

Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

03.01.2023

- 1 Uvod
- 2 Coonosove ploskve
- 3 Stalnost Coonosove ploskve
- 4 Trikotne stalne ploskve

Problem

Opis problema

Podane imamo štiri robne krivulje:

$$x(u, 0), x(u, 1), x(0, v), x(1, u),$$

Naloga

Najti ploskev

$$\mathbf{x}(u, v), (u, v) \in [0, 1]^2,$$

ki jih interpolira.

Prevedba v jezik RPGO – Problem

Problem

Podane imamo štiri kontrolne poligone:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & & \mathbf{b}_{m,0} & \\
 \mathbf{b}_{0,1} & & & & & \mathbf{b}_{m,1} & \\
 \vdots & & & & & \vdots & \\
 \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} & \\
 \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & & \mathbf{b}_{m,n} &
 \end{array}$$

Prevedba v jezik RPGO – Problem

Ti določajo štiri Bézierjev krivulje

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^m(u), & \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^m(u), \\ \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), & \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v), \end{aligned}$$

nad domeno $(u, v) \in [0, 1]^2$.

Coonosove ploskve – ideja

Določitev točk

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{i,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & \mathbf{b}_{m,0} \\
 \mathbf{b}_{0,1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,1} \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 \mathbf{b}_{0,j} & & & \mathbf{b}_{i,j} & & & \mathbf{b}_{m,j} \\
 & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} \\
 \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{i,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & \mathbf{b}_{m,n}
 \end{array}$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo kot “uteženo povprečje robnih točk”.

Coonosove ploskve – eksplicitno

Določitev točk

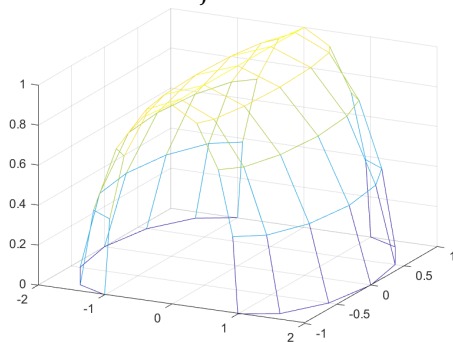
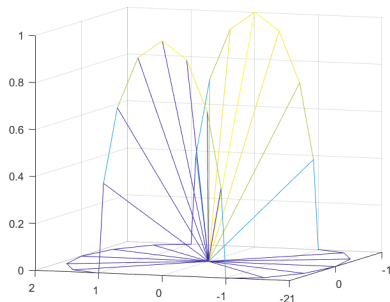
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} = & \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j} \\ & + \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n} \\ & - \left[1 - \frac{i}{m} \quad \frac{i}{m}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definicija – Coonsova ploskev

Ploskev, ki jo dobimo s tako dobljenimi kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo Coonsova ploskev.

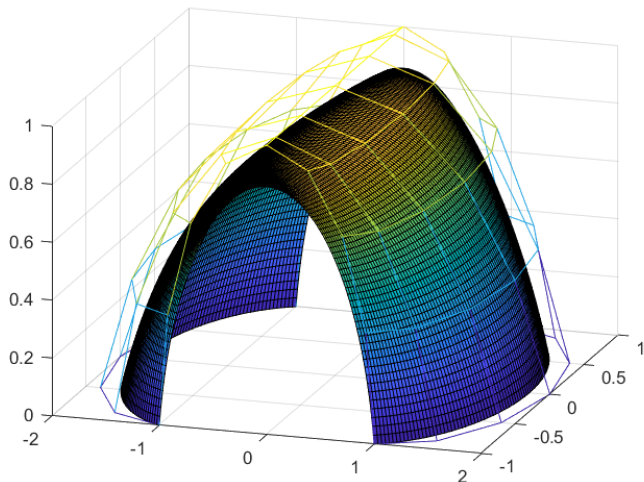
Coonosove ploskve – primer

Primer okvirja in kontrolnih točk Cossonove krivulje



Coonosove ploskve – primer

Primer Cossonove krivulje



Ideja

Stalnost

- Izberemo dve točki (u_0, v_0) in (u_1, v_1) ki razpenjata pravokotnik R v domeni $D = [0, 1]^2$.
- Štiri mejne pod-Coonosove ploskve se preslikajo na prvotno Coonosovo ploskev

To načelo lahko uporabimo na diskretni 3×3 Coonsovi ploskivi:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\
 \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\
 \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1}
 \end{array}$$

Računanje točk s pomočjo Coonosove ploskve

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko $\mathbf{b}_{i,j}$ določimo na sledeč način:

Točke

$$\mathbf{b}_{i,j} = -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}).$$

Sistem $(m+1) \times (n+1)$ linearnih enačb

Stalne ploskve

Coonosova maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \cdot & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Splošna tenzorska maska

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \cdot & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

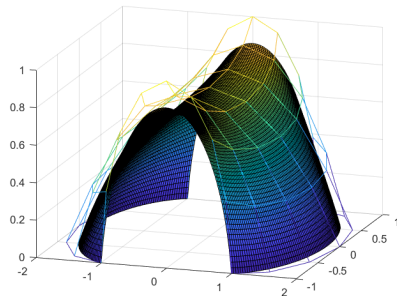
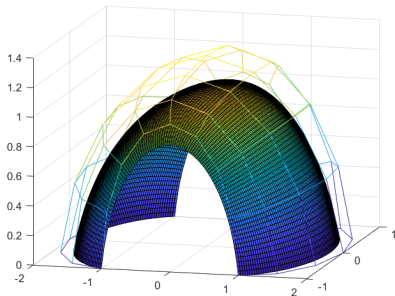
Afinost: $4\alpha + 4\beta = 1$

Coonosova maska

$$(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$$

Stalne ploskve – primer

Stalni krivulji pridobljeni s parametroma $\alpha = -0.26$ (leva) in $\alpha = -0.23$ (desna slika)



Trikotna maska

Maska

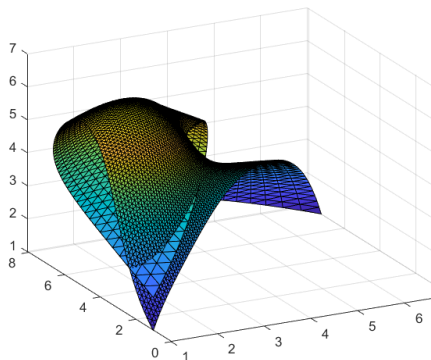
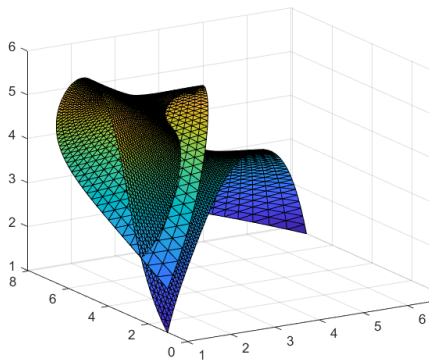
$$\mathbf{x} = \begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \beta & & \beta & \\ & & \cdot & & \\ \alpha & \beta & & \beta & \alpha \end{array}$$

Rešimo $\binom{m+1}{2}$, kjer je m število kontrolnih točk na eni stranici trikotnika

Afinost: $3\alpha + 6\beta = 1$

Stalne trikotne krpe – primer 1

Stalni krivulji pridobljeni s parametroma $\alpha = 0$ (leva) in $\alpha = -1/6$ (desna slika)



Stalne trikotne krpe – primer 2

Stalna krivulja pridobljena s parametrom $\alpha = -1/9$

