Diskretne Coonsove ploskveva urnikov

Matej Rojec, Vito Rozman

3. december 2022

Kazalo

1 Uvod in motivacija **1**
1.1 Uvod v Bézierjeve ploskeve 1
1.2 Coonsove ploskve 2

2 Lastnosti Coonsovih ploskev **3**

1 Uvod in motivacija

1.1 Uvod v Bézierjeve ploskeve

Bézierjevo ploskev $\mathbf{p} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ iz tenzorskega produkta stopnje $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u,v) := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta u, v iz enotskega kvadrata, t.j $(u,v) \in [0,1]^2$ ter $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki $\mathbf{b}_{i,j}$.

Pri fiksnem v, množica $\{\mathbf{b}(u,v) \mid u \in [0,1]\}$ predstavlja kontrolnimi točkami

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v), \qquad i = 0, 1, \dots, m,$$

ki so izračunane kot točke na Bézierjevih krivuljah stopnje n pri parametru v.

1.2 Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podane kontrole točke $\mathbf{b}_{i,j},\ i=0,\ldots,m,\ j=0,\ldots,n$. Te določajo štiri robne krivulje Te omejujejo iskano ploskev $\mathbf{p}$ iz tenzorskega produkta stopnje (n,m). Kontrolne točke

$$
\begin{array}{lllll}
\mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
\mathbf{b}_{0,1} & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\mathbf{b}_{0,n-1} & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
\mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
\end{array}
$$

določajo štiri Bézierjev krivulje:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(u,0) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), \\
\mathbf{p}(u,1) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u), \\
\mathbf{p}(0,v) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \\
\mathbf{p}(1,v) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),
\end{aligned}
$$

kjer je domena enotski kvadrat, t.j. $(u,v) \in [0,1]^2$. Kontrolne točke torej omejujejo ploskev $\mathbf{p}$. Sedaj potrebujemo definirati še ostale kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j},\ i=1,\ldots,m-1\ , j=1,\ldots,n-1$. V ta namen definiramo tri dodatne ploskve:

1. Prva je Bézierjeva ploskev stopnje $(m,1)$, ki je kot ploskev stopnje (m,n) podana s kontrolnimi točkami:

$$
\mathbf{b}_{i,j}^{(1)} = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n}
$$

2. Druga je Bézierjeva ploskev stopnje $(1,n)$, ki je kot ploskev stopnje (m,n) podana s kontrolnimi točkami:

$$
\mathbf{b}_{i,j}^{(2)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j}
$$

3. Tretja je Bézierjeva ploskev stopnje $(1,1)$, ki je kot ploskev stopnje (m,n) podana s kontrolnimi točkami:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(3)} = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_{0,0} + \frac{i}{m}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_{m,0} + \left(1 - \frac{i}{m}\right)\frac{j}{n}\mathbf{b}_{0,n} + \frac{i}{m}\frac{j}{n}\mathbf{b}_{m,n}$$

Coonsova ploskev $\mathbf{p}$ je definirana s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_{i,j} := \mathbf{b}_{i,j}^{(1)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(2)} + \mathbf{b}_{i,j}^{(3)}.$$

2 Lastnosti Coonsovih ploskev

Coonsova ploskve minimzirajo zasuk, definiran kot:

$$\int_{[0,1]^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\mathbf{p}(u,v)\right) dS. \tag{1}$$

Torej coonsova ploskve doseže minimum izraza (1).

Posledica tega je, da so coonsova ploskve lahko v primerih preveč ravne in ne interpolirajo dobro kontrolnih točk.