Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

15.01.2023

Povzetek

Problem

Opis problema

Podane imamo štiri robne krivulje:

$$\mathbf{x}(u,0), \mathbf{x}(u,1), \mathbf{x}(0,v), \mathbf{x}(1,u).$$

Naloga

Najti ploskev

$$\mathbf{x}(u,v), (u,v) \in [0,1]^2,$$

ki jih interpolira.

Prevedba v jezik RPGO – Problem

Problem

Podane imamo štiri kontrolne poligone:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
\mathbf{b}_{0,1} & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\mathbf{b}_{0,n-1} & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
\mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \ldots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
\end{array}$$

$\mathbf{b}_{i,j}$ pripada domenskem parametru $\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)$

Prevedba v jezik RPGO – Problem

Ti določajo štiri Bézierjev krivulje

$$\mathbf{p}(u,0) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,0} B_i^m(u), \qquad \mathbf{p}(u,1) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b}_{i,n} B_i^m(u),$$

$$\mathbf{p}(0,v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), \qquad \mathbf{p}(1,v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),$$

nad domeno $(u,v) \in [0,1]^2$.

Coonosove ploskve – ideja

Določitev točk

$$
\begin{array}{cccccc}
\color{blue}{\mathbf{b}_{0,0}} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \color{red}{\mathbf{b}_{i,0}} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \color{blue}{\mathbf{b}_{m,0}} \\
\mathbf{b}_{0,1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\color{red}{\mathbf{b}_{0,j}} & & & \mathbf{b}_{i,j} & & & \color{red}{\mathbf{b}_{m,j}} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
\color{blue}{\mathbf{b}_{0,n}} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \color{red}{\mathbf{b}_{i,n}} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \color{blue}{\mathbf{b}_{m,n}}
\end{array}
$$

Coonosove ploskve – eksplicitno

Določitev točk

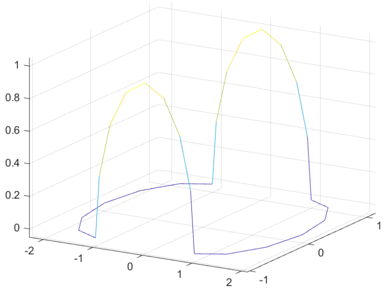
$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{i,j} &= \left(1 - \frac{i}{m}\right)\mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m}\mathbf{b}_{m,j} \\ &+ \left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n}\mathbf{b}_{i,n} \\ &- \begin{bmatrix} 1 - \frac{i}{m} & \frac{i}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

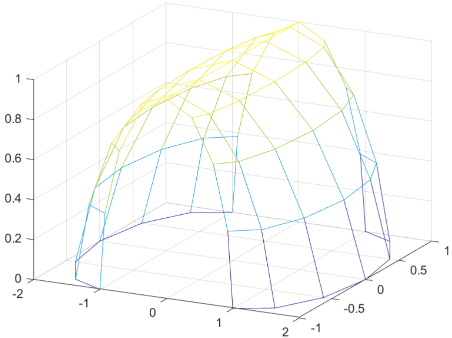
Definicija – Coonsova ploskev

Ploskev, ki jo dobimo s tako dobljenimi kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo Coonsova ploskev.

Coonosove ploskve – primer

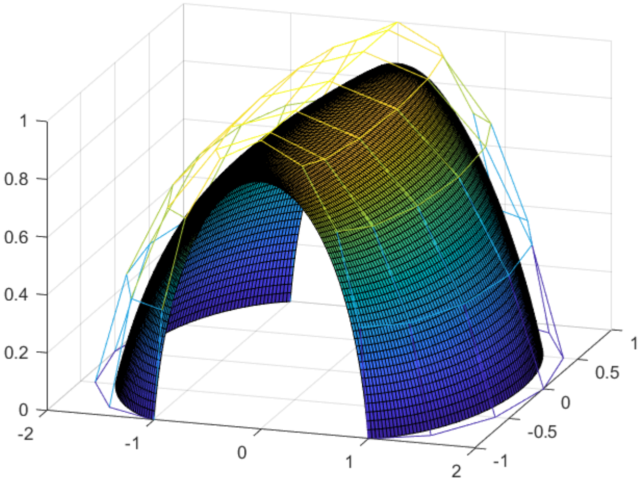
Primer okvirja in kontrolnih točk Cossonove krivulje





Coonosove ploskve – primer

Primer Cossonove krivulje



Ideja

Stalnost

- Izberemo dve točki (u_0, v_0) in (u_1, v_1) ki razpenjata pravokotnik R v domeni $D = [0,1]^2$.
- Štiri mejne pod-Coonosove ploskve se preslikajo na prvotno Coonosovo ploskev

