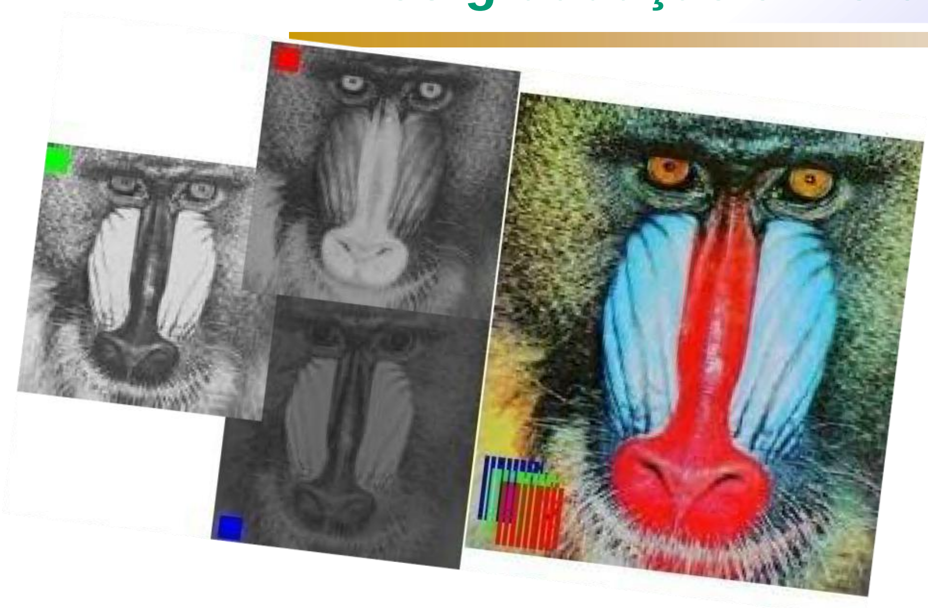
Prof. Dr. Leandro Alves Neves

Pós-graduação em Ciência da Computação



Aula 08

Processamento Digital de Imagens

Sumário

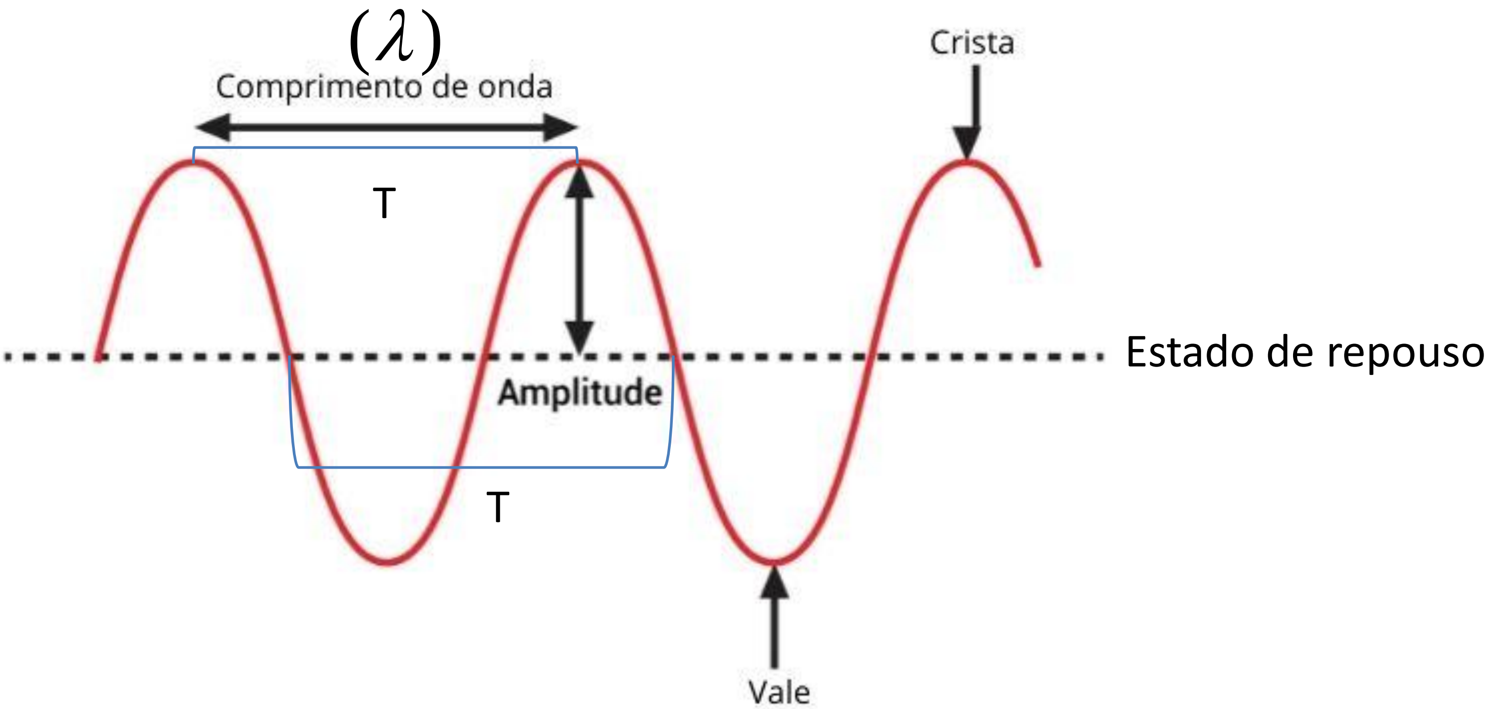
- Série de Fourier e Representação de Fourier
- Tipos de Representação de Fourier
- Fundamentos
- Transformada de Fourier 1D e 2D
- Filtragem no Domínio da Frequência

Série de Fourier: Fundamentos

- **Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)**
  - Matemático e físico francês
  - Estudo da **difusão de calor**
    - **Equações diferenciais** que representavam o **fluxo de calor**.
- **Qualquer função periódica**
  - Pode ser expressa como a **soma de senos e cossenos**
- **Qualquer função não periódica**
  - Transformada de Fourier: **integral de senos e cossenos multiplicada** por uma **função de ponderação**

Série de Fourier: Fundamentos

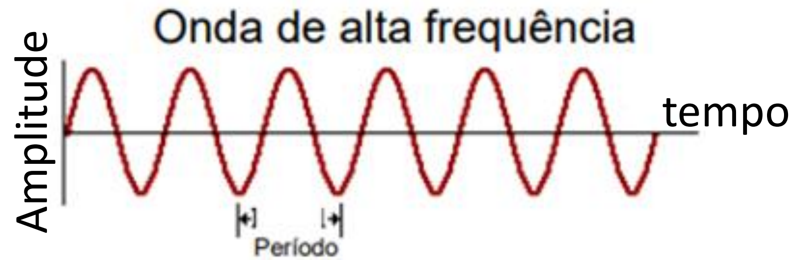
Propriedades de uma Onda Periódica – Caso Senoidal

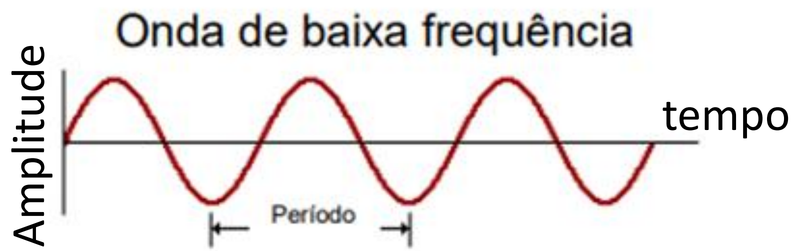


- **Nós**, posições que permanecem em repouso durante a propagação da onda;
- **Cristas e vales;**
- **Comprimento (λ)**, distância entre dois vales/cristas consecutivos ou três nós consecutivos
- **Frequência (*f*)**, número de oscilações por unidade de tempo (T)**:** ***f*=1/*T***
- **Período (T)**, intervalo de tempo de uma oscilação completa/ciclo: ***T*=1/*f***

Série de Fourier: Fundamentos 1

- **Propriedades de uma Onda Periódica – Caso Senoidal**





Se uma fonte oscila com um período (T) de 0,1 segundos, qual é a frequência de oscilação?
f = 1/(0.1) = 10 Hz, realiza 10 oscilações em um segundo (10 Hz)

Se uma fonte oscila a cada 5 segundos, seu período (T) é 5 segundos. Logo, a frequência é:
f = 1/5 = 0.2 Hz.

PI

Série de Fourier: Fundamentos 1

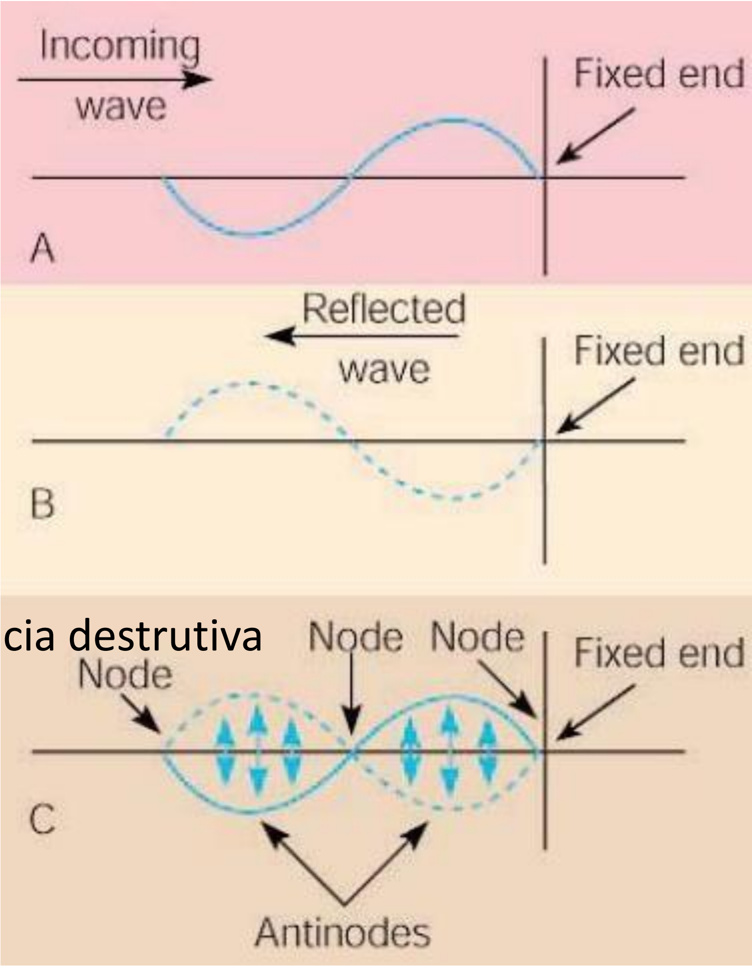
- **Onda Estacionária**

  - Uma onda incidente em uma corda
    - Com extremidades fixas (A): exemplo, **corda de violão**
  - Encontra uma onda refletida (B) com a mesma amplitude e frequência

  Consequência: pontos de interferência destrutiva (diminuição de amplitude)

