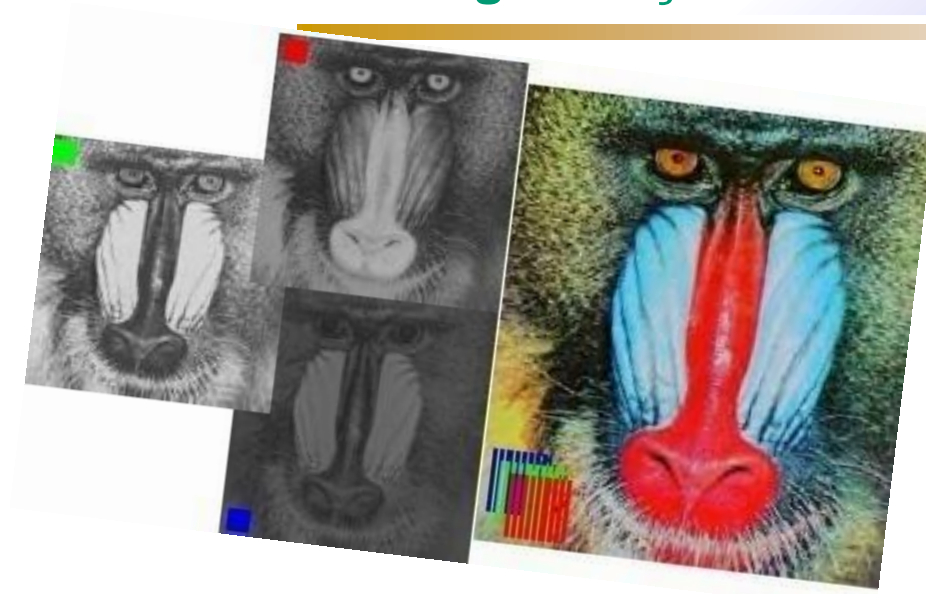


Prof. Dr. Leandro Alves Neves

Pós-graduação em Ciência da Computação



Aula 10

Processamento Digital de  
Imagens

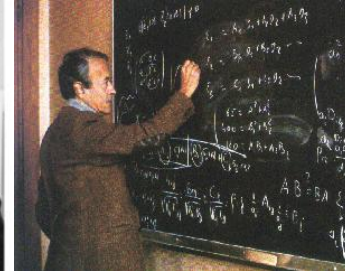
# Sumário

- **Morfologia Matemática**
  - Fundamentos
    - Teoria dos Conjuntos e Operações
  - Arranjos Matriciais e Elementos Estruturantes
- **Operações Morfológicas Binárias**
  - Dilatação, Erosão, Abertura, Fechamento, Filtros Morfológicos
- **Algoritmos Morfológicos Binários**
- **Morfologia em Níveis de Cinza**
  - Dilatação, Erosão, Abertura, Fechamento
- **Aplicações e Exemplos**

# Morfologia Matemática

## ■ Definição

- Formulada na década de 1960
  - **Georges François Paul Marie Matheron**, 2/12/1930 a 7/8/2000



- **Jean Paul Frédéric Serra (1940)** e colaboradores (orientado de Georges)
- Escola Nacional Superior de Minas de Paris, França.



# Morfologia Matemática

## ■ Definição

- **Objetivo: analisar imagens e construir operadores para descrever objetos** em imagens
  - **Baseada na Teoria dos Conjuntos**
  
- Originalmente:
  - Analisar imagens binárias
  
- Atualmente,
  - Analisar imagens em níveis de cinza

# Morfologia Matemática

## ■ Aplicações

- **Áreas:** Medicina, biologia, síntese e análise de textura, microscopia, automação industrial e outras
  - **Exemplo: Biologia,** identificar forma e estrutura de plantas e animais

## ■ Finalidade dos Operadores Morfológicos: PDI

- Extrair componentes conexos e bordas de objetos
- Identificar padrões
- Delimitar fecho convexo
- Afinar bordas
- Extrair componentes
- Filtragem e outras

## ■ Teoria dos conjuntos

- Aplicada para representar a forma dos objetos

- **Considerando uma imagem com as propriedades:**

- Pixels com valor 1 (objeto)
- Pixels com valor 0 (fundo)
- **Objetos em uma Imagem:** coleção de coordenadas discretas

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$$

- **Correspondem aos pixels que definem objetos em um espaço bidimensional dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )**

- Cada elemento do conjunto:

- **Vetor 2D:** coordenadas  $(x, y)$  dos pontos dos objetos a partir de uma origem
  - **Origem:** adotada como o **canto superior esquerdo da imagem**

# Fundamentos

## ■ Imagem em níveis de cinza

- Observada como uma coleção coordenadas discretas

$$\{(x, y, z) | f(x, y, z)\}$$

- **Correspondem aos pixels que definem objetos em um espaço tridimensional dos números inteiros ( $Z$ )**
  - $z$  indica o valor discreto de intensidade: nível de cinza

# PDI Fundamentos

- Exemplo: Dada uma imagem binária

	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	1	0	
3	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	1	
y							

- Objeto: pixels com valor 1
  - Fundo: pixels com valor 0
- 
- Pixels que definem **objetos**
    - **Constituem um conjunto A**, dado por:
    - $A = \{(0,1), (0,3), (1,0), (1,2), (2,1), (2,4), (4,5)\}$



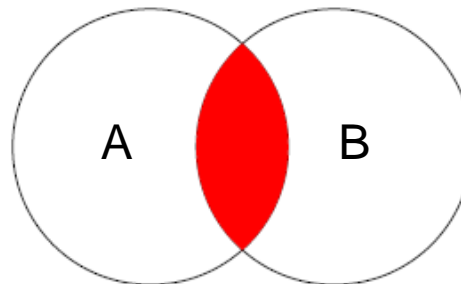
- Considere duas Imagens binárias  $A$  e  $B$ , definidas por:
  - Conjuntos no espaço bidimensional dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )
  - Com **componentes**  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$ ,
    - **Pares ordenados** formados pelas coordenadas dos pixels **dos objetos em  $A$  e  $B$**
- Conjunto  $A$  **de coordenadas de pixels** (que satisfazem uma determinada condição) pode ser definido como:

$$A = \{x \mid \text{condição}\}$$

- Como consequência, **é possível determinar operações entre A e B**

□ **Interseção:**  $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

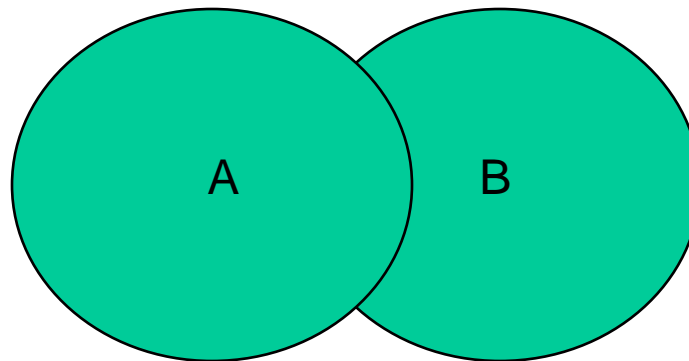
- Todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos



- Operação entre  $A$  e  $B$ :

- **União:**  $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

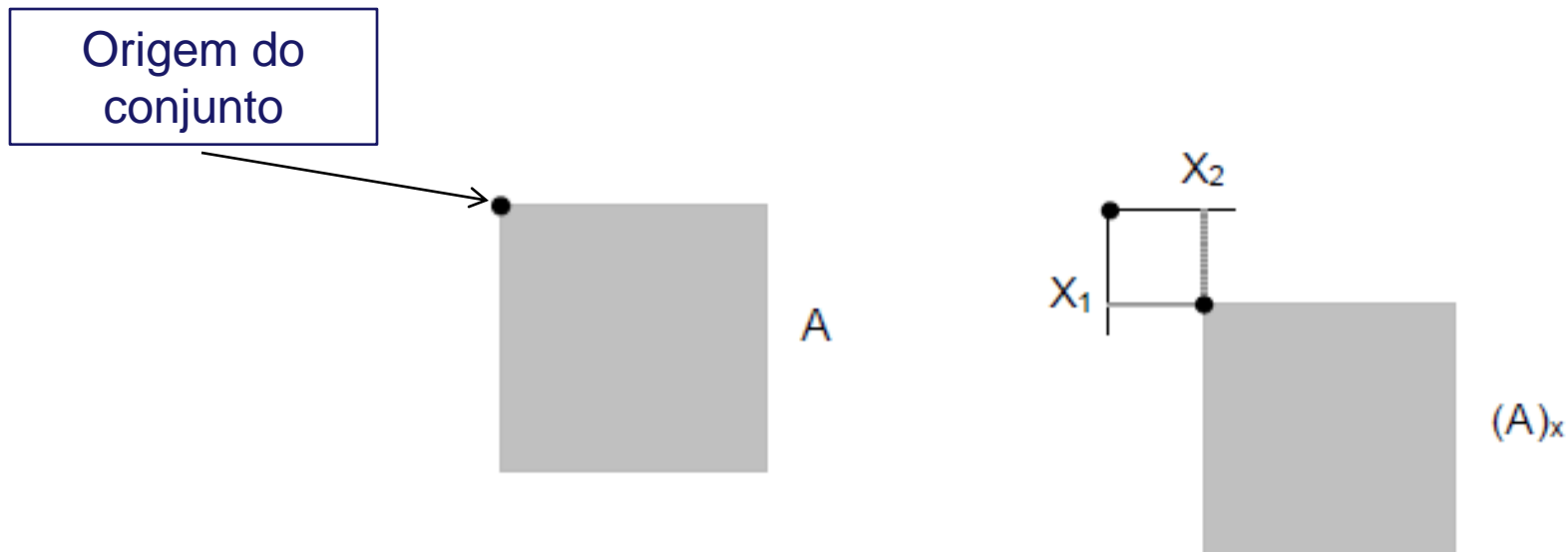
- Elementos que pertencem a  $A$  ou  $B$



# PDI Fundamentos

## ■ Operação entre $A$ e $B$ :

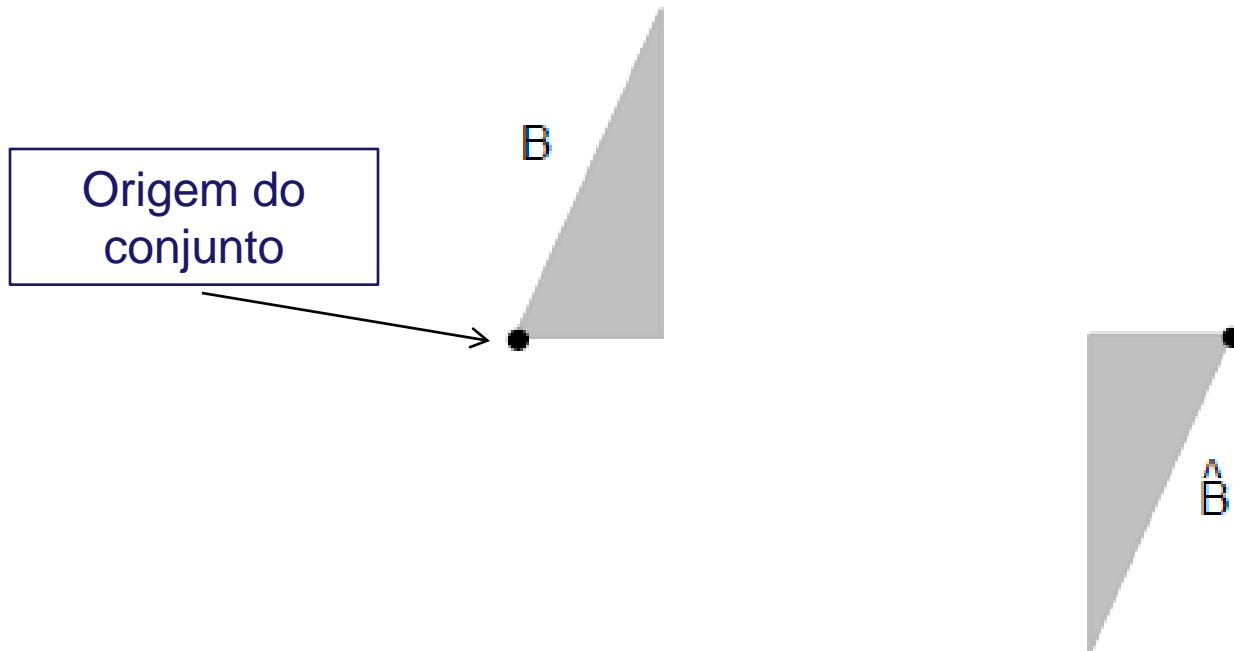
- **Translação de  $A$**  pelo elemento  $x$ :  $(A)_x = \{c \mid c = a + x, \forall a \in A\}$



# PDI Fundamentos

## ■ Operação entre $A$ e $B$ :

□ **Reflexão de  $B$ :**  $\hat{B} = \{x \mid x = -b, \forall b \in B\}$

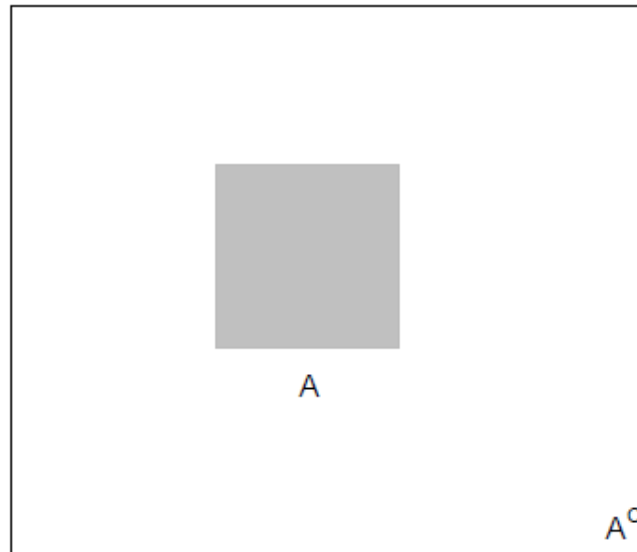


# PDI Fundamentos

- Operação entre  $A$  e  $B$ :

- **Complemento de  $A^c$ :**  $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

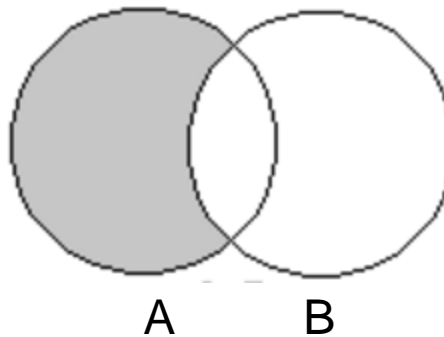
- Conjunto de todos os pixels que não pertencem a  $A$



- Operação entre  $A$  e  $B$ :

- **Diferença entre  $A$  e  $B$ :**  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$

- É o conjunto de pixels que pertencem a um, mas não ao outro



# Fundamentos

## ■ Operadores Morfológicos:

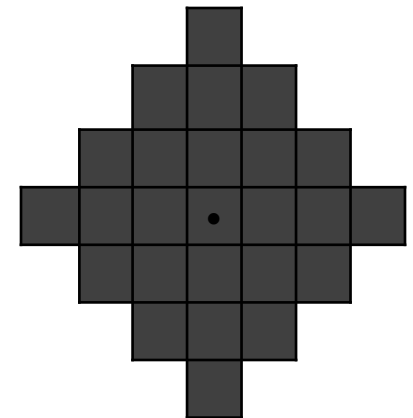
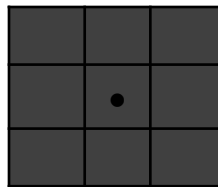
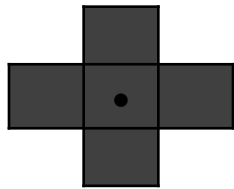
### □ Mapeamento entre A e B

