Diskretne Coonsove ploskveva urnikov

Matej Rojec, Vito Rozman

4. december 2022

Kazalo

1 Uvod in motivacija

1.1 Uvod v Bézierjeve ploskeve

Bézierjevo ploskev $\mathbf{p} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ iz tenzorskega produkta stopnje $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u,v) := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta u, v iz enotskega kvadrata, t.j $(u,v) \in [0,1]^2$ ter $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki $\mathbf{b}_{i,j}$.

Pri fiksnem v, množica $\{\mathbf{b}(u,v) \mid u \in [0,1]\}$ predstavlja kontrolnimi točkami

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v), \qquad i = 0, 1, \ldots, m,$$

ki so izračunane kot točke na Bézierjevih krivuljah stopnje n pri parametru v.

1.2 Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podane kontrole točke $\mathbf{b}_{i,j},\ i = 0, \ldots, m,\ j = 0, \ldots, n$. Te določajo štiri robne krivulje Te omejujejo iskano ploskev $\mathbf{p}$ iz tenzorskega produkta stopnje (n, m). Kontrolne točke

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
\mathbf{b}_{0,1} & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\mathbf{b}_{0,n-1} & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
\mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
\end{array}$$

določajo štiri Bézierjev krivulje:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), \\
\mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u), \\
\mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \\
\mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),
\end{aligned}$$

kjer je domena enotski kvadrat, t.j. $(u, v) \in [0, 1]^2$. Kontrolne točke torej omejujejo ploskev $\mathbf{p}$. Sedaj potrebujemo definirati še ostale kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j},\ i = 1, \ldots, m-1\ , j = 1, \ldots, n-1$. V ta namen definiramo tri dodatne ploskve:

1. Prva je Bézierjeva ploskev stopnje $(m, 1)$, ki je kot ploskev stopnje (m, n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(1)} = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n}$$

2. Druga je Bézierjeva ploskev stopnje $(1, n)$, ki je kot ploskev stopnje (m, n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(2)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j}$$

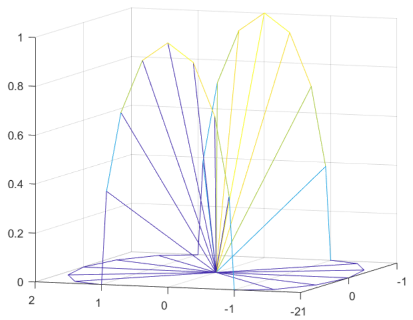
3. Tretja je Bézierjeva ploskev stopnje $(1,1)$, ki je kot ploskev stopnje (m,n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(3)} = \left(1-\frac{i}{m}\right)\left(1-\frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_{0,0}+\frac{i}{m}\left(1-\frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_{m,0}+\left(1-\frac{i}{m}\right)\frac{j}{n}\mathbf{b}_{0,n}+\frac{i}{m}\frac{j}{n}\mathbf{b}_{m,n}$$

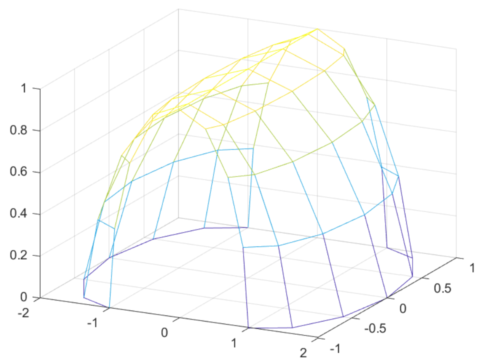
Coonsova ploskev $\mathbf{p}$ je definirana s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_{i,j} := \mathbf{b}_{i,j}^{(1)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(2)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(3)}.$$

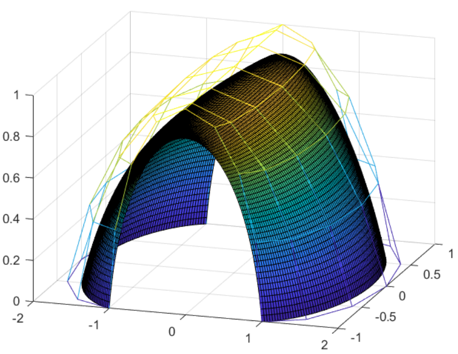
Primer krivulje je prikazan na sliki 1. Prikazane so robne točke ter ogrodje kontrolnih točk, ki jih dobimo iz teh robnih točk in krivulja na danem ogrodju.



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

Iz slike 1 opazimo, da so ploskev zelo ravna. Več o tem bomo komentirali kasneje.

2 Lastnosti Coonsovih ploskev

Coonsova ploskve minimzirajo zasuk, definiran kot:

$$\int_{[0,1]^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{p}(u, v) \right) dS. \tag{1}$$

Torej coonsova ploskve doseže minimum izraza (1).

Posledica tega je, da so coonsova ploskve lahko v primerih preveč ravne in ne interpolirajo dobro kontrolnih točk.