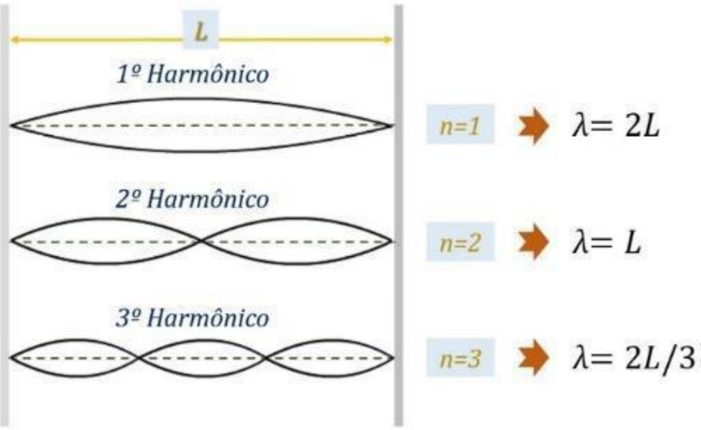
  - Gera uma onda estacionária (C)
    - A onda estacionária de um comprimento de onda tem nós e antinós (**cristas e vales**)

Interferência destrutiva



Série de Fourier: Fundamentos 2

- **Características de uma Função Periódica**
  - **Período:** $f(t)=f(t+T_0)+f(t+2T_0)+f(t+3T_0)...$
    - Repetição da função a partir de um intervalo T_0
  - **Frequência Fundamental:** $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, **dada em rad/s.**
    - É a **onda mais longa*** que pode formar uma **onda estacionária**
    - Tem a menor frequência



  - **Conteúdos Harmônicos (**conjunto de frequências**)**
    - **Múltiplas da frequência fundamental** ω_0
    - **2ª. Harmônico:** $2\omega_0$
    - **3ª. Harmônico:** $3\omega_0$
    - **...**

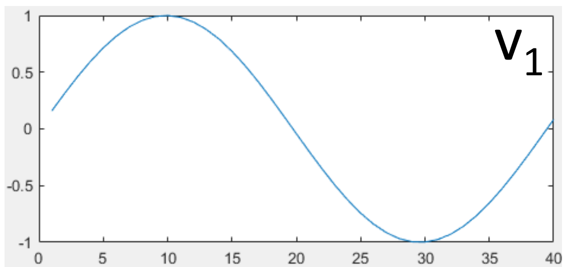
*comprimento λ de onda é duas vezes maior que o comprimento da corda L

Série de Fourier: Fundamentos 3

- **Dado um Sinal (em função doTempo)**
  - Representado por **senoides complexas**
    - Senoide: depende de uma **frequência**

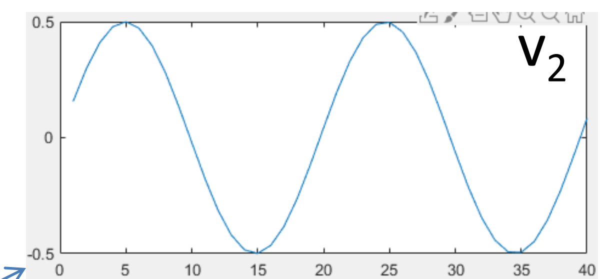
Amplitude: 1

Frequência: 1/40 unidades de tempo



Amplitude: 0,5

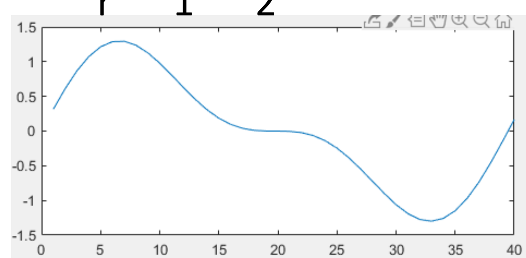
Frequência: 1/20 unidades de tempo

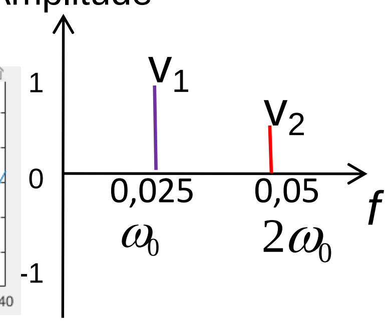


Dobro da frequência

Amplitude x tempo

$v_r = v_1 + v_2$





Decomposição

Componentes espectrais

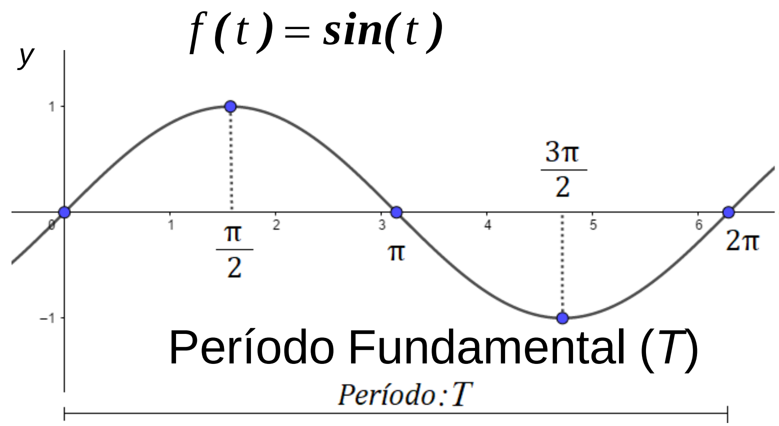
Forma e Conteúdo Harmônico de v1, com uma **frequência maior (V2)**

- **múltiplos da frequência fundamental:** 2ª. Harmônico

$$2\omega_0$$

Série de Fourier: Fundamentos 3

- **Exemplo:**

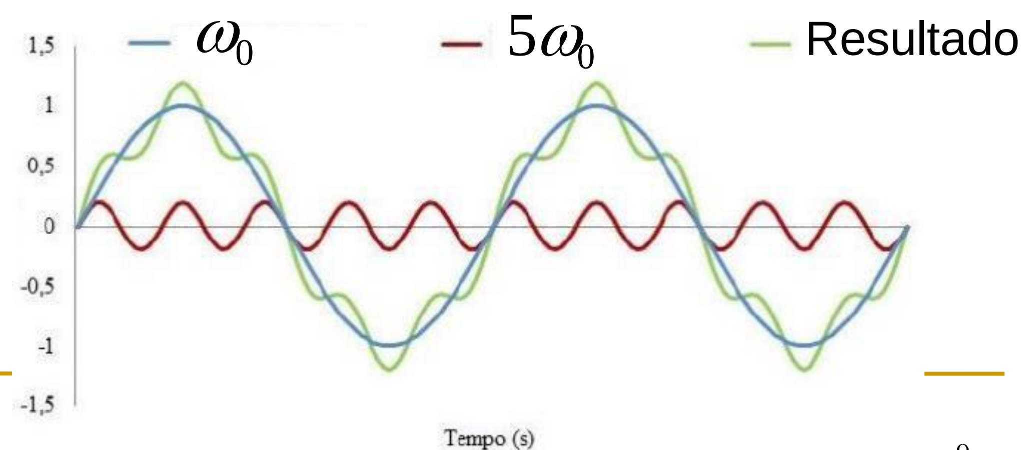


- Considere uma senoide
- Frequência fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{sin}(1 \cdot t) = \boldsymbol{sin}(t)$$

sendo que: $\boldsymbol{sin}(c * t) \longrightarrow P = \frac{2\pi}{|c|}$,em que P é o período

- Conteúdos Harmônicos:
  - *1a. = $\omega_0 = \boldsymbol{sin}(t)$
  - 2a. = $2\omega_0$
  - . .
  - 5a. = $5\omega_0$



*Frequência Fundamental

Série de Fourier: Fundamentos 4

frequência fundamental: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

- **Equações:** $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{ik\omega_0 t}}_{\text{senoide complexa}},$ Domínio do tempo

?

coeficiente complexo (Desafio);

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$ Domínio da frequência

período de $f(t)$;

- **Senoide Complexa:** $e^{i\theta}$ Resolução a partir da **fórmula de Euler**
  - *e* (constante matemática): número exponencial de Euler
    - Aproximadamente igual a 2,71828

Série de Fourier: Fundamentos 5

- **Números Complexos, representados em Coordenadas Polares**
  - Elementos do conjunto **C**
  - Permite representar uma solução: $x^2 + 1 = 0$
  - Existe um elemento que representa: $i^2 = -1$
    - Chamado imaginário (*i*)

$$z = r \cdot e^{i\theta}, |z| = r.$$

$$\boxed{\sqrt{-1.}}$$

- **Forma algébrica: z = a + bi**

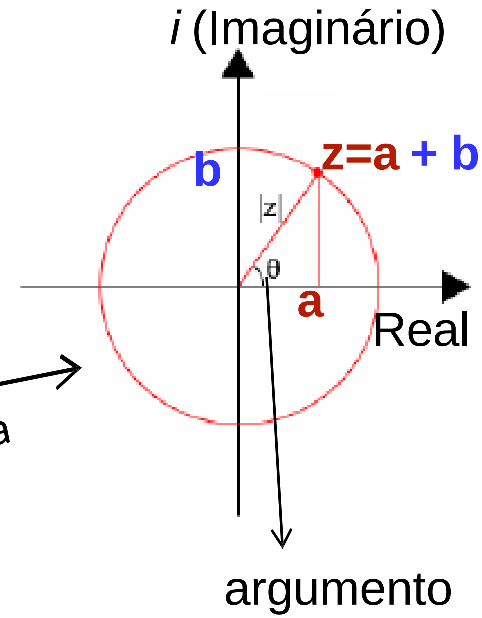
a → parte real

b → parte imaginária

- **Plano Complexo:**
  - **Plano de Argand-Gauss**

z = a + bi

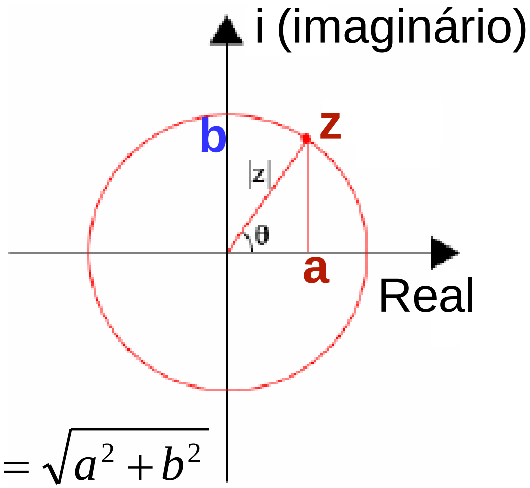
Representação cartesiana



*Solução: NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Série de Fourier: Fundamentos 5

- **Representação trigonométrica de** $z = r \cdot e^{i\theta}, |z| = r$**.**



$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = |z| \cdot \cos\theta$

$b = |z| \cdot \sin\theta$

Primeiro, o eixo real: $\cos\theta$

Segundo, o eixo imaginário: $i\sin\theta$

$|z| = 1$

Logo, é possível indicar:

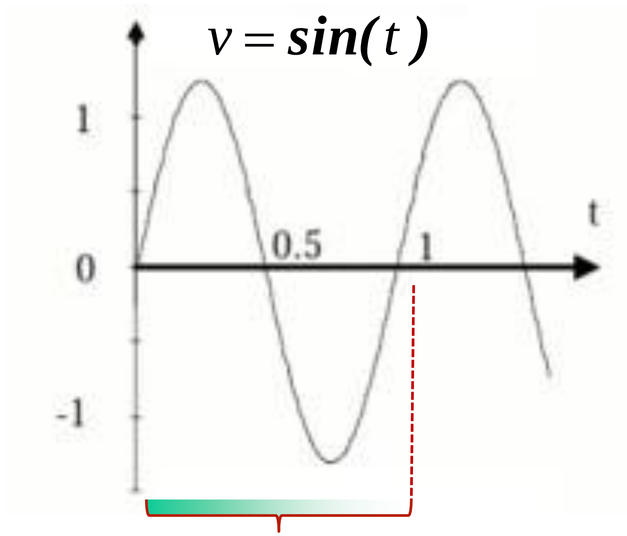
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- **Também, considerando** $z = r \cdot e^{-i\theta}, |z| = r$ **:**
  - Temos: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Série de Fourier: Fundamentos 5

k: senoides complexas

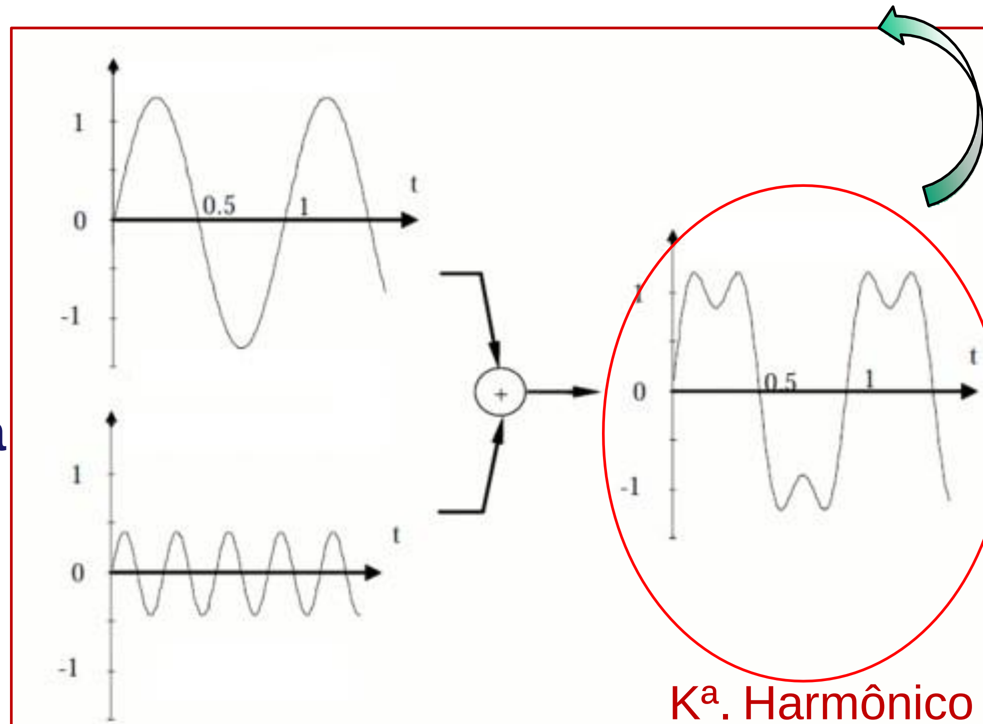
- **Período Fundamental:** $e^{ik\omega_0 t}$



Período Fundamental (T)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

- **k: múltiplos da frequência fundamental**
  - **Número inteiro**
  - **Por exemplo:**



Série de Fourier: Fundamentos 6

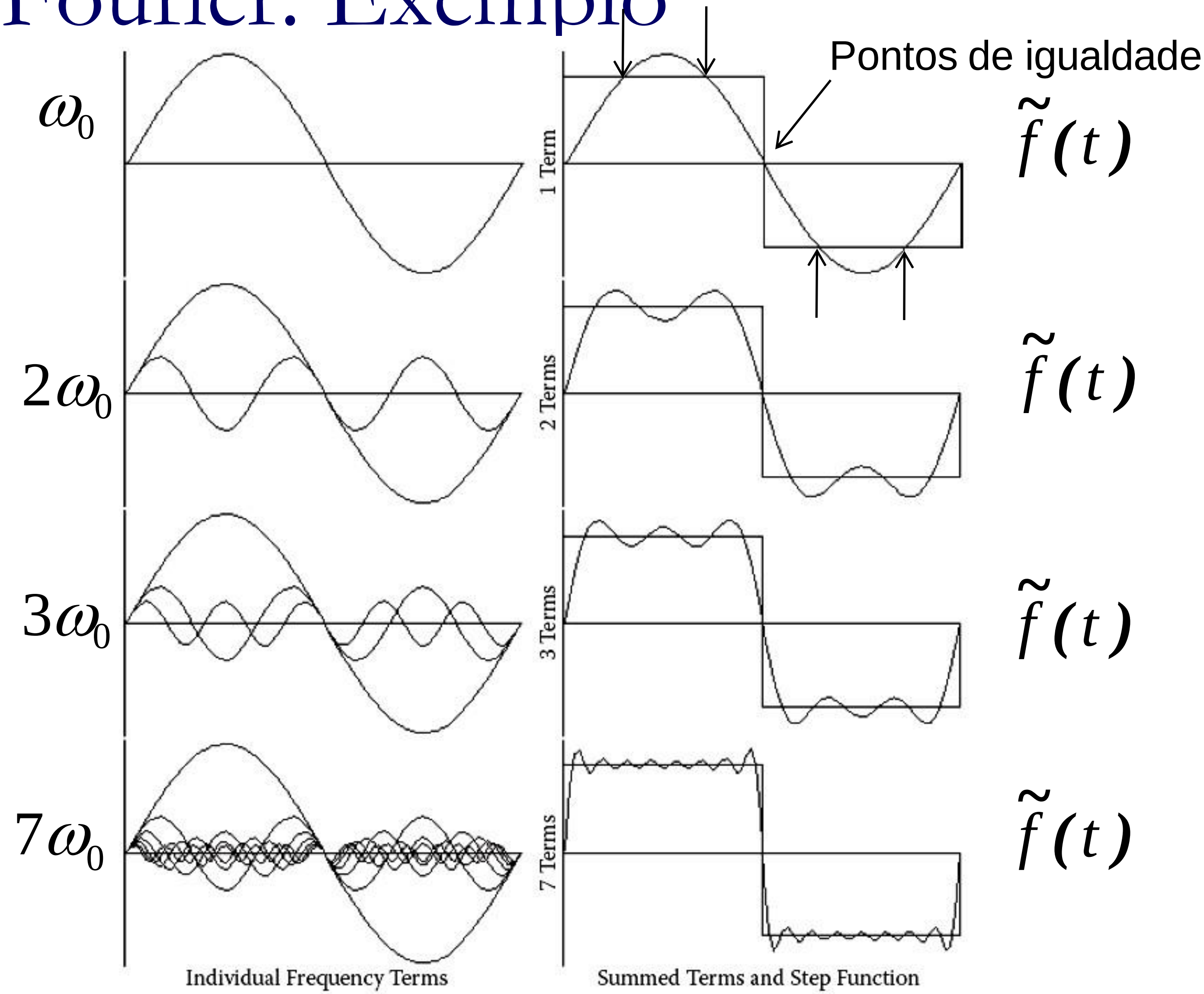
- **Exemplo:**
  - **Dada uma função $f(t)$ periódica de frequência ω_0:**
    - **Podemos representar como:**

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{cos}(n\omega_0 t) + b_n \mathbf{sin}(n\omega_0 t)$$

  - Para n=1, temos a frequência fundamental
    - $\tilde{f}(t)$ **: Representada pela soma de infinitos conteúdos harmônicos**
    - **Desafio: Determinar os coeficientes a, b**
    - **Após isso, temos** $\tilde{f}(t) = f(t)$

