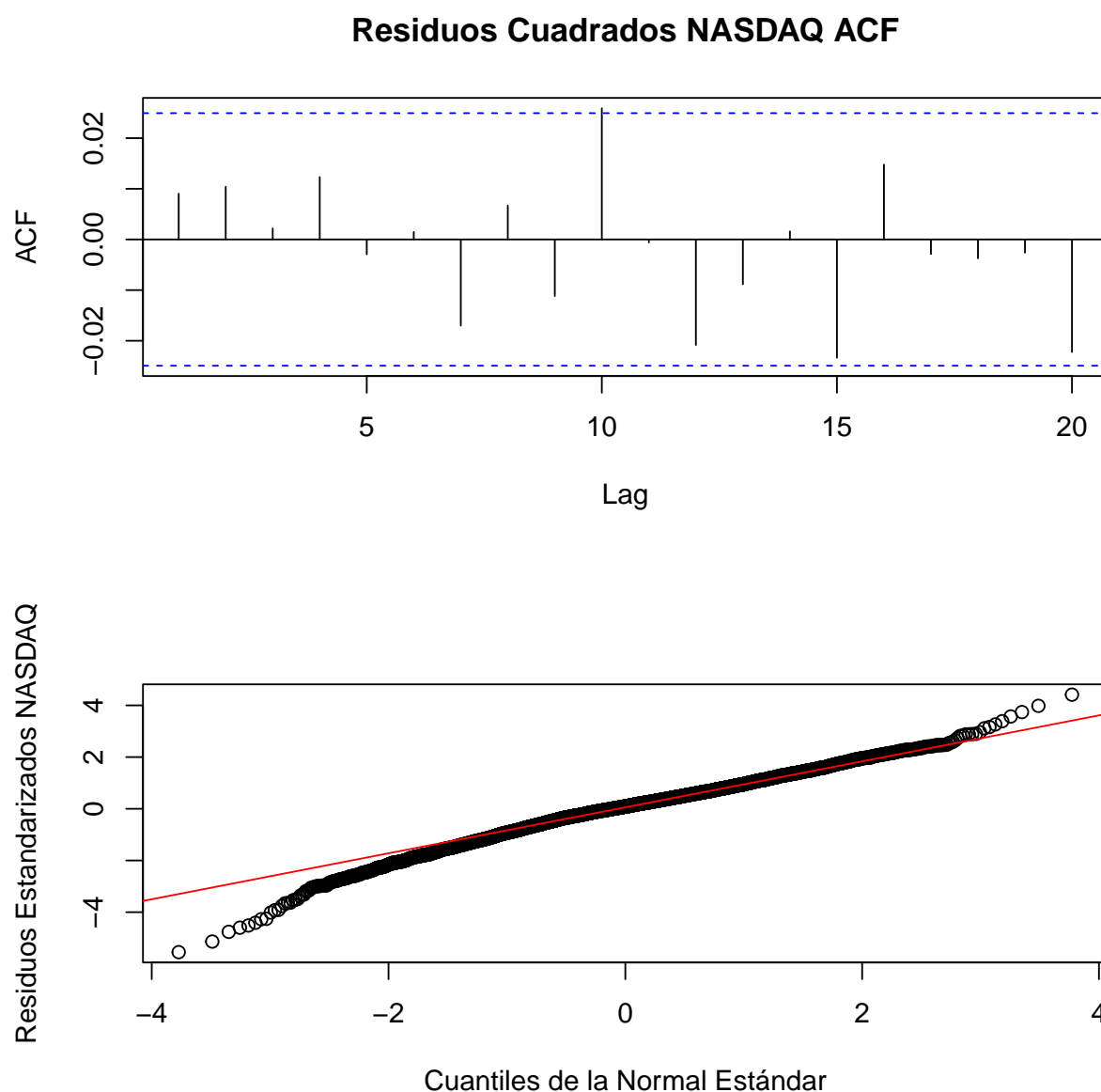


Figura 4: Diagnósticos gráficos de los residuos del modelo GARCH(2,1) ajustado para el NASDAQ Composite.

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Los diagnósticos gráficos del modelo GARCH(2,1) para el NASDAQ Composite se ilustran en la Figura 4. La ACF de los residuos al cuadrado no muestra ninguna autocorrelación significativa, a excepción del retardo 10, lo que sugiere que el modelo ha capturado adecuadamente la heterocedasticidad condicional. Sin embargo, el Q-Q plot de los residuos estandarizados muestra desviaciones notables de la normalidad. Este comportamiento puede reflejar la presencia de eventos

extremos en los datos, no capturados completamente por el modelo. Estos hallazgos son consistentes con los resultados de la Tabla 4, donde ya se mostró que no hay autocorrelación significativa en los residuos estandarizados y que la prueba ARCH LM no sugiere efectos ARCH remanentes significativos, además de la no normalidad de los residuos confirmada por la prueba de Jarque-Bera.

Metodología Box – Jenkins

Aplicación usando el software R

Datos

Los datos empleados en este estudio corresponden a los precios de cierre de las acciones de Corporación Favorita, una de las empresas más influyentes y destacadas en el mercado bursátil ecuatoriano. Dada su relevancia, que representa una proporción significativa de las transacciones en el mercado bursátil del país, estas acciones son fundamentales para el análisis financiero local.

Los datos fueron obtenidos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG) y abarcan el período desde el 2 de enero de 2019 hasta el 13 de mayo de 2024, con una frecuencia diaria. En total, se recopilieron 1282 observaciones. Los datos originales incluían múltiples variables, pero para este análisis nos centramos en la fecha de negociación y el precio de cierre de las acciones.

Para garantizar la consistencia en la serie temporal, se seleccionó el último precio de cierre registrado por día. El preprocesamiento de los datos incluyó la conversión de las fechas al formato estándar, el filtrado de las transacciones correspondientes únicamente a Corporación Favorita y la transformación de los datos filtrados a un objeto de serie temporal. Además, se verificó la integridad de los datos para asegurar que no hubiera valores faltantes o inconsistencias que pudieran afectar los análisis posteriores.

Identificación del modelo

Para iniciar el estudio de la serie se procede a ejecutar la lectura de los datos y realizar la gráfica respectiva utilizando el software R, como se había anticipado antes.

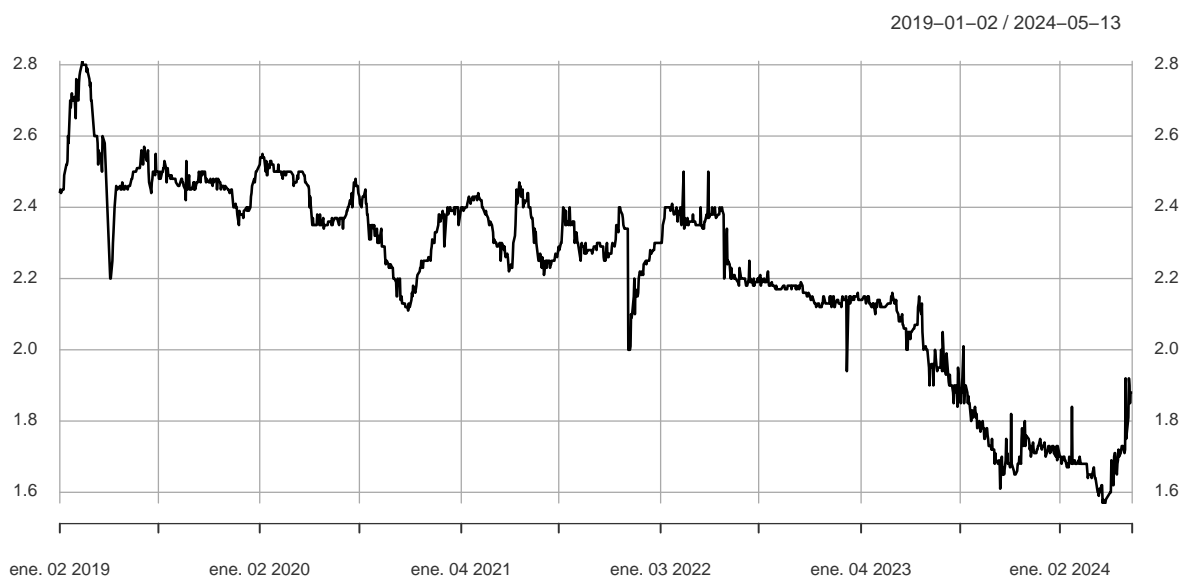


Figura 5: Precio de Cierre de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

El gráfico de la cotización de las acciones de Corporación Favorita (ver Figura 5) muestra una tendencia a la baja desde enero de 2019 hasta mayo de 2024, con una notable caída entre 2020 y 2023. La alta volatilidad se refleja en los picos y caídas pronunciadas en el precio, posiblemente debido a eventos económicos, noticias corporativas o cambios en la oferta y demanda de acciones. En 2020, se observa una caída significativa en el precio, coincidiendo con la pandemia de COVID-19, afectando muchas empresas. Aunque en 2024 hay una ligera recuperación en el precio de las acciones, aún no se han alcanzado los niveles de 2019, y el precio sigue siendo considerablemente bajo, indicando una disminución significativa en el valor de la acción.

Este análisis inicial revela una gran volatilidad y una tendencia decreciente en las acciones de Corporación Favorita en los últimos años, caracterizada por fluctuaciones y una recuperación parcial reciente. Para profundizar en este comportamiento, se procederá a examinar los retornos diarios de las acciones, que proporcionarán una visión más detallada de la rentabilidad y los riesgos asociados.

Análisis de Retornos

Activo	Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Desv. Estd	Asimetría	Curtosis	JB
LA FAVORITA	-0.000204	0	-0.159332	0.110001	0.015537	-1.581509	29.57161	38219.43

Tabla 5: Estadísticas descriptivas de los rendimientos diarios de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

Para evaluar el comportamiento de las acciones de Corporación Favorita, se han calculado los retornos diarios. El resumen de estos retornos proporciona información clave sobre su distribución y tendencia central. Los retornos diarios tienen un valor mínimo de -15.93% y un valor máximo de 11.00%, lo que indica que las acciones han experimentado días con pérdidas y ganancias significativas. El primer cuartil (Q1) es -0.44743%, lo que significa que el 25% de los días con los retornos más bajos estuvieron por debajo de este valor. El tercer cuartil (Q3) es 0.45352%, lo que indica que el 25% de los días con los retornos más altos estuvieron por encima de este valor.

La mediana de los retornos diarios es 0%, lo que sugiere que hay tantos días con retornos positivos como negativos, equilibrando el valor central en 0. De hecho, si se observa el histograma, se aprecia una concentración de valores alrededor del 0, indicando que muchos días los retornos se agrupan en torno a este valor. Por otro lado, la media de los retornos diarios es ligeramente negativa (-0.02035%), lo que refleja una tendencia general a la baja en el período analizado.

