

Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

15. januar 2023

Kazalo

1	Uvod	iii
2	Diskretne Coonsove ploskve	iii
3	Stalnost Coonsove ploskve	vi
4	Stalne Coonsove ploskve	vii
5	Trikotne stalne Coonsove ploskve	vii
6	Zaključek	ix

Slike

1	Primer konstrukcije Coonsove ploskve	v
2	Stalni krivulji pridobljeni z reševanjem sistemov linearnih enačb	vii
3	Stalne trikotne krpe pridobljene z reševanjem sistemov enačb.	viii

1 Uvod

V seminarski nalogi bomo obravnavali ploskve, ki interpolirajo štiri mejne krivulje, ki so definirane vsaka na svoji stranici pravokotnika $[0, 1]^2$. Te ploskve bomo imenovali diskretne Coonsove ploskve, ki jih bomo dobili z reševanjem linearnega sistema enačb. Pogledali si bomo tudi problem, ko imamo namesto pravokotnika podan trikotnik, ki ga interpolirajo tri merjne krivulje.

Eden od najstarejših problemov v Računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju je problem, kjer imamo podane štiri robne krivulje, radi pa bi poiskali ploskev z danimi robnimi krivuljami. Torej podane imamo robne krivulje

$$x(u, 0), x(u, 1), x(0, v), x(1, u),$$

kjer lahko brez škode za splošnost predpostavimo da je domena ploskve $x(u, v)$ enotni kvadrat, torej $(u, v) \in [0, 1]^2$. Znana rešitev tega problema je bilinearna mešana Coonsova ploskev, ki je interpolirana z robnimi krivuljami, kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & (1 - u)\mathbf{x}(0, v) + u\mathbf{x}(1, v) \\ & + (1 - v)\mathbf{x}(u, 0) + v\mathbf{x}(u, 1) \\ & - \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0, 0) & \mathbf{x}(0, 1) \\ \mathbf{x}(1, 0) & \mathbf{x}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

2 Diskretne Coonsove ploskve

V bolj modernih uporabah RPGO, so mejne krivulje Bézierjeve polinomske krivulje, ki jih napenjajo kontrolne točke.

Definicija 2.1 Naj bodo dane kontrolne točke $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$. Potem je Bézierjeva krivulja stopnje n podana s polinomsko paramerizacijo $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ s predpisom

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t),$$

kjer je $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$, za $i = 0, 1, \dots, n$.

Podobno lahko definiramo Bézierjeve ploskve na sledeč način.

Definicija 2.2 Bézierjevo ploskev $\mathbf{p} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iz tenzorskega produkta stopnje $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta $(u, v) \in [0, 1]^2$ ter $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki $\mathbf{b}_{i,j}$.

Predpostavimo, da imamo podane robne kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j}$ izračunane pri prametu (u, v) . Kontrolne točke

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\ \mathbf{b}_{0,1} & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\ \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n} \end{array}$$

določajo štiri robne krivulje, ki so definirane s pomočjo Bézierjeve krivulj

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^m(u), & \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^m(u), \\ \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), & \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v), \end{aligned}$$

ki omejujejo Bézierjevo ploskev. Shema

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{i,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\ \mathbf{b}_{0,1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathbf{b}_{0,j} & & & \mathbf{b}_{i,j} & & & \mathbf{b}_{m,j} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\ \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{i,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n} \end{array}$$

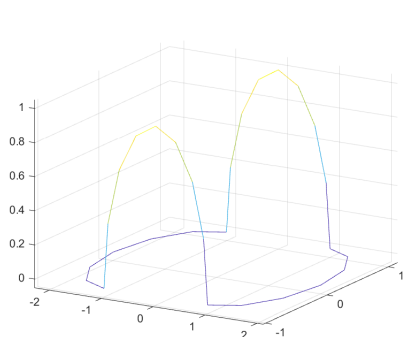
nam prikazuje idejo, kako vsako točko $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo s pomočjo robnih točk $\mathbf{b}_{0,j}$, $\mathbf{b}_{i,j}$, $\mathbf{b}_{m,j}$, $\mathbf{b}_{i,0}$, $\mathbf{b}_{i,n}$ in krajiščnih točk $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}_{m,n}$. Notranje točke kontrolnega polinoma, lahko izračunamo na način kot v enačbi 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} &= \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j} \\ &+ \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n} \\ &- \left[1 - \frac{i}{m} \quad \frac{i}{m}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

