

# Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

05.01.2023

- 1 Uvod
- 2 Coonosove ploskve
- 3 Stalnost Coonosove ploskve
- 4 Trikotne stalne ploskve

# Problem

## Opis problema

Podane imamo štiri robne krivulje:

$$\mathbf{x}(u, 0), \mathbf{x}(u, 1), \mathbf{x}(0, v), \mathbf{x}(1, u).$$

## Naloga

Najti ploskev

$$\mathbf{x}(u, v), (u, v) \in [0, 1]^2,$$

ki jih interpolira.

# Prevedba v jezik RPGO – Problem

## Problem

Podane imamo štiri kontrolne poligone:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & & \mathbf{b}_{m,0} & \\
 \mathbf{b}_{0,1} & & & & & \mathbf{b}_{m,1} & \\
 \vdots & & & & & \vdots & \\
 \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} & \\
 \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & & \mathbf{b}_{m,n} & 
 \end{array}$$

$\mathbf{b}_{i,j}$  pripada domenskemu parametru  $\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)$

# Prevedba v jezik RPGO – Problem

Ti določajo štiri Bézierjev krivulje

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^m(u), & \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^m(u), \\ \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), & \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v), \end{aligned}$$

nad domeno  $(u, v) \in [0, 1]^2$ .

# Coonosove ploskve – ideja

## Določitev točk

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{i,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
 \mathbf{b}_{0,1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 \mathbf{b}_{0,j} & & & \mathbf{b}_{i,j} & & & \mathbf{b}_{m,j} \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
 \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{i,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
 \end{array}$$

# Coonosove ploskve – eksplicitno

## Določitev točk

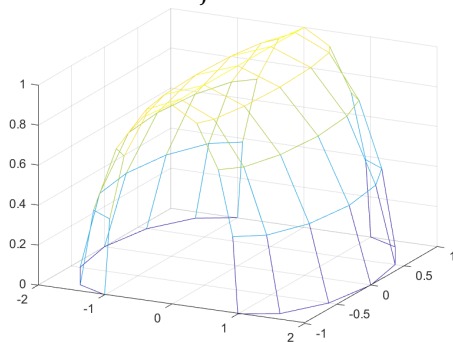
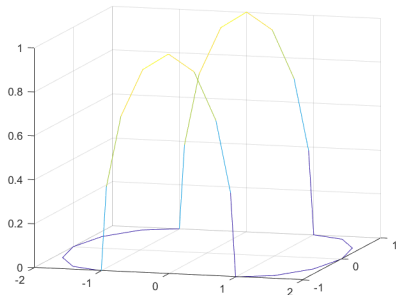
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} = & \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j} \\ & + \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n} \\ & - \left[1 - \frac{i}{m} \quad \frac{i}{m}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Definicija – Coonsova ploskev

Ploskev, ki jo dobimo s tako dobljenimi kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_{i,j}$  imenujemo Coonsova ploskev.

# Coonosove ploskve – primer

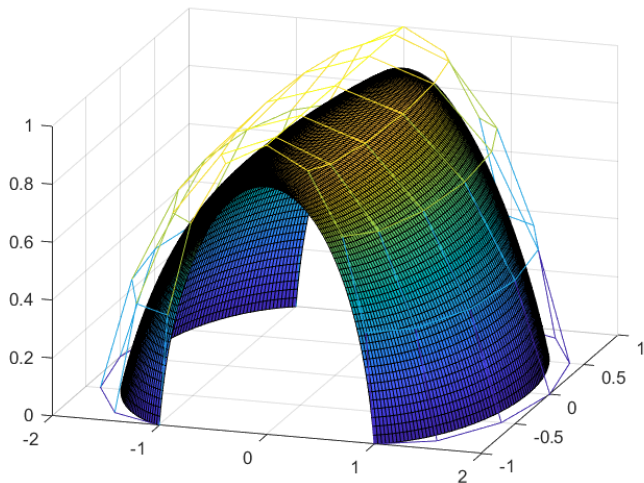
## Primer okvirja in kontrolnih točk Cossonove krivulje





# Coonosove ploskve – primer

## Primer Cossonove krivulje



# Ideja

## Stalnost

- Izberemo dve točki  $(u_0, v_0)$  in  $(u_1, v_1)$  ki razpenjata pravokotnik  $R$  v domeni  $D = [0, 1]^2$ .
- Štiri mejne pod-Coonosove ploskve se preslikajo na prvotno Coonosovo ploskev

To načelo lahko uporabimo na diskretni  $3 \times 3$  Coonsovi ploskivi:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\
 \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\
 \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1}
 \end{array}$$