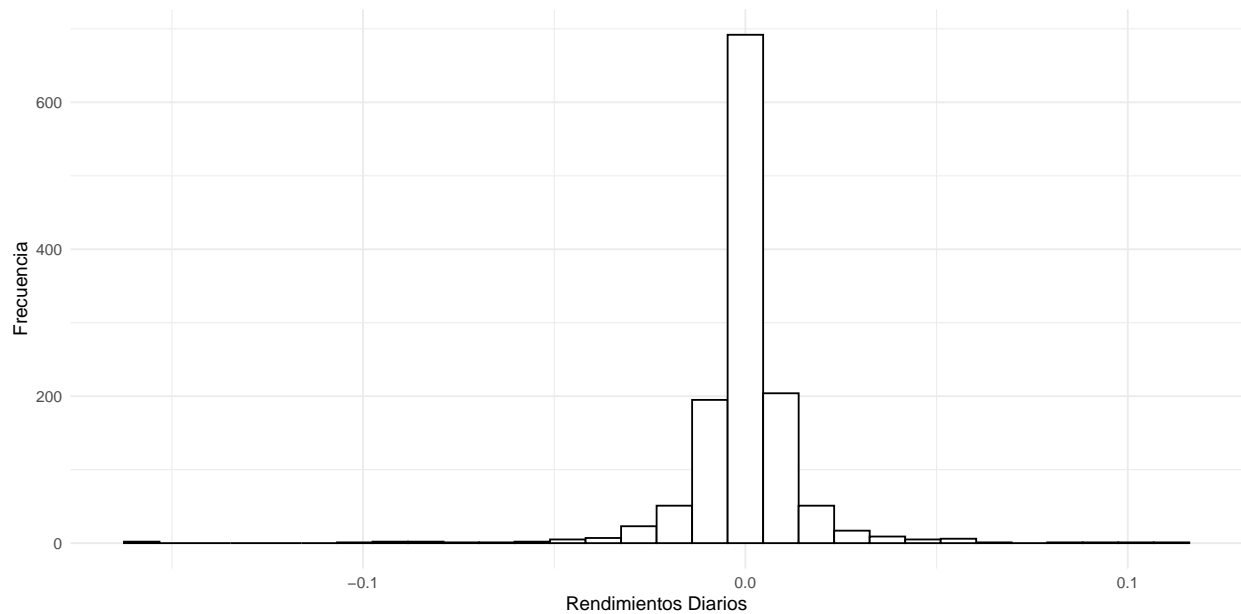


Figura 6: Histograma de los Rendimientos Diarios de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

El histograma de los retornos diarios de las acciones de Corporación Favorita muestra que la mayoría de los retornos se concentran alrededor del 0%, lo cual es común en las series temporales

financieras. Esto refleja que, en la mayoría de los días, los cambios en el precio de las acciones son pequeños. Además, la distribución leptocúrtica, con más valores cerca del promedio y más extremos en comparación con una distribución normal, es típica en los datos financieros debido a la presencia de picos y colas pesadas.

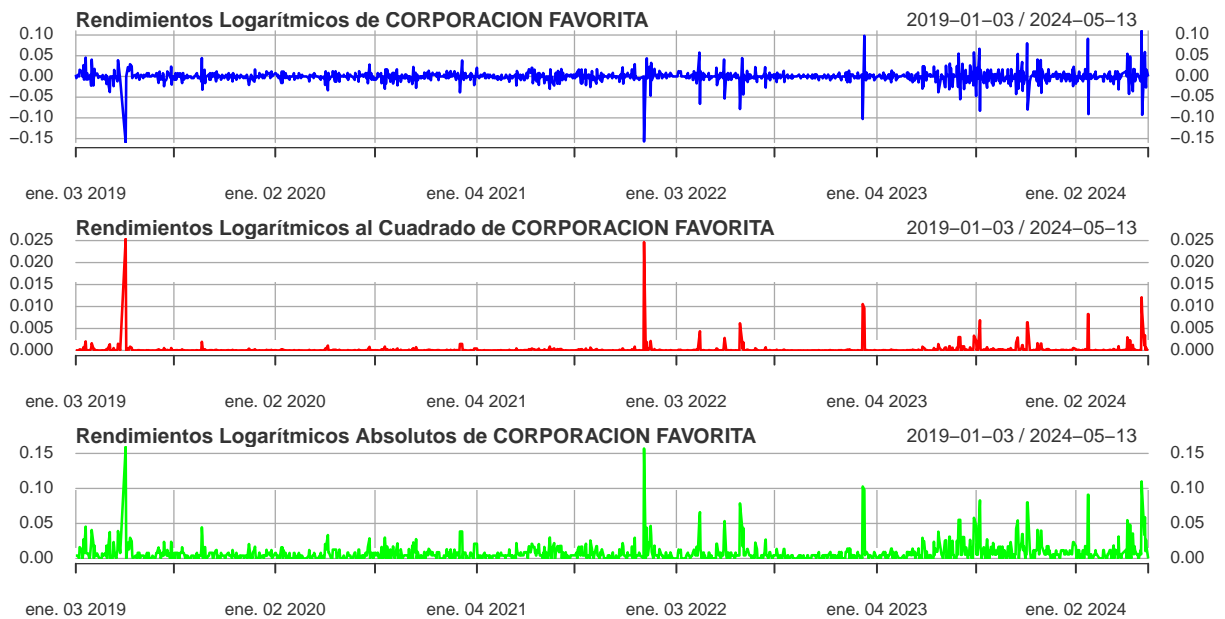


Figura 7: Rendimientos Logarítmicos, Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado y Rendimientos Logarítmicos Absolutos de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG)

El gráfico presentado en la Figura 7 muestra el comportamiento de los rendimientos logarítmicos de las acciones de Corporación Favorita a lo largo del tiempo, proporcionando una visión clara de las fluctuaciones diarias y su volatilidad. En el primer panel, se observa que los rendimientos logarítmicos presentan variaciones considerables, destacando varios picos tanto positivos como negativos. Este comportamiento sugiere la presencia de eventos significativos que impactaron el precio de las acciones, reflejando la alta volatilidad en ciertos periodos.

El segundo panel, que ilustra los rendimientos logarítmicos al cuadrado, amplifica la percepción de la volatilidad, destacando períodos de alta varianza. Los picos más pronunciados indican días en los que la magnitud de los cambios en los precios fue especialmente elevada, lo cual es crucial para entender la dinámica del riesgo asociado con estas acciones.

Finalmente, el tercer panel muestra los rendimientos logarítmicos absolutos, proporcionando otra perspectiva sobre la magnitud de los cambios en los precios. La consistencia de la volatilidad a lo

largo del tiempo, con varios picos pronunciados, sugiere que las acciones de Corporación Favorita han experimentado fluctuaciones

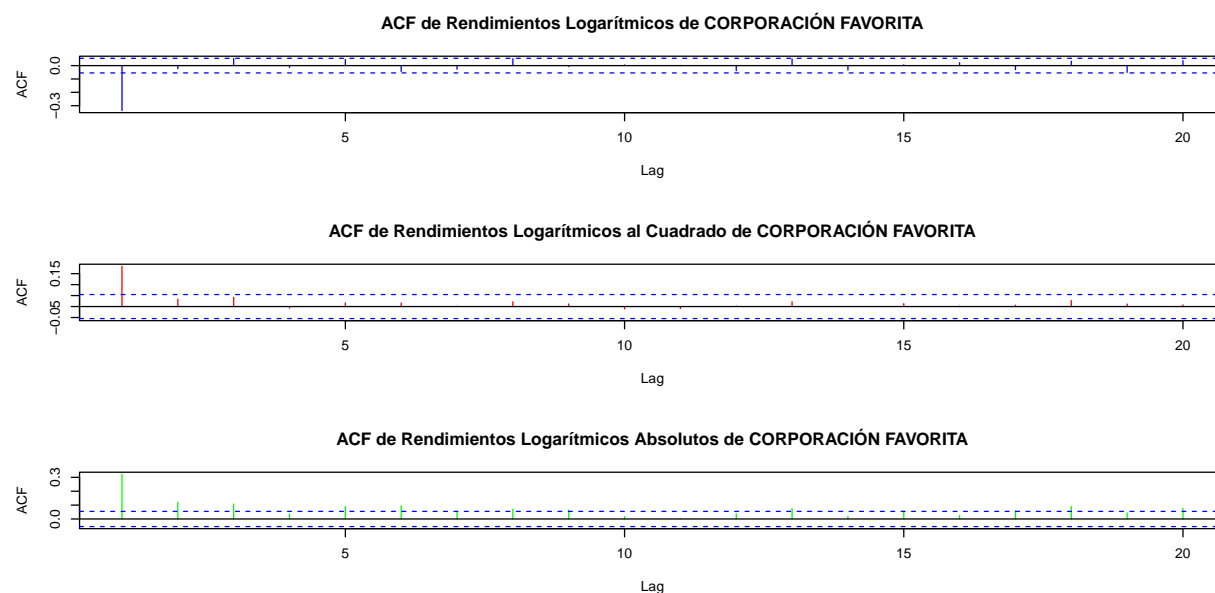


Figura 8: Autocorrelaciones de Rendimientos Logarítmicos, Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado y Rendimientos Logarítmicos Absolutos de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

Siguiendo con lo dicho anteriormente, la Figura 8 presenta las autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos, sus cuadrados y sus valores absolutos de Corporación Favorita. Los rendimientos logarítmicos en el primer panel muestran una autocorrelación significativa en el primer retardo, mientras que los demás retardos no presentan autocorrelaciones significativas, indicando que no hay una dependencia fuerte entre los retornos en días sucesivos. Este comportamiento es común en series financieras, donde los retornos suelen ser ruido blanco con algunas excepciones de autocorrelación en los primeros retardos, lo que puede deberse a la estructura de los términos de error (ϵ_t) en un modelo de Media Móvil de orden 1 (MA(1)).

El segundo panel muestra la autocorrelación de los rendimientos logarítmicos al cuadrado. Aquí, se observa una autocorrelación significativa en el primer retardo, lo cual es indicativo de la presencia de heterocedasticidad en la serie temporal. Esta característica sugiere que los períodos de alta volatilidad tienden a ser seguidos por más períodos de alta volatilidad, confirmando la existencia de volatilidad agrupada en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita. Este patrón es un fuerte indicio de la necesidad de modelos GARCH, que están diseñados para capturar y modelar

este tipo de comportamiento en la varianza condicional.