To načelo lahko uporabimo na diskretni 3×3 Coonsovi ploskivi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\ \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\ \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1} \end{array}$$

Računanje točk s pomočjo Coonosove ploskve

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo na sledeč način:

Točke

$$\mathbf{b}_{i,j} = -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}).$$

Sistem $(m+1) \times (n+1)$ linearnih enačb

Stalne ploskve

Coonosova maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \cdot & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Splošna tenzorska maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \cdot & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

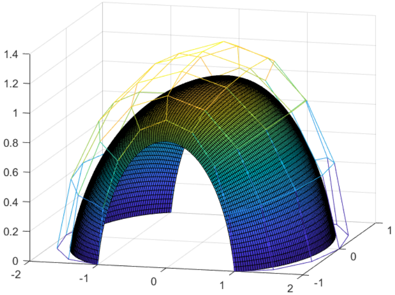
Afinost: $4\alpha + 4\beta = 1$

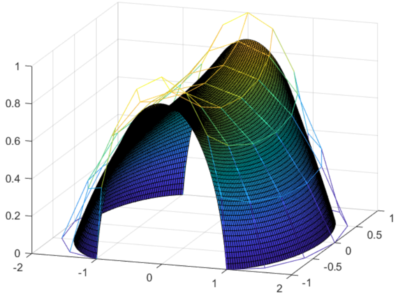
Coonosova maska

$(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$

Stalne ploskve – primer

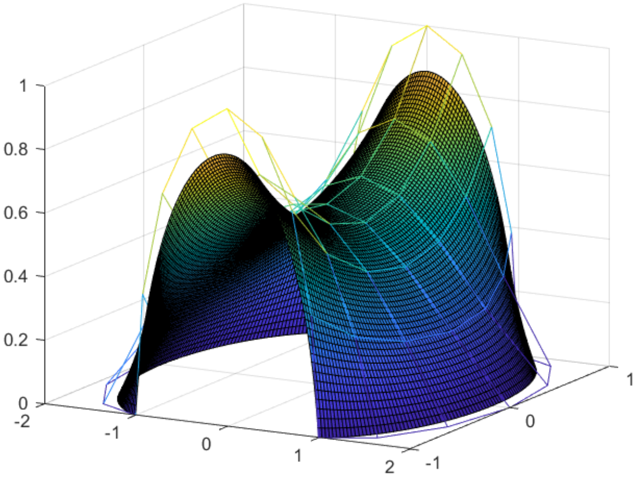
Stalni krivulji pridobljeni s parametroma $\alpha = -0.26$ (leva) in $\alpha = -0.23$ (desna slika)





Stalne ploskve – primer

Stalna krivulja pridobljena s parametrom $\alpha = 0$



Trikotna maska

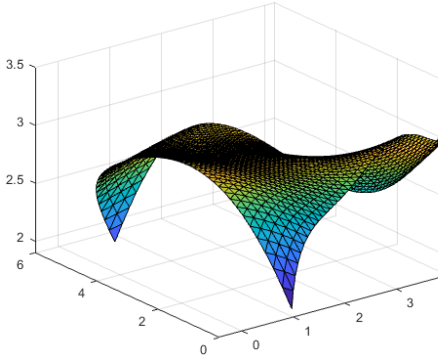
Maska

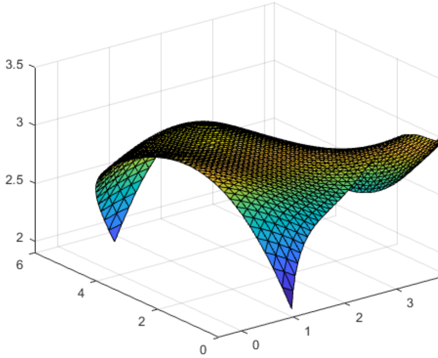
$$\mathbf{b_i} = \begin{array}{ccccccc} & & & \alpha & & & \\ & & \beta & & \beta & & \\ & \beta & & \cdot & & \beta & \\ \alpha & & \beta & & \beta & & \alpha \end{array}$$

Rešimo sistem $\binom{m+1}{2}$ linearnih enačb, kjer je m število kontrolnih točk na eni stranici trikotnika
Afinost: $3\alpha + 6\beta = 1$

Stalne trikotne krpe – primer 1

Stalni krivulji pridobljeni s parametroma $\alpha = 0$ (leva) in $\alpha = -1/6$ (desna slika)





Stalne trikotne krpe – primer 2

Stalna krivulja pridobljena s parametrom $\alpha = -1/9$