■ *A*: imagem

■ *B*: elemento estruturante → definido em Z

□ *Origem local*: marcada com •

□ Pontos pertencentes ao objeto são marcados (um nível de cinza ou outro marcador)



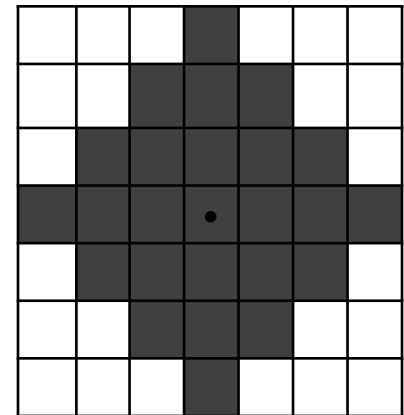
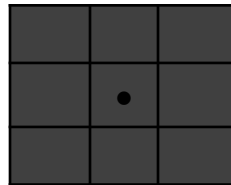
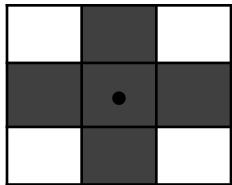


# Fundamentos

## ■ Operadores Morfológicos:

### □ *Padding*

- Elementos Estruturantes convertidos em Arranjos Estruturantes



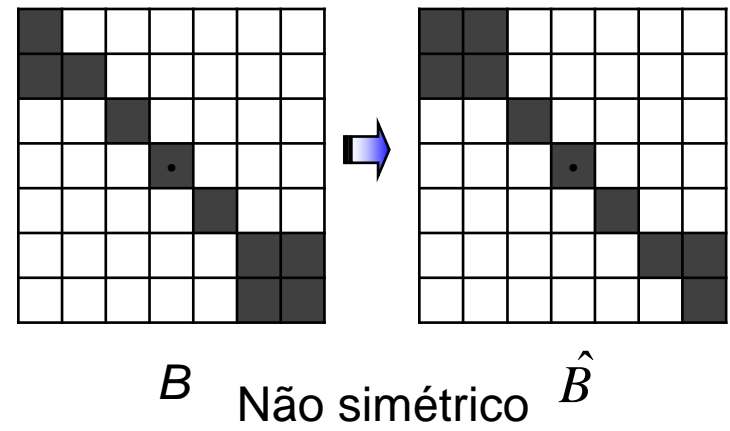
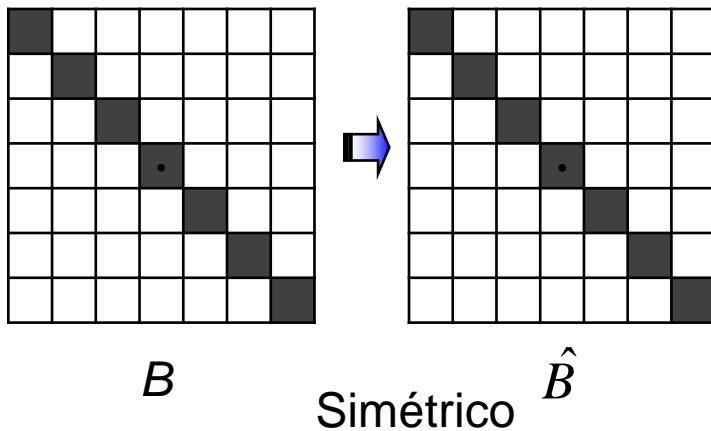
# Fundamentos

## ■ Operações Morfológicas:

- Baseadas nos conceitos da teoria de conjuntos, principalmente:
  - **União, Interseção e Complementação**

### □ **Importante:**

- **Elemento estruturante  $B$**  → simétrico com respeito a sua origem
  - Reflexão não altera o conjunto de elementos:  $B = \hat{B}$



# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

- **Adição**  $\oplus \Rightarrow$  entre  $A$  e  $B \Rightarrow A \oplus B$

$$A \oplus B = \{c \in Z \mid c = a + b, a \in A \wedge b \in B\}$$

- Realizada pela adição de todos os elementos de  $A$  e  $B \Rightarrow$  **via translação**
  - União de todos os termos resultantes
- Corolários imediatos estabelecem que a dilatação é:
  - $A \oplus B = B \oplus A$  (comutativa)
  - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$  (associativa)

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

- **Adição**  $\oplus$   $\Rightarrow$  entre  $A$  e  $B \Rightarrow A \oplus B$

$$A \oplus B = \{c \in Z \mid c = a + b, a \in A \wedge b \in B\}$$

- **Interpretação:**

Conjunto de todos os deslocamentos  $c$  tais que  $A$  sobreponha-se em pelo menos um elemento não nulo da imagem

# Operações Binárias

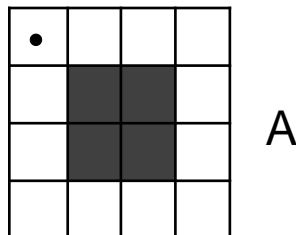
## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

□ Exemplo:

■ Considere a imagem  $A$  e o elemento estruturante  $B$ , calcular  $A \oplus B$

■  $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

$B = \{(0,0), (0,1)\}$

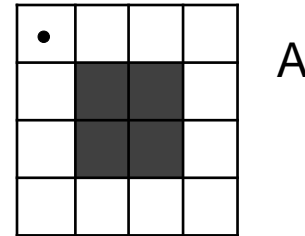


# Operações Binárias

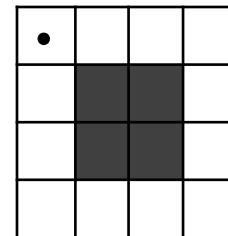
## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

### □ Exemplo:

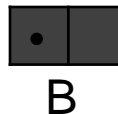
■  $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$



■  $\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \Rightarrow$



$B = \{(0,0), (0,1)\}$



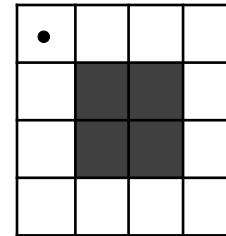
### □ **A translação de qualquer pixel por (0,0) não altera sua posição:**

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

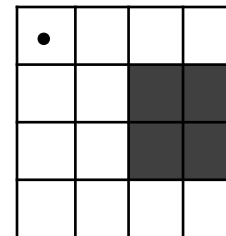
□ Exemplo:

■  $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$



A

■  $\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$   $\Rightarrow$



$B = \{(0,0), (0,1)\}$



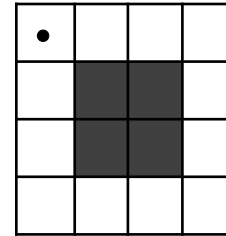
B

# Operações Binárias

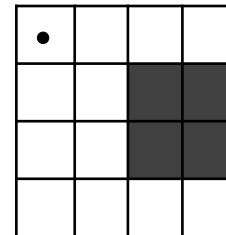
## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

□ Exemplo:

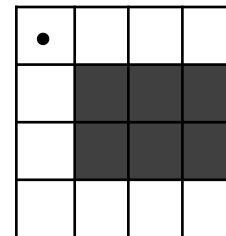
■  $\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \Rightarrow$



■  $\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\} \Rightarrow$



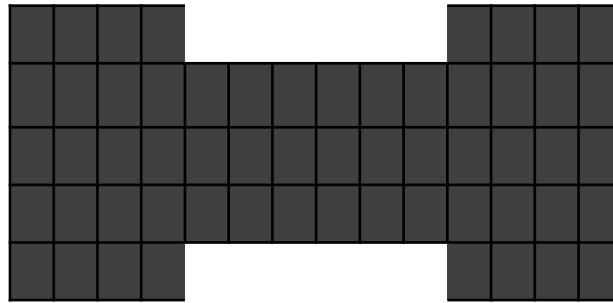
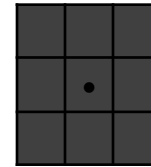
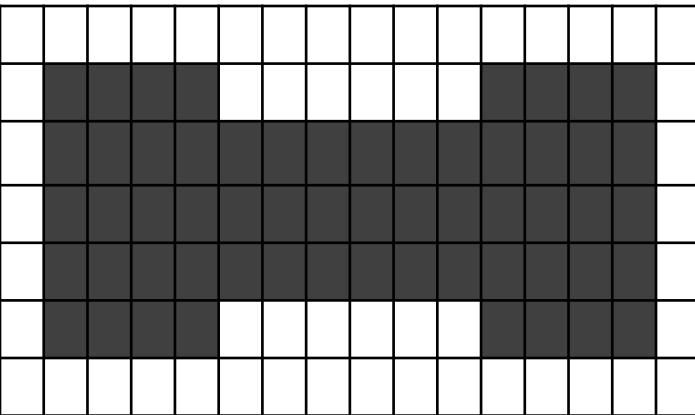
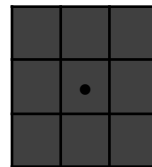
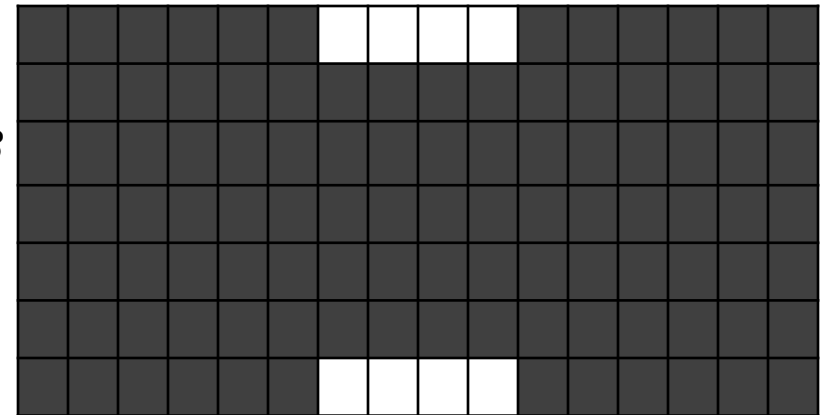

■  $A \oplus B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\} \Rightarrow$





# Operações Binárias

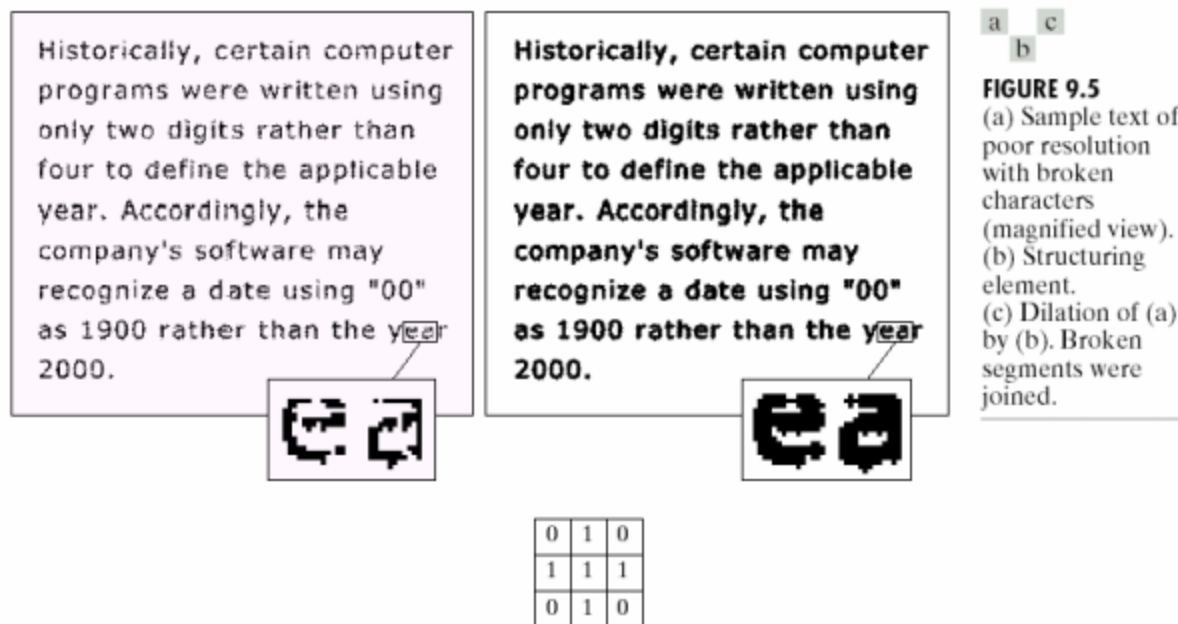
## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

 $A$  $B$  $A$  $B$  $A \oplus B$   


# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação Binária**

- ❑ Combina dois conjuntos a partir de adição vetorial
- ❑ **Aplicação: Preenchimento de espaço (*gap filling*)**



# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**

□ **Subtração**  $\ominus$   entre  $A$  e  $B$    $A \ominus B$

$$A \ominus B = \{c \in Z \mid c + b \in A, \forall b \in B\}$$

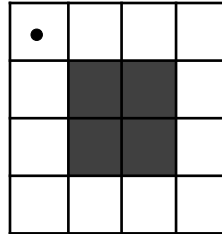
- A erosão é um conjunto de translações **que alinham  $B$  sobre o conjunto de pixels de  $A$**
- **Importante:** **Considerar somente as translações que tem a origem de  $B$  em um membro de  $A$**

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**

### □ Exemplo 1:

■  $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$



$B = \{(0,0), (0,1)\}$

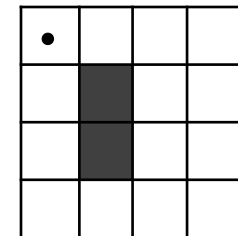


Erosão: translações que alinham  $B$  sobre o conjunto de pixels de  $A$

a	+	B	a + b	Resultado
1,1	+	0,0; 0,1	1,1; 1,2	$1,1 \in A \ominus B$
1,2	+	0,0; 0,1	1,2; 1,3	$1,2 \notin A \ominus B$
2,1	+	0,0; 0,1	2,1; 2,2	$2,1 \in A \ominus B$
2,2	+	0,0; 0,1	2,2; 2,3	$2,2 \notin A \ominus B$



$A \ominus B$

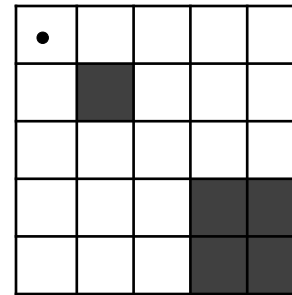


# Operações Binárias

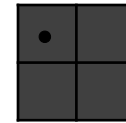
## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**

### □ Exemplo 2:

■  $A = \{(1,1), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$

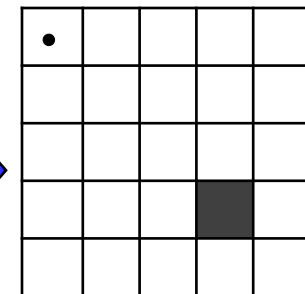


$B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$



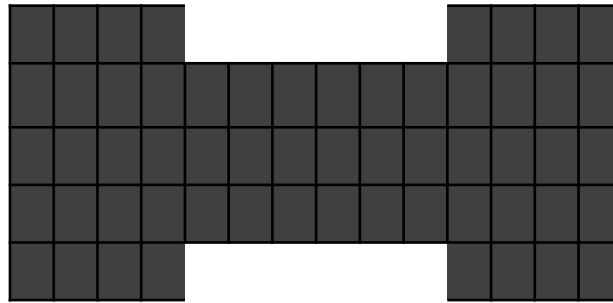
$A \ominus B$

a	+	B	a + b	Resultado
1,1	+	0,0;0,1;1,0;1,1	1,1; 1,2; 2,1; 2,2	$1,1 \notin A \ominus B$
3,3	+	0,0;0,1;1,0;1,1	3,3; 3,4; 4,3; 4,4	$3,3 \in A \ominus B$
3,4	+	0,0;0,1;1,0;1,1	3,4; 3,5; 4,4; 4,5	$3,4 \notin A \ominus B$
4,3	+	0,0;0,1;1,0;1,1	4,3; 4,4; 5,3; 5,4	$4,3 \notin A \ominus B$
4,4	+	0,0;0,1;1,0;1,1	4,4; 4,5; 5,4; 5,5	$4,4 \notin A \ominus B$