El tercer panel presenta la autocorrelación de los rendimientos logarítmicos absolutos. Similar al panel de los rendimientos al cuadrado, se observa una autocorrelación significativa en los primeros retardos, reforzando la evidencia de la volatilidad agrupada. Los rendimientos absolutos tienden a reflejar mejor la persistencia de la volatilidad que los rendimientos crudos, proporcionando una visión complementaria de la estructura de dependencia en la volatilidad de la serie.

Pruebas Efectos ARCH-GARCH

Resultados de las Pruebas de Efectos ARCH/GARCH para CORPORACIÓN FAVORITA

Retardo	Ljung-Box Squared Returns		LM	
	Chi-cuadrado	Valor p	Chi-cuadrado	Valor p
1	43.2216	0.0000	43.0891	0.0000
5	47.3837	0.0000	45.8203	0.0000
10	48.7156	0.0000	46.7007	0.0000

Tabla 6: Resultados de las Pruebas de Efectos ARCH/GARCH para CORPORACIÓN FAVORITA.

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

- H_0 : No hay efectos ARCH en los datos (homocedasticidad).
- H_1 : Hay efectos ARCH en los datos (heterocedasticidad).

Las pruebas de Ljung-Box y LM realizadas para evaluar la presencia de efectos ARCH en los retornos de Corporación Favorita muestran resultados significativos en los retardos 1, 5 y 10, con valores p extremadamente pequeños. Estos resultados nos permiten rechazar la hipótesis nula de que no hay efectos ARCH. En otras palabras, las pruebas confirman la presencia de heterocedasticidad en los retornos diarios, lo que justifica la necesidad de utilizar un modelo GARCH para capturar la volatilidad cambiante en los datos de retorno.

A continuación, seguiremos con el proceso de estimación del modelo GARCH adecuado para estos datos.

Estimación del modelo ARIMA

Se utilizó la función `auto.arima` de R para seleccionar un modelo MA(3) con media cero. Esta función automatiza el proceso de identificación y estimación del modelo ARIMA óptimo para una serie temporal dada, evaluando diferentes combinaciones de parámetros autorregresivos (AR), de media móvil (MA) y de diferenciación (I). `auto.arima` usa criterios de información, como el AIC (Akaike Information Criterion) y el BIC (Bayesian Information Criterion), para comparar modelos y seleccionar el que mejor se ajuste a los datos, utilizando el criterio BIC como el principal selector.

```
Series: log_returns_daily
```

```
ARIMA(0,0,3) with zero mean
```

```
Coefficients:
```

```
          ma1      ma2      ma3
-0.3893 -0.0042  0.0650
s.e.    0.0279   0.0301  0.0287
```

```
sigma^2 = 0.0002092:  log likelihood = 3610.24
```

```
AIC=-7212.47   AICc=-7212.44   BIC=-7191.85
```

El modelo MA(3) ajustado a la serie de retornos diarios de Corporación Favorita muestra que el coeficiente `ma1` (-0.3893) es significativo, mientras que el coeficiente `ma2` (-0.0042) no es significativo. El coeficiente `ma3` (0.0650) también es significativo. Dado que `ma2` no es significativo, en la siguiente sección se procede a eliminar este término del modelo para mejorar la parsimonia y ajustar mejor los datos. Las métricas del modelo actual (log likelihood: 3610.24, AIC: -7212.47, AICc: -7212.44, BIC: -7191.85) indican un buen ajuste, pero con la eliminación del término no significativo, se espera un mejor rendimiento.

```
Series: log_returns_daily
```

```
ARIMA(0,0,3) with non-zero mean
```

```
Coefficients:
```

```
          ma1  ma2      ma3      mean
```



```

      -0.3913    0  0.0629  -2e-04
s.e.   0.0260    0  0.0268   3e-04

```

```

sigma^2 = 0.0002091:  log likelihood = 3610.51
AIC=-7213.03   AICc=-7212.99   BIC=-7192.4

```

Este modelo incluyó tres términos de media móvil (MA), con coeficientes de -0.3913, 0 y 0.0629. Los criterios de información (AIC: -7213.03, AICc: -7212.99, BIC: -7192.4) y la log likelihood de 3610.51 sugirieron que este modelo era adecuado para los datos. Sin embargo, se observó que la media (-2e-04) no era significativa. Por lo tanto, en el siguiente paso se procedió a eliminar el término de la media para simplificar aún más el modelo y mejorar su parsimonia.

```

Series: log_returns_daily
ARIMA(0,0,3) with zero mean

```

Coefficients:

```

      ma1  ma2    ma3
      -0.3908    0  0.0635
s.e.   0.0260    0  0.0268

```

```

sigma^2 = 0.000209:  log likelihood = 3610.23
AIC=-7214.45   AICc=-7214.44   BIC=-7198.99

```

Finalmente, se ajustó el modelo MA(3) con media nula. Este modelo mostró los siguientes coeficientes: ma1 (-0.3908), ma2 (0) y ma3 (0.0635), con errores estándar de 0.0260, 0, y 0.0268 respectivamente. La eliminación del término de la media no solo simplificó el modelo, sino que también mejoró las métricas de información, con un log likelihood de 3610.23, AIC de -7214.45, AICc de -7214.44, y BIC de -7198.99. Estas métricas indicaron que el modelo final era más parsimonioso y tenía un ajuste ligeramente mejor a los datos. De hecho, **a lo largo del proceso de ajuste de modelos, se observó una disminución consistente en el AIC, indicando una mejora en la calidad del ajuste de modelo a modelo.**

Recapitulando, este ajuste final del modelo MA(3) con media nula, al eliminar componentes no significativos, asegura una mejor interpretación y previsión de los movimientos en los rendimientos

de las acciones de Corporación Favorita, facilitando un análisis más claro de la heterocedasticidad presente en la serie temporal. Este modelo refinado establece una base sólida para la aplicación posterior de modelos GARCH, que permitirán un análisis detallado de la volatilidad, capturando tanto los choques recientes como la persistencia de la volatilidad a lo largo del tiempo.

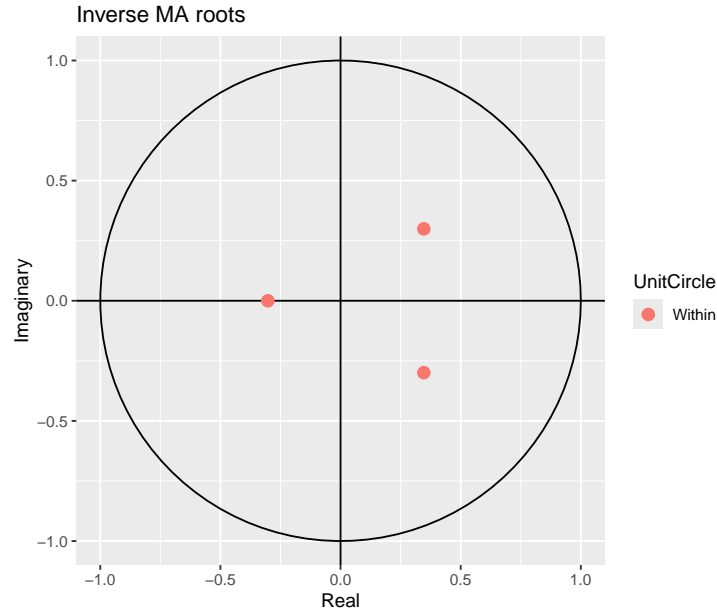


Figura 9: Gráfico de Raíces Inversas MA para el modelo MA(3) de los rendimientos logarítmicos diarios de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

El gráfico de raíces inversas MA (Moving Average) presenta las raíces del polinomio de media móvil del modelo MA(3). En este gráfico, el círculo unitario define el límite dentro del cual deben situarse las raíces inversas para garantizar la estacionariedad del modelo. En este caso, las raíces inversas de los términos MA se muestran como puntos rojos dentro del círculo unitario (ver Figura 9).

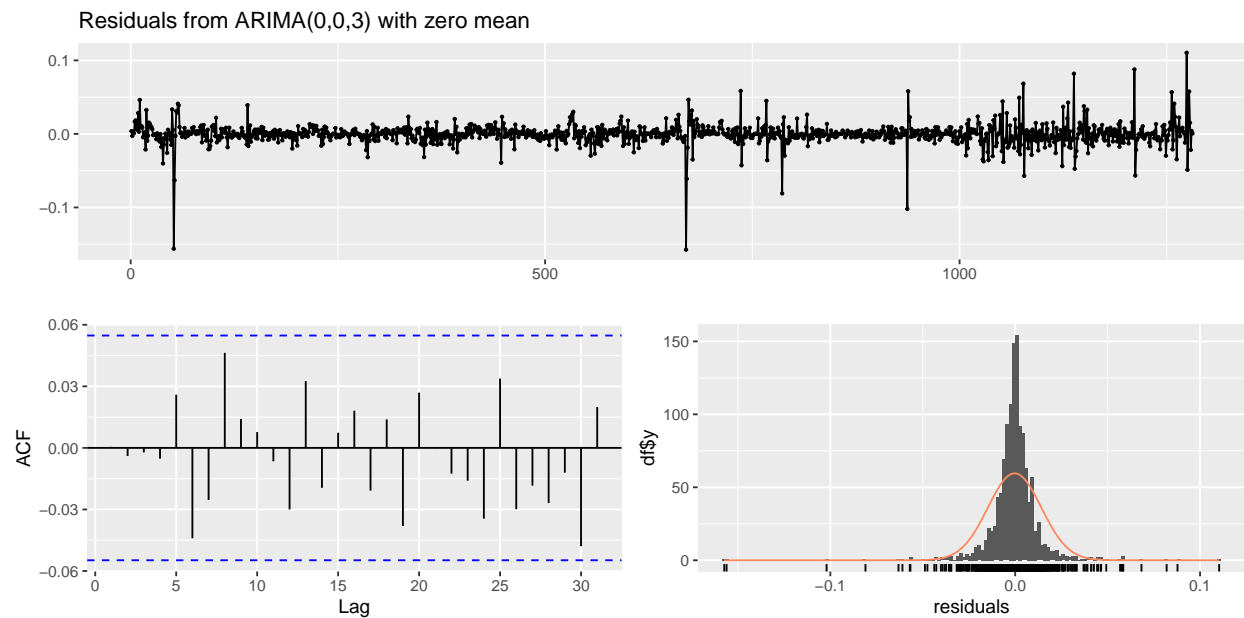
Matemáticamente, para un modelo MA(3) representado por:

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \theta_3 \epsilon_{t-3}$$

Las raíces del polinomio de media móvil, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, deben estar dentro del círculo unitario en su forma inversa, es decir:

$$\frac{1}{|\theta|} < 1 \Rightarrow |\theta| > 1$$

El gráfico de Raíces Inversas confirma que esta condición se cumple ya que los puntos rojos (las raíces inversas) se encuentran dentro del círculo unitario. Esto implica que el modelo MA(3) es invertible y estacionario, una característica necesaria para la aplicación adecuada de los modelos de heterocedasticidad condicional (ARCH y GARCH). La estacionariedad asegura que el proceso tenga una media y una varianza constantes a lo largo del tiempo, permitiendo un análisis fiable de la varianza condicional en los residuos del modelo.