# Računanje točk s pomočjo Coonosove ploskve

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko  $\mathbf{b}_{i,j}$  določimo na sledeč način:

Točke

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} = & -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}). \end{aligned}$$

Sistem  $(m + 1) \times (n + 1)$  linearnih enačb

# Stalne ploskve

## Coonosova maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \cdot & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

## Splošna tenzorska maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \cdot & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

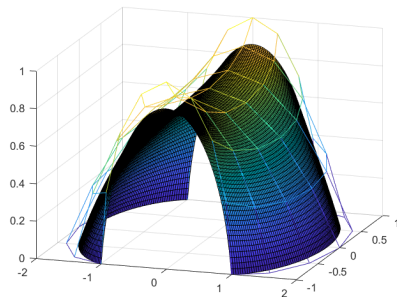
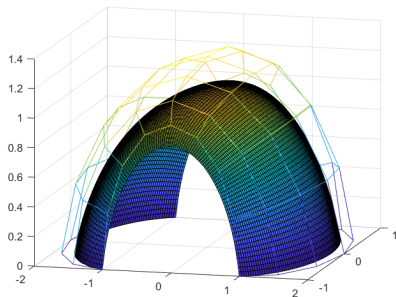
Afinost:  $4\alpha + 4\beta = 1$

## Coonosova maska

$$(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$$

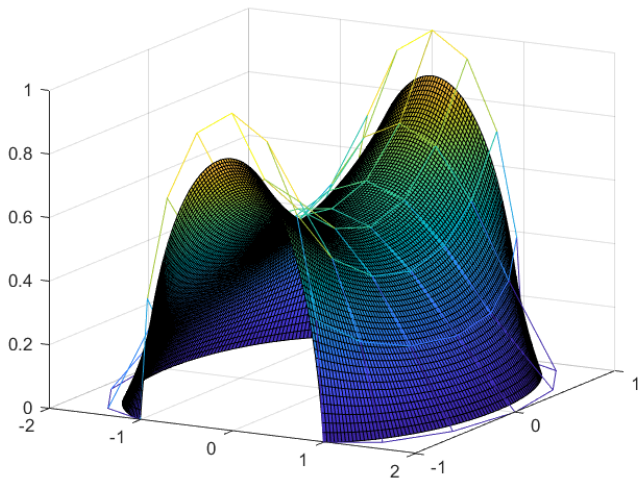
# Stalne ploskve – primer

Stalni krivulji pridobljeni s parametroma  $\alpha = -0.26$  (leva) in  $\alpha = -0.23$  (desna slika)



# Stalne ploskve – primer

Stalna krivulja pridobljena s parametrom  $\alpha = 0$



# Trikotna maska

## Maska

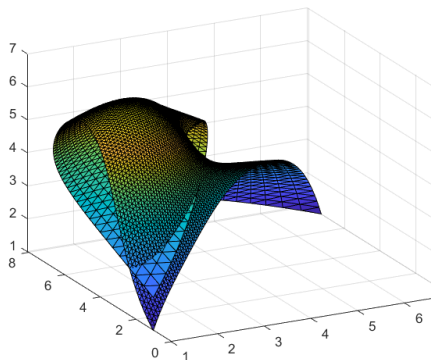
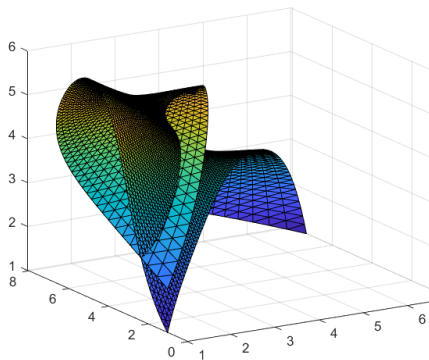
$$\mathbf{b}_i = \begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \beta & & \beta & \\ & & \beta & & \\ \alpha & \beta & & \beta & \alpha \\ & & \beta & & \end{array} \cdot$$

Rešimo sistem  $\binom{m+1}{2}$  linearnih enačb, kjer je  $m$  število kontrolnih točk na eni stranici trikotnika

Afinost:  $3\alpha + 6\beta = 1$

# Stalne trikotne krpe – primer 1

Stalni krivulji pridobljeni s parametroma  $\alpha = 0$  (leva) in  $\alpha = -1/6$  (desna slika)





# Stalne trikotne krpe – primer 2

Stalna krivulja pridobljena s parametrom  $\alpha = -1/9$