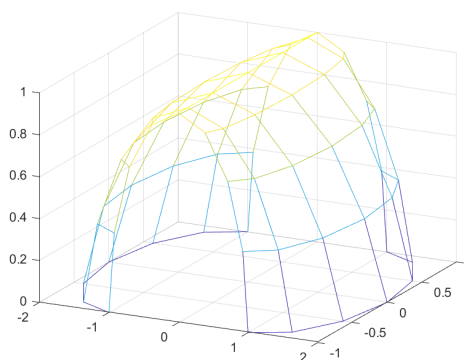
kjer potrebujemo izračunati le kontrolne točke $\mathbf{b}_{i,j}$ z indeskimi $i = 1, 2, \dots, m-1$ in $j = 1, 2, \dots, n-1$, saj se robne kontrolne točke po konstrukciji ujemajo s podanimi. Izkaže se, da je kontrolni poligon ploskev, ki jo omejujejo robne krivulje, enak kontrolnemu poligonu, ki ga dobimo z opisano metodo. »Morda zanimivo: za določene oblike rabimo definirati samo robne krivulje«.

Ploskev, ki jo dobimo s tako dobljenimi kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo Coonsova ploskev.

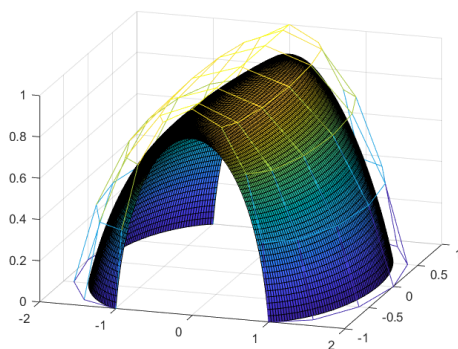
Primer take ploskve je slika 1, kjer je prikazan rob kontrolnega poligona, notranje točke kontrolnega poligona in Bézierjeva ploskev definirana nad kontrolnim poligonom



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

3 Stalnost Coonsove ploskve

Denimo, da imamo podano Coonsova ploskev definirana nad domeno $D = [0, 1]^2$. Izberemo dve točki (u_0, v_0) in (u_1, v_1) ki razpenjata pravokotnik R v domeni D . Štiri mejne krivulje pod-Coonsove ploskve definirane na R se preslikajo v štiri krivulje na prvotni Coonsovi ploskvi. Izkaže se da pod-Coonsova ploskev definirana na R je prvotna Coonsova ploskev zožana na območje R . To načelo lahko uporabimo na diskretni 3×3 Coonsovi ploskvi

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\ \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\ \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1} \end{array}$$

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo na sledeč način:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} = & -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}). \end{aligned}$$

kar lahko krajše zapišemo z masko:

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \bullet & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Ker je mreža sestavljena iz $(m+1) \times (n+1)$ kontrolnih točk, dane pa imamo samo robne točke lahko ostalih $(m-1) \times (n-1)$ enlično določimo z zgornjo masko. Določitev točk se prvede na reševanje sistema $(m+1) \times (n+1)$ linearnih enačb.

Oglejmo si 3×3 masko s splošnimi parametri, kjer se element izraža na sledeč način:

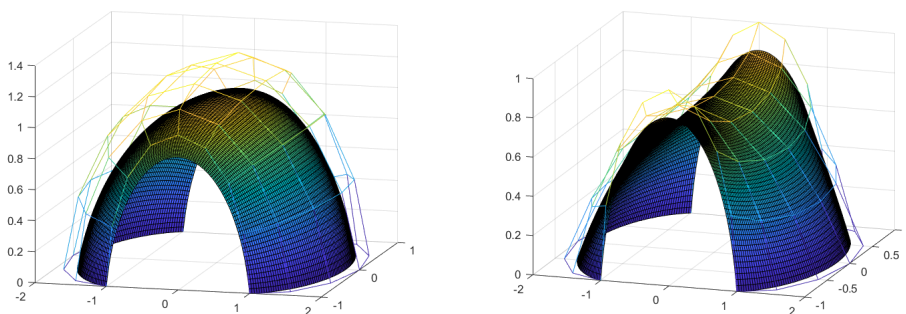
$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \bullet & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

V primeru da sta $(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$ dobimo Coonsovo ploskvo. Privzeli bomo, da velja $4\alpha + 4\beta = 1$, saj tako ohranjamo afinost maske. S perturbiranjem parametrov α in β dobimo torej nov razred kontrolnih shem, imenujemo jih stalne krivulje (angl. *permanence patches*). V članku [1] so raziskovali vpliv α na optimalno oblike ploskve. Ugotovili so, da za izbrana m in n ni vedno ene optimalne vrednosti za α , ki bo dala dobro obliko ploskve.

4 Stalne Coonsove ploskve

Ena kontrolna točka navadne Coonsove ploskve je odvisna od osem obrob-
nih točk, torej gre za lokalno odvisnost. V primeru ko govorimo o stalnih
ploskvah ($\alpha \neq -0.25$), je točka odvisna od vseh mejnih točk, zato govorimo
o globalni odvisnosti. Ta odvisnost nam potencialno lahko pripomore pri
ustvarjanju “boljše” krivulje.