Ljung-Box test

data: Residuals from ARIMA(0,0,3) with zero mean

Q* = 7.362, df = 7, p-value = 0.3922

Model df: 3. Total lags used: 10

Figura 10: Residuos del modelo MA(3) ajustado para los rendimientos logarítmicos diarios de Corporación Favorita

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

Además, Los residuos del modelo MA(3) fueron evaluados para determinar la idoneidad del modelo y las características de los datos (ver Figura 10). El primer gráfico muestra los residuos a lo largo del

tiempo, revelando fluctuaciones alrededor de cero con algunos picos significativos, confirmando las observaciones previas de posibles desviaciones de homocedasticidad. Esta volatilidad no constante a lo largo del tiempo es un indicio claro de heterocedasticidad.

La función de autocorrelación (ACF) de los residuos, representada en el gráfico inferior izquierdo, muestra que la mayoría de las autocorrelaciones se encuentran dentro de los límites de significancia, sugiriendo que el modelo MA(3) ha capturado adecuadamente la estructura temporal de los datos. Aunque el test de Ljung-Box no muestra autocorrelación significativa en los residuos, la presencia de heterocedasticidad sugiere que un modelo GARCH podría ser apropiado para capturar la volatilidad cambiante en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita. El uso de un modelo GARCH permitirá modelar y prever la varianza condicional de los rendimientos, proporcionando una mejor comprensión de la dinámica de la volatilidad en los datos.

El histograma de los residuos, junto con la curva de densidad ajustada, muestra una distribución leptocúrtica, caracterizada por colas más pesadas y un pico más pronunciado que una distribución normal. Esta característica, observada previamente en el análisis de los residuos, subraya la necesidad de aplicar modelos que manejen la heterocedasticidad condicional, como los modelos GARCH, para capturar de manera más precisa la volatilidad en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita.

Ahora procederemos a revisar la heterocedasticidad de los residuos al cuadrado para confirmar la presencia de efectos ARCH, y si es así, ajustaremos un modelo GARCH adecuado para capturar la volatilidad de los rendimientos diarios de las acciones de Corporación Favorita.

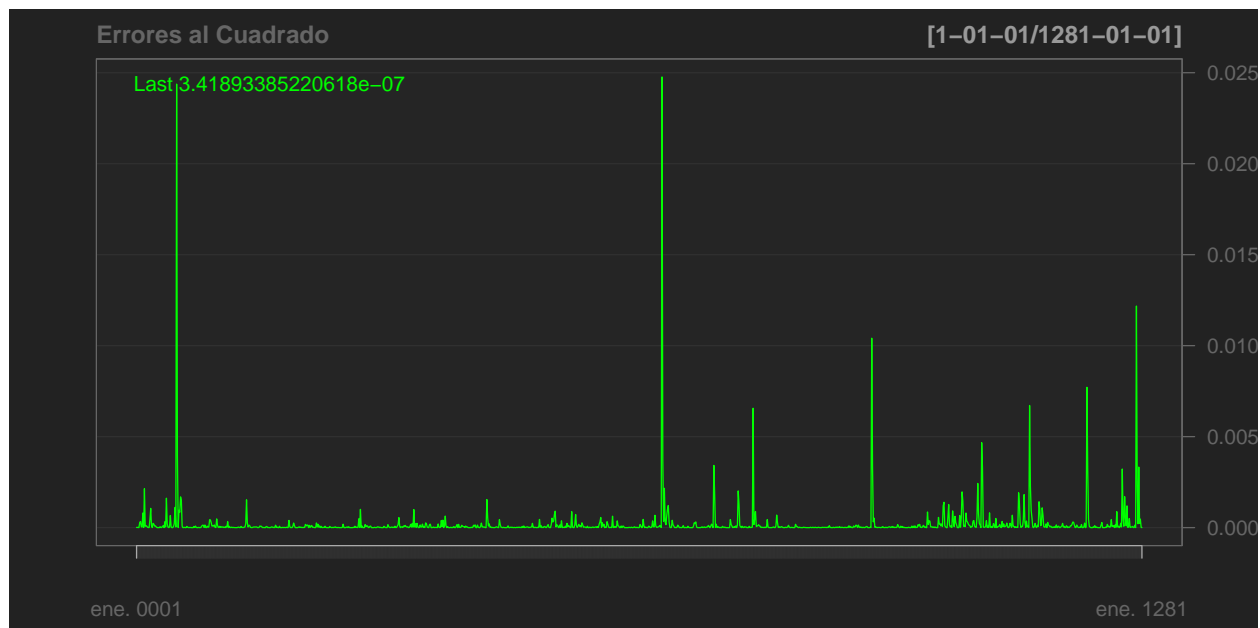


Figura 11: Residuales al Cuadrado del modelo MA(3).

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

El gráfico de los errores al cuadrado en la Figura 11 muestra varianza no constante a lo largo del tiempo, con varios picos seguidos que indican periodos de alta volatilidad. Esto confirma la presencia de heterocedasticidad en la serie, un indicio claro de que un modelo GARCH podría ser apropiado para capturar y modelar adecuadamente la volatilidad presente en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita.

Continuaremos con el análisis para comprobar la presencia de efectos ARCH en los datos y ajustar un modelo GARCH que capture estas características de la volatilidad.

Time series regression with "ts" data:

Start = 2, End = 1281

Call:

```
dynlm(formula = Errores_cuadrado ~ L(Errores_cuadrado))
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-----	----	--------	----	-----

-0.0011554 -0.0001727 -0.0001614 -0.0001020 0.0245942

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.722e-04	3.305e-05	5.210	2.20e-07 ***
L(Errores_cuadrado)	1.757e-01	2.754e-02	6.379	2.48e-10 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.001164 on 1278 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.03086, Adjusted R-squared: 0.0301

F-statistic: 40.7 on 1 and 1278 DF, p-value: 2.479e-10

La Regresión con los residuales al cuadrado retardados muestra claramente la presencia de heterocedasticidad en la serie.

- H_0 : No hay efectos ARCH en los datos (homocedasticidad).
- H_1 : Hay efectos ARCH en los datos (heterocedasticidad).

El resultado de la regresión indica que el coeficiente del término retardado de los errores al cuadrado es significativo con un valor p muy pequeño ($2.85e-10$), lo que sugiere que **hay efectos ARCH presentes en los datos**. El coeficiente estimado para el término retardado es de aproximadamente 0.1757, indicando una dependencia en la varianza de los errores a lo largo del tiempo. Con estos resultados, se confirma la necesidad de un modelo GARCH para capturar adecuadamente la dinámica de la volatilidad en los retornos de las acciones de Corporación Favorita.

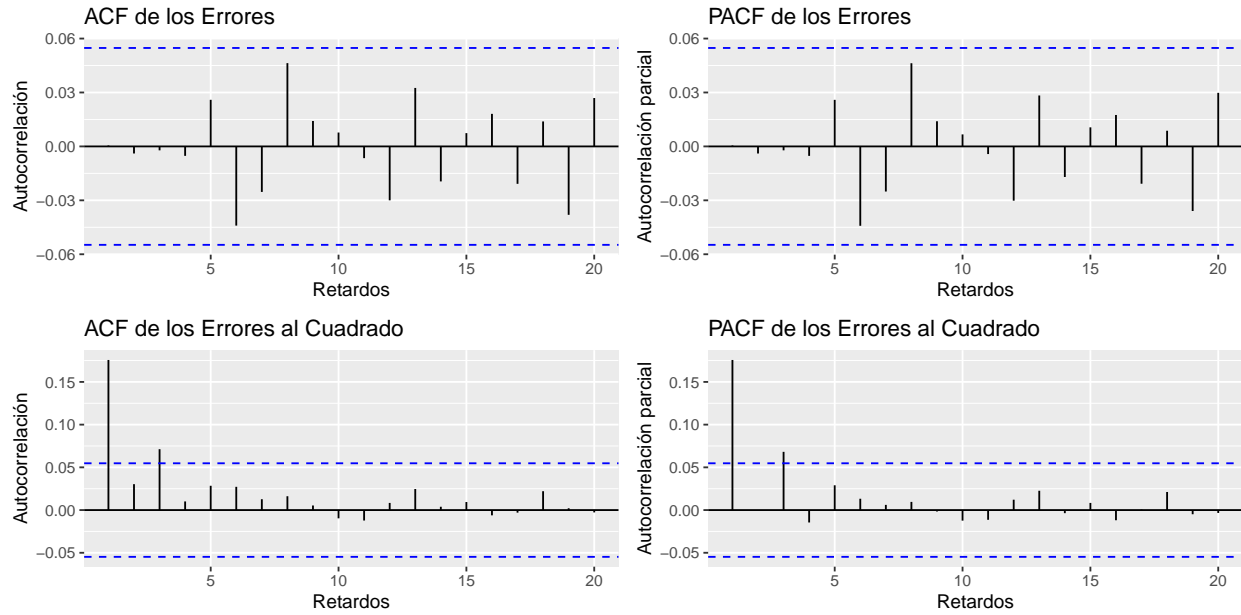


Figura 12: ACF y PACF de los Errores y Errores al Cuadrado del modelo ARMA (0,0,3).

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

La Figura 12 presenta los gráficos de ACF y PACF tanto de los errores como de los errores al cuadrado del modelo MA(3), proporcionando una visión comparativa de la estructura de autocorrelación en los datos.

En el análisis de los errores simples (gráficos superiores), la ACF y PACF muestran que las autocorrelaciones de los residuos se encuentran dentro de los límites de significancia, lo que indica un comportamiento de ruido blanco. Esto sugiere que el modelo MA(3) ha capturado adecuadamente la estructura de dependencia temporal en los datos. La mayoría de las autocorrelaciones estarían dentro de los límites de confianza, y las que superen los límites en retardos elevados podrían deberse a la aleatoriedad.

Por otro lado, los gráficos de ACF y PACF de los errores al cuadrado (gráficos inferiores) revelan una presencia notable de autocorrelaciones significativas en el primer y en el tercer retardo. Este patrón es un claro indicio de la presencia de efectos ARCH en los datos, lo cual indica heterocedasticidad. La persistencia de autocorrelaciones significativas en los errores al cuadrado, comparada con las autocorrelaciones en los errores simples, confirma la necesidad de aplicar un modelo GARCH para capturar adecuadamente las variaciones en la varianza condicional de los rendimientos.

Comparando ambas series de gráficos, se observa que mientras los errores simples muestran algunas autocorrelaciones significativas, los errores al cuadrado muestran un patrón más pronunciado

de autocorrelaciones significativas. Esto evidencia que, aunque el modelo MA(3) ha capturado parte de la dependencia lineal en los residuos, persisten patrones no lineales en la varianza que son característicos de la heterocedasticidad condicional. Tanto en la autocorrelación como en la autocorrelación parcial de los errores al cuadrado, las correlaciones llegan a salir del límite de criterio, lo que sugiere que hay heterocedasticidad en la varianza.

Esta comparación refuerza la justificación para el uso de modelos GARCH en el análisis de la serie temporal de rendimientos, ya que estos modelos son capaces de capturar y modelar la volatilidad presente en los datos de manera más precisa.

Estimación del Modelo GARCH

Modelado GARCH: Especificación de modelos GARCH

Modelo	AIC	BIC	Log Likelihood
ARCH(1)	54.188450	54.196500	-34705.700
ARCH(2)	-5.836994	-5.824921	3741.595
ARCH(3)	-5.839699	-5.823601	3744.327
ARCH(4)	-5.837568	-5.817446	3743.963
ARCH(5)	-5.839107	-5.814960	3745.948
GARCH(1,1)	-5.800938	-5.788864	3718.501
GARCH(2,1)	-5.838885	-5.822787	3743.806
GARCH(1,2)	-5.799258	-5.783160	3718.425
GARCH(2,2)	-5.837323	-5.817201	3743.806

Tabla 7: Criterios de selección de modelos para los modelos GARCH(p,q) estimados en los rendimientos diarios de Corporación Favorita.

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

Para determinar cuáles son los modelos más adecuados, se basa la decisión en los criterios de información AIC y BIC, comparando todos los modelos estimados. La Tabla 7 muestra estos criterios junto con la log-verosimilitud de cada modelo.

El modelo ARCH(3) presenta el valor más bajo de AIC (-5.839699), lo que lo posiciona como el mejor modelo ARCH en términos de AIC. Sin embargo, el modelo ARCH(2) tiene el valor más

bajo de BIC (-5.824921), sugiriendo que puede ser el modelo más parsimonioso según este criterio. Ambos modelos capturan de manera eficiente la estructura de la heterocedasticidad en los datos.

Por otro lado, el modelo GARCH(2,1) muestra valores competitivos de AIC y BIC (-5.838885 y -5.822787 respectivamente), y una alta log-verosimilitud (3743.806). La complejidad adicional del modelo GARCH(2,1) es justificable por su mejor ajuste a los datos.

En otras palabras, los modelos seleccionados son ARCH(2), ARCH(3) y GARCH(2,1). El ARCH(3) presenta el valor más bajo de AIC entre los modelos ARCH, mientras que el ARCH(2) presenta el valor más bajo de BIC. El GARCH(2,1) es seleccionado por su buen desempeño en términos de AIC y BIC, ofreciendo un buen equilibrio entre ajuste y parsimonia para capturar la volatilidad presente en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita.

Ajuste de modelos GARCH potenciales: ARCH (2,0), ARCH(3,0) y GARCH(2,1)