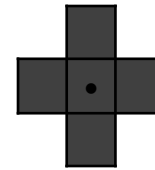


# Operações Binárias

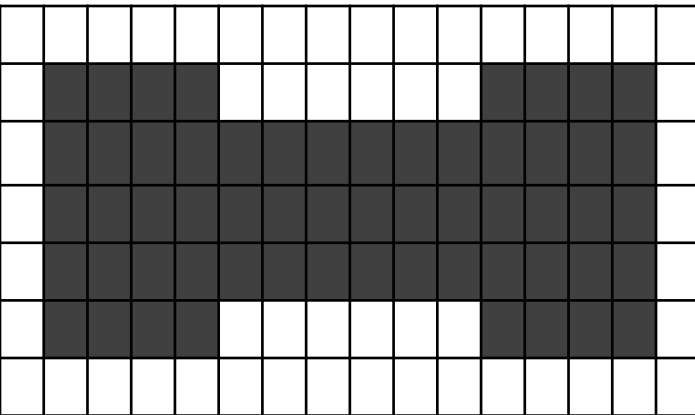
## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**



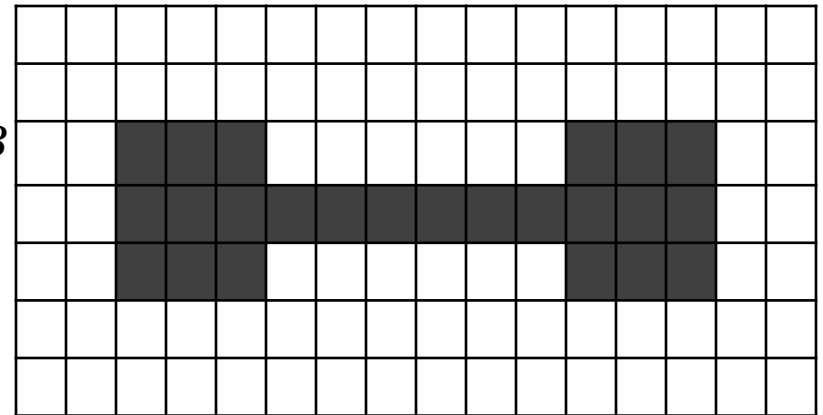
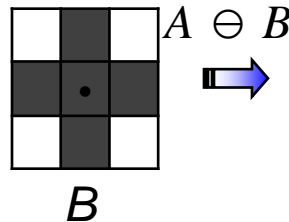
*A*



*B*



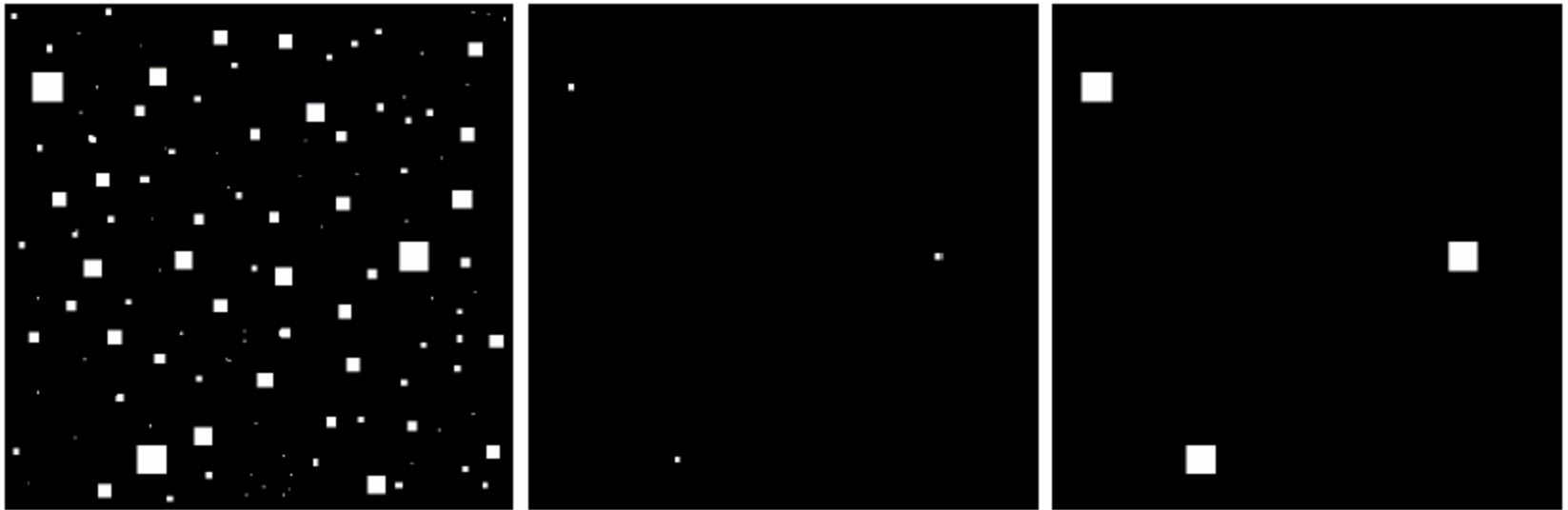
*A*



# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**

- ❑ Combina dois conjuntos a partir de subtração vetorial
- ❑ **Aplicação:** Remoção de Elementos ou Ruído



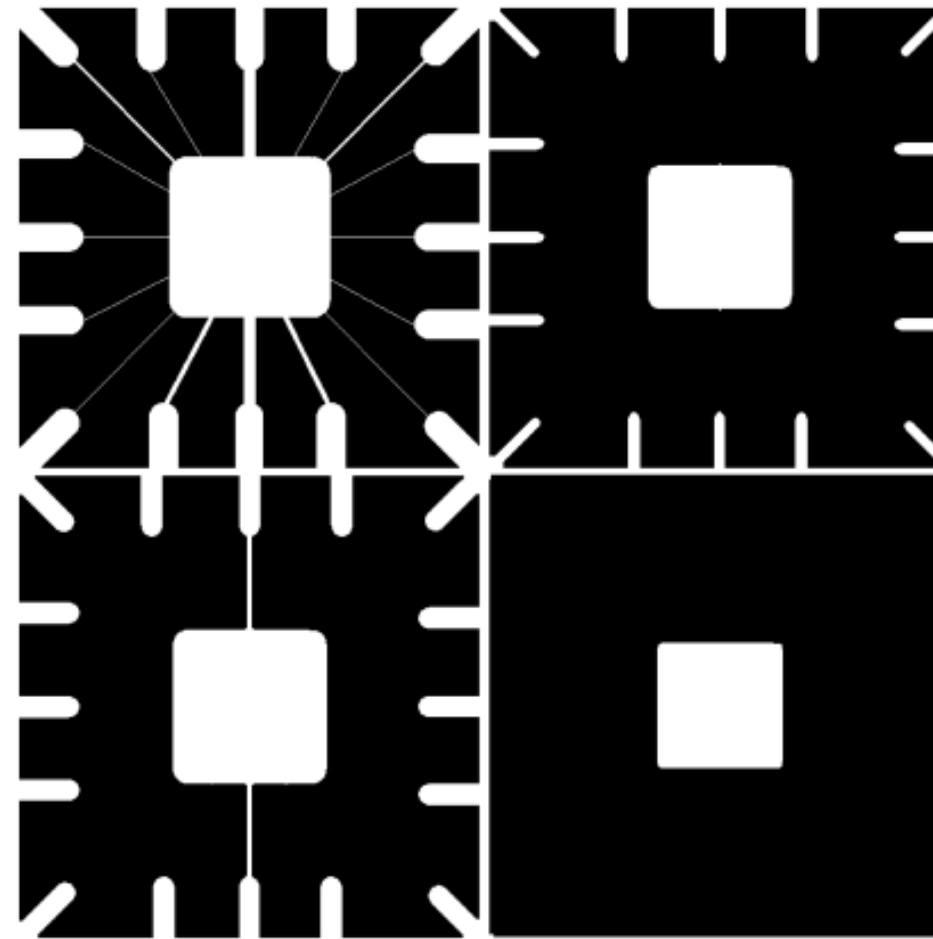
a b c

**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Erosão Binária**

### □ Exemplo



a	b
c	d

**FIGURE 9.8** An illustration of erosion.  
(a) Original image.  
(b) Erosion with a disk of radius 10.  
(c) Erosion with a disk of radius 5.  
(d) Erosion with a disk of radius 20.



# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: **Dilatação x Erosão**

- **Dilatação**: expande os elementos de uma imagem

- **Erosão**: reduz os elementos de uma imagem

- **Erosão não é o inverso da Dilatação**

- Operações duais:

- $(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$

- $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$

- **Operações úteis quando o Elemento Estruturante é simétrico**

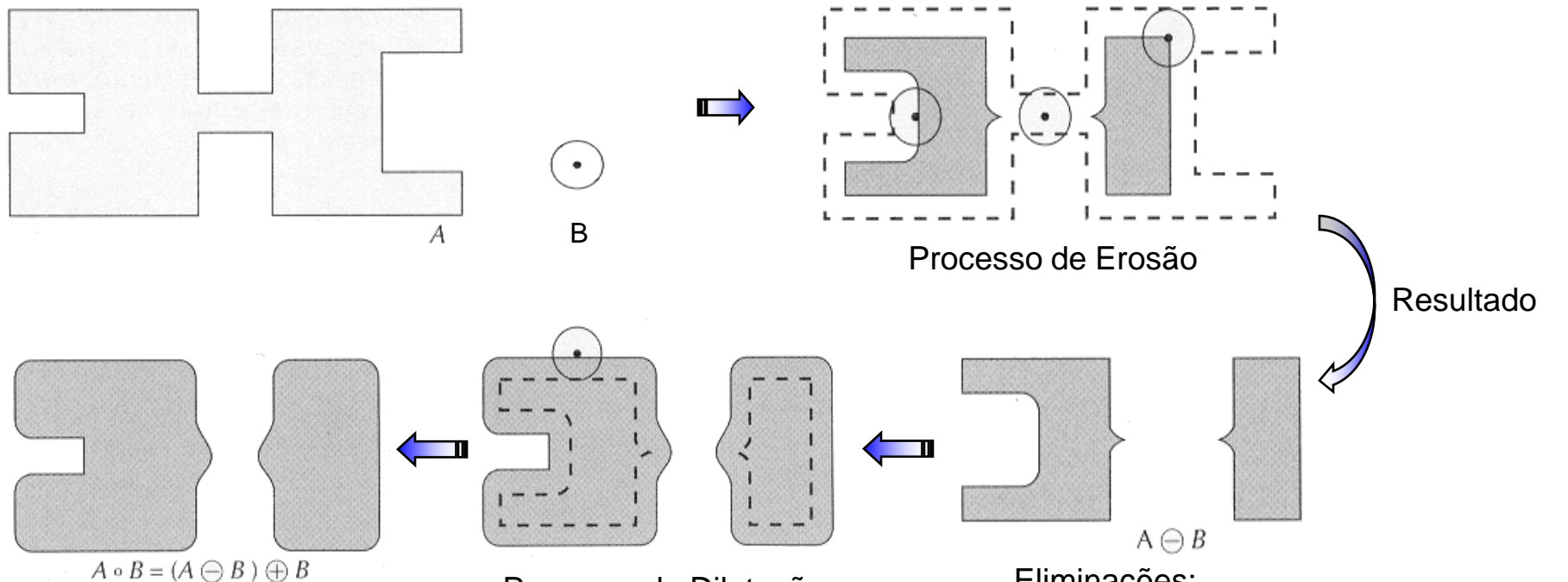
# Operações Binárias

- **Transformação Morfológica: Abertura**
  - **Composição de operações: Erosão + Dilatação**
    - Considerar o mesmo elemento estruturante
  - $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$
- **Objetivo:**
  - Suavizar contornos de uma imagem:
    - Elimina conexões finas entre elementos

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Abertura

□ Interpretação Geométrica:  $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$



Observe os Cantos:

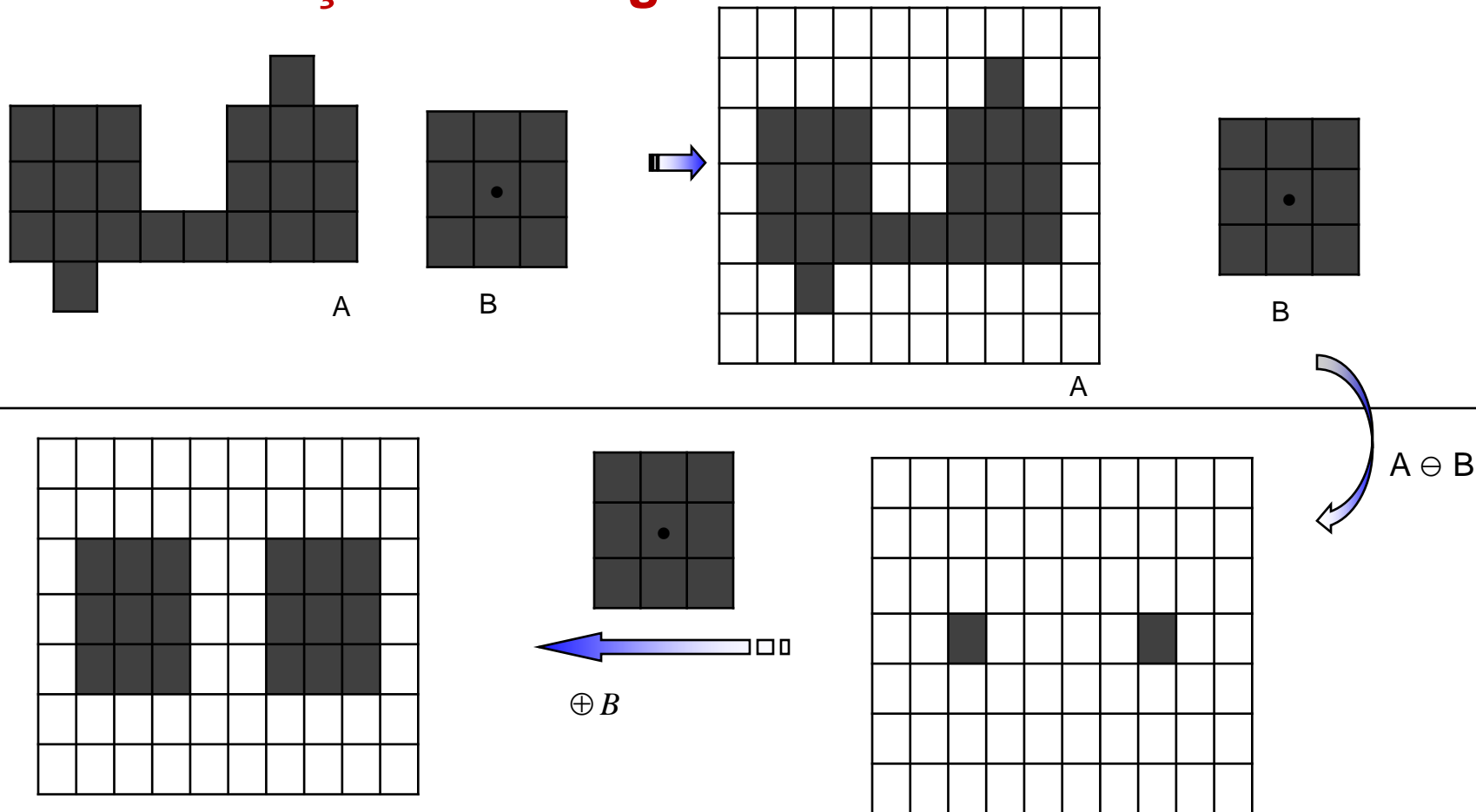
1. Apontamentos externos: arredondados
2. Apontamentos internos: não alterados

