

Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

4. december 2022

Kazalo

1	Uvod in motivacija	iii
1.1	Uvod v Bézierjeve ploskeve	iii
1.2	Coonsove ploskve	iii
2	Lastnosti Coonsovih ploskev	v
2.1	Minimiziraje zasuka	v
2.2	Ohranjanje Coonsove ploskve	vi

Slike

1	Primer konstrukcije Coonsove ploskve	v
---	------------------------------------------------	---

1 Uvod in motivacija

1.1 Uvod v Bézierjeve ploskeve

Bézierjevo ploskev $\mathbf{p} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iz tenzorskega produkta stopnje $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta u, v iz enotskega kvadrata, t.j. $(u, v) \in [0, 1]^2$ ter $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki $\mathbf{b}_{i,j}$.

Pri fiksnem v , množica $\{\mathbf{b}(u, v) \mid u \in [0, 1]\}$ predstavlja kontrolnimi točkami

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

ki so izračunane kot točke na Bézierjevih krivuljah stopnje n pri parametru v .

1.2 Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podane kontrole točke $\mathbf{b}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$. Te določajo štiri robne krivulje. Te omejujejo iskano ploskev \mathbf{p} iz tenzorskega produkta stopnje (n, m) . Kontrolne točke

$\mathbf{b}_{0,0}$	$\mathbf{b}_{1,0}$	\dots	$\mathbf{b}_{m-1,0}$	$\mathbf{b}_{m,0}$
$\mathbf{b}_{0,1}$				$\mathbf{b}_{m,1}$
\vdots				\vdots
$\mathbf{b}_{0,n-1}$				$\mathbf{b}_{m,n-1}$
$\mathbf{b}_{0,n}$	$\mathbf{b}_{1,n}$	\dots	$\mathbf{b}_{m-1,n}$	$\mathbf{b}_{m,n}$

določajo štiri Bézierjev krivulje:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), \\ \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u), \\ \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \\ \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),\end{aligned}$$

kjer je domena enotski kvadrat, t.j. $(u, v) \in [0, 1]^2$. Kontrolne točke torej omejujejo ploskev \mathbf{p} . Sedaj potrebujemo definirati še ostale kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j}$, $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, n-1$. V ta namen definiramo tri dodatne ploskve:

1. Prva je Bézierjeva ploskev stopnje $(m, 1)$, ki je kot ploskev stopnje (m, n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(1)} = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n}$$

2. Druga je Bézierjeva ploskev stopnje $(1, n)$, ki je kot ploskev stopnje (m, n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(2)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j}$$

3. Tretja je Bézierjeva ploskev stopnje $(1, 1)$, ki je kot ploskev stopnje (m, n) podana s kontrolnimi točkami:

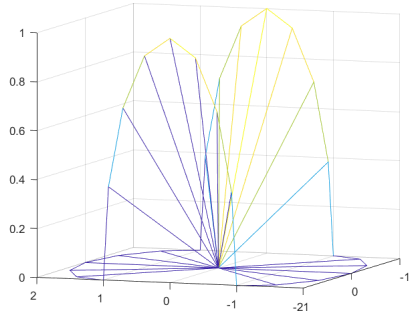
$$\mathbf{b}_{i,j}^{(3)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{0,0} + \frac{i}{m} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{m,0} + \left(1 - \frac{i}{m}\right) \frac{j}{n} \mathbf{b}_{0,n} + \frac{i}{m} \frac{j}{n} \mathbf{b}_{m,n}$$

Coonsova ploskev \mathbf{p} je definirana s kontrolnimi točkami

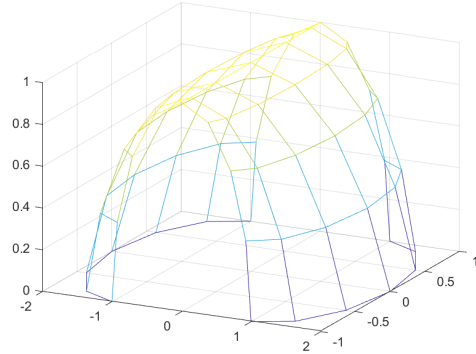
$$\mathbf{b}_{i,j} := \mathbf{b}_{i,j}^{(1)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(2)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(3)}.$$

Primer krivulje je prikazan na sliki 1. Prikazane so robne točke ter ogrodje kontrolnih točk, ki jih dobimo iz teh robnih točk in krivulja na danem ogrodju.

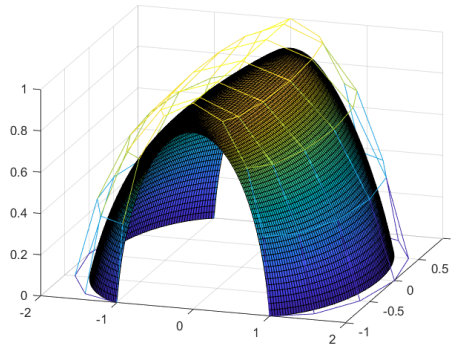
Iz slike 1 opazimo, da so ploskev zelo ravna. Več o tem bomo komentirali kasneje.



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

2 Lastnosti Coonsovih ploskev

2.1 Minimziranje zasuka

Coonsova ploskve minimzirajo zasuk, definiran kot:

$$\int_{[0,1]^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{p}(u, v) \right) dS. \quad (1)$$

Torej coonsova ploskev doseže minimum izraza (1). Posledica tega je, da so Coonsova ploskve lahko v primerih preveč ravne in ne interpolirajo dobro kontrolnih točk. Taka ploskev prav tako zadošča Euler-Lagrangovi parcialni diferencialni enačbi, torej velja:

$$\frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2} \mathbf{p}(u, v) = 0. \quad (2)$$

2.2 Ohranjanje Coonsove ploskve

Izberimo dve točki (u_0, v_0) ter (u_1, v_1) , ki definirajo pravokotnik P v domeni $[0, 1]^2$ Coonsove ploskve. Robovi pravokotnika P definirajo štiri robne krivulje. Sedaj tvorimo novo Coonsovo ploskev podano z robnimi krivuljami pravokotnika P . Ta ploskev je enaki Coonsovi ploskvi prvotne krivulje zožane na pravokotnik P .