```
*-----*
*           GARCH Model Fit           *
*-----*
```

Conditional Variance Dynamics

```
-----
```

GARCH Model : sGARCH(2,0)

Mean Model : ARFIMA(0,0,0)

Distribution : norm

Optimal Parameters

```
-----
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000098	0.000007	13.3940	0e+00
alpha1	0.197250	0.042441	4.6477	3e-06
alpha2	0.779869	0.130054	5.9965	0e+00

Robust Standard Errors:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000098	0.000032	3.0690	0.002148
alpha1	0.197250	0.059801	3.2985	0.000972
alpha2	0.779869	0.525928	1.4828	0.138116

LogLikelihood : 3741.595

Information Criteria

Akaike	-5.8370
Bayes	-5.8249
Shibata	-5.8370
Hannan-Quinn	-5.8325

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.5903	0.4423
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [2]	0.9788	0.5051
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [5]	4.7809	0.1715
d.o.f=0		
H0 : No serial correlation		

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.002712	0.9585
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [5]	0.211460	0.9917
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [9]	0.309989	0.9997
d.o.f=2		

Weighted ARCH LM Tests

```
-----  
Statistic Shape Scale P-Value  
ARCH Lag[3] 0.0002897 0.500 2.000 0.9864  
ARCH Lag[5] 0.1144123 1.440 1.667 0.9841  
ARCH Lag[7] 0.1597183 2.315 1.543 0.9982
```

Nyblom stability test

```
-----  
Joint Statistic: 0.9873  
Individual Statistics:  
omega 0.5696  
alpha1 0.6496  
alpha2 0.1361
```

```
Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
Joint Statistic: 0.846 1.01 1.35  
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75
```

Sign Bias Test

```
-----  
t-value prob sig  
Sign Bias 0.3721 0.7099  
Negative Sign Bias 0.4256 0.6704  
Positive Sign Bias 0.1242 0.9011  
Joint Effect 0.3020 0.9596
```

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

```
-----  
group statistic p-value(g-1)  
1 20 446.7 8.081e-83
```

2	30	477.1	1.469e-82
3	40	475.6	1.895e-76
4	50	501.2	2.993e-76

Elapsed time : 0.2420859

Box-Ljung test

data: standardized_residuals_arch2
 X-squared = 20.582, df = 12, p-value = 0.05684

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: standardized_residuals_arch2
 Chi-squared = 0.86231, df = 12, p-value = 1

Jarque Bera Test

data: standardized_residuals_arch2
 X-squared = 81684, df = 2, p-value < 2.2e-16

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*
```

Conditional Variance Dynamics

 GARCH Model : sGARCH(3,0)

Mean Model : ARFIMA(0,0,0)

Distribution : norm

Optimal Parameters

```
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega  0.000092  0.000009 10.4428 0.000000
alpha1 0.175538  0.038339  4.5786 0.000005
alpha2 0.699323  0.123503  5.6624 0.000000
alpha3 0.124129  0.072520  1.7117 0.086961
```

Robust Standard Errors:

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega  0.000092  0.000042  2.20307 0.027590
alpha1 0.175538  0.052504  3.34334 0.000828
alpha2 0.699323  0.490803  1.42485 0.154200
alpha3 0.124129  0.343225  0.36166 0.717609
```

LogLikelihood : 3744.327

Information Criteria

```
-----
Akaike      -5.8397
Bayes       -5.8236
Shibata     -5.8397
Hannan-Quinn -5.8337
```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

```
-----
              statistic p-value
Lag[1]         0.7466  0.3875
```

Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [2] 1.0981 0.4675

Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [5] 4.4961 0.1983

d.o.f=0

H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.01364	0.9070
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [8]	0.36084	0.9986
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [14]	0.56607	1.0000

d.o.f=3

Weighted ARCH LM Tests

	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag[4]	0.1860	0.500	2.000	0.6663
ARCH Lag[6]	0.2056	1.461	1.711	0.9674
ARCH Lag[8]	0.2730	2.368	1.583	0.9952

Nyblom stability test

Joint Statistic: 1.0816

Individual Statistics:

omega 0.5498

alpha1 0.5685

alpha2 0.1070

alpha3 0.1552

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)

Joint Statistic: 1.07 1.24 1.6

Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test

	t-value	prob sig
Sign Bias	0.2465	0.8054
Negative Sign Bias	0.3782	0.7053
Positive Sign Bias	0.1638	0.8699
Joint Effect	0.2158	0.9750

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

	group	statistic	p-value(g-1)
1	20	446.9	7.275e-83
2	30	463.8	7.436e-80
3	40	474.5	3.182e-76
4	50	491.7	2.235e-74

Elapsed time : 0.156054

Box-Ljung test

data: standardized_residuals_arch3

X-squared = 19.49, df = 12, p-value = 0.07738

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: standardized_residuals_arch3

Chi-squared = 0.90495, df = 12, p-value = 1

Jarque Bera Test

data: standardized_residuals_arch3
X-squared = 78587, df = 2, p-value < 2.2e-16

```
*-----*  
*          GARCH Model Fit          *  
*-----*
```

Conditional Variance Dynamics

```
-----  
GARCH Model : sGARCH(2,1)  
Mean Model  : ARFIMA(0,0,0)  
Distribution : norm
```

Optimal Parameters

```
-----  
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
omega  0.000082   0.000012   6.6131 0.000000  
alpha1  0.180090   0.039464   4.5634 0.000005  
alpha2  0.709691   0.129349   5.4866 0.000000  
beta1   0.109213   0.072004   1.5168 0.129328
```

Robust Standard Errors:

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
omega  0.000082   0.000056   1.46738 0.142273  
alpha1  0.180090   0.053216   3.38413 0.000714  
alpha2  0.709691   0.512518   1.38471 0.166140  
beta1   0.109213   0.266453   0.40987 0.681897
```


LogLikelihood : 3743.806

Information Criteria

Akaike	-5.8389
Bayes	-5.8228
Shibata	-5.8389
Hannan-Quinn	-5.8328

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.7488	0.3869
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [2]	1.1123	0.4632
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [5]	4.6253	0.1857

d.o.f=0

H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.009882	0.9208
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [8]	0.341104	0.9988
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [14]	0.540033	1.0000

d.o.f=3

Weighted ARCH LM Tests

	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag[4]	0.1852	0.500	2.000	0.6669
ARCH Lag[6]	0.2085	1.461	1.711	0.9668

ARCH Lag[8] 0.2639 2.368 1.583 0.9956

Nyblom stability test

Joint Statistic: 1.0712

Individual Statistics:

omega 0.5485

alpha1 0.6405

alpha2 0.1404

beta1 0.4152

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)

Joint Statistic: 1.07 1.24 1.6

Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test

 t-value prob sig
Sign Bias 0.2976 0.7661
Negative Sign Bias 0.3918 0.6953
Positive Sign Bias 0.1597 0.8732
Joint Effect 0.2507 0.9690

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

 group statistic p-value(g-1)
1 20 445.1 1.765e-82
2 30 463.4 9.272e-80
3 40 472.2 9.235e-76
4 50 495.1 4.892e-75

Elapsed time : 0.208977

Box-Ljung test

data: standardized_residuals_garch21
X-squared = 19.833, df = 12, p-value = 0.07031

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: standardized_residuals_garch21
Chi-squared = 0.87852, df = 12, p-value = 1

Jarque Bera Test

data: standardized_residuals_garch21
X-squared = 80969, df = 2, p-value < 2.2e-16

Análisis Comparativo de los Modelos **ARCH(2)**, **ARCH(3)** y **GARCH(2,1)**

En el modelo **ARCH(2)**, los coeficientes α_1 y α_2 son significativos con valores p muy bajos, lo que indica que estos términos son cruciales para capturar la volatilidad en los datos. El coeficiente ω también es significativo. Sin embargo, en el modelo **ARCH(3)**, aunque los coeficientes α_1 y α_2 son significativos, el coeficiente α_3 no es significativo con un valor p de 0.086961, sugiriendo que este término adicional no mejora significativamente el modelo. El coeficiente ω en el modelo **ARCH(3)** también es significativo. En el modelo **GARCH(2,1)**, los coeficientes α_1 y α_2 son significativos, pero el coeficiente β_1 no es significativo con un valor p de 0.129328, lo que indica que este término podría no ser necesario. El coeficiente ω es significativo.

Las pruebas de diagnóstico para el modelo **ARCH(2)** muestran que no hay autocorrelación significativa en los residuales, con un valor p de 0.05684 en la prueba de Ljung-Box. La prueba

ARCH LM no confirma la presencia de efectos ARCH, con un valor p de 1. Además, la prueba de Jarque-Bera indica que los residuales no siguen una distribución normal, con un valor p menor a $2.2e-16$.

En términos generales, **el modelo ARCH(2) tiene todos sus coeficientes significativos y supera las pruebas de diagnóstico de autocorrelación y efectos ARCH**, aunque los residuos no siguen una distribución normal. Al eliminar el coeficiente no significativo del ARCH(3), el modelo resultante es un ARCH(2). De manera similar, al eliminar el coeficiente no significativo del GARCH(2,1), el modelo también se reduce efectivamente a un ARCH(2). **Por lo tanto, del estudio de estos modelos se deduce que el adecuado es el ARCH(2).**

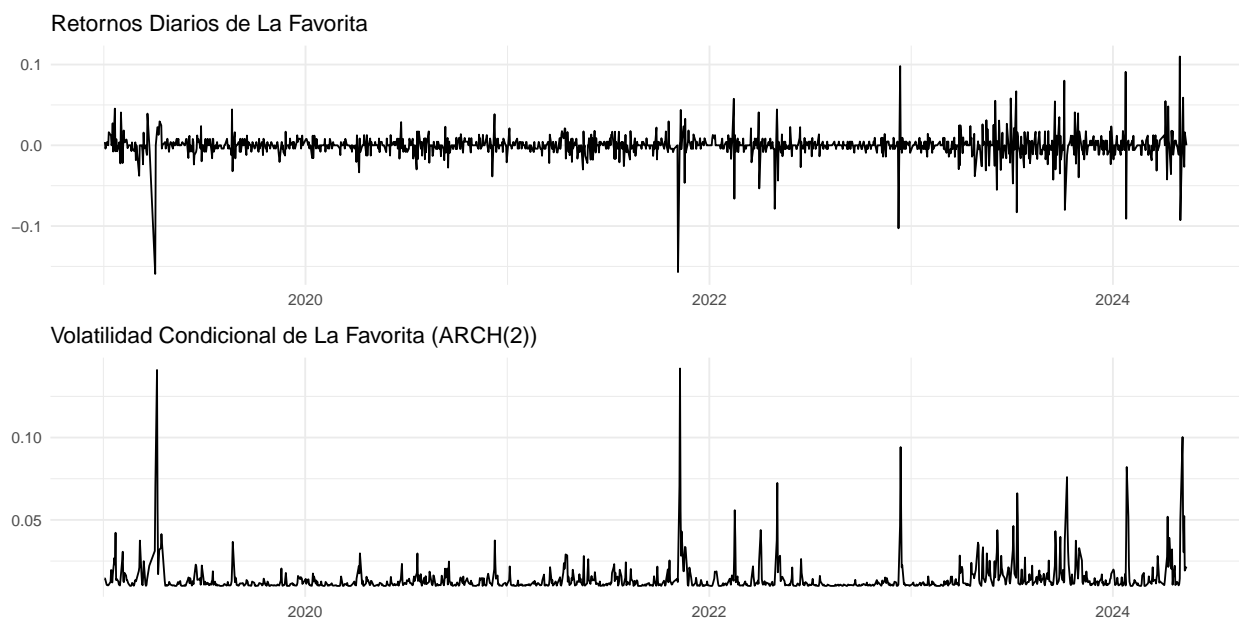


Figura 13: Volatilidad condicional un paso adelante del modelo ajustado ARCH(2) para Corporación Favorita.

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

En los gráficos presentados, se observan los retornos diarios y la volatilidad condicional estimada de Corporación Favorita utilizando el modelo definitivo ARCH(2). La Figura 13 detalla estos elementos, proporcionando una comparación visual de la volatilidad capturada por el modelo.

En el gráfico superior, se observan los retornos diarios de Corporación Favorita, los cuales ya han sido analizados previamente. Notamos varios picos que indican grandes movimientos en los precios de las acciones, lo cual sugiere períodos de alta volatilidad.

El segundo gráfico muestra la volatilidad condicional estimada utilizando el modelo ARCH(2). Aquí

se puede observar que el modelo captura bien los períodos de alta volatilidad, con picos pronunciados en los momentos donde los retornos mostraron grandes movimientos. La volatilidad condicional regresa a valores bajos entre estos picos, lo que indica que el modelo ARCH(2) tiene una capacidad aceptable para modelar la persistencia de la volatilidad.

En definitiva, el modelo ARCH(2) proporciona una representación adecuada de la volatilidad en los retornos de las acciones de Corporación Favorita. El modelo ARCH(2) es parsimonioso y, además, por lo expuesto anteriormente, logra capturar eficazmente la volatilidad en los datos analizados. Esto sugiere que el ARCH(2) ofrece un buen equilibrio entre simplicidad y precisión en el modelado de la volatilidad.

Validación del modelo final

El modelo definitivo ajustado es:

$$r_t = \text{ma1} \times \epsilon_{t-1} + \text{ma3} \times \epsilon_{t-3} + \epsilon_t$$

donde

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \times \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \times \epsilon_{t-2}^2$$

.

Los coeficientes obtenidos del ajuste del modelo MA(3) y ARCH(2) son esenciales para comprender la dinámica de los retornos y la volatilidad de las acciones de Corporación Favorita. El coeficiente μ es nulo, lo que indica que no se considera un retorno esperado constante a lo largo del tiempo. Los coeficientes de los términos de media móvil **ma1** (-0.3908), **ma2** (0) y **ma3** (0.0635) capturan la autocorrelación en los retornos pasados, ajustando cómo los choques pasados afectan los retornos actuales.

En cuanto a la volatilidad condicional, el coeficiente ω (0.000098) es el término constante que determina el nivel base de la varianza. Los coeficientes α_1 (0.197250) y α_2 (0.779869) son fundamentales en el modelo ARCH, donde α_1 refleja el impacto de los choques pasados en la volatilidad actual y α_2 mide el efecto de los choques más antiguos sobre la volatilidad presente. Estos valores indican que la volatilidad actual está influenciada tanto por los choques recientes como

por la persistencia de la volatilidad pasada, lo cual es característico de los modelos ARCH y su capacidad para capturar la heterocedasticidad en las series temporales financieras.

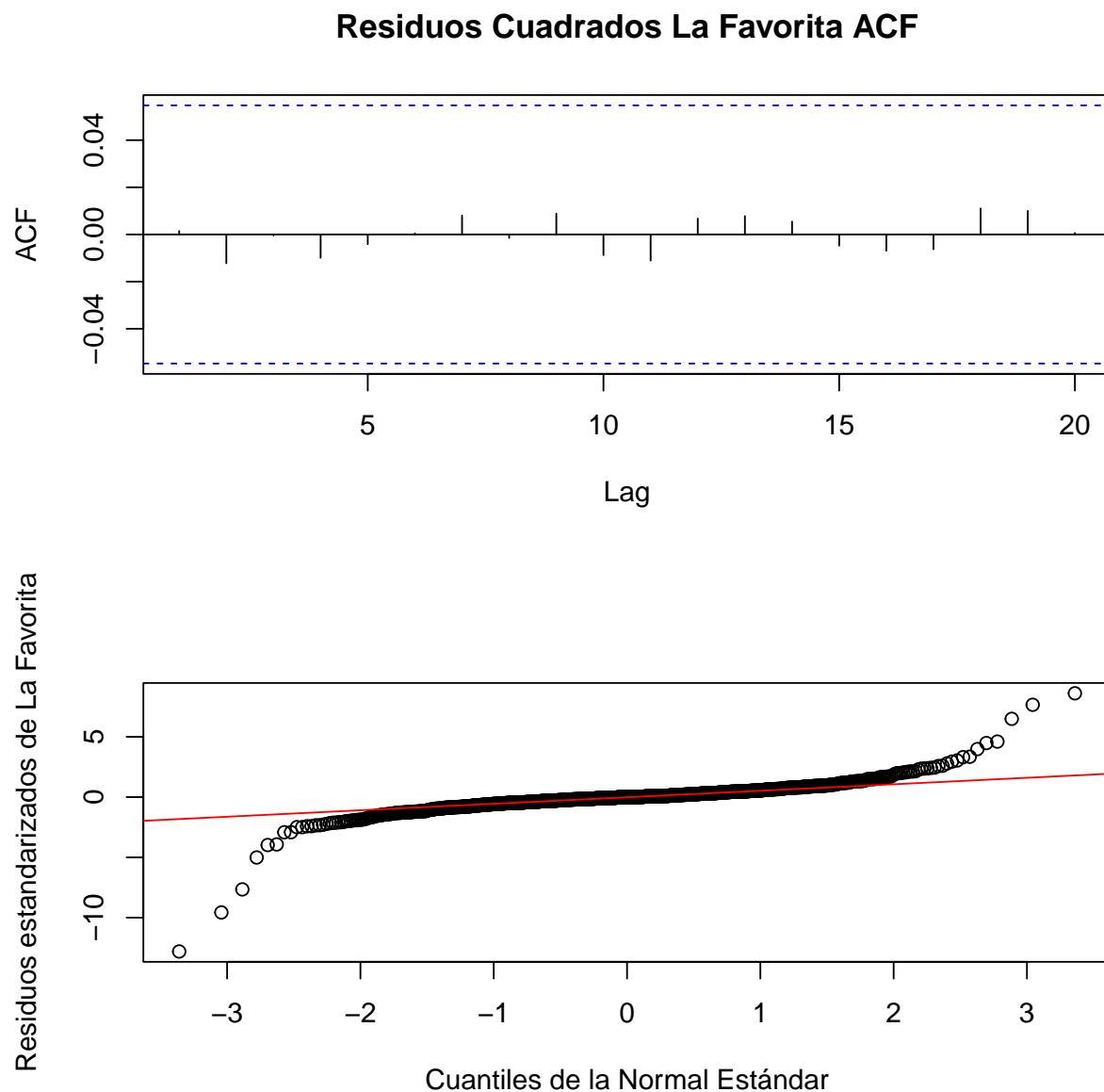


Figura 14: Diagnósticos gráficos de los residuos del modelo ARCH(2) ajustado para Corporación Favorita.

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa de Valores de Guayaquil (BVG).

El análisis de los residuos del modelo ARCH(2) ajustado para Corporación Favorita revela aspectos importantes sobre su adecuación. En la Figura 14 se presentan los diagnósticos, mostrando la ACF de los residuos al cuadrado y el gráfico QQ de los residuos estandarizados. **No se presentan**

autocorrelaciones significativas en la ACF de los residuos al cuadrado, sugiriendo que el modelo captura adecuadamente la volatilidad. En el gráfico QQ de los residuos estandarizados comparados con una distribución normal estándar, se observa que la mayoría de los puntos se alinean con la línea roja, aunque hay algunos desvíos en los extremos, indicando posibles problemas de no normalidad en las colas de la distribución.

Pronóstico