Eliminações:

1. Ponte entre as duas seções;
2. Elementos à direita

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Abertura



$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

Eliminações:

1. Ponte entre as duas seções;
2. Elementos superior e inferior

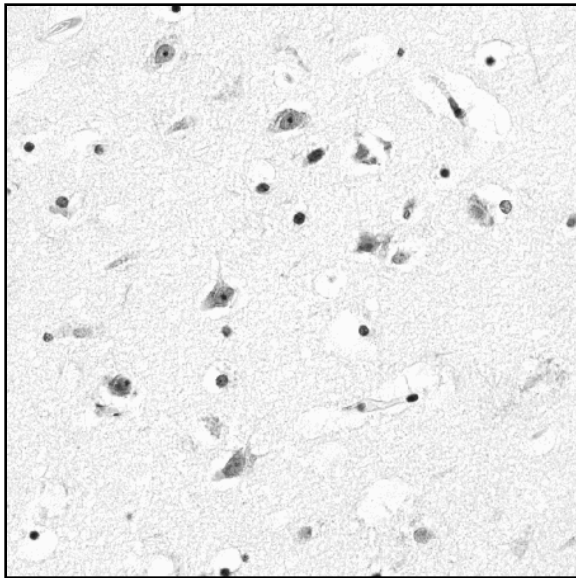
# Operações Binárias

- **Transformação Morfológica: Abertura**
- **Aplicação:**
  - **Remoção de ruídos de fundo em imagens**
    - Pontos brancos no fundo preto
    - Útil em processo de segmentação
      - Pontos aleatórios e isolados podem ser removidos pela Erosão
      - A forma dos objetos é recuperada pela Dilatação sem restaurar o ruído
    - Não deve ser aplicado para pontos espúrios (“não genuínos”) dentro do objeto

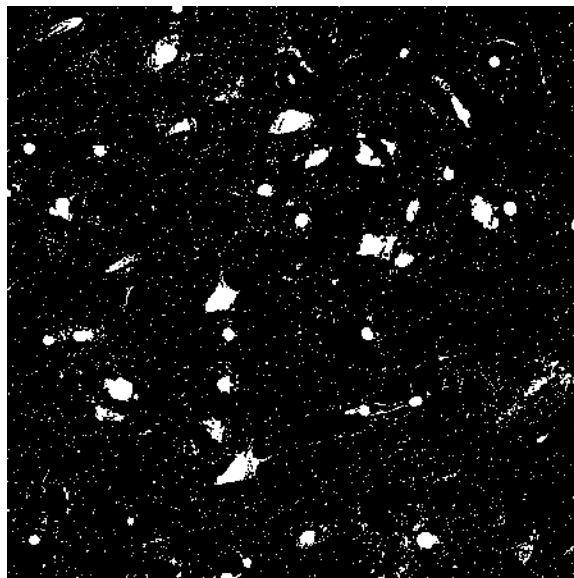
# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Abertura

## ■ Aplicação:

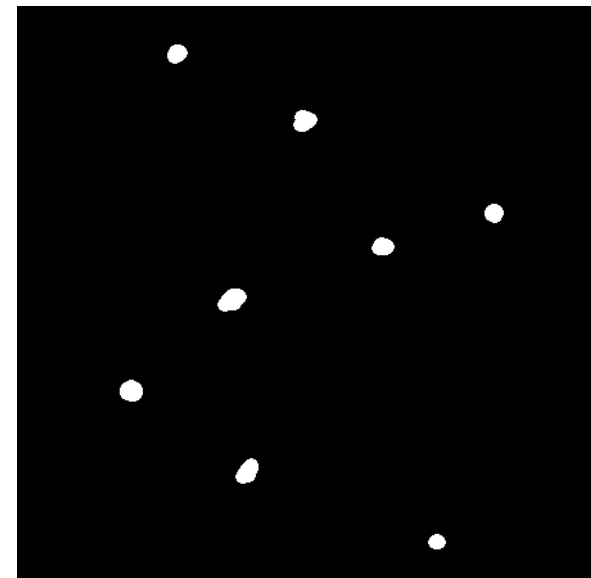


Entrada



Limiarização

$T=210$



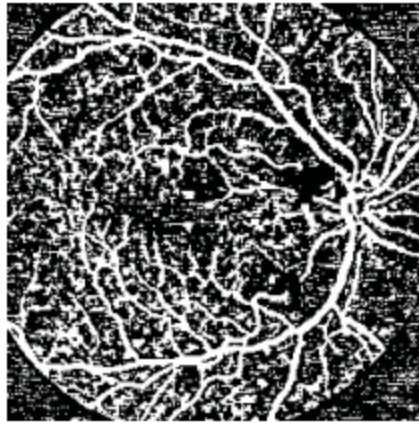
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

11 pixel circular structuring  
element

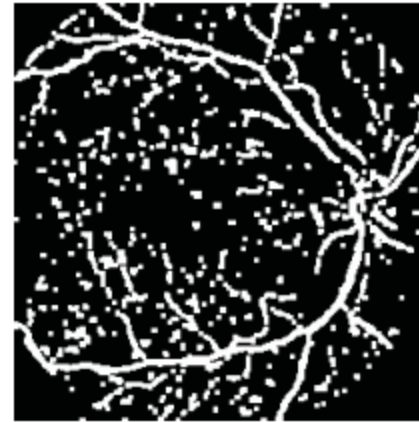
# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Abertura

## ■ Aplicação:



(a)



(b)

Figure. (a) Original Image; (b) Morphological opening size (3x3 pixels)

# Operações Binárias

## ■ **Transformação Morfológica: Fechamento**

### □ **Composição de operações: Dilatação + Erosão**

- Considerar o mesmo elemento estruturante

□  $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$

### □ **Objetivo:**

- Suavizar contornos de uma imagem:

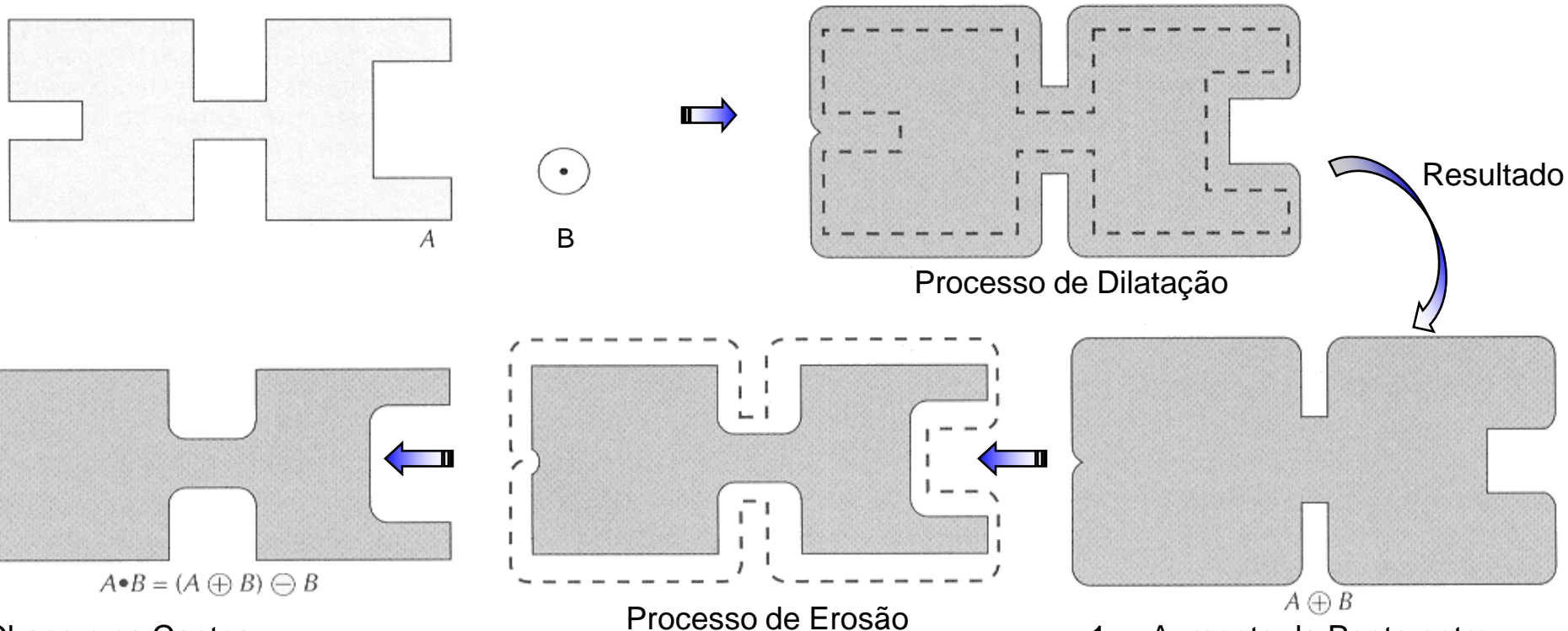
- Funde descontinuidades, elimina pequenos buracos e preenche lacunas em um contorno



# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Fechamento

■ Interpretação Geométrica:  $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$



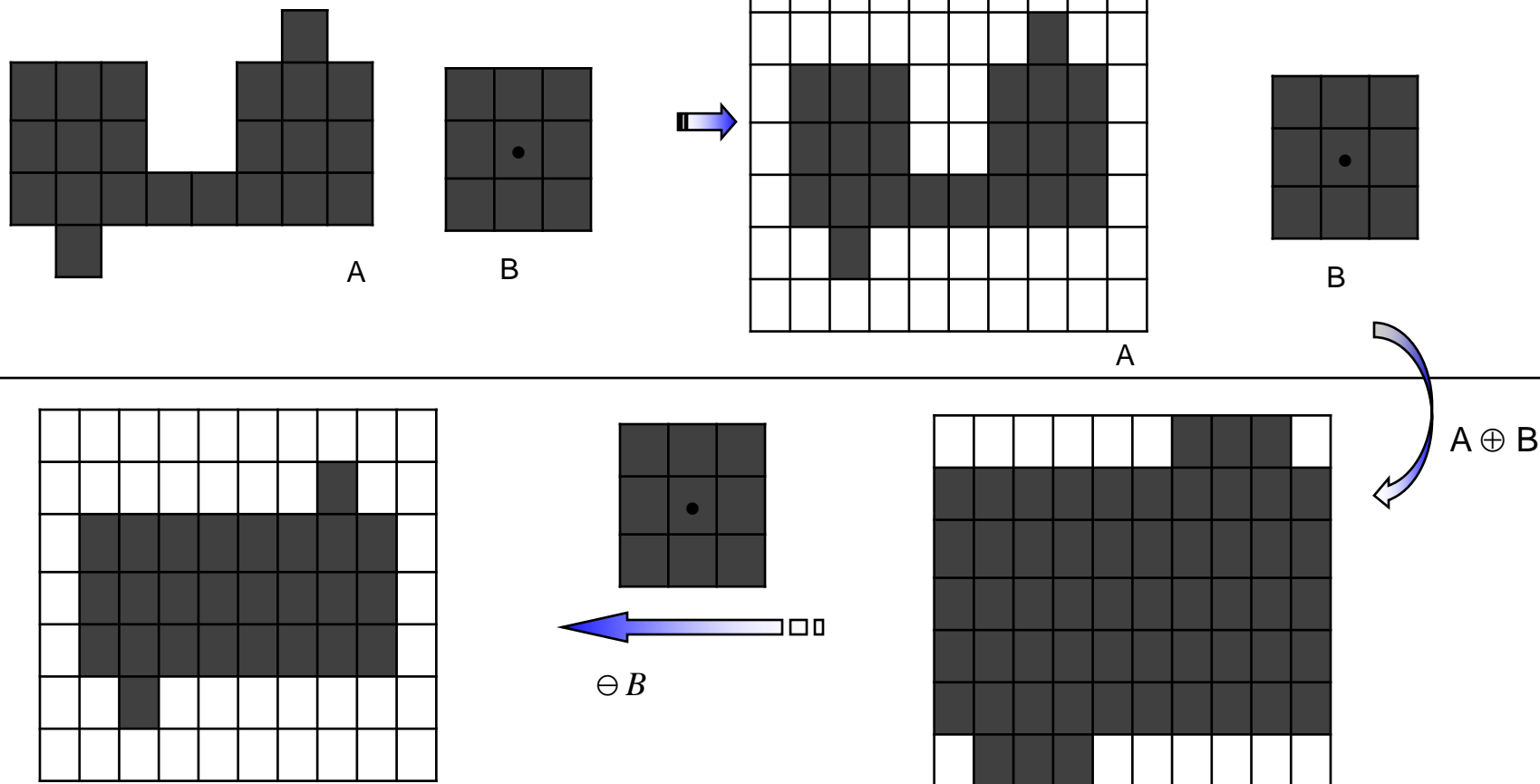
Observe os Cantos:

1. Apontamentos internos: arredondados
2. Apontamentos externos: não alterados
3. Espaço entre elementos à esquerda: reduzido

1. Aumento da Ponte entre as duas seções;
2. Reduções dos espaços entre elementos

# Operações Binárias

## Transformação Morfológica: Fechamento



$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

Observe os Cantos:

1. Apontamentos externos: não alterados
2. Espaço entre elementos: reduzido/eliminado

1. Aumento da Ponte entre as duas seções;
2. Espaço entre elementos: 42 eliminado

# Operações Binárias

- **Transformação Morfológica: Fechamento**
- **Aplicação:**
  - Preencher ou fechar os vazios dentro de um objeto
    - Útil em processo de segmentação
    - Eliminar ruídos: **Remover pixels contidos no objeto**

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Abertura x Fechamento

### □ Abertura

- $A \circ B$ : subconjunto (subimagem) de  $A$
- Se  $C$  for um subconjunto de  $D$ , então  $C \circ B$  será um subconjunto  $D \circ B$
- $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

### □ Fechamento

- $A$  é um subconjunto de  $A \bullet B$
- Se  $C$  for um subconjunto de  $D$ , então  $C \bullet B$  será um subconjunto de  $D \bullet B$
- $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$

## ■ Dualidade: $(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$

# Operações Binárias

- **Transformação Morfológica: Abertura x Fechamento**
- **Filtro Morfológico**
  - Útil para eliminar ruídos isolados
  - Composição de Operações: Abertura + Fechamento

# Operações Binárias

## ■ Transformação Morfológica: Um Exemplo

### □ Exemplo (Reconhecimento por Erosão)

Binary image  $f$

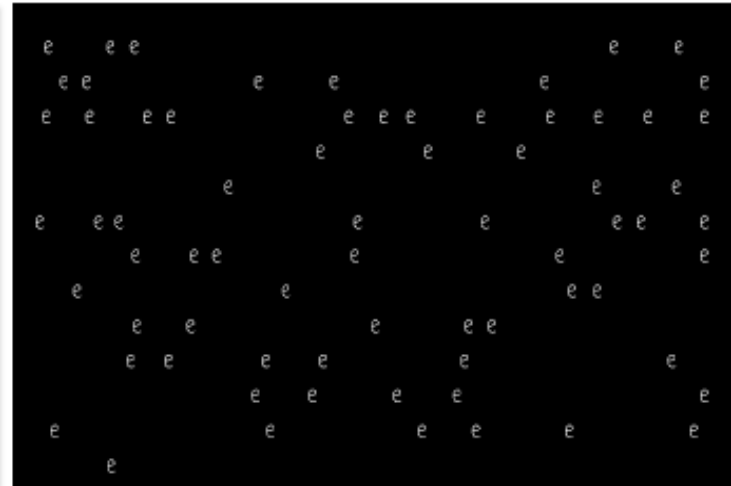
#### INTEREST-POINT DETECTION

Feature extraction typically starts by finding the salient interest points in the image. For robust image matching, we desire interest points to be repeatable under perspective transformations (or, at least, scale changes, rotation, and translation) and real-world lighting variations. An example of feature extraction is illustrated in Figure 3. To achieve scale invariance, interest points are typically computed at multiple scales using an image pyramid [15]. To achieve rotation invariance, the patch around each interest point is canonically oriented in the direction of the dominant gradient. Illumination changes are compensated by normalizing the mean and standard deviation of the pixels of the gray values within each patch [16].

