

# Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

4. december 2022

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod in motivacija</b>	<b>iii</b>
1.1	Uvod v Bézierjeve ploskeve . . . . .	iii
1.2	Coonsove ploskve . . . . .	iii
<b>2</b>	<b>Lastnosti Coonsovih ploskev</b>	<b>v</b>
2.1	Minimiziraje zasuka . . . . .	v
2.2	Ohranjanje Coonsove ploskve . . . . .	vi

# Slike

1	Primer konstrukcije Coonsove ploskve . . . . .	v
---	--	---

# 1 Uvod in motivacija

## 1.1 Uvod v Bézierjeve ploskeve

Bézierjevo ploskev  $\mathbf{p} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iz tenzorskega produkta stopnje  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta  $u, v$  iz enotskega kvadrata, t.j.  $(u, v) \in [0, 1]^2$  ter  $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$  domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki  $\mathbf{b}_{i,j}$ .

Pri fiksnem  $v$ , množica  $\{\mathbf{b}(u, v) \mid u \in [0, 1]\}$  predstavlja kontrolnimi točkami

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

ki so izračunane kot točke na Bézierjevih krivuljah stopnje  $n$  pri parametru  $v$ .

## 1.2 Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podane kontrole točke  $\mathbf{b}_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Te določajo štiri robne krivulje. Te omejujejo iskano ploskev  $\mathbf{p}$  iz tenzorskega produkta stopnje  $(n, m)$ . Kontrolne točke

$\mathbf{b}_{0,0}$	$\mathbf{b}_{1,0}$	$\dots$	$\mathbf{b}_{m-1,0}$	$\mathbf{b}_{m,0}$
$\mathbf{b}_{0,1}$				$\mathbf{b}_{m,1}$
$\vdots$				$\vdots$
$\mathbf{b}_{0,n-1}$				$\mathbf{b}_{m,n-1}$
$\mathbf{b}_{0,n}$	$\mathbf{b}_{1,n}$	$\dots$	$\mathbf{b}_{m-1,n}$	$\mathbf{b}_{m,n}$

določajo štiri Bézierjev krivulje:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), \\ \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u), \\ \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \\ \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),\end{aligned}$$

kjer je domena enotski kvadrat, t.j.  $(u, v) \in [0, 1]^2$ . Kontrolne točke torej omejujejo ploskev  $\mathbf{p}$ . Sedaj potrebujemo definirati še ostale kontrolne točke  $\mathbf{b}_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . V ta namen definiramo tri dodatne ploskve:

1. Prva je Bézierjeva ploskev stopnje  $(m, 1)$ , ki je kot ploskev stopnje  $(m, n)$  podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(1)} = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n}$$

2. Druga je Bézierjeva ploskev stopnje  $(1, n)$ , ki je kot ploskev stopnje  $(m, n)$  podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(2)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j}$$

3. Tretja je Bézierjeva ploskev stopnje  $(1, 1)$ , ki je kot ploskev stopnje  $(m, n)$  podana s kontrolnimi točkami:

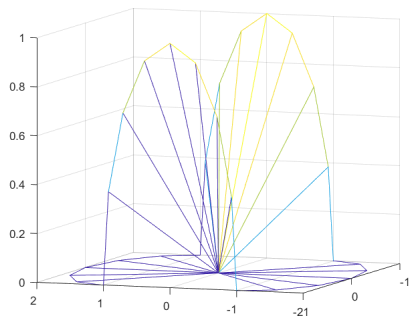
$$\mathbf{b}_{i,j}^{(3)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{0,0} + \frac{i}{m} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{m,0} + \left(1 - \frac{i}{m}\right) \frac{j}{n} \mathbf{b}_{0,n} + \frac{i}{m} \frac{j}{n} \mathbf{b}_{m,n}$$

Coonsova ploskev  $\mathbf{p}$  je definirana s kontrolnimi točkami

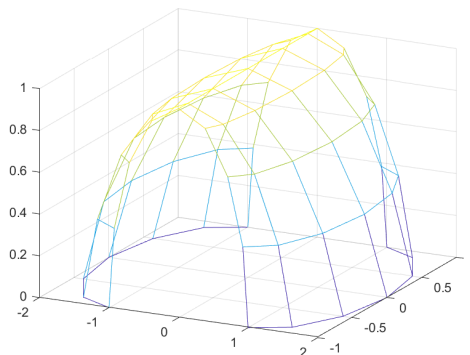
$$\mathbf{b}_{i,j} := \mathbf{b}_{i,j}^{(1)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(2)} - \mathbf{b}_{i,j}^{(3)}.$$

Primer krivulje je prikazan na sliki 1. Prikazane so robne točke ter ogrodje kontrolnih točk, ki jih dobimo iz teh robnih točk in krivulja na danem ogrodju.