```
*-----*
*      GARCH Model Forecast      *
*-----*

Model: sGARCH
Horizon: 7
Roll Steps: 0
Out of Sample: 0
```

0-roll forecast [T0=1281-01-01]:

	Series	Sigma
T+1	0	0.01050
T+2	0	0.01095
T+3	0	0.01441
T+4	0	0.01525
T+5	0	0.01748
T+6	0	0.01843
T+7	0	0.02008

El pronóstico muestra que el valor esperado de la serie (r_t) se mantiene constante en 0 para los próximos 7 días. Sin embargo, la volatilidad (σ_t) varía, comenzando en 0.01050 y aumentando gradualmente a 0.02008 en el séptimo día. Esta variación en la volatilidad es consistente con la naturaleza de los modelos ARCH, que permiten que la volatilidad condicional cambie con el tiempo en respuesta a nuevos choques y la persistencia de la volatilidad pasada.

El aumento gradual en la volatilidad pronosticada sugiere que, aunque el retorno esperado se mantiene estable, la incertidumbre en torno a este retorno aumenta con el tiempo. Este comportamiento es típico en mercados financieros, donde la volatilidad tiende a agruparse y puede aumentar en respuesta a choques persistentes o condiciones de mercado cambiantes.

Conclusión

En este trabajo se ha abordado el estudio y aplicación de los modelos heterocedásticos condicionales autorregresivos (ARCH) y generalizados (GARCH) en el análisis de series temporales financieras, específicamente utilizando datos de los precios de las acciones de Corporación Favorita en el mercado bursátil ecuatoriano.

Los principales hallazgos de esta investigación son los siguientes:

1. **Modelos ARCH y GARCH:** Se ha demostrado que los modelos ARCH y GARCH pueden capturar y modelar la volatilidad en series temporales financieras. La estimación de parámetros mediante métodos de máxima verosimilitud proporcionó un ajuste razonable a los datos históricos, permitiendo realizar predicciones sobre la volatilidad futura.
2. **Heterocedasticidad:** El análisis de los residuos del modelo ARMA inicial mostró la presencia de heterocedasticidad en la serie temporal, lo que justificó la necesidad de utilizar modelos ARCH y GARCH para un modelado más preciso de la volatilidad.
3. **Aplicaciones Financieras:** Estos modelos han mostrado utilidad para la valoración de opciones y la gestión de carteras de inversión. La capacidad de estos modelos para predecir la volatilidad condicional proporciona una herramienta valiosa para los gestores de riesgos y analistas financieros, mejorando la toma de decisiones en entornos de alta volatilidad.
4. **Validación del Modelo:** Los resultados obtenidos mediante la aplicación de los modelos ARCH y GARCH fueron validados utilizando diversas pruebas de diagnóstico y análisis de residuos. Estos resultados corroboraron, en general, la capacidad de los modelos para capturar las características de la volatilidad presente en los rendimientos de las acciones de Corporación Favorita.

A pesar de estos hallazgos, es importante señalar que este estudio tiene áreas de mejora. La eficacia de los modelos ARCH y GARCH depende en gran medida de la correcta especificación del modelo y la elección de los datos utilizados. Además, estos modelos, aunque útiles, no son los únicos disponibles para el análisis de volatilidad, y su desempeño debe ser comparado con otros enfoques.

Bibliografía

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705>
- Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis: Quantitative Methods in Finance*. Wiley.
- Andersen, T.G., Davis, R.A., Kreiß, J.-P., & Mikosch, T. (Eds.). (2009). *Handbook of Financial Time Series*. Springer. ISBN: 978-3-540-71296-1.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- Bollerslev, T., & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11(2), 143-172.
- Brooks, C., & Burke, S. P. (2001). Information criteria for GARCH model selection: An application to high frequency data. *European Journal of Finance*, 7(3), 239-260.
- Bolsa de Valores Guayaquil. (n.d.). Retrieved May 23, 2024, from <https://www.bolsadevaloresguayaquil.com/>
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., & Reinsel, G.C. (2013). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons.
- Corporación Favorita. (n.d.). Celebramos nuestra junta anual de accionistas. Retrieved May 23, 2024, from <https://www.corporacionfavorita.com/celebramos-nuestra-junta-anual-de-accionistas/>
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>

- Fiorentini, G., Calzolari, G., & Panattoni, L. (1996). Analytic derivatives and the computation of GARCH estimates. *Journal of Applied Econometrics*, 11(3), 399-418. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1255\(199605\)11:3<399::AID-JAE394>3.0.CO;2-2](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1255(199605)11:3<399::AID-JAE394>3.0.CO;2-2)
- Hansen, P. R., & Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?. *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873-889. DOI: 10.1002/jae.800.
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3^a ed.). McGraw-Hill Education. ISBN: 978-0071464956.
- Lee, S., & Hansen, L. P. (1993). Asymptotic properties of GARCH estimators and tests of misspecification. *Journal of Econometrics*, 55(3), 409-442. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(93\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0304-4076(93)90080-X)
- Lumsdaine, R. L. (1992). Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) models. *Econometric Theory*, 8(3), 362-380. <https://doi.org/10.1017/S0266466600010721>
- Lumsdaine, R. L., & Ng, S. (1999). Testing for ARCH in the presence of a possibly misspecified conditional mean. *Journal of Econometrics*, 93(2), 257-279. [https://doi.org/10.1016/S0304-4076\(99\)00011-1](https://doi.org/10.1016/S0304-4076(99)00011-1)
- MarketScreener. (n.d.). Corporación Favorita C.A. Retrieved May 23, 2024, from <https://es.marketscreener.com/cotizacion/accion/CORPORACION-FAVORITA-C-A-120960954/empresa/>
- McCullough, B. D., & Renfro, C. G. (1999). The accuracy of econometric software. *Journal of Economic and Social Measurement*, 25(3-4), 241-265. <https://doi.org/10.3233/JEM-1999-0170>
- Tsay, R.S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Wiley-Interscience. ISBN-13: 978-0-471-69074-0.

Anexos

Código R

```
# Cargar librerías necesarias
library(dplyr)
library(quantmod)
library(xts)
library(openxlsx)
library(moments)
library(tseries)
library(gt)
library(TSA)
library(forecast)
library(dynlm)
library(ggplot2)
library(gridExtra)
library(knitr)
library(rugarch)

# Cargar datos desde GitHub
data <- read.xlsx(
  "https://github.com/vitoroma101/TFM-ARCH-GARCH-Models/blob/main/BVG-acciones.xlsx",
  startRow = 3,
  colNames = TRUE
)

# Convertir la columna de fechas de formato numérico a Date
data$FECHA.NEGOCIACIÓN <- as.Date(data$FECHA.NEGOCIACIÓN, origin = "1899-12-30")

# Filtrar los datos para la empresa "CORPORACIÓN FAVORITA C.A."
#y seleccionar el último precio de cierre por día
```

```

newdata <- data %>%
  filter(EMISOR == "CORPORACION FAVORITA C.A.") %>%
  group_by(FECHA.NEGOCIACIÓN) %>%
  slice_tail(n = 1) %>%
  ungroup()

# Convertir data_filtrada a xts
data_xts <- xts(newdata$PRECIO, order.by = newdata$FECHA.NEGOCIACIÓN)

# Gráfico de la cotización de las acciones de Corporación Favorita
plot(data_xts, main = "")

# Calcular rendimientos logarítmicos diarios
log_returns_daily <- diff(log(data_xts))
log_returns_daily <- na.omit(log_returns_daily)

# Resumen de los rendimientos logarítmicos diarios
summary(log_returns_daily)

# Convertir los rendimientos logarítmicos diarios a data frame para ggplot
log_returns_df <- data.frame(date = index(log_returns_daily),
                             log_returns = coredata(log_returns_daily))

# Histograma de rendimientos logarítmicos diarios
p <- ggplot(log_returns_df, aes(x = log_returns)) +
  geom_histogram(color = "black", fill = "white") +
  labs(x = "Rendimientos Diarios", y = "Frecuencia") +
  theme_minimal()

p

```

```
# Crear gráficos de rendimientos logarítmicos diarios, al cuadrado y absolutos
```

```
par(mfrow=c(3,1))
```

```
plot(log_returns_daily,
```

```
  main = "Rendimientos Logarítmicos de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "blue")
```

```
plot(log_returns_daily^2,
```

```
  main = "Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "red")
```

```
plot(abs(log_returns_daily),
```

```
  main = "Rendimientos Logarítmicos Absolutos de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "green")
```

```
# Crear gráficos ACF y PACF
```

```
par(mfrow = c(3, 1))
```

```
acf(log_returns_daily,
```

```
  main = "ACF de Rendimientos Logarítmicos de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "blue",
```

```
  lag.max = 20)
```

```
acf(log_returns_daily^2,
```

```
  main = "ACF de Rendimientos Logarítmicos al Cuadrado de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "red",
```

```
  lag.max = 20)
```

```
acf(abs(log_returns_daily),
```

```
  main = "ACF de Rendimientos Logarítmicos Absolutos de CORPORACIÓN FAVORITA",
```