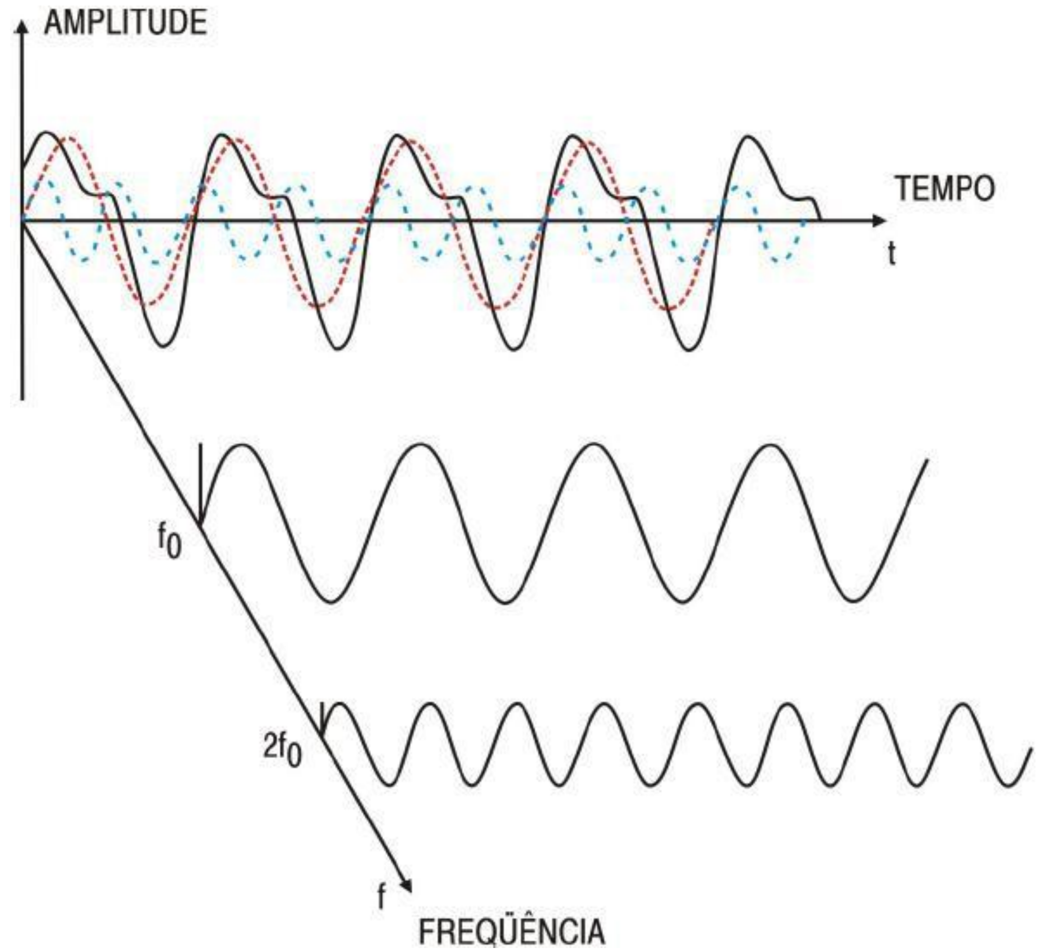
Série de Fourier: Exemplo

- **Exemplo:**



Série de Fourier: Exemplo

- **Exemplo:**



Representação de Fourier

- **Tipos de representação a partir do sinal**

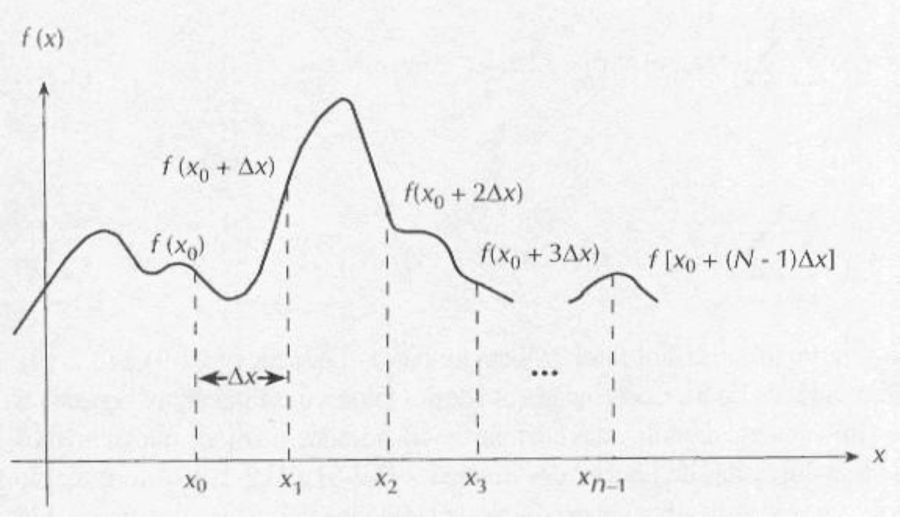
	Periódico	**Não Periódico**
Contínuo	**Série de Fourier**	**Transformada de Fourier**
Discreto	Série de Fourier de Tempo Discreto	Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- **Processamento de Sinais**

Função não periódica é considerada como **função periódica de período espacial infinito** → **Transformada de Fourier**

Transformada de Fourier

- **Sinal Discreto e Não Periódico**
  - Representá-lo por amostras de *N valores*
    - **Intervalos uniformemente espaçados**
      - $\{f(0), f(1), f(2),\ldots, f(N)\}$
    - O **par de transformadas discretas de Fourier**
      - Soma finita **de exponenciais** complexas



  - O domínio da frequência
    - Considerado como discreto e representado por:
      - $u = (0, \Delta u, 2\Delta u,\ldots,(N-1)\Delta u)$, *onde* $\Delta u=1/N\Delta x$.

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (DFT 1D)**

  - $$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\underbrace{\exp\left(-j2\pi xu/N\right)}\rightarrow \cos\left(2\pi xu/N\right)-j\,\sin\left(2\pi xu/N\right)$$

    Exponenciais complexas*

    - **F(u): soma finita de senos e cossenos;**
    - **u=0,...,N-1: denominado variável de frequência;**

  - **Frequência espacial:** u, intervalo $\Delta u=\dfrac{2\pi}{N}$.

    - **Se período $N\rightarrow\infty$, intervalo Δ é infinitesimal**
    - $f(x)$ tende a uma **função contínua**

Função não periódica é considerada como **função periódica de período espacial infinito** ⇒ **Transformada de Fourier**

- ***Em processamento de sinais, a parte imaginária *i* é comumente indicada como *j. E, exp é usada para expressar o número de Euler,*** 2,71828.

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (DFT 1D)**

  - $$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\underbrace{\mathbf{exp}\left(-j2\pi xu/N\right)}_{\mathbf{cos}\left(2\pi xu/N\right)-j\,\mathbf{sin}\left(2\pi xu/N\right)}$$

    Exponenciais complexas*

    - **F(u): soma finita de senos e cossenos;**
    - **u=0,...,N-1: denominado variável de frequência;**

  - **Importante 1:**

  - Precisamos calcular ***F*(*u*)** para cada ***u*** de ***0*** a ***N-1***.
    - **N**: número de pontos do sinal de entrada

  - ***u***: índice que define a frequência do *u*-ésimo componente do sinal transformado no domínio da frequência;

    - Calculado como ***u*** vezes a frequência de amostragem do sinal original, dividido pelo número total de amostras.

Transformada de Fourier

Transformada discreta de Fourier (TFD 1D)

- $$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\underbrace{\mathbf{exp}\left(-j2\pi xu/N\right)}_{\rightarrow\ \mathbf{cos}\left(2\pi xu/N\right) - j\,\mathbf{sin}\left(2\pi xu/N\right)}$$

  Exponenciais complexas*

  - **F(u): soma finita de senos e cossenos;**
  - **u=0,...,N-1: denominado variável de frequência;**

Importante 2: *u* indica:

"*Quantas oscilações completas o sinal original se repete no período correspondente ao comprimento do sinal.*"

Exemplo: um sinal com **4 amostras** e ***u=1***, indica que

"O u-ésimo componente do sinal transformado representa uma frequência de 1/4 da frequência de amostragem, o que corresponde a uma oscilação completa do sinal no período de 4 amostras."

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (TFD 1D)**

  - $F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\underbrace{\exp(-j2\pi xu/N)}\rightarrow \cos(2\pi xu/N) - j\sin(2\pi xu/N)$

    Exponenciais complexas*

    - **F(u): soma finita de senos e cossenos;**
    - **u=0,...,N-1: denominado variável de frequência;**

Importante 3:

- **u=0**, representa a frequência mais baixa (frequência fundamental) ;
- **u=1 até N/2**, representam as frequências positivas;
- **u=N/2+1 até N-1**, representam frequências negativas (simétricas em relação ao eixo da frequência);

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**
  - **Coeficientes de Fourier ou Transformada inversa**
    - $$F(x) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} f(u)\exp\left(j2\pi ux/N\right)$$
      - ***F*(x): sinal resultante no espaço;**
      - **x=0,...,N-1**

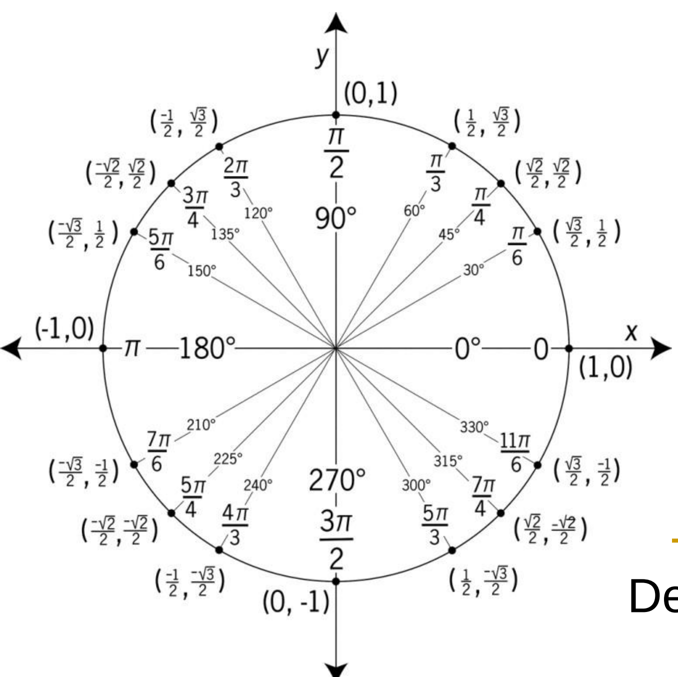
Transformada de Fourier

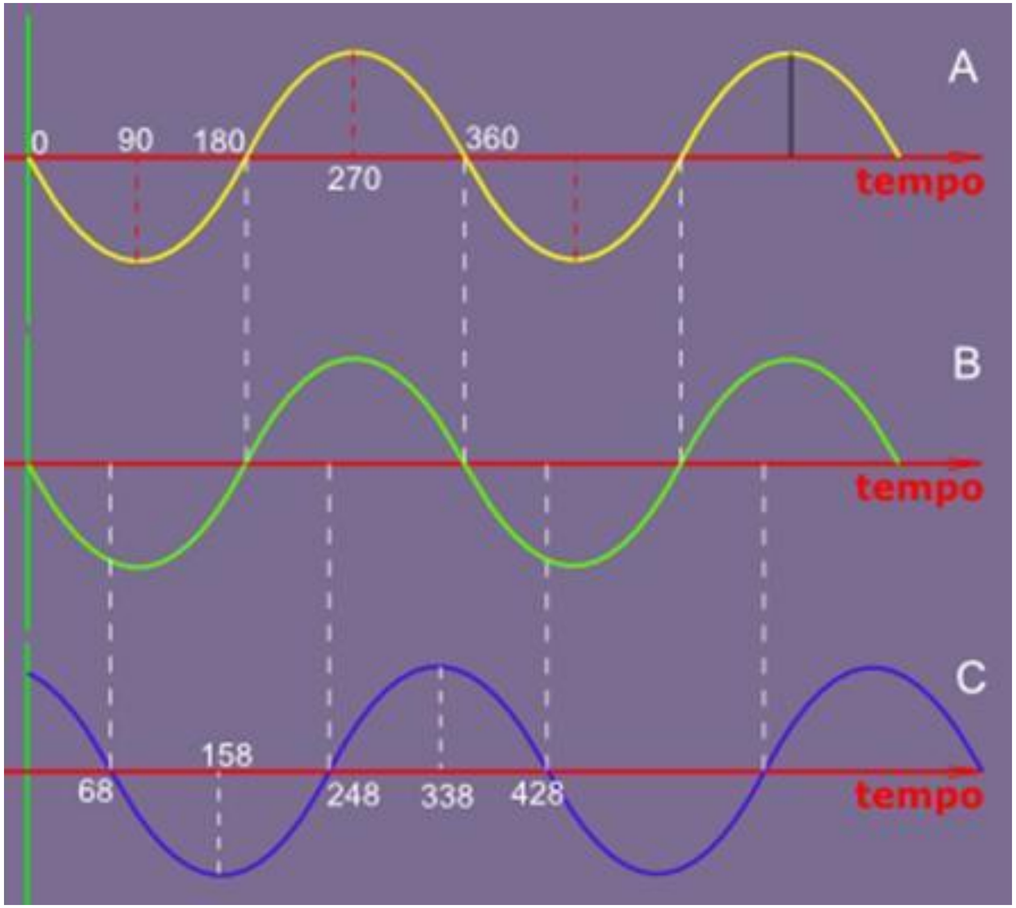
- **Transformada discreta de Fourier (1D)**
  - **Resumindo, a transformada de Fourier de uma função *f*(x):**
    - $F(u) = R(u) + jI(u)$
  - ***Propriedades:***
    - Magnitude de F(u): **Espectro de Fourier de *f*(x)**
      - **Quanto (relevância, nível etc) de um certo componente de frequência está presente**
      - $\left|F(u)\right|$
    - Ângulo de fase: $\phi(u) = \boldsymbol{arctan}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$
      - **Onde o componente está presente**

