

# Diskretne Coonsove ploskve

Matej Rojec, Vito Rozman

29. december 2022

## Kazalo

1	Uvod	iii
2	Diskretne Coonsove ploskve	iii
3	Lastnosti Coonsovih ploskev	v
3.1	Ohranjanje Coonsove ploskve . . . . .	v
4	Stalne Coonsove ploskve	vi
5	Trikotne stalne Coonsove ploskve	vii

## Slike

1	Primer konstrukcije Coonsove ploskve . . . . .	v
---	------------------------------------------------	---

# 1 Uvod

V seminarski nalogi bomo obravnavali površine, ki interpolirajo dane mejne krivulje. Te površine imenujemo diskretne Consove ploskve, ki jih dobimo z reševanjem linearnega sistema.

Eden od najstarejših problemov v Računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju je problem, kjer imamo podane štiri robne krivulje, radi pa bi poiskali ploskev z danimi robnimi krivuljami. Torej podane imamo robne krivulje

$$x(u, 0), x(u, 1), x(0, v), x(1, v)$$

, kjer lahko brez škode za splošnost predpostavimo da je domena ploskve  $x(u, v)$  enotni kvadrat  $0 \leq u, v \leq 1$ . Znana rešitev tega problema je bilinearna mešana Coonsova ploskev, ki je interpolirana z robnimi krivuljami, kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & (1-u)\mathbf{x}(0, v) + u\mathbf{x}(1, v) \\ & + (1-v)\mathbf{x}(u, 0) + v\mathbf{x}(u, 1) \\ & - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0, 0) & \mathbf{x}(0, 1) \\ \mathbf{x}(1, 0) & \mathbf{x}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2 Diskretne Consove ploskve

V bolj modernih uporabah CAD, so mejne krivulje Bezierjeve polinomske krivulje, ki jih napenjaajo kontrolni poligoni.

**Definicija 2.1** Naj bodo dane točke  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Potem je Bezierjeva krivulja podana s polinomske parametizacijo  $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  s predpisom

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t),$$

kjer je  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ , za  $i = 0, 1, \dots, n$ . Točkam  $\mathbf{b}_i$  pravimo kontrolne točke.

**Definicija 2.2** Bézierjevo ploskev  $\mathbf{p} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iz tenzorskega produkta stopnje  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiramo s parametrizacijo:

$$\mathbf{p}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

kjer sta  $(u, v) \in [0, 1]^2$  ter  $(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$  domenske točke, ki ustrezajo kontrolni točki  $\mathbf{b}_{i,j}$ .

V tem primeru imamo podane kontrolne točke  $b_{i,j}$  opremljene z parametroma  $(u, v)$  predstavljen s shemo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,0} & & \mathbf{b}_{m,0} & \\
 \mathbf{b}_{0,1} & & & & & \mathbf{b}_{m,1} & \\
 \vdots & & & & & \vdots & \\
 \mathbf{b}_{0,n-1} & & & & & \mathbf{b}_{m,n-1} & \\
 \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{b}_{1,n} & \dots & \mathbf{b}_{m-1,n} & & \mathbf{b}_{m,n} & 
 \end{array}$$

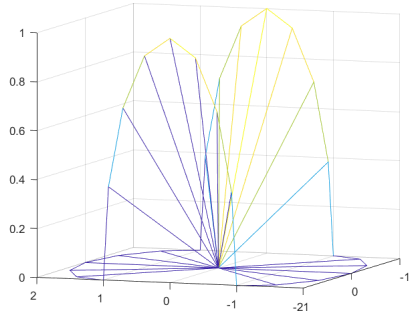
Sedaj lahko primer diskritiziramo in robne krivulje zapišemo s štirimi Bezierjevimi krivuljami:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(u, 0) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,0} B_i^n(u), & \mathbf{p}(u, 1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,n} B_i^n(u), \\
 \mathbf{p}(0, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v), & \mathbf{p}(1, v) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v),
 \end{aligned}$$

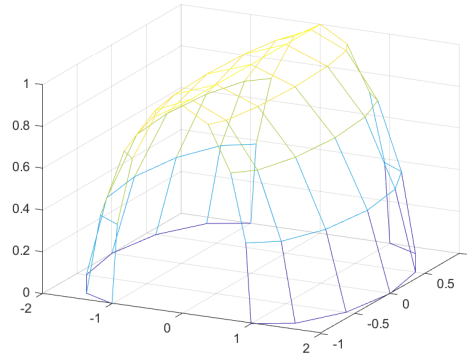
Tako se notranje toče izražajo z formulo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{i,j} &= \left(1 - \frac{i}{m}\right) \mathbf{b}_{0,j} + \frac{i}{m} \mathbf{b}_{m,j} \\
 &+ \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{b}_{i,0} + \frac{j}{n} \mathbf{b}_{i,n} \\
 &- \left[1 - \frac{i}{m} \quad \frac{i}{m}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} \\ \frac{j}{n} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

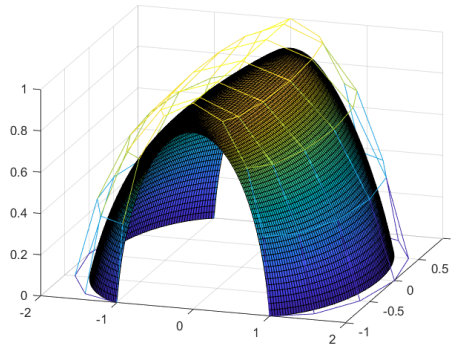
za  $i = 1, 2, \dots, m-1$  in  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Izkaže se, da je kontrolni poligon ploskev, ki jo omejujejo robne krivulje, enak kontrolnemu poligonu, ki ga dobimo z opisano metodo. »Morda zanimivo: za določene oblike rabimo definirati samo robne krivulje«.