```
  col = "green",
```

```
  lag.max = 20)
```

```

# Pruebas de Ljung-Box para diferentes retardos
ljung_box_results <- lapply(c(1, 5, 10), function(lag) {
  list(
    returns = Box.test(log_returns_daily, lag = lag, type = "Ljung-Box"),
    squared = Box.test(log_returns_daily^2, lag = lag, type = "Ljung-Box"),
    abs = Box.test(abs(log_returns_daily), lag = lag, type = "Ljung-Box")
  )
})

# Pruebas de Lagrange Multiplier (LM) para efectos ARCH para diferentes retardos
arch_lm_results <- lapply(c(1, 5, 10), function(lag) {
  ArchTest(log_returns_daily, lags = lag)
})

# Ajustar modelo ARIMA
modelo_arima <- auto.arima(log_returns_daily)
modelo_arima

# Ajustar el modelo ARIMA(0,0,3) con la opción de fijar ma2 a 0
modelo_arima_sin_ma2 <- Arima(log_returns_daily, order = c(0, 0, 3),
                             fixed = c(NA, 0, NA, NA))
modelo_arima_sin_ma2

# Ajustar el modelo ARIMA(0,0,3) sin incluir la media
modelo_arima_sin_media <- Arima(log_returns_daily, order = c(0, 0, 3),
                                fixed = c(NA, 0, NA), include.mean = FALSE)
modelo_arima_sin_media

# Graficar y verificar residuos
autoplot(modelo_arima_sin_media)
checkresiduals(modelo_arima_sin_media)

```

```

# Calcular errores y errores al cuadrado
Errores <- resid(modelo_arima_sin_media)
Errores_cuadrado <- resid(modelo_arima_sin_media)^2
chartSeries(Errores_cuadrado, name = "Errores al Cuadrado")

# Ajustar modelo de regresión con errores al cuadrado
Regresion1 <- dynlm(Errores_cuadrado ~ L(Errores_cuadrado))
summary(Regresion1)

# Generar ACF y PACF de los errores y errores al cuadrado
plot_acf_errores <- autoplot(acf(Errores, lag.max = 20, plot = FALSE)) +
  labs(title = "ACF de los Errores", x = "Retardos", y = "Autocorrelación")

plot_pacf_errores <- autoplot(pacf(Errores, lag.max = 20, plot = FALSE)) +
  labs(title = "PACF de los Errores", x = "Retardos", y = "Autocorrelación parcial")

plot_acf_errores_cuadrado <- autoplot(acf(Errores_cuadrado, lag.max = 20, plot = FALSE)) +
  labs(title = "ACF de los Errores al Cuadrado", x = "Retardos", y = "Autocorrelación")

plot_pacf_errores_cuadrado <- autoplot(pacf(Errores_cuadrado,
                                           lag.max = 20,
                                           plot = FALSE)) +
  labs(title = "PACF de los Errores al Cuadrado",
       x = "Retardos",
       y = "Autocorrelación parcial")

# Combinar todas las gráficas en un solo gráfico
grid.arrange(plot_acf_errores, plot_pacf_errores,
             plot_acf_errores_cuadrado, plot_pacf_errores_cuadrado, ncol = 2)

# Especificación de modelos ARCH y GARCH_____

```

```

# Extraer los residuos del modelo ARIMA sin media
residuals_arima <- residuals(modelo_arima_sin_media)

# Ajustar el modelo ARCH(1)
spec_arch1 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                          variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 0)))
fit_arch1 <- ugarchfit(spec = spec_arch1, data = residuals_arima)
arch1_ic <- infocriteria(fit_arch1)
arch1_loglik <- likelihood(fit_arch1)
print(arch1_ic)
print(arch1_loglik)

# Ajustar el modelo ARCH(2)
spec_arch2 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                          variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(2, 0)))
fit_arch2 <- ugarchfit(spec = spec_arch2, data = residuals_arima)
arch2_ic <- infocriteria(fit_arch2)
arch2_loglik <- likelihood(fit_arch2)
print(arch2_ic)
print(arch2_loglik)

# Extraer los residuos estandarizados
standardized_residuals_arch2 <- residuals(fit_arch2, standardize = TRUE)

# Prueba de Ljung-Box
ljung_box_arch2 <- Box.test(standardized_residuals_arch2, lag = 12, type = "Ljung-Box")

# Prueba ARCH LM
arch_lm_arch2 <- ArchTest(standardized_residuals_arch2, lags = 12)

# Prueba de Jarque-Bera
jb_test_arch2 <- jarque.bera.test(standardized_residuals_arch2)

# Ajustar el modelo ARCH(3)

```



```

spec_arch3 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                          variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(3, 0)))
fit_arch3 <- ugarchfit(spec = spec_arch3, data = residuals_arima)
arch3_ic <- infocriteria(fit_arch3)
arch3_loglik <- likelihood(fit_arch3)
print(arch3_ic)
print(arch3_loglik)

# Extraer los residuos estandarizados
standardized_residuals_arch3 <- residuals(fit_arch3, standardize = TRUE)
# Prueba de Ljung-Box
ljung_box_arch3 <- Box.test(standardized_residuals_arch3, lag = 12, type = "Ljung-Box")
# Prueba ARCH LM
arch_lm_arch3 <- ArchTest(standardized_residuals_arch3, lags = 12)
# Prueba de Jarque-Bera
jb_test_arch3 <- jarque.bera.test(standardized_residuals_arch3)

# Ajustar el modelo ARCH(4)
spec_arch4 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                          variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(4, 0)))
fit_arch4 <- ugarchfit(spec = spec_arch4, data = residuals_arima)
arch4_ic <- infocriteria(fit_arch4)
arch4_loglik <- likelihood(fit_arch4)
print(arch4_ic)
print(arch4_loglik)

# Ajustar el modelo ARCH(5)
spec_arch5 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                          variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(5, 0)))
fit_arch5 <- ugarchfit(spec = spec_arch5, data = residuals_arima)
arch5_ic <- infocriteria(fit_arch5)

```

```

arch5_loglik <- likelihood(fit_arch5)
print(arch5_ic)
print(arch5_loglik)

# Ajustar el modelo GARCH(1,1)
spec_garch11 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                           variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)))
fit_garch11 <- ugarchfit(spec = spec_garch11, data = residuals_arima, solver = "hybrid")
garch11_ic <- infocriteria(fit_garch11)
garch11_loglik <- likelihood(fit_garch11)
print(garch11_ic)
print(garch11_loglik)

# Ajustar el modelo GARCH(2,1)
spec_garch21 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                           variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(2, 1)))
fit_garch21 <- ugarchfit(spec = spec_garch21, data = residuals_arima)
garch21_ic <- infocriteria(fit_garch21)
garch21_loglik <- likelihood(fit_garch21)
print(garch21_ic)
print(garch21_loglik)

# Extraer los residuos estandarizados
standardized_residuals_garch21 <- residuals(fit_garch21, standardize = TRUE)

# Prueba de Ljung-Box
ljung_box_garch21 <- Box.test(standardized_residuals_garch21, lag = 12, type = "Ljung-Box")

# Prueba ARCH LM
arch_lm_garch21 <- ArchTest(standardized_residuals_garch21, lags = 12)

# Prueba de Jarque-Bera
jb_test_garch21 <- jarque.bera.test(standardized_residuals_garch21)

```

```

# Ajustar el modelo GARCH(1,2)
spec_garch12 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                           variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 2)))
fit_garch12 <- ugarchfit(spec = spec_garch12, data = residuals_arima)
garch12_ic <- infocriteria(fit_garch12)
garch12_loglik <- likelihood(fit_garch12)
print(garch12_ic)
print(garch12_loglik)

# Ajustar el modelo GARCH(2,2)
spec_garch22 <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE),
                           variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(2, 2)))
fit_garch22 <- ugarchfit(spec = spec_garch22, data = residuals_arima)
garch22_ic <- infocriteria(fit_garch22)
garch22_loglik <- likelihood(fit_garch22)
print(garch22_ic)
print(garch22_loglik)

# Extraer volatilidades condicionales
vol_arch2 <- sigma(fit_arch2)
vol_arch3 <- sigma(fit_arch3)
vol_garch21 <- sigma(fit_garch21)

# Crear dataframes para ggplot2
data_arch2 <- data.frame(Date = index(log_returns_daily),
                        Volatility = vol_arch2)
data_arch3 <- data.frame(Date = index(log_returns_daily),
                        Volatility = vol_arch3)
data_garch21 <- data.frame(Date = index(log_returns_daily),
                        Volatility = vol_garch21)
data_log_returns <- data.frame(Date = index(log_returns_daily),

```

```

LogReturns = as.numeric(log_returns_daily))

# Graficar retornos diarios
plot_returns <- ggplot(data_log_returns, aes(x = Date, y = LogReturns)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Retornos Diarios de La Favorita") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.title.x = element_blank(), axis.title.y = element_blank())

# Graficar volatilidad condicional ARCH(2)
plot_arch2 <- ggplot(data_arch2, aes(x = Date, y = Volatility)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Volatilidad Condicional de La Favorita (ARCH(2))") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.title.x = element_blank(), axis.title.y = element_blank())

# Graficar volatilidad condicional ARCH(3)
plot_arch3 <- ggplot(data_arch3, aes(x = Date, y = Volatility)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Volatilidad Condicional de La Favorita (ARCH(3))") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.title.x = element_blank(), axis.title.y = element_blank())

# Graficar volatilidad condicional GARCH(2,1)
plot_garch21 <- ggplot(data_garch21, aes(x = Date, y = Volatility)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Volatilidad Condicional de La Favorita (GARCH(2,1))") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.title.x = element_blank(), axis.title.y = element_blank())

# Mostrar gráficos

```

```

grid.arrange(plot_returns, plot_arch2, plot_arch3, plot_garch21, ncol = 1)

#MODELO DEFINITIVO_-----

# Obtener residuos estandarizados y residuos al cuadrado Modelo ARCH(2)
standardized_residuals <- residuals(fit_arch2, standardize = TRUE)
squared_residuals <- standardized_residuals^2

# Graficar ACF de los residuos al cuadrado
par(mfrow = c(2, 1)) # Configurar la ventana gráfica para dos gráficos

# ACF de los residuos al cuadrado
acf(squared_residuals, main = "Residuos Cuadrados La Favorita ACF", lag.max = 20)

# Q-Q plot de los residuos estandarizados
qqnorm(standardized_residuals,
      main = "",
      ylab = "Residuos estandarizados de La Favorita",
      xlab = "Cuantiles de la Normal Estándar")
qqline(standardized_residuals, col = "red")

# Realizar el pronóstico
ug_forecast = ugarchforecast(fit_arch2, n.ahead = 7)
ug_forecast

```