*|F(u)| = sqrt(Re(F(u))^2 + Im(F(u))^2)

Transformada de Fourier

- **Exemplo:**
  - **Ângulo de fase**

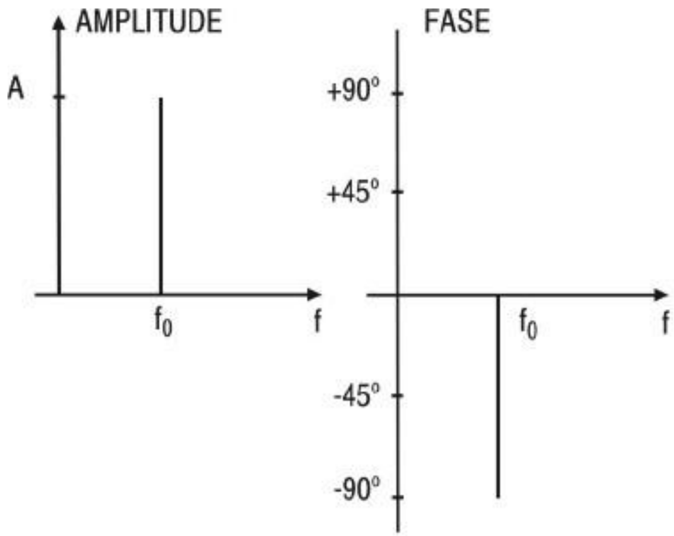




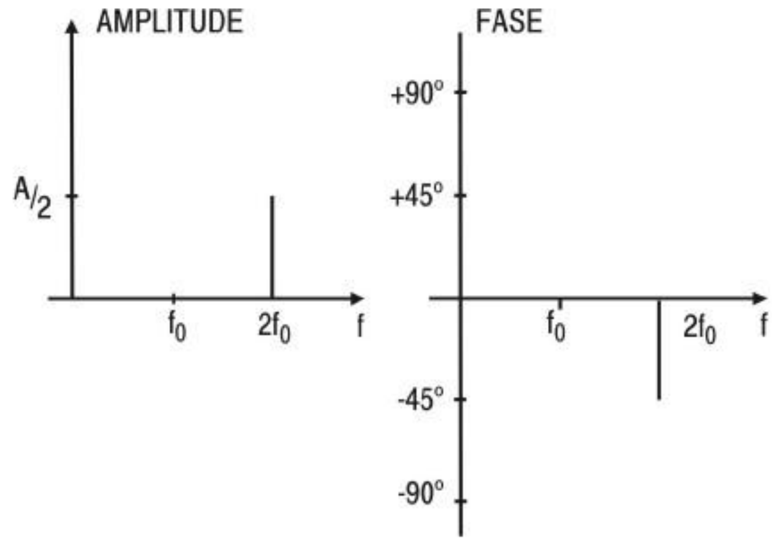
Definido pelo início da representação do sinal

Transformada de Fourier

- **Exemplo:**



a) Senóide com freqüência f_0, amplitude A e fase -90º.



b) Senóide com freqüência $2f_0$, amplitude A/2 e fase -45º.

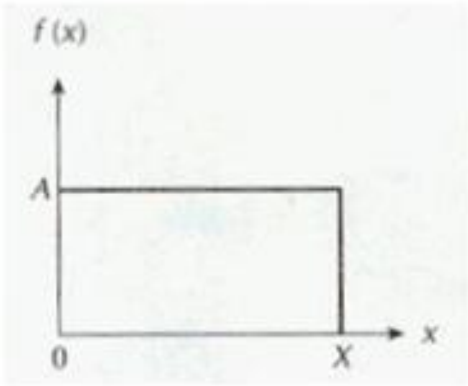
- **Ângulo de fase**

Transformada de Fourier

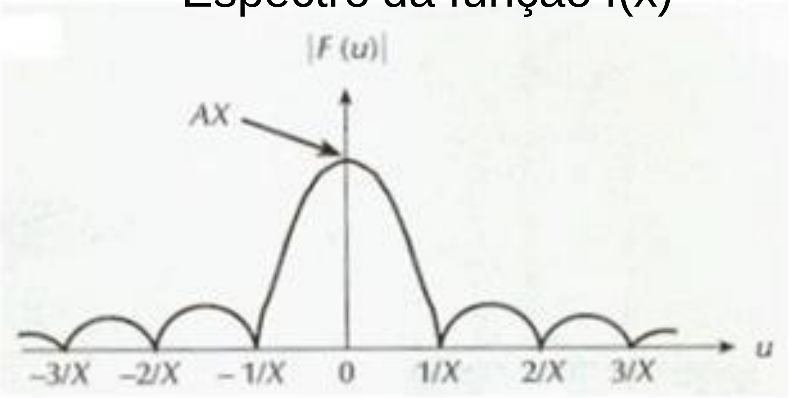
- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x): Espectro de Fourier**
    - Representação do resultado obtido a partir de uma função *f*(*x*)

f(x): espaço (linha da imagem)



Espectro da função f(x)

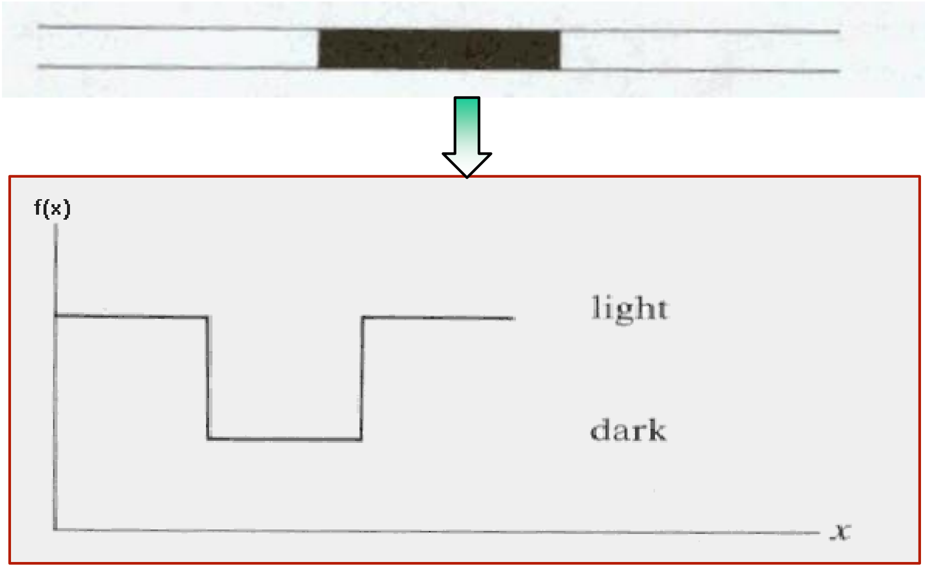


Variando o valor de *u*: é possível obter infinitas amplitudes das frequências que definem f(x)

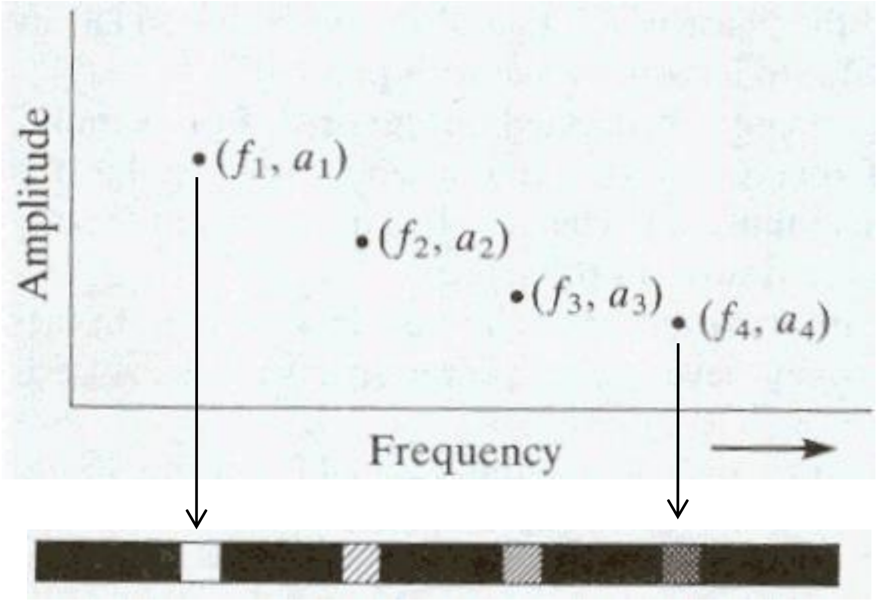
Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x)**
    - Formato de uma Imagem como uma linha de amplitudes em escala de cinza