Oglejmo si še nekaj primerov ploskev pri različnih parametrih α in β . V
primeru, da v sliki 1 pustimo okvir kontrolnih točk enako, namesto parametra
 $\alpha = -0.25$ pa uporabimo parametra $\alpha = -0.26$ ter $\alpha = -0.23$ in rešimo
sistem linearnih enačb dobimo krivulje prikazane na sliki 2.



(a) Stalna krivulja pridobljena s parametrom $\alpha = -0.26$

(b) Stalna krivulja pridobljena s parametrom $\alpha = -0.23$

Slika 2: Stalni krivulji pridobljeni z reševanjem sistemov linearnih enačb

Dani poligoni izhajajo iz torusnih oblik in z modifikacijo α lahko pridemo
do željene oblike. Kot zanimivost se izkaže da pri izbiri parametra $\alpha = 0$ in
seveda ob upoštevanju afinosti, dobimo ploskev, katere površina je minimi-
zeranan za dan okvir krivulj. To se vidi iz Laplasove parcialne diferencialne
enačbe

$$\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv} = 0.$$

5 Trikotne stalne Coonsove ploskve

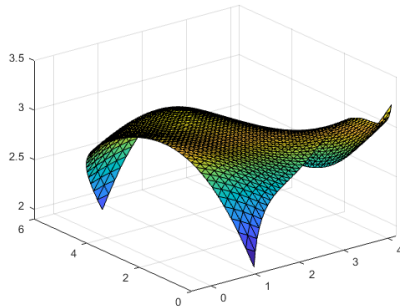
Oglejmo si primer, ko imamo krivulje definirane nad trikotnikom namesto
nad pravokotnikom kot v razdelkih 3 in 4. Pojavi se naslednje vprašanje,
če imamo podane tri robne kontrolne poligone ki razpenjajo zunanost tri-
kotnika, ali obstaja “dobra” kontrolna mreža, ki zapolni omejeno območje.
Podobno kot v razdelkih 3 in 4 lahko uporabimo načelo stalnosti za masko:

$$\mathbf{b}_i = \begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & & \beta & & \beta \\ & \beta & & \beta & \\ \alpha & & \beta & & \beta \\ & & \beta & & \alpha \end{array} \cdot$$

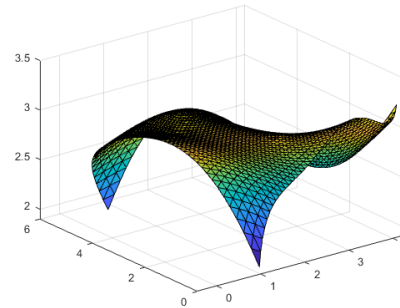
kjer je zaradi pogoja afinosti ponovno zahtevamo, da je $3\alpha + 6\beta = 1$.

Podobno kot prej rešimo sistem z $\binom{m+1}{2}$ linearnih enačb, kjer je m število kontrolnih točk na eni stranici trikotnika.

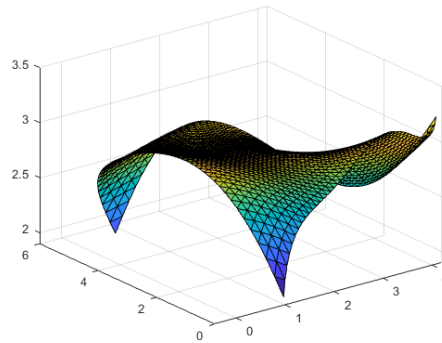
Na sliki 3 vidimo tri možne oblike stalne trikotne krpe s parametri $0, -1/9$ ter $-1/6$.



(a) Primer stalne trikotne krpe dobljene s parametrom $\alpha = -1/6$



(b) Primer stalne trikotne krpe dobljene s parametrom $\alpha = -1/9$



(c) Primer stalne trikotne krpe dobljene s parametrom $\alpha = 0$

Slika 3: Stalne trikotne krpe pridobljene z reševanjem sistemov enačb.

Ponovno dobimo pri parametru $\alpha = 0$ ploskev, katere površina je minimizirana za dan okvir krivulj, kar se ponovno vidi iz Laplasove parcialne diferencialne enačbe.

6 Zaključek

Preoblikovali smo diskretne Coonsove ploskve in jih posplošili na stalne ploskve, tako za pravokotne primere kot za trikotne primere. Poslošitev nam omogoča izdelavo oblik, ki so bolj zaželjene od standardnih Coonsovih oblik. Ogledali smo si vpliv parametrov stalnih Coonsovih ploskev in jih grafično prikazali.

Literatura

- [1] G. Farin, F. Hansford, *Discrete Coons patches*,