Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

31. december 2022

Kazalo

Slike

1 Uvod

V seminarski nalogi bomo obravnavali ploskve, ki interpolirajo štiri mejne krivulje, ki so definirane vsaka na svoji stranici pravokotnika $[0,1]^2$. Te ploskve bomo imenovali diskretne Consove ploskve, ki jih bomo dobili z reševanjem linearnega sistema enačb. Pogledali si bomo tudi problem, ko imamo namesto pravokotnika podan trikotnik, ki ga interpolirajo tri merjne krivulje.

Eden od najstarejših problemov v Računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju je problem, kjer imamo podane štiri robne krivulje, radi pa bi poiskali ploskev z danimi robnimi krivuljami. Torej podane imamo robne krivulje

$$x(u,0), x(u,1), x(0,v), x(1,u),$$

kjer lahko brez škode za splošnost predpostavimo da je domena ploskve $x(u,v)$ enotni kvadrat, torej $(u,v) \in [0,1]^2$. Znana rešitev tega problema je bilinearna mešana Coonsova ploskev, ki je interpolirana z robnimi krivuljami, kot:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,v) =& (1-u)x(0,v) + ux(1,v) \\ &+ (1-v)x(u,0) + vx(u,v) \\ &- \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2 Diskretne Coonsove ploskve

V bolj modernih uporabah RPGO, so mejne krivulje Bézierjeve polinomske krivulje, ki jih napenjajo kontrolne točke.

Definicija 2.1 *Naj bodo dane kontrolne točke* $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$*. Potem je Bézierjeva krivulja stopnje n podana s polinomsko paramerizacijo* $\mathbf{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ *s predpisom*

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t),$$

kjer je $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$*, za* $i = 0, 1, \ldots, n$*.*

Definicija 2.2 *Bézierjevo ploskev* $\mathbf{p} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ *iz tenzorskega produkta stopnje* $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definiramo s parametrizacijo:*

$$\mathbf{p}(u,v) := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta $(u,v) \in [0,1]^2$ *ter* $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ *domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki* $\mathbf{b}_{i,j}$*.*

Predpostavimo, da imamo podane robne kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j}$ izračunane pri prametru (u, v), ki predstavljajo sledečo shemo:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
\mathbf{b}_{0,1} & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\mathbf{b}_{0,n-1} & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
\mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
\end{array}
$$

Sedaj lahko primer diskritiziramo in robne krivulje zapišemo s štirimi Bezierjevimi krivuljami:

$$
\mathbf{p}(u,0) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), \qquad \mathbf{p}(u,1) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u),
$$
$$
\mathbf{p}(0,v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \qquad \mathbf{p}(1,v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),
$$

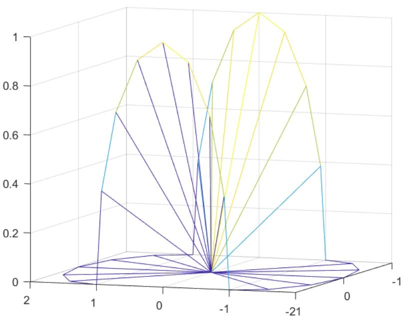
Notranje točke kontrolnega polinoma, lahko sedaj izračunamo kot:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{i,j} &= \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j} \\
&+ \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n} \\
&- \begin{bmatrix} 1 - \frac{i}{m} & \frac{i}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

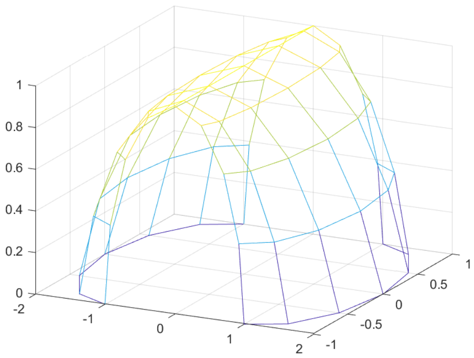
za $i = 1, 2, \dots, m-1$ in $j = 1, 2, \dots, n-1$. Izkaže se, da je kontrolni poligon ploskev, ki jo omejujejo robne krivulje, enak kontrolnemu poligonu, ki ga dobimo z opisano metodo. »Morda zanimivo: za določene oblike rabimo definirati samo robne krivulje«.

Ploskev, ki jo dobimo s tako dobljenimi kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo Coonsova ploskev.