Linha de uma imagem formada por uma sequência de pixels brancos e pretos



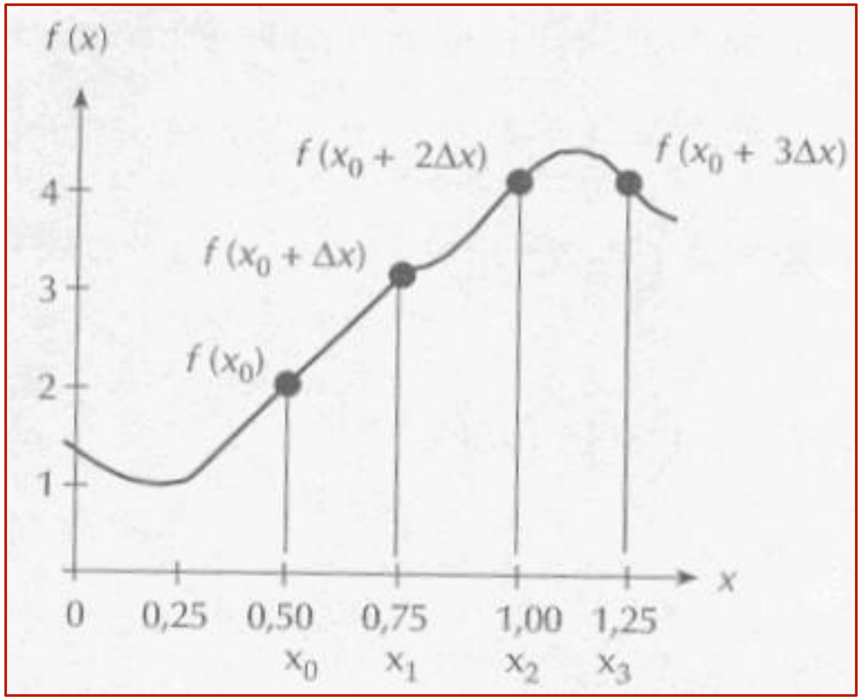
Transformada de Fourier

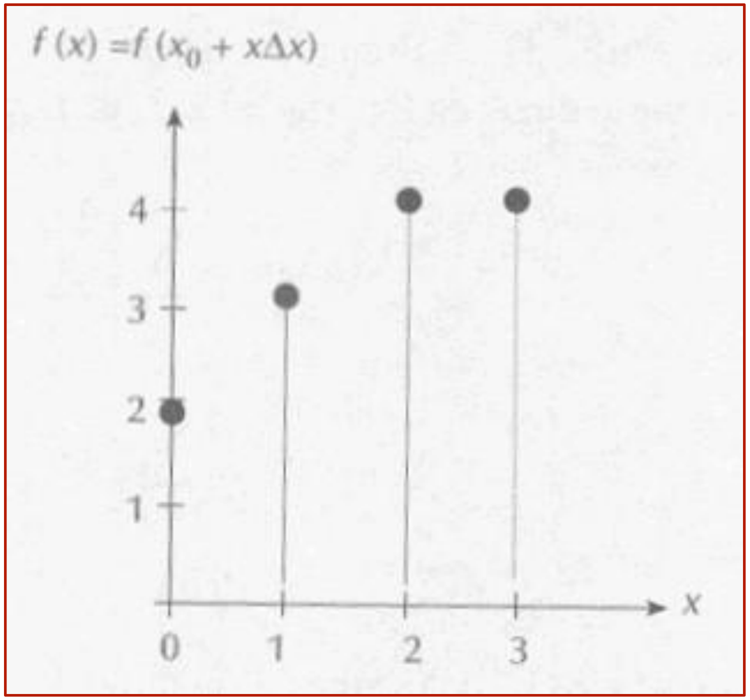
- **Transformada discreta de Fourier (1D)**
  - **Transformada de Fourier de uma função $f(x)$**
    - As funções contínuas devem ser **discretizadas antes de serem processadas em um computador;**
    - Isso é realizado por meio da **amostragem e quantização;**
    - **Ideia: discretizar uma função contínua f(x) em uma sequência de *N* amostras separadas de Δx unidades**

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

  - **Transformada de Fourier de uma função $f(x)$:**





$f(0)=2$; $f(1)=3$; $f(2)=4$; $f(3)=4$;

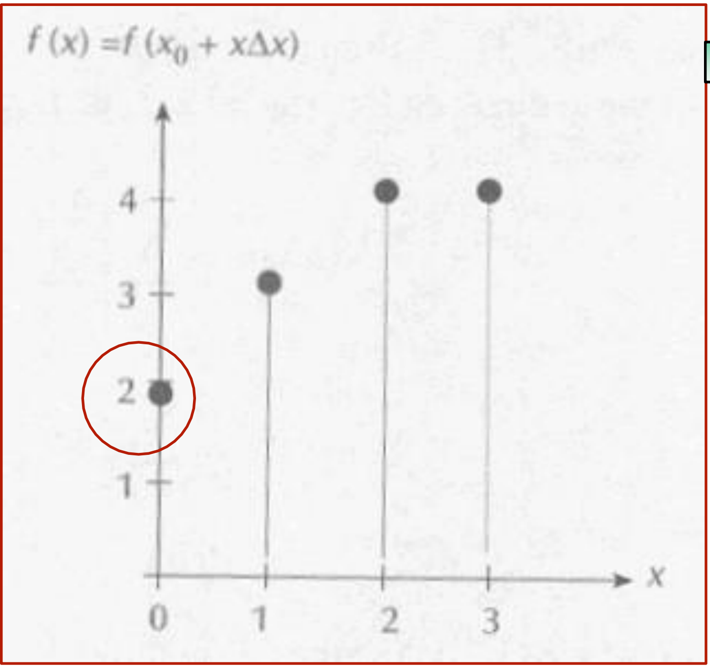
Discretização e amostragem

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\mathbf{exp}\left(-j2\pi xu/N\right)$$

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x):**



$f(0)=2$; $f(1)=3$; $f(2)=4$; $f(3)=4$;

$u=0$

= ¼ * (*f(0)* * ***exp***(-*j**2π*0*0/4) + *f*(1) * **exp**(-j*2*π**0*1/4) + *f*(2) * ***exp***(-*j**2π*0*2/4) + *f*(3) * **exp**(-j*2*π**0*3/4))

= ¼ * (*2* * ***exp***(0) + *3* * **exp**(0) + *4* * ***exp***(*0*) + *4* * **exp**(0))

= ¼ *(2 + 3 + 4 + 4)

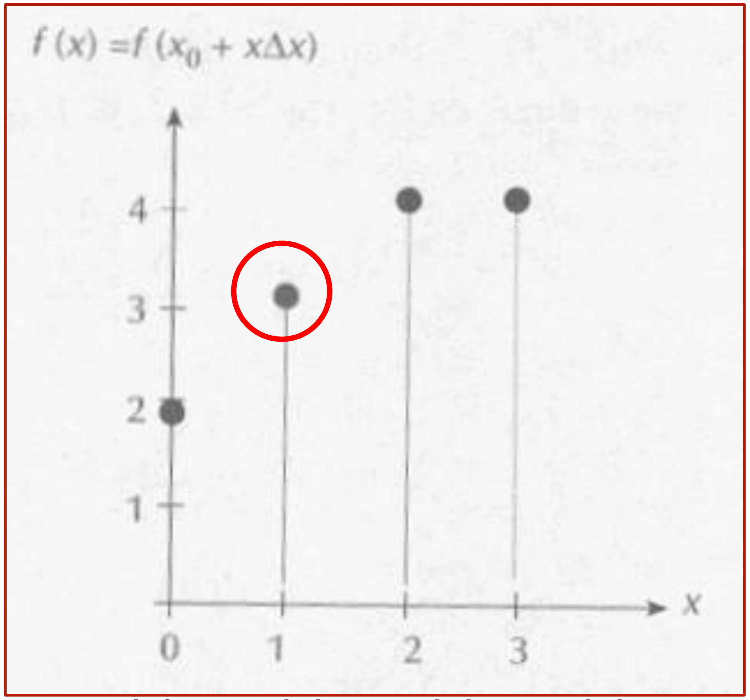
=(1/4)*13= 3,25 $\therefore \omega_0$

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\mathbf{exp}\left(-j2\pi xu/N\right)$$

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x):**



$f(0)=2$; $f(1)=3$; $f(2)=4$; $f(3)=4$;

$u=1$

= ¼* (*f(0)* * ***exp***(-*j**2π*1*0/4) + *f(1)* * ***exp***(-j*2π*1*1/4) + *f(2)* * ***exp***(-*j**2π*1*2/4) + *f(3)* * ***exp***(-j*2π*1*3/4))

= ¼* (2****exp***(0) +3****exp***(-j*π/2) + 4****exp***(-*j**π) + *f(3)* * ***exp***(-j*3π/2))

= ¼* (2+3*(cos(π/2) – jsen(π/2)) + 4* (cos(π) – jsen(π)) +4*(cos(3π/2) – jsen(3π/2)))

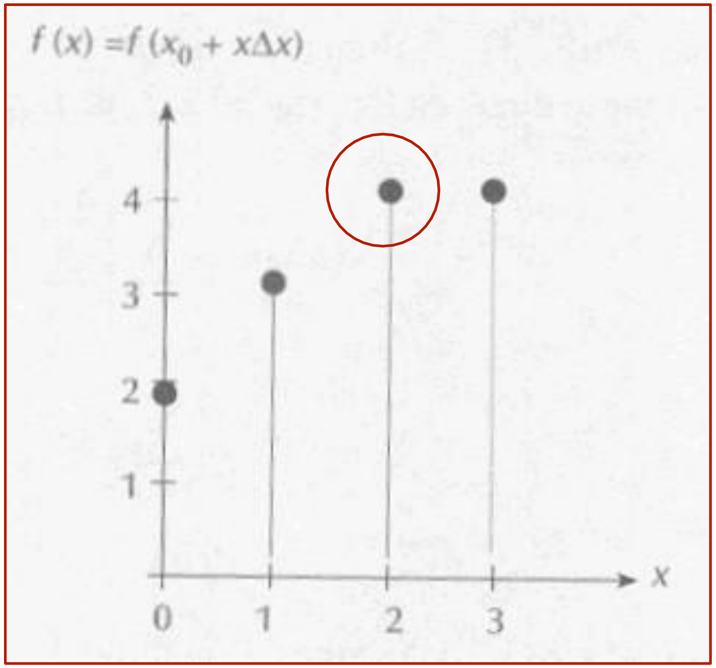
= ¼* (2+3*(0 – j*1) + 4* (– 1 – j*0) +4*(0 –(–1))))

= ¼* (2 - 3j - 4 + 4j)

= ¼* (-2 + j) $\quad \therefore \omega_1$

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**
  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x):** $F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\mathbf{exp}(-j2\pi xu/N)$



u=2 ⇒

= ¼*(*f(0)* * ***exp***(-*j**2π*2*0/4) + *f(1)* ***exp***(-j*2π*2*1/4) + *f(2)* * ***exp***(-*j**2π*2*2/4) + *f(3)* * exp(-j*2π*2*3/4))

= ¼*(2****exp***(0) + 3***exp**(-j*π) + 4****exp***(-*j**2π) + 4*exp(-j*3π))

= ¼* (2+3*(cos(π) – jsen(π)) + 4* (cos(2π) – jsen(2π)) +4*(cos(3π) – jsen(3π)))

= ¼* (2+3*(–1) + 4* (1) +4*(–1))

= ¼* (2–3+4–4) = -1/4 $\therefore \omega_2$

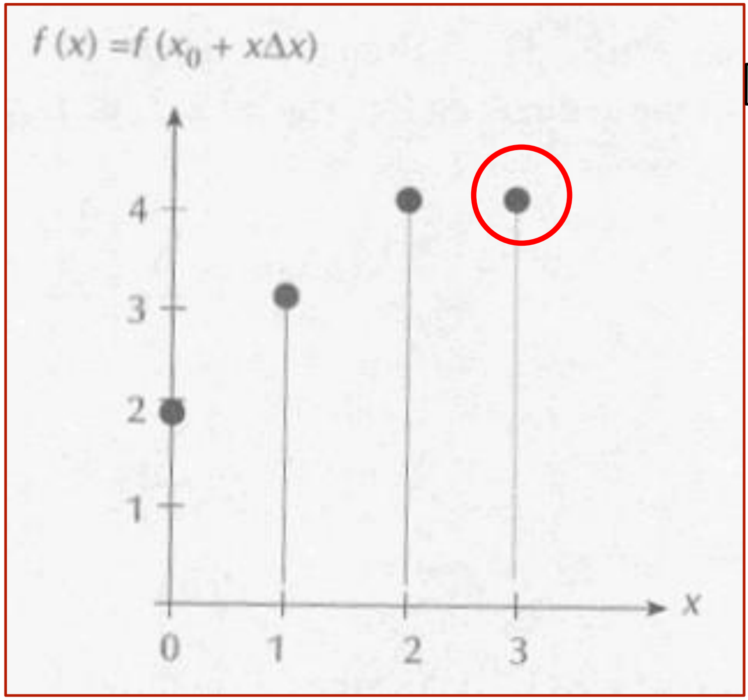
f(0)=2; *f*(1)=3; *f*(2)=4; *f*(3)=4;

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\mathbf{exp}\left(-j2\pi xu/N\right)$$