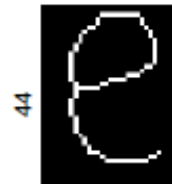
1400

2000

$$\text{open}(\text{NOT}[f], W) = \text{dilate}(\text{erode}(\text{NOT}[f], W), W)$$



Structuring  
element  $W$



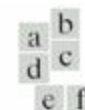
44

34

# Operações Binárias

## ■ Filtro Morfológico

## ■ Exemplo

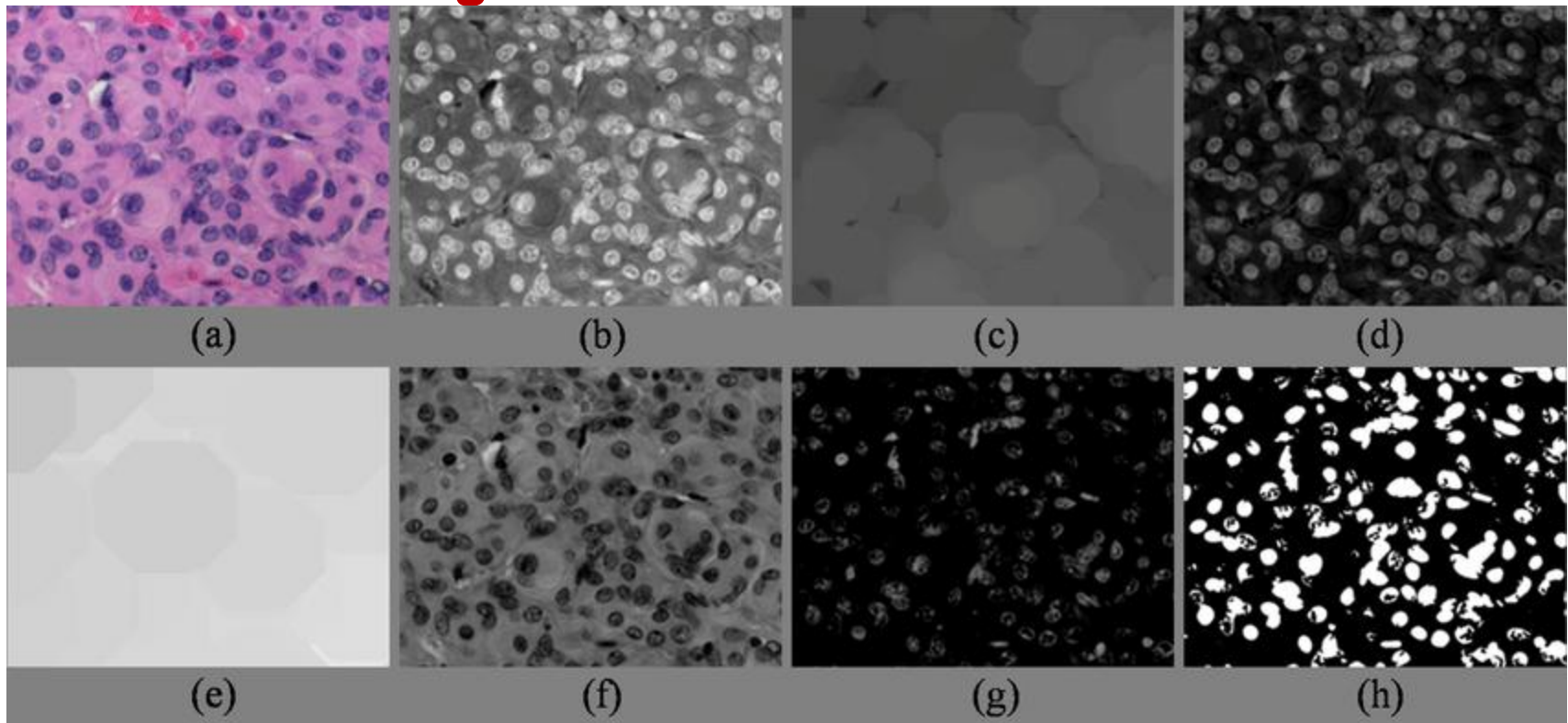


**FIGURE 9.11**

(a) Noisy image.  
 (c) Eroded image.  
 (d) Opening of  $A$ .  
 (e) Dilation of the opening.  
 (f) Closing of the opening. (Original image for this example courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

# Operações Binárias

## ■ Filtro Morfológico



Exemplos de segmentação morfológica. (a) Imagem original, (b) imagem em nível de cinza após inversão de imagem, (c) abertura morfológica, (d) imagem subtraída (imagem original em (b) subtraída da imagem de abertura morfológica em (c)), (e) fechamento morfológico, (f) imagem subtraída (imagem morfológica de fechamento em (c) subtraída da imagem original em (b)), (g) imagem subtraída (imagem aprimorada em (d) subtraída da imagem aprimorada em (f))), (h) imagem binária.



# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ Aplicações da morfologia

#### ■ Extrair componentes da imagem

#### ■ Úteis para representar e descrever formas

- Extração de fronteiras
- Preenchimento de regiões
- Componentes conectados
- Afinamento
- Espessamento
- Esqueletonização

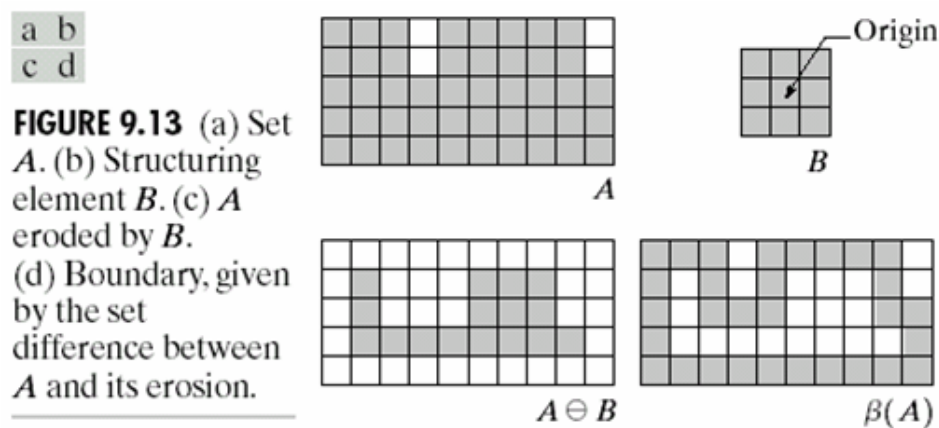
# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ Extração de fronteiras

#### ■ Fronteira de A

- Erosão de A por B
- Subtração dessa erosão do próprio A
- $\beta(A) = A - (A \ominus B)$



**FIGURE 9.14**

(a) A simple binary image, with 1's represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ **Extração de fronteiras**

- Erosão fornece as bordas internas da forma

- **Gradiente Interno:**  $\beta(A) = A - (A \ominus B)$

- Dilatação fornece as bordas externas da forma

- **Gradiente Externo:**  $\beta(A) = (A \oplus B) - A$

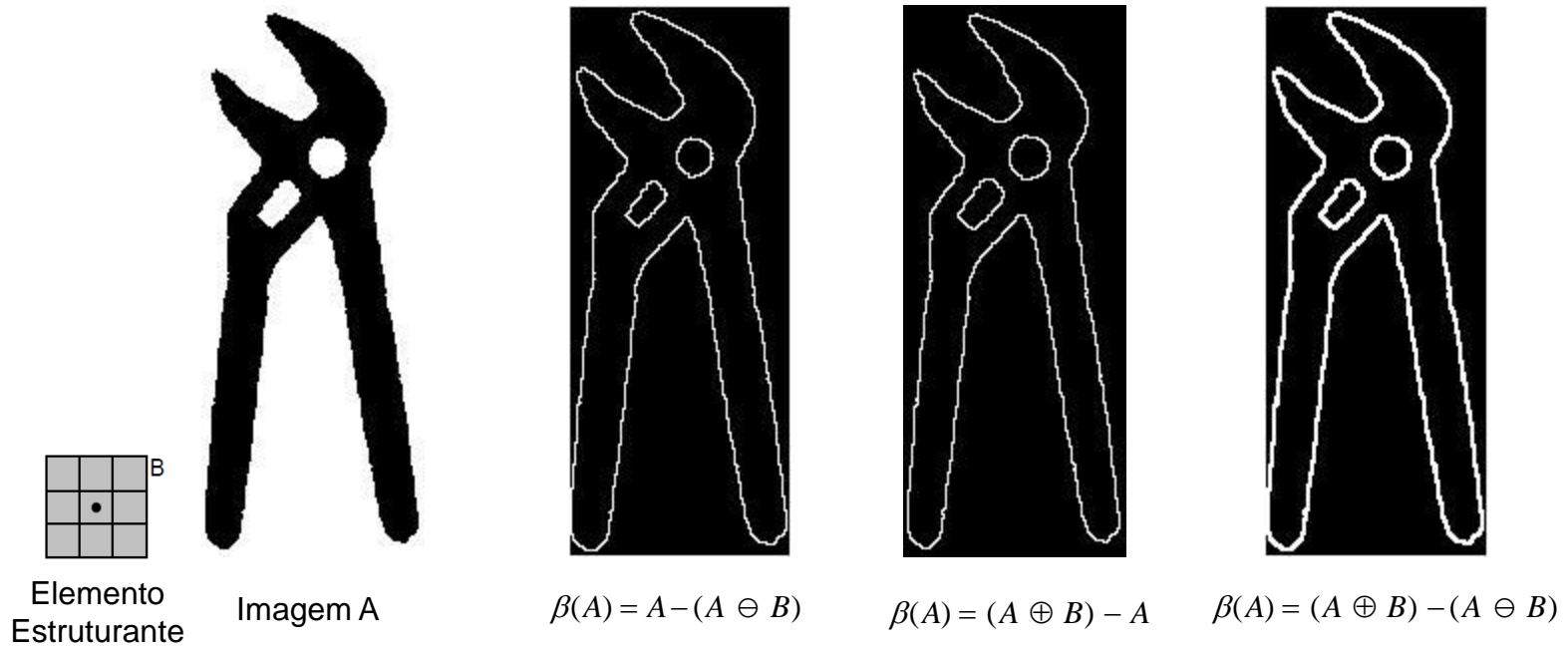
- Soma dos Gradientes (Bordas Interna + Externa)

- **Gradiente Morfológico:**  $\beta(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B)$

# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ Extração de fronteiras

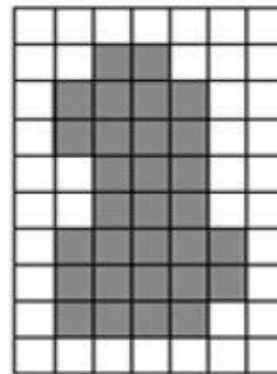
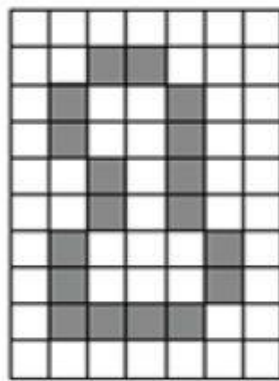


# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ Preenchimento de Regiões

- Dada uma região **interna A** e um ponto  $p \in A$ 
  - O algoritmo busca preencher completamente a região até a borda



# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos Básicos

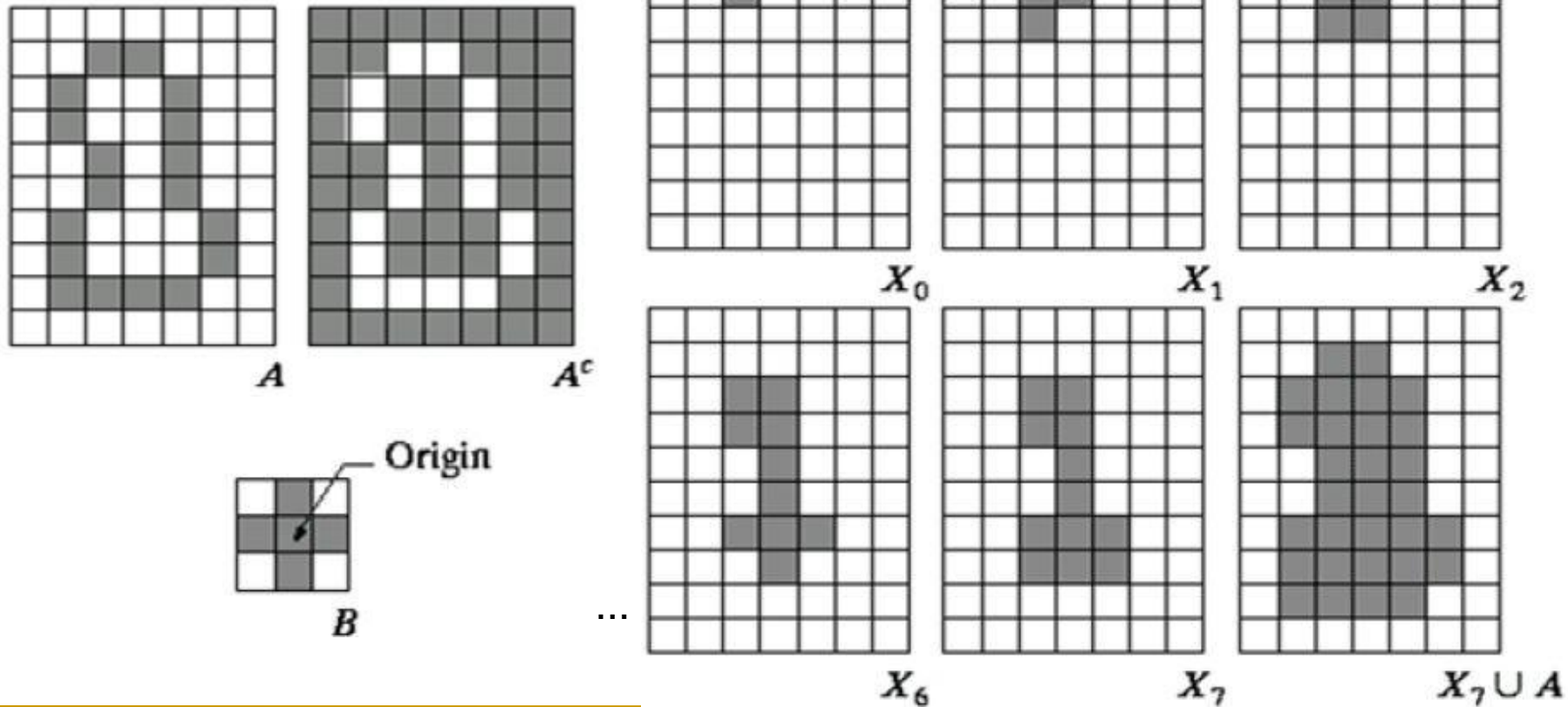
### □ Preenchimento de Regiões

- $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$
- em que:
  - $X_0$  é um ponto conectado (p): **ponto semente**
  - $B$  é o elemento estruturante
  - $A^c$  é o complemento de  $A$
- Resultado é obtido por:  $X_k \cup A$
- Equação aplicada repetidamente
  - Critério de parada: pontos contidos em  $A$

# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

### □ Exemplo 1

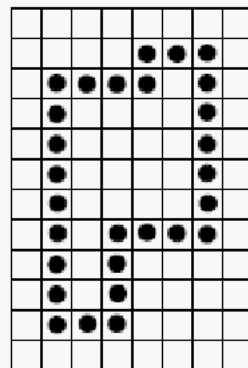
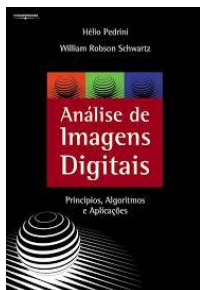


Resultado é obtido por:  $X_k \cup A$

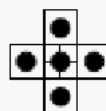
# Operações Binárias

## ■ Algoritmos Morfológicos

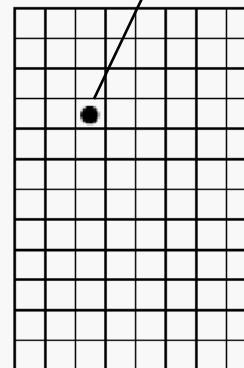
### □ Exemplo 2



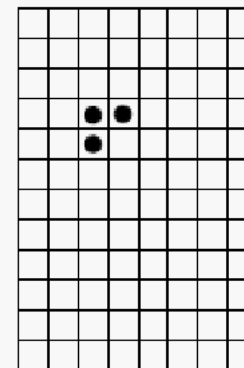
(a)  $A$



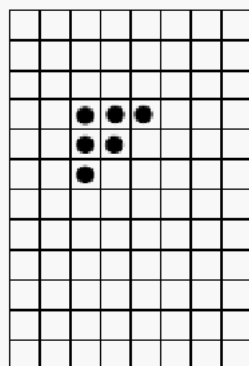
(b)  $B$



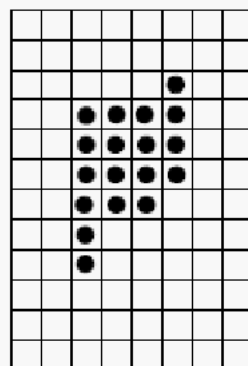
(c)  $X_0 = p$



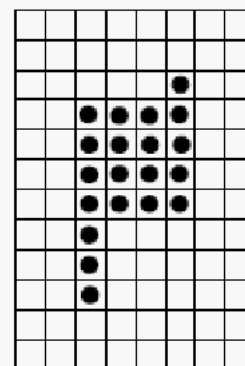
(d)  $X_1$



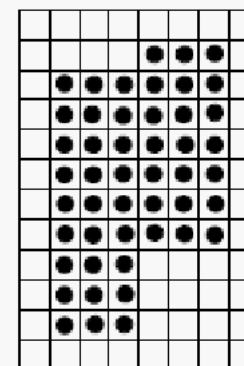
(e)  $X_2$  ...



(f)  $X_5$



(g)  $X_6$



(h)  $X_6 \cup A$

Ponto semente



# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ Operações morfológicas

### □ Dilatação, erosão, abertura e fechamento

- Extensões para imagens monocromáticas

### □ **Erosão**

- Posicionar a origem do elemento estruturante sobre a imagem
- Calcular o valor **mínimo entre todos** os valores contidos nessa região
- Substituir esse valor no centro da região

...

# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ Operações morfológicas

### □ Dilatação, erosão, abertura e fechamento

- Extensões para imagens monocromáticas

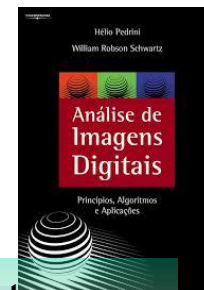
### □ **Dilatação**

- Posicionar a origem do elemento estruturante sobre a imagem
- Calcular o valor **máximo entre todos** os valores contidos nessa região
- Substituir esse valor no centro da região

...

# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ Exemplo (Dilatação e Erosão): Resultado



20	23	26	28	32	25	25	17
17	19	19	35	28	34	33	28
34	36	27	33	37	44	40	41
32	27	18	16	21	26	28	32
34	27	25	23	24	35	37	29

(a)  $f$

1	2	1
2	3	2
1	2	1

(b)  $b$

Elemento  
Estruturante

Origem

25	28	36	37	36	36	35	34
37	38	37	38	45	46	45	43
38	39	38	39	46	47	46	44
37	38	37	38	45	46	45	43
37	36	29	27	37	39	50	39

(c)  $f \oplus b$

15	16	17	18	23	22	15	14
14	15	16	17	24	23	16	15
15	16	15	14	15	20	25	26
25	16	14	13	14	19	24	26
25	17	15	14	19	24	26	26

(d)  $f \ominus b$

Máximo local

$$(f \oplus b)(x,y) = \max\{f(x-m, y-n) + b(m,n)\}$$

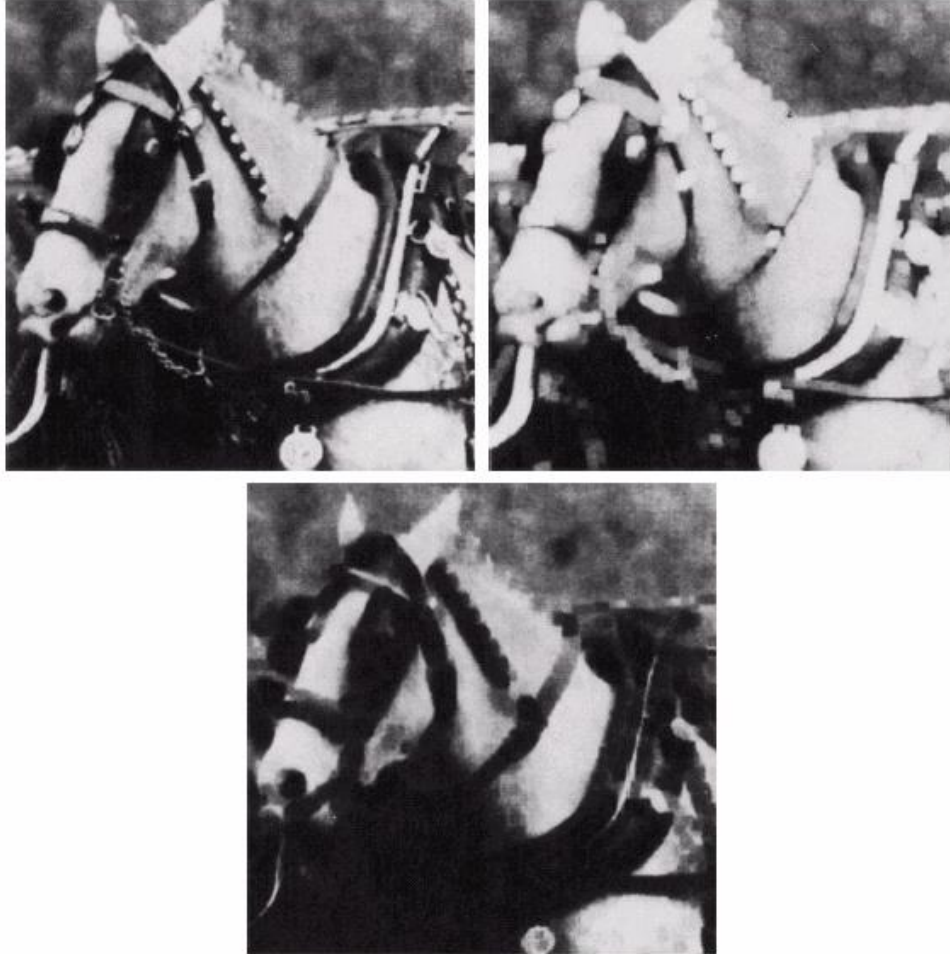
Mínimo local

$$(f \ominus b)(x,y) = \min\{f(x-m, y-n) - b(m,n)\}$$

considerando,  $(m,n) \in b \mid (m,n) = (0,0)$  é a origem do elemento estruturante  $b$ .

# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ Exemplo (Dilatação e Erosão)



a b  
c

**FIGURE 9.29**

(a) Original image. (b) Result of dilation.

(c) Result of erosion.

(Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ **Transformação Morfológica: Abertura**

### □ **Composição de operações: Erosão + Dilatação**

- Considerar o mesmo elemento estruturante

□  $f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$

## ■ **Transformação Morfológica: Fechamento**

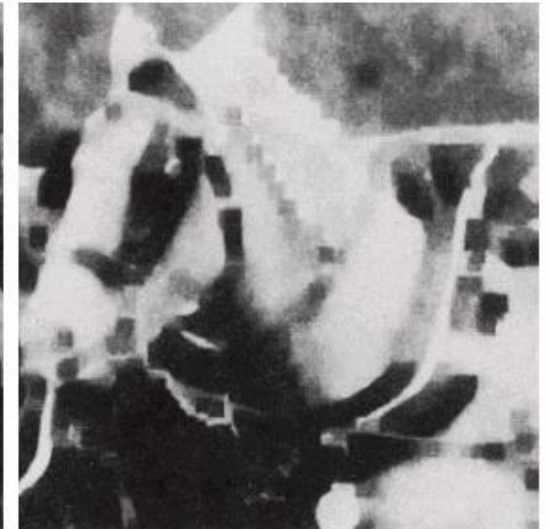
### □ **Composição de operações: Dilatação + Erosão**

- Considerar o mesmo elemento estruturante

□  $f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$

# Morfologia em Níveis de Cinza

## ■ Exemplo (Abertura e Fechamento)



a b

**FIGURE 9.31** (a) Opening and (b) closing of Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)



# Morfologia em Níveis de Cinza

- **Exemplo (Abertura e Fechamento): Atenuação de Ruído**

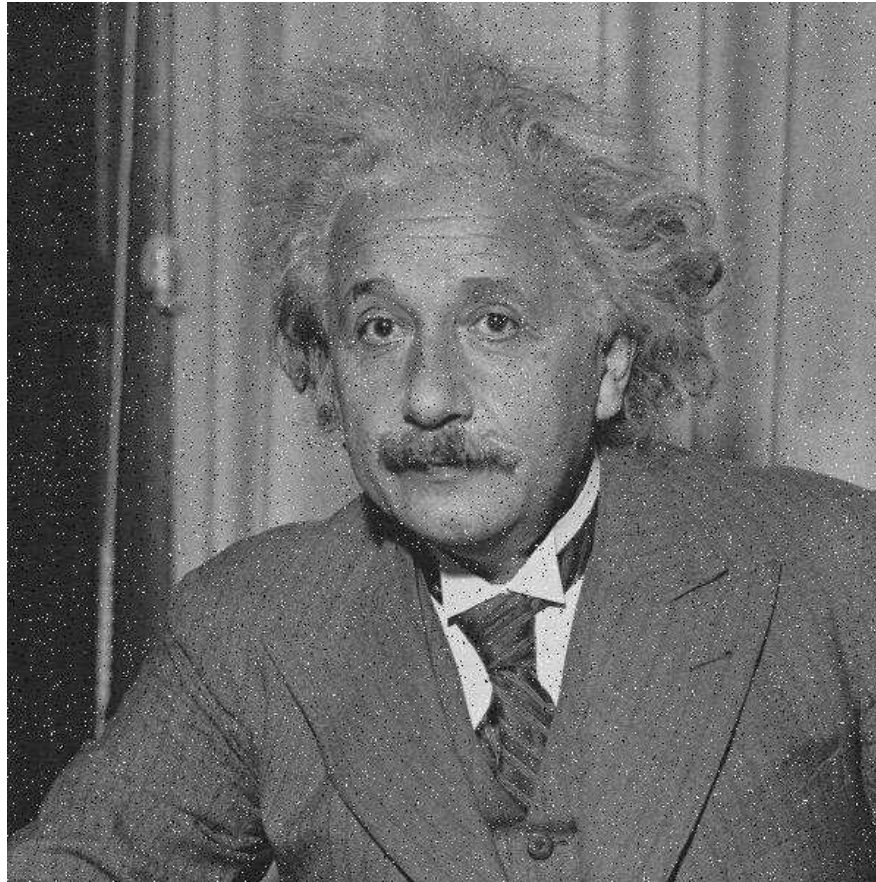
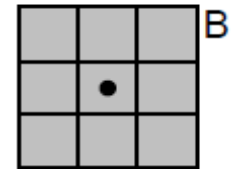


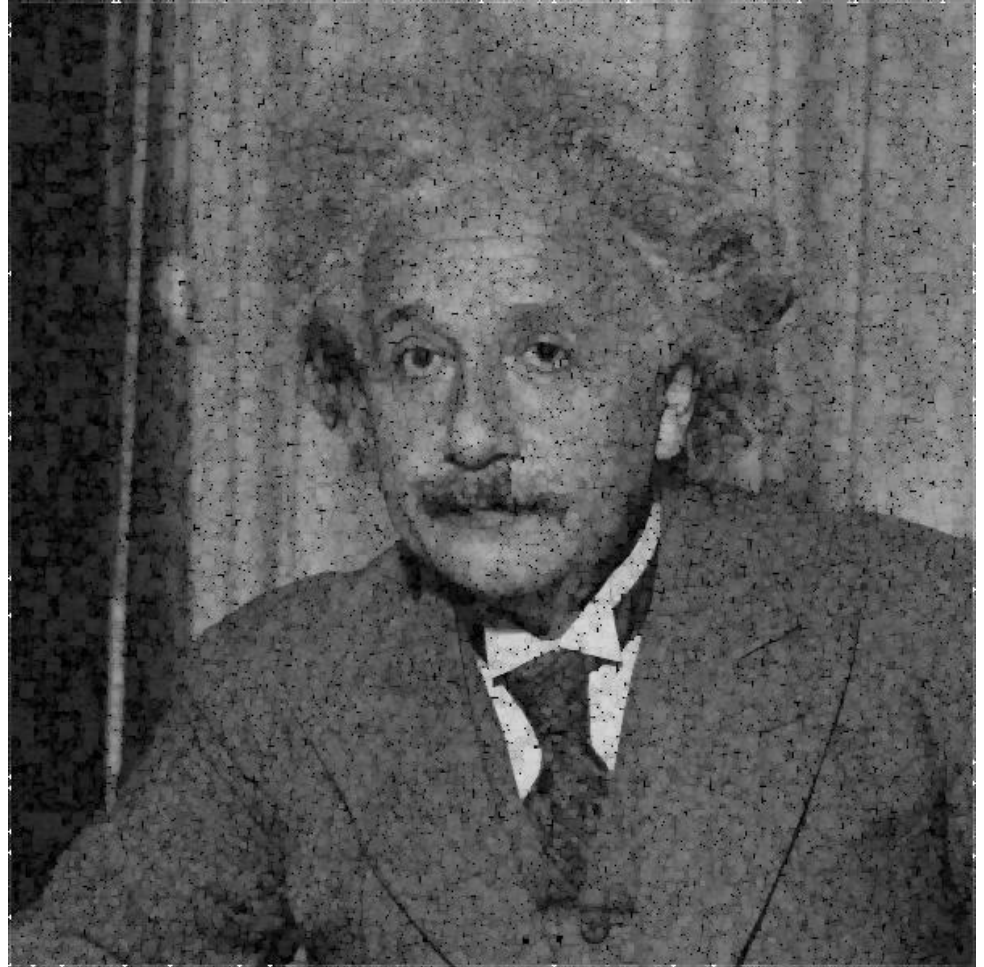
Imagem com Ruído Sal e Pimenta



# Morfologia em Níveis de Cinza

- **Exemplo (Abertura): Atenuação de Ruído**

Atenua pontos brancos

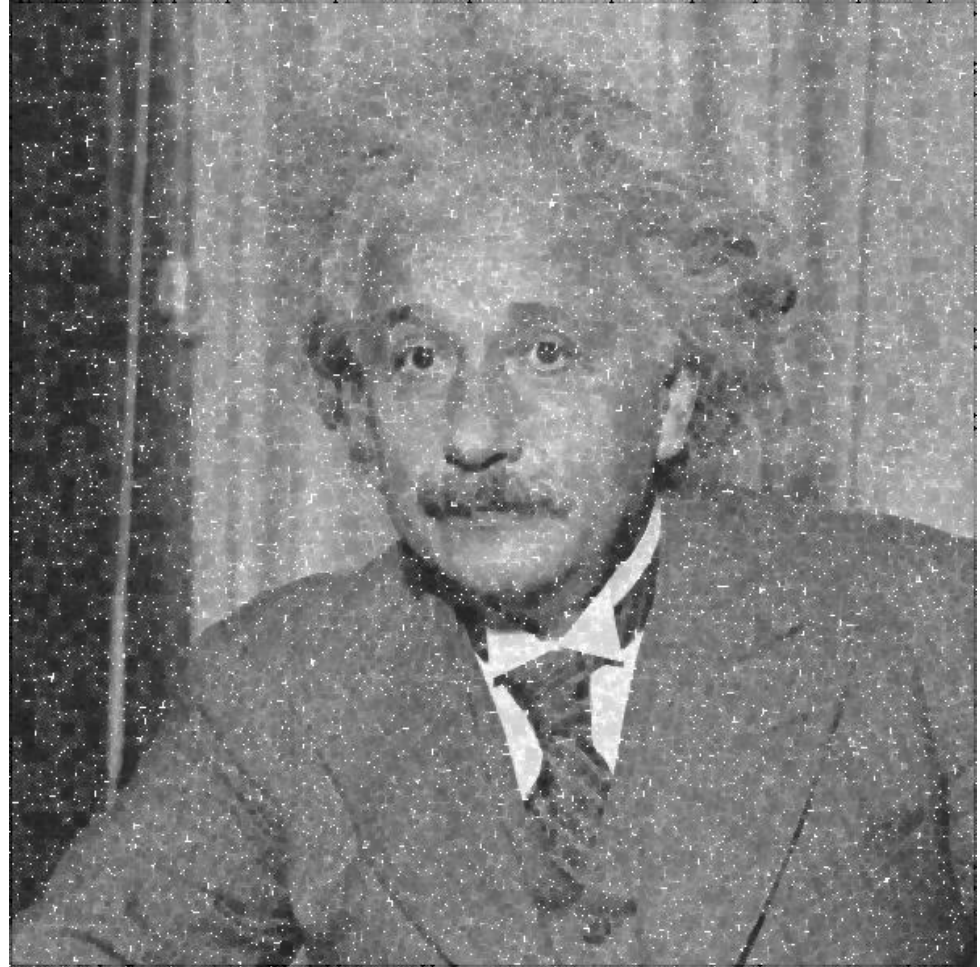




# Morfologia em Níveis de Cinza

- **Exemplo (Fechamento): Atenuação de Ruído**

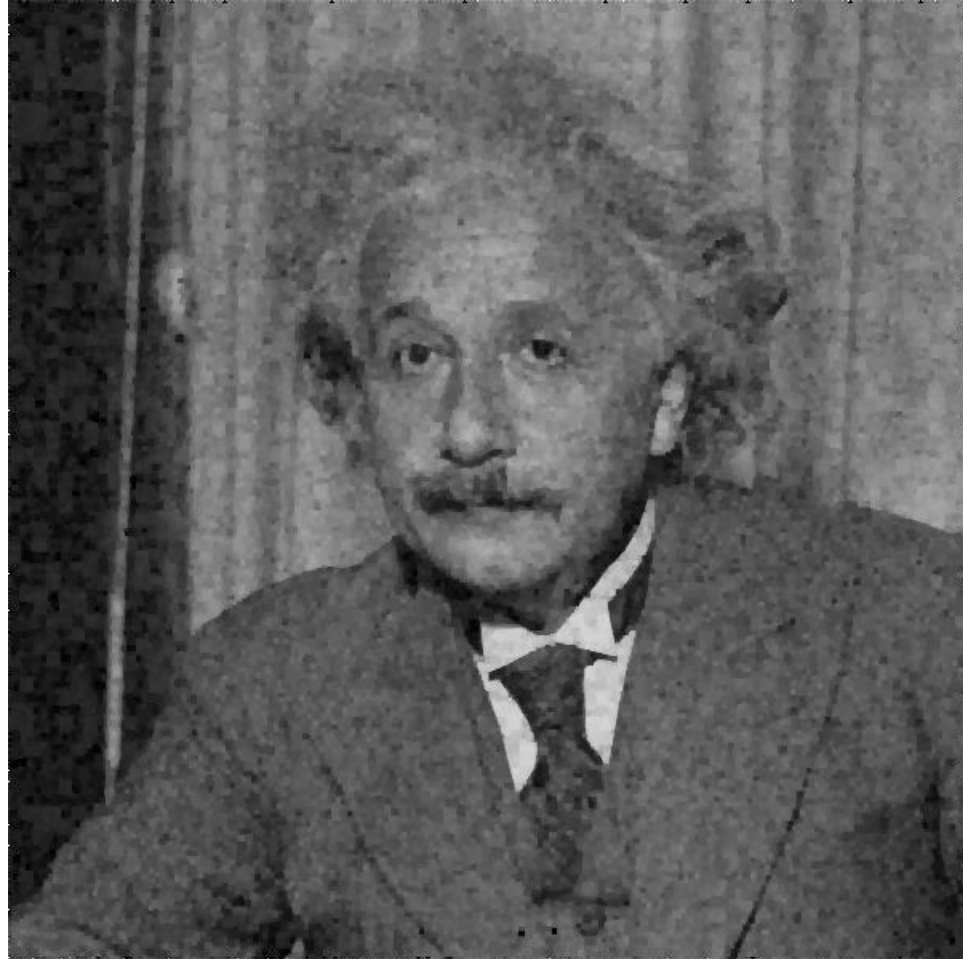
Atenua pontos pretos



# Morfologia em Níveis de Cinza

- **Exemplo (Abertura + Fechamento): Atenuação de Ruído**

Atenua ruído



# Exercícios

1. A imagem digital  $I_0$  indicada a seguir (próximo slide) foi digitalizada com um conversor analógico digital de 4 bits, 15x15 pontos.

a) Calcule o Histograma de  $I_0$ .

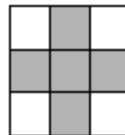
b) Existe algum comportamento predominante (apresente algumas considerações)?

c) A imagem inicial  $I_0$  foi processada e o resultado foi a imagem  $I_1$ . O algoritmo aplicado foi  $\forall i, j \in [1, 15]$  se  $I_0(i, j) \leq S$  então  $I_1(i, j) = 1$  senão  $I_1(i, j) = 0$

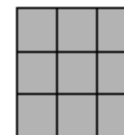
- Explique a operação efetuada por este algoritmo;
- Construa a imagem  $I_0$  sabendo que  $S=5$ ;
- O valor de  $S$  é um valor ideal? Faça eventualmente uma outra proposta.

d) Considere dois elementos estruturantes, conforme representação abaixo:

O primeiro com conectividade 4 (B4); O segundo com conectividade 8 (B8).



B4



B8

# Exercícios

e) Construir a partir destas estruturas básicas as imagens binárias seguintes:

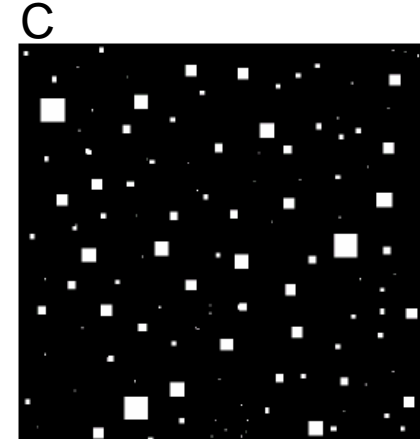
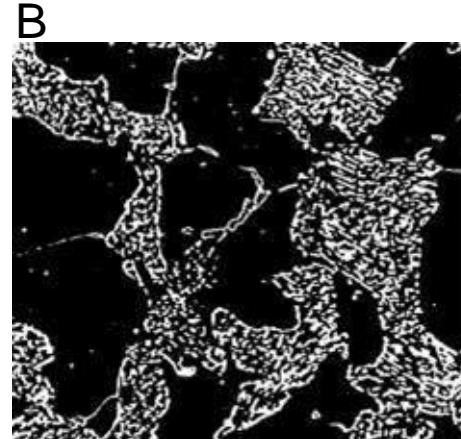
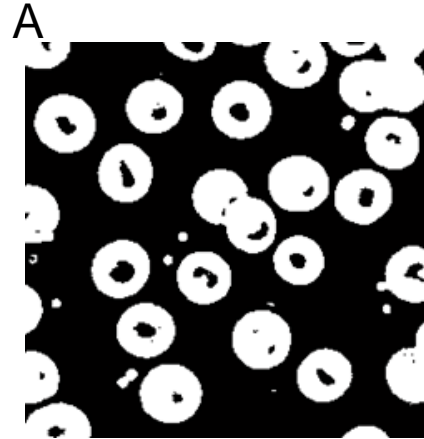
- i.  $I_2 = I_1$  erosão B4;
- ii.  $I_3 = I_1$  erosão B8;
- iii.  $I_4 = I_2$  dilatação B4;
- iv.  $I_5 = I_3$  dilatação B8;
- v. Compare as imagens obtidas, considerando as diferenças entre: ( $I_2$  e  $I_3$ ); ( $I_4$  e  $I_5$ ).

9	9	9	8	9	8	9	8	8	8	8	9	9	9	9
8	8	9	8	8	8	8	8	7	8	8	8	9	8	9
7	7	7	6	6	7	7	7	7	6	6	6	7	8	8
6	7	6	6	2	1	1	1	1	1	1	1	7	8	8
7	7	6	4	3	1	0	0	0	1	2	2	6	7	8
7	6	5	4	2	0	0	0	0	1	2	5	6	7	8
7	7	6	6	7	6	0	0	1	6	7	7	7	8	7
7	7	7	7	6	6	0	0	1	6	7	7	8	7	8
7	5	8	7	6	6	0	1	1	6	7	7	7	7	8
7	4	7	8	7	6	1	1	2	6	7	7	7	8	7
6	6	6	7	8	7	2	2	3	6	7	6	7	7	7
6	6	4	6	7	6	2	3	5	7	6	6	6	7	7
6	6	3	4	6	6	6	7	7	6	6	6	6	7	7
4	4	6	4	4	6	6	6	7	7	6	7	7	5	8
2	3	6	6	6	4	6	7	6	7	6	6	6	7	4

# Exercícios

2. Considere as imagens indicadas abaixo (espaço de cor RGB) e os elementos estruturantes B4 e B8 do exercício 1. Construa um programa para realizar:

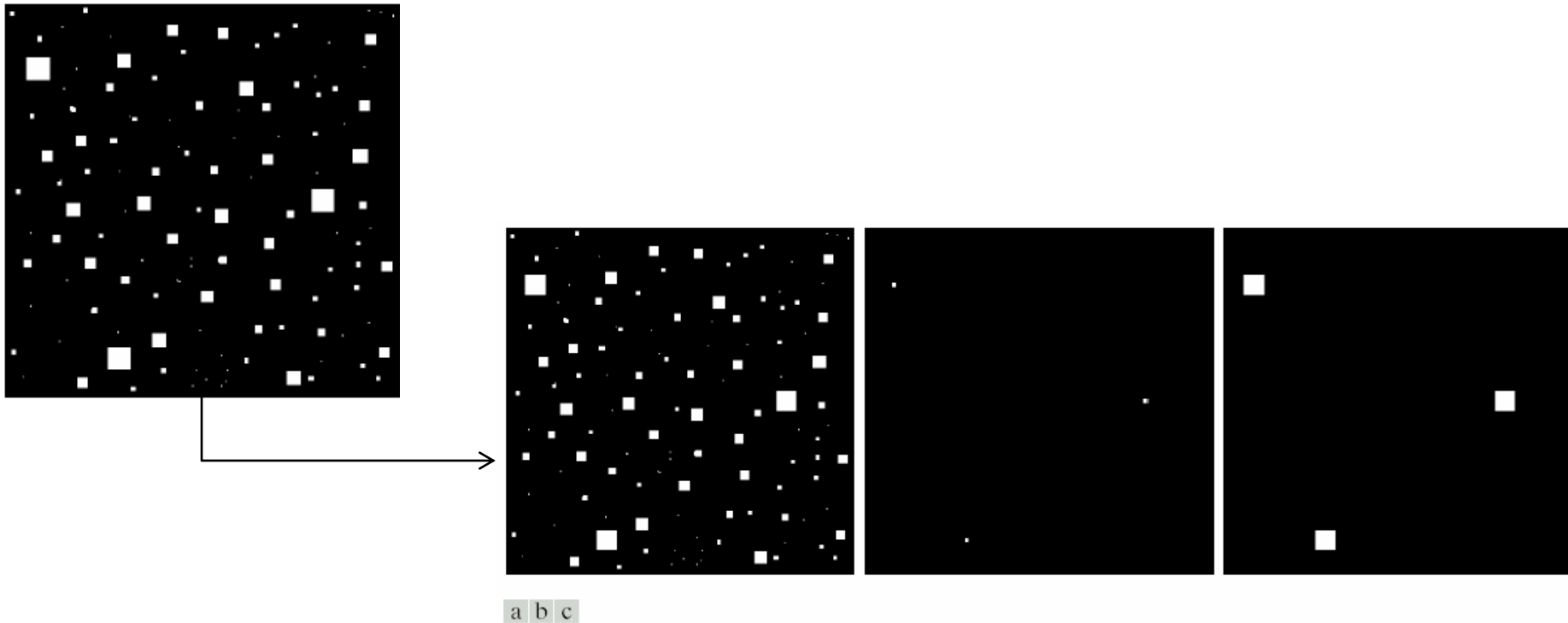
- i. Erosão com B4;
- ii. Erosão com B8 ;
- iii. Dilatação com B4;
- iv. Dilatação com B8;
- v.  $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$
- vi.  $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$



Considerando que para cada imagem temos um objetivo distinto (A, eliminar ruídos – elementos pretos dentro dos círculos; B, gerar objetos maiores conectados; C, eliminar pequenos quadrados), indique quais operações forneceram os melhores resultados para cada imagem.

# Exercícios

3. Considere a imagem indicada abaixo e construa um programa para tentar reproduzir cada operação apresentada na Figura abaixo (9.7).

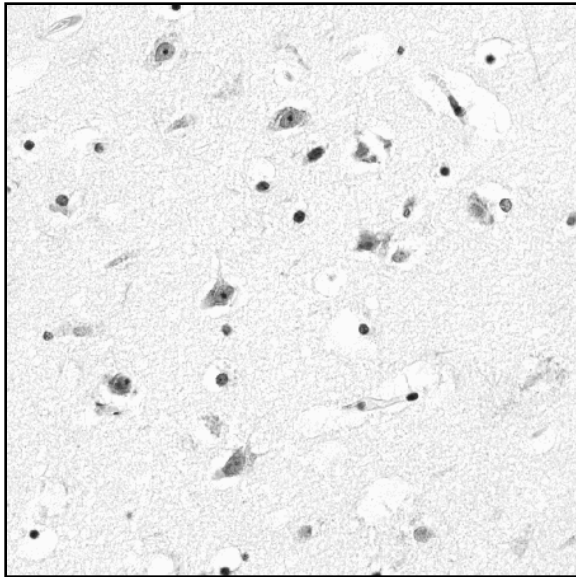


**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

# Exercícios

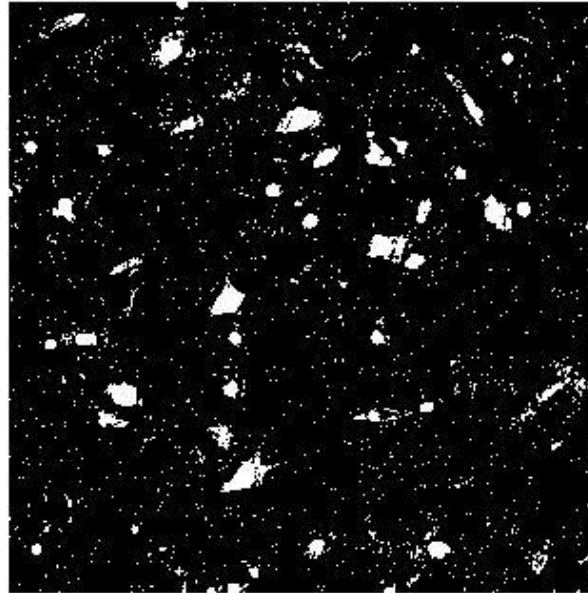
4. Construa um programa que receba a imagem A, forneça uma imagem limiarizada parecida com a indicada em B. Caso necessário, considere o método de Otsu para obter a solução mais apropriada. Em seguida, aplique a operação morfológica necessária para obter um resultado similar ao indicado em C.

A



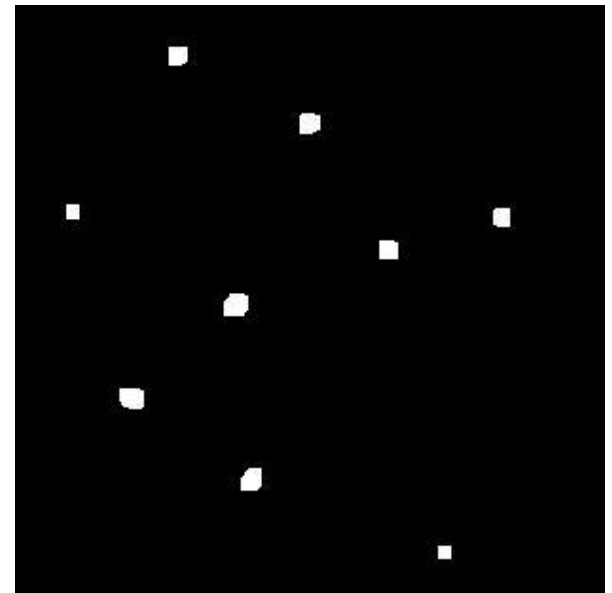
Entrada

B



Limiarização

C



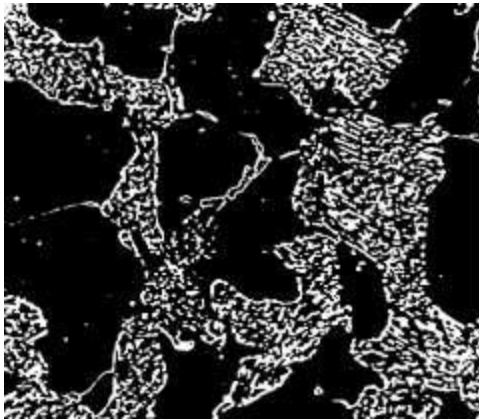
Indique qual o valor de limiar escolhido e o elemento estruturante aplicado para obter C.



# Exercícios

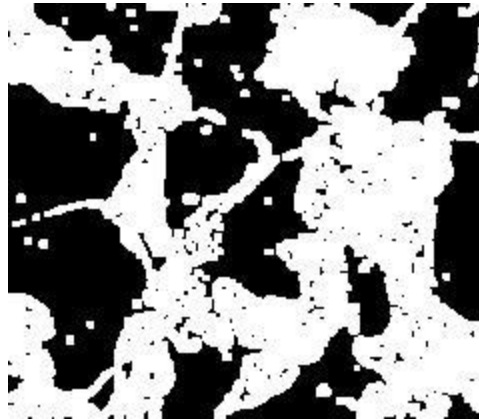
5. Construa um programa que receba a imagem A e forneça: uma imagem parecida com a indicada em B, após uma operação de abertura; uma imagem como a indicada em C, após uma operação de fechamento.

A

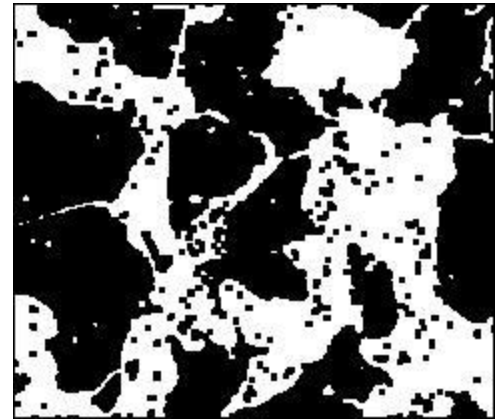


Entrada

B



C

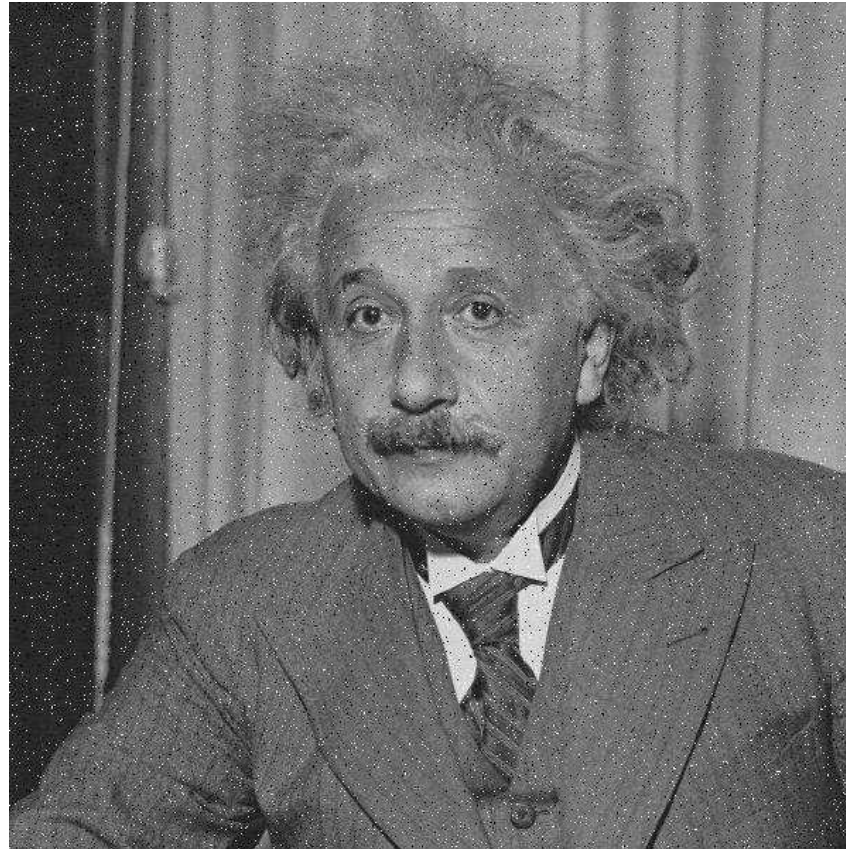


Indique quais foram os elementos estruturantes mais apropriados para obter os resultados solicitados.



# Exercícios

6. Construa um programa para fornecer os resultados de abertura, fechamento e abertura + fechamento para a imagem indicada abaixo.

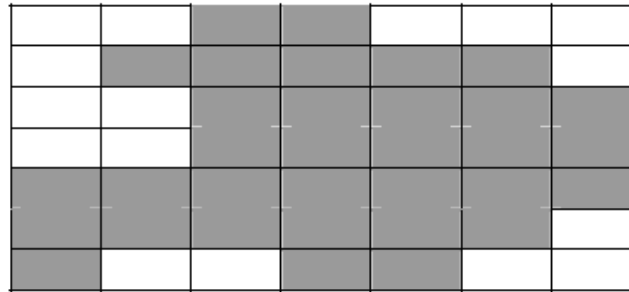


# Exercícios

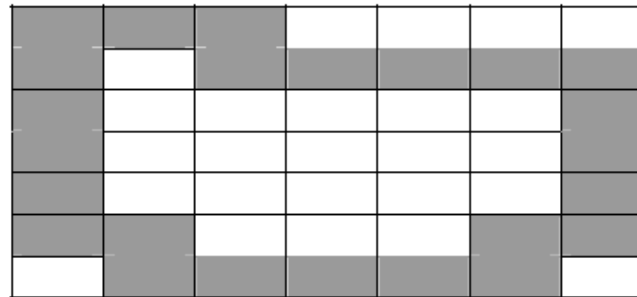
7. Defina o que é uma transformação morfológica hit-or-miss com exemplos de aplicações. Em seguida, explique como a transformação hit-or-miss pode ser aplicada para obter as transformações Afinamento (Thinning) e Espessamento (Thickening).
8. Os métodos de poda (Pruning) são complementos essenciais dos algoritmos de afinamento, uma vez que estes, em geral, deixam componentes (ruídos) que devem ser removidos em uma etapa de pós-processamento. Assim, apresente a formalização de poda e exemplifique .
9. Uma abordagem morfológica comumente aplicada sobre imagens monocromáticas é a *top-hat* e *bottom-hat*. Apresente a formalização dessas transformações e exemplifique suas aplicações. É possível combinar essas duas transformações? Se sim, qual é o resultado esperado com a aplicação desse tipo de combinação?

# Exercícios

10. Extrair o contorno do objeto a seguir aplicando o algoritmo morfológico descrito previamente e um elemento estruturante 3 x 3 de pixels. Indique os resultados intermediários e final.

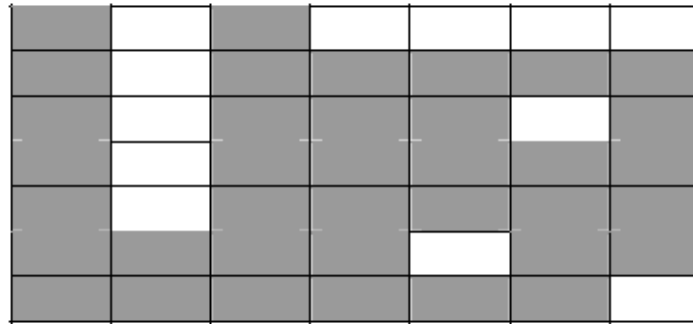


11. Preencher o interior do objeto a seguir usando o algoritmo morfológico descrito previamente. Utilize um elemento estruturante 3 x 3 de pixels. Indique os resultados intermediários e final.

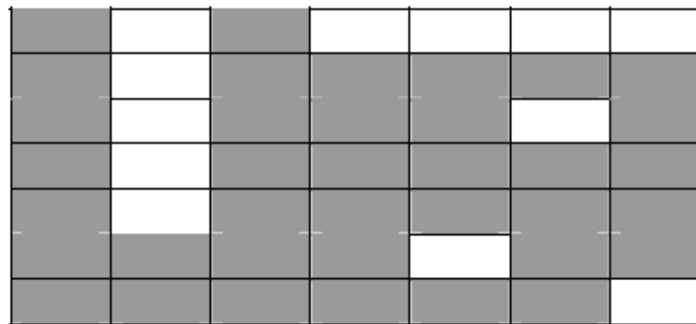


# Exercícios

12. Realize a abertura do objeto a seguir aplicando o algoritmo morfológico descrito previamente e um elemento estruturante 3 x 3 de pixels. Indique os resultados intermediários e final.



13. Realize o fechamento do objeto a seguir considerando o algoritmo morfológico descrito previamente. Utilize um elemento estruturante 3 x 3 de pixels. Indique os resultados intermediários e final.



# Exercícios

14. Dada a imagem (a) e elemento estruturante (b), realize as operações abaixo e apresente os resultados. Operações:

- a) Abertura
- b) Fechamento

20	23	26	28	32	25	25	17
17	19	19	35	28	34	33	28
34	36	27	33	37	44	40	41
32	27	18	16	21	26	28	32
34	27	25	23	24	35	37	29

(a)  $f$

1	2	1
2	3	2
1	2	1

(b)  $b$

# Exercícios

15. Considere a imagem A e elementos estruturantes (E1 e E2) indicados a seguir. Realize:

- $I_2 = I_1$  erosão E1;
- $I_3 = I_1$  erosão E2;
- $I_4 = I_2$  dilatação E1;
- $I_5 = I_3$  dilatação E2;
- Compare as imagens obtidas, considerando as
- diferenças entre: ( $I_2$  e  $I_3$ ); ( $I_4$  e  $I_5$ );
- Realize a abertura e fechamento.

Elementos Estruturantes:

	3	
3	3	3
	3	

E1

3	3	3
3	3	3
3	3	3

E2

9	9	9	8	9	8	9	8	8	8	8	9	9	9	9
8	8	9	8	8	8	8	8	7	8	8	8	9	8	9
7	7	7	6	6	7	7	7	7	6	6	6	7	8	8
6	7	6	6	2	1	1	1	1	1	1	1	7	8	8
7	7	6	4	3	1	0	0	0	1	2	2	6	7	8
7	6	5	4	2	0	0	0	0	1	2	5	6	7	8
7	7	6	6	7	6	0	0	1	6	7	7	7	8	7
7	7	7	7	6	6	0	0	1	6	7	7	8	7	8
7	5	8	7	6	6	0	1	1	6	7	7	7	7	8
7	4	7	8	7	6	1	1	2	6	7	7	7	8	7
6	6	6	7	8	7	2	2	3	6	7	6	7	7	7
6	6	4	6	7	6	2	3	5	7	6	6	6	7	7
6	6	3	4	6	6	6	7	7	6	6	6	6	7	7
4	4	6	4	4	6	6	6	7	7	6	7	7	5	8
2	3	6	6	6	4	6	7	6	7	6	6	6	7	4

A

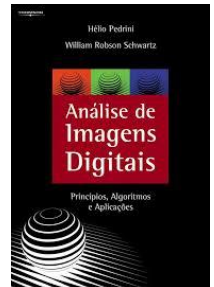
# Referências

1. González, R. C., Woods, R. E. Processamento de Imagens Digitais. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2000.



**Leitura: Capítulo 9, tópicos 9.1 a 9.6**

2. Pedrini, H., Schwartz, W. R. Análise de Imagens Digitais: Princípios Algoritmos e Aplicações. São Paulo: Thomson Learning, 2008.



**Leitura: Capítulo 9**