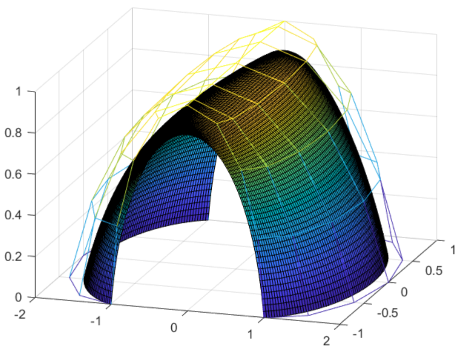
Primer take ploskve je slika 1, kjer je prikazan rob kontrolnega poligona, notranje točke kontrolnega poligona in Bézierjeva ploskev definirana nad kontrolnim poligonom



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

3 Ohranjanje Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podano Cooncova ploskev definirana nad domeno $D = [0,1]^2$. Izberemo dve točki (u_0, v_0) in (u_1, v_1) ki razpenjata pravokotnik R v domeni D. Štiri mejne krivulje pod-Consove ploskve definirae na R se preslikajo v štiri krivulje na prvotno Consovo ploskev. Izkaže se da pod-Coonsova ploskev definirana na R je prvotna Coonsova ploskev zožana na območje R. To načelo lahko uporabimo na diskretni 3×3 Consovi ploskivi

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\ \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\ \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1} \end{array}$$

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo na sledeč način:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{i,j} = &-\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1})\\ &+\frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}).\end{aligned}$$

kar lahko krajše zapišemo z masko:

$$\mathbf{b}_{i,j} = -\frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \bullet & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Ker je mreža sestavljena iz $(m+1)\times(n+1)$ kontrolnih točk, dane pa imamo samo robne točke lahko ostalih $(m-1)\times(n-1)$ enlično določimo z zgornjo masko. Določitev točk se prvede na reševanje sistema $(m+1)\times(n+1)$ linearnih enačb.

Oglejmo si 3×3 masko s splošnimi parametri, kjer se element izraža na sledeč način:

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \bullet & \beta. \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

V primeru da sta $(\alpha,\beta) = (-0.25, 0.5)$ dobimo Consovo ploskvo. Privzeli bomo, da velja $4\alpha + 4\beta = 1$, saj tako ohranjamo afinost maske. S perturbiranjem parametrov α in β dobimo torej nov razred kontrolnih shem, imenujemo jih stalne krivulje (angl. *permanence patches*). V članku [1] so raziskovali vpliv α na optimalno oblike ploskve. Ugotovili so, da za izbrana m in n ni vedno ene optimalne vrednosti za α, ki bo dala dobro obliko ploskve.

Oglejmo si še nekaj primerov ploskev pri različnih parametrih α in β.

4 Stalne Coonsove ploskve

Ena kontrolna točka navadne Consove ploskve je odvisna od osem obrobnih točk, torej gre za lokalno odvisnost. V primeru ko govorimo o stalnih ploskvah ($\alpha \neq -0.25$), je točka odvisna od vseh mejnih točk, zato govorimo o globalni odvisnosti. Ta odvisnost nam potencialno lahko pripomore pri ustvarjanju "boljših"krivulj.

Če si ogledamo primer, ko izberemo $\alpha = -0.257$ in rešimo linearni sistem, dobimo "boljšo"ploskev glede na dane robne rivulje. TU BO SLIKA Dani poligoni izhajajo iz torusnih oblik in z modifikacijo α lahko pridemo do željene oblike. Kot zanimivost se izkaže da ob izbiri paramatra $\alpha = 0$ in seveda ob upoštevanju afinosti, dobimo ploskev, katere površina je minimizeranan za dano ogrodje krivulj. To se vidi iz Laplasove parcialne diferencialne enačbe

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

5 Trikotne stalne Coonsove ploskve

Mreža trikotne Bezirjeve krivulje je delno linearna površina, zato se v tem primeru porodi vprašanje, če imam tri robne poligone, ali obstaja "dobra"kontolna mreža ki zapolni omejeno območje. Ideja rešitve je podobna kot v prejšnem primeru, kjer uporabimo spremenjeno masko oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{array}{ccccccc} & & & \alpha & & & \\ & & \beta & & \beta & & \\ & \beta & & \bullet & & \beta & \\ \alpha & & \beta & & \beta & & \alpha \end{array}$$

kjer je zaradi pogoja afinoste ponovno predpostavljeno da $3\alpha + 6\beta = 1$.

Literatura

[1] G. Farin, F. Hansford, *Discrete Coons patches*,