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x):**



f(0)=2; *f*(1)=3; *f*(2)=4; *f*(3)=4;

u=3

= ¼* (*f(0)* * **exp**(-*j**2π*3*0/4) + *f(1)* ***exp**(-j*2*π**3*1/4) + *f(2)* * ***exp***(-*j**2π*3*2/4) + *f(3)* ***exp**(-j*2*π**3*3/4))

= ¼* (2 + *3* * **exp**(-*j**3π/2) + 4***exp**(-j3*π) + 4****exp***(-*j*9π/2))

= ¼* (2+3*(cos(3*π*/2) – jsen(3π/2)) + 4* (cos(3*π*) – jsen(3*π*)) +4*(cos(9*π*/2) – jsen(9*π*/2)))

= (1/4)* (2+3*(0 –j(–1))+ 4*(–1)+ 4*(0 –j(1))

= (1/4)* (2+ 3j –4 – 4j)

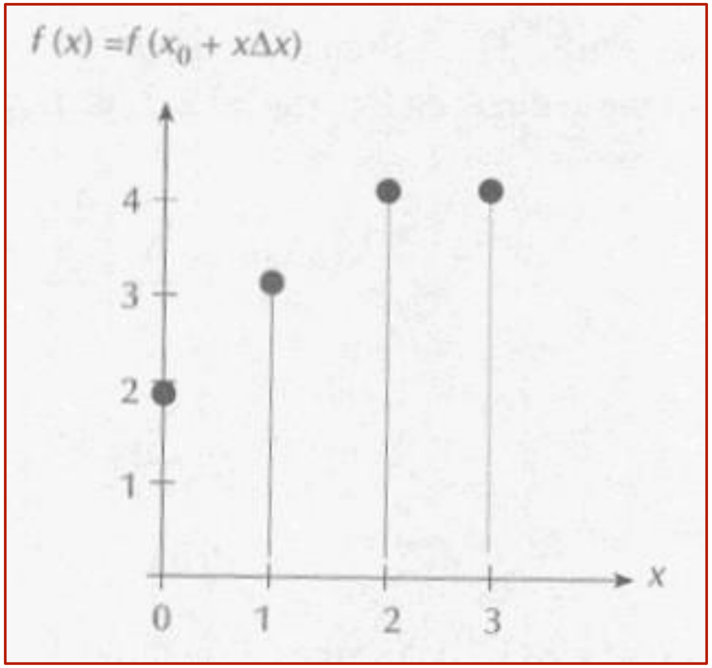
= (1/4)* (–2 –j) = -(1/4)*(2+j) $\quad \therefore\ \omega_3$

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

  - **Transformada de Fourier de uma função *f*(x):**

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,\mathbf{exp}(-j2\pi xu/N)$$



f(0)=2; *f*(1)=3; *f*(2)=4; *f*(3)=4;

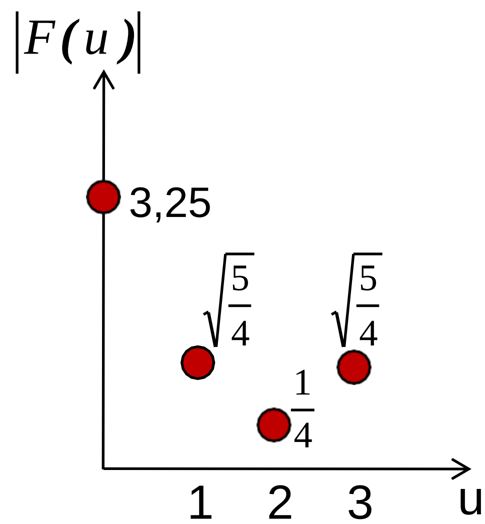
Magnitude do Espectro de Fourier

$$|F(0)| = 3{,}25$$

$$|F(1)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|F(2)| = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$|F(3)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



Quanto de um certo componente de frequência está presente

*|F(u)| = sqrt(Re(F(u))^2 + Im(F(u))^2)

Transformada de Fourier

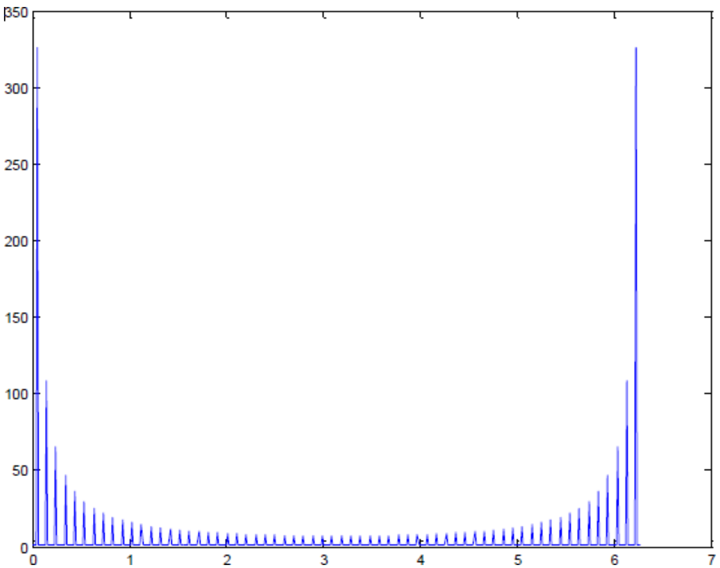
- **Transformada discreta de Fourier (1D)**

python

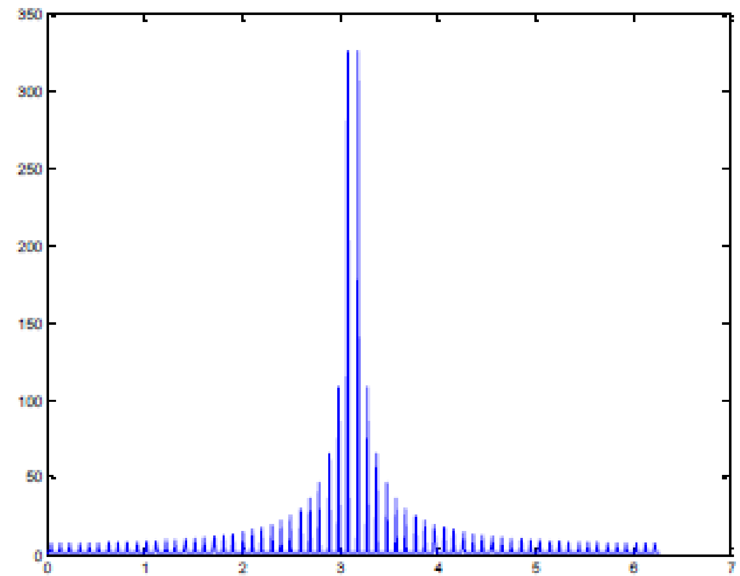
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sequência de entrada
x = [2, 3, 4, 4]