(a) Primer robnih točk



(b) Primer ogrodja



(c) Coonsova ploskv na ogrodju

Slika 1: Primer konstrukcije Coonsove ploskve

### 3 Lastnosti Coonsovih ploskev

#### 3.1 Ohranjanje Coonsove ploskve

Naj bo Cooncova ploskev definirana nad domeno  $D = [0, 1]^2$ . Lahko izberemo dve točki  $(u_0, v_0)$  in  $(u_1, v_1)$  ki razpenjata pravokotnik  $R$  v domeni  $D$ . Štiri mejne krivulje pod-Consove ploskve definirane na  $R$  se preslikajo v štiri krivulje na prvotno Consovo ploskev. Izkaže se da pod-Coonsova ploskev definirana na  $R$  je prvotna Coonsova ploskev zožana na območje  $R$ . To načelo lahko uporabimo na diskretni  $3 \times 3$  Consovi ploskivi

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} & \mathbf{b}_{i-1,j+1} \\ \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} & \mathbf{b}_{i,j+1} \\ \mathbf{b}_{i+1,j-1} & \mathbf{b}_{i+1,j} & \mathbf{b}_{i+1,j+1} \end{array}$$

Če poznamo robne točke lahko notranjo točko  $\mathbf{b}_{i,j}$  določimo na sledeč način:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{i,j} = & -\frac{1}{4}(\mathbf{b}_{i-1,j-1} + \mathbf{b}_{i+1,j-1} + \mathbf{b}_{i-1,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j+1}) \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{i-1,j} + \mathbf{b}_{i,j-1} + \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{i+1,j}).\end{aligned}$$

kar lahko krajše zapišemo z masko:

$$\mathbf{b}_{i,j} = -\frac{1}{4} \times \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & \bullet & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Ker je mreža sestavljena iz  $(m+1) \times (n+1)$  kontrolnih točk, dane pa imamo samo robne točke lahko ostalih  $(m-1) \times (n-1)$  enlično določimo z zgornjo masko. Določitev točk se pravede na sistem  $(m+1) \times (n+1)$  linearnih enačb.

Oglejmo si  $3 \times 3$  masko s splošnimi parametri, kjer se element izraža na sledeč način

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \bullet & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{array}$$

V primeru da sta  $(\alpha, \beta) = (-0.25, 0.5)$  dobimo splošno Consovo ploskvo. Vedno bomo privzeli, da velja  $4\alpha + 4\beta = 1$ , saj tako ohranjamo afinost maske. S perturbiranjem parametrov  $\alpha$  in  $\beta$  dobimo torej nov razred kontrolnih shem, imenujemo jih stalne krivulje (ang. permanence patches). V članku [1] so raziskovali vpliv  $\alpha$  na optimalno oblike ploskve. Ugotovili so, da za izbrana  $m$  in  $n$  ni vedno ene optimalne vrednosti za  $\alpha$ , ki bo dala dobro obliko ploskve.

## 4 Stalne Consove ploskve

Ena kontrolna točka navadne Consove ploskve je odvisna od osem obrobni točk, torej gre za lokalno odvisnost. V primeru ko govorimo o stalnih ploskvah ( $\alpha \neq -0.25$ ), je točka odvisna od vseh mejnih točk, zato govorimo o globalni odvisnosti. Ta odvisnost nam potencialno lahko pripomore pri ustvarjanju "boljših" krivulj.

Če si ogledamo primer, ko izberemo  $\alpha = -0.257$  in rešimo linearni sistem, dobimo "boljšo" ploskev glede na dane robne krivulje. TU BO SLIKA Dani poligoni izhajajo iz torusnih oblik in z modifikacijo  $\alpha$  lahko pridemo do željene oblike. Kot zanimivost se izkaže da ob izbiri parametra  $\alpha = 0$  in seveda ob

upoštevanju afinosti, dobimo ploskev, katere površina je minimizirana za dano ogrodje krivulj. To se vidi iz Laplasove parcialne diferencialne enačbe

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

## 5 Trikotne stalne Coonsove ploskve

Mreža trikotne Bezirjeve krivulje je delno linearna površina, zato se v tem primeru porodi vprašanje, če imam tri robne poligone, ali obstaja "dobra" kontrolna mreža ki zapolni omejeno območje. Ideja rešitve je podobna kot v prejšnem primeru, kjer uporabimo spremenjeno masko oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \beta & & \beta & \\ & & & & \\ \beta & & & & \beta \\ & \alpha & \beta & \beta & \alpha \end{array} \cdot$$

kjer je zaradi pogoja afinosti ponovno predpostavljeno da  $3\alpha + 6\beta = 1$ .

## Literatura

- [1] G. Farin, F. Hansford, *Discrete Coons patches*,