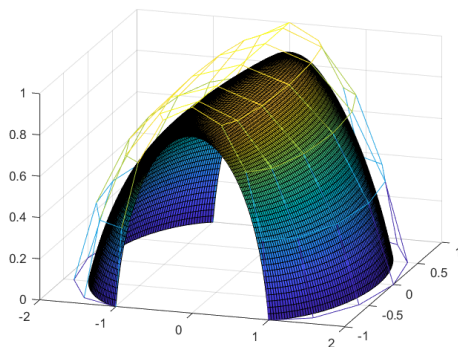
Iz slike 1 opazimo, da so ploskev zelo ravna. Več o tem bomo komentirali kasneje.



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

## 2 Lastnosti Coonsovih ploskev

### 2.1 Minimziranje zasuka

Coonsova ploskve minimzirajo zasuk, definiran kot:

$$\int_{[0,1]^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{p}(u, v) \right)^2 dS. \quad (1)$$

Torej coonsova ploskev doseže minimum izraza (1). Posledica tega je, da so Coonsova ploskve lahko v primerih preveč ravne in ne interpolirajo dobro kontrolnih točk. Taka ploskev prav tako zadošča Euler-Lagrangovi parcialni diferencialni enačbi, torej velja:

$$\frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2} \mathbf{p}(u, v) = 0. \quad (2)$$

## 2.2 Ohranjanje Coonsove ploskve

Izberimo dve točki  $(u_0, v_0)$  ter  $(u_1, v_1)$ , ki definirajo pravokotnik  $P$  v domeni  $[0, 1]^2$  Coonsove ploskve. Robovi pravokotnika  $P$  definirajo štiri robne krivulje. Sedaj tvorimo novo Coonsovo ploskev podano z robnimi krivuljami pravokotnika  $P$ . Ta ploskev je enaki Coonsovi ploskvi prvotne krivulje zožane na pravokotnik  $P$ .

Predpostavimo, da imamo podano ploskev  $\mathbf{p}$  iz tenzorskega produkta stopnje  $(n, m)$ . Oglejmo si poljubno  $3 \times 3$  podmrežo podano kot:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j-1} \\ \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i+1,j} \\ \mathbf{b}_{i-1,j+1} & \mathbf{b}_{i,j+1} & \mathbf{b}_{i+1,j+1} \end{array}$$

V primeru, da poznamo robne točke  $3 \times 3$  mreže, lahko po zgoraj povedanem notranjo točko  $\mathbf{b}_{i,j}$  izračunamo kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} = & -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i+1,j} + \mathbf{b}_{i,j+1}). \end{aligned}$$

To lahko zapišemo s pomočjo t.i. maske kot:

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \cdot & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Mreža je sestavljena iz  $(m+1) \times (n+1)$  kontrolnih točk, od teh ne poznamo  $(m-1) \times (n-1)$  izmed njih. Za vsako izmed  $(m-1) \times (n-1)$  imamo natanko eno enačbo, ki je določena z zgoraj opisano masko. To je seveda zelo časovno zahtevna metoda, da izračunamo kontrolne točke Coonsove ploskve, ampak nam da nov vpogled, kako bi lahko izračunali kontrolne točke Coonsove ploskve. Vidimo, da so kontrolne točke Coonsove ploskve poseben primer maske oblike:

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \cdot & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array},$$

kjer je  $(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$ . To nam, da idejo da bi lahko izbrali različne parametra  $\alpha$  in  $\beta$  sprmenili. Vedno bomo privzeli, da velja  $4\alpha + 4\beta = 1$ , saj tako ohranjamo afinost maske. S perturbiranjem parametrov  $\alpha$  in  $\beta$  dobimo torej nov razred kontrolnih shem. Imenujemo jih stalne kontrolne točke. V članku [1] so raziskovali vpliv  $\alpha$  na optimalno oblike ploskve. Ugotovili so, da za izbrana  $m$  in  $n$  ni vedno ene optimalne vrednosti za  $\alpha$ , ki bo dala dobro obliko ploskve. Namreč optimalna vrednost  $\alpha$  je odvisna od oblike robnih krivulj.

## Literatura

- [1] G. Farin, F. Hansford, *Discrete Coons patches*,