# Calcula a DFT usando a função fft do numpy
X = np.fft.fft(x)

# Calcula as magnitudes das componentes da DFT
magnitudes = np.abs(X)

# Cria um array com as frequências normalizadas
freqs = np.arange(len(x))/len(x)

# Plota o gráfico da DFT
plt.stem(freqs, magnitudes, use_line_collection=True)
plt.xlabel('Frequência normalizada')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.title('Gráfico da DFT')
plt.show()
```

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D)**
  - Transformada discreta de uma onda quadrada
    - Resultado é um deslocamento



Transformada de Fourier é centralizada na origem

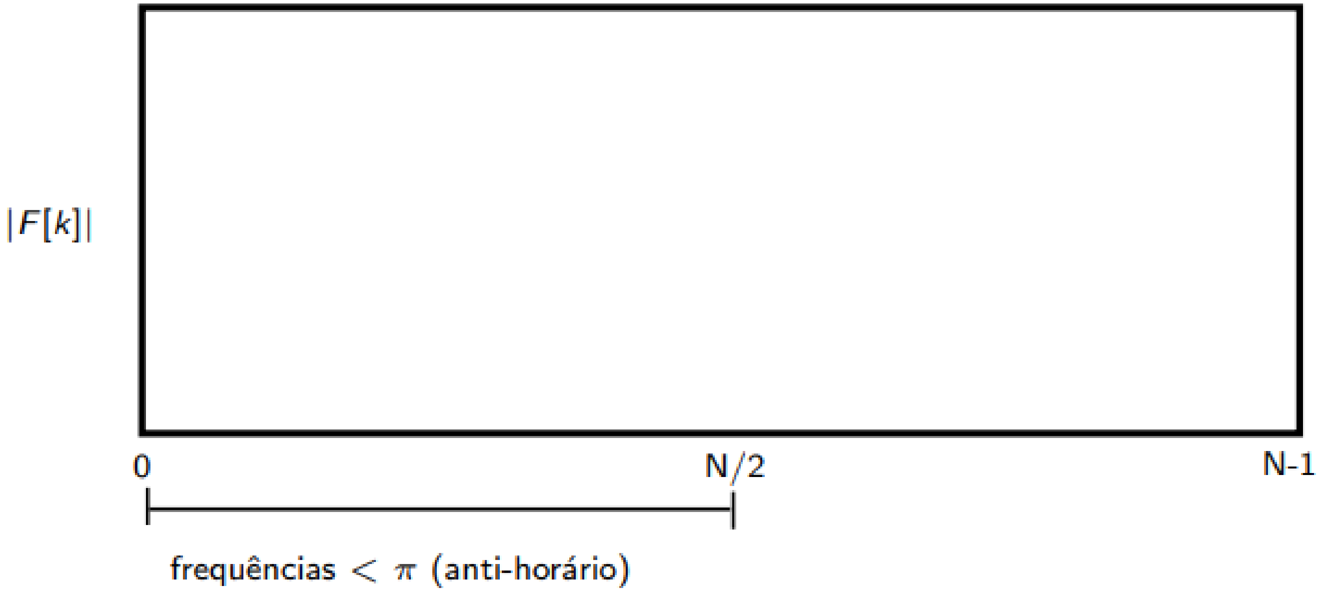


Transformada Discreta de Fourier é centralizada em *N/2*

Método DFT centrada: Correção do resultado após deslocamento

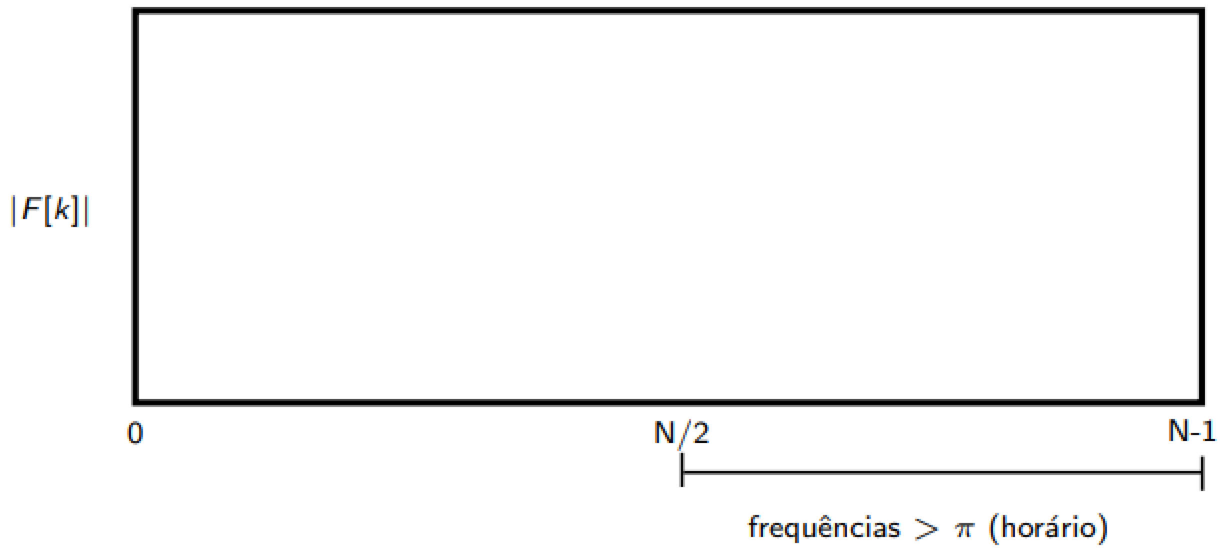
Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D): interpretação do gráfico**
  - Primeiros N/2 *k* coeficientes de frequência: valores abaixo de π
    - Pontos que se movimentam no **sentido anti-horário do plano complexo**



Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (1D): interpretação do gráfico**
  - Coeficientes entre N/2 e N-1: valores acima que π
    - Pontos que se movimentam **no sentido horário do plano complexo**



PI

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**

  - $F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$

  - O par de **Transformadas Discretas de Fourier de uma função *f*(*x*,*y*)** amostrada (M x N), é dado por:

$$\boxed{F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})]}$$

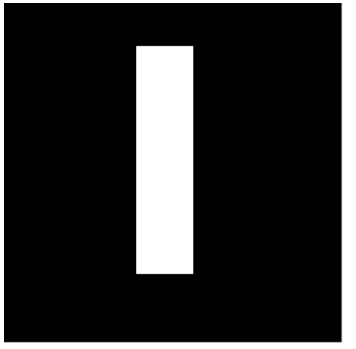
    - **F(u,v): soma finita de senos e cossenos;**
    - **u=0,...,M-1; v=0,...,N-1 denominados variáveis de frequências;**

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp[j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})]}$$

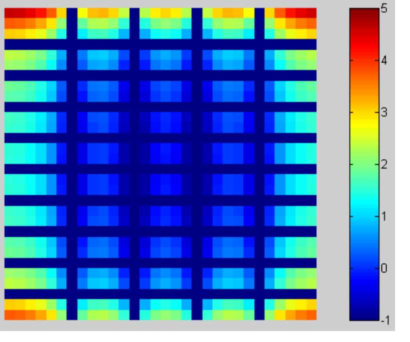
    - ***f*(x,y): soma finita de senos e cossenos;**
    - **x=0,...,M-1; y=0,...,N-1**

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**

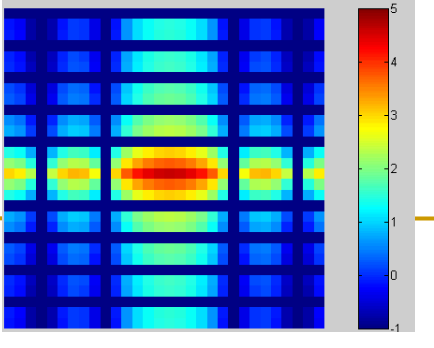


  - **Exemplo**
    - f = zeros(30,30);
    - f(5:24,13:17)=1;
    - imshow(f);



    - F =fft2(f);
    - F2 = log(abs(F));
    - imshow(F2,[-1, 5]);
- colormap(jet); colorbar;

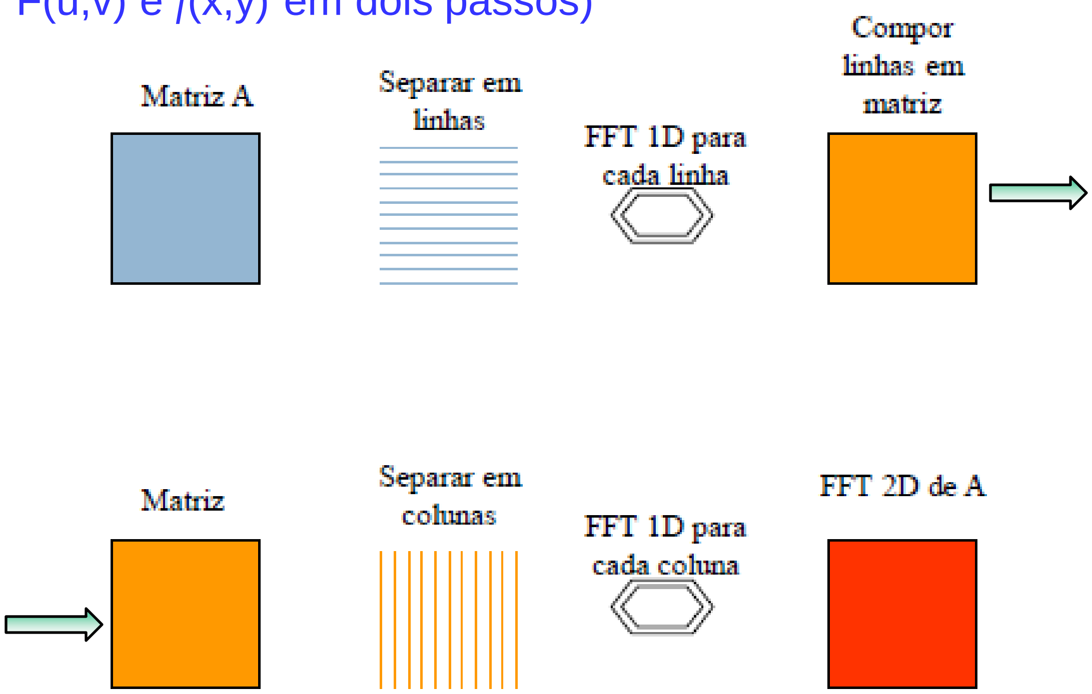
Método DFT centrada



    - F2=fftshift(F);
    - F3=log(abs(F2));
    - imshow(F3,[-1, 5]);
    - colormap(jet); colorbar;

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Propriedades que facilitam a sua utilização**
    - **separabilidade** (calcular F(u,v) e *f*(x,y) em dois passos)
    - translação
    - Periodicidade
    - simetria conjugada
    - rotação
    - distributividade
    - mudança de escala
    - valor médio
    - laplaciano
    - **convolução**
    - correlação e
    - **amostragem**



Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Teorema da Convolução**
    - Convolução de uma máscara na imagem no espaço
    - **No espectro: Multiplicação da transformada da imagem pela transformada da máscara**

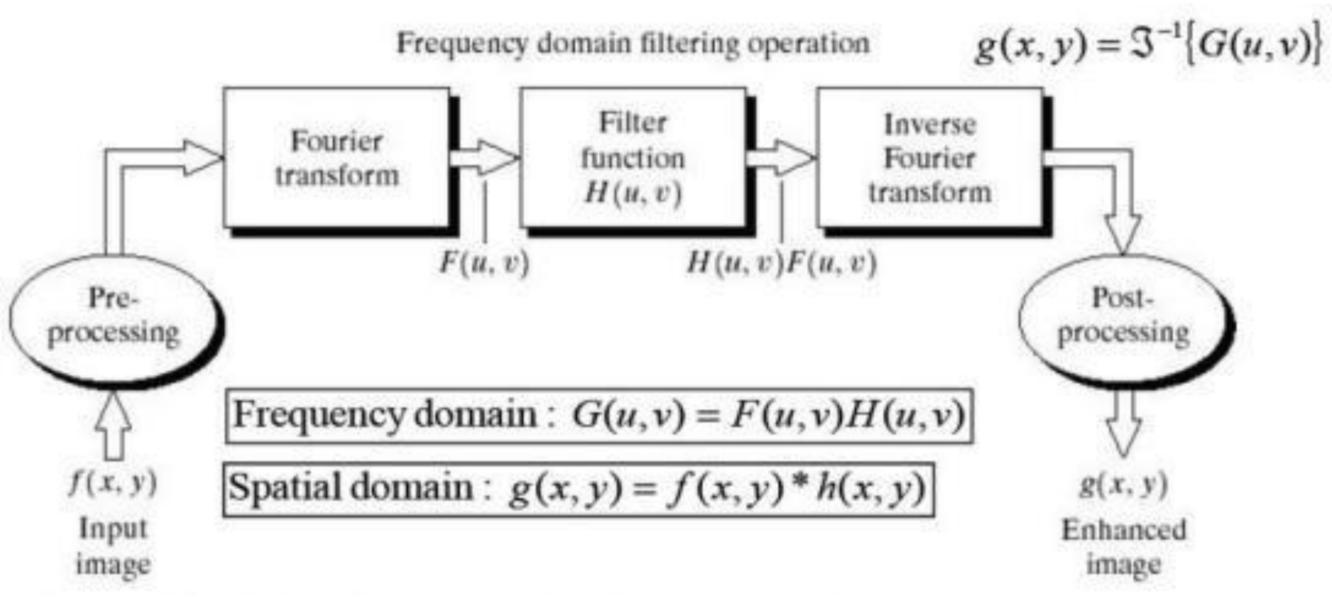
$$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

Convolução (espaço) $\Longleftrightarrow$ Multiplicação(frequência)

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Etapas do Processo de Filtragem: Domínio da Frequência**

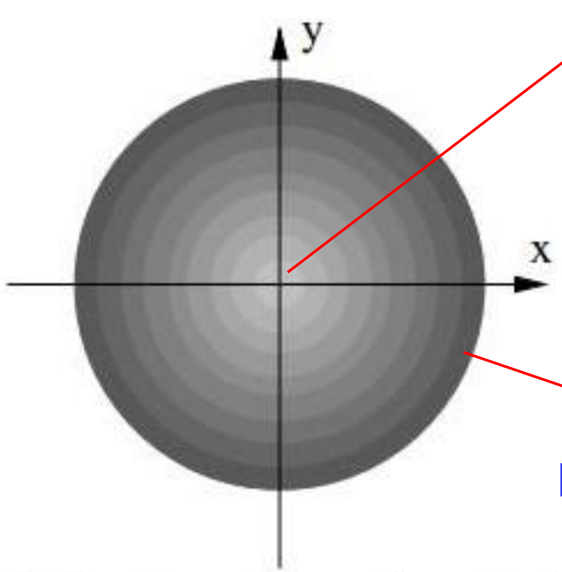


Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Etapas do Processo de Filtragem: Domínio da Frequência**

Uma interpretação

Mudanças suaves nas intensidades da imagem



Bordas de objetos, mudanças bruscas nas intensidades

Interpretação do espectro de Fourier resultante da aplicação da DFT bidimensional

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência**
    - Passa Baixa
      - Suavização
    - Passa Alta
      - Realce

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Ideal**
    - Realiza um corte de frequências
    - Frequências dentro de um **círculo de raio R**
      - **Centro alinhado** com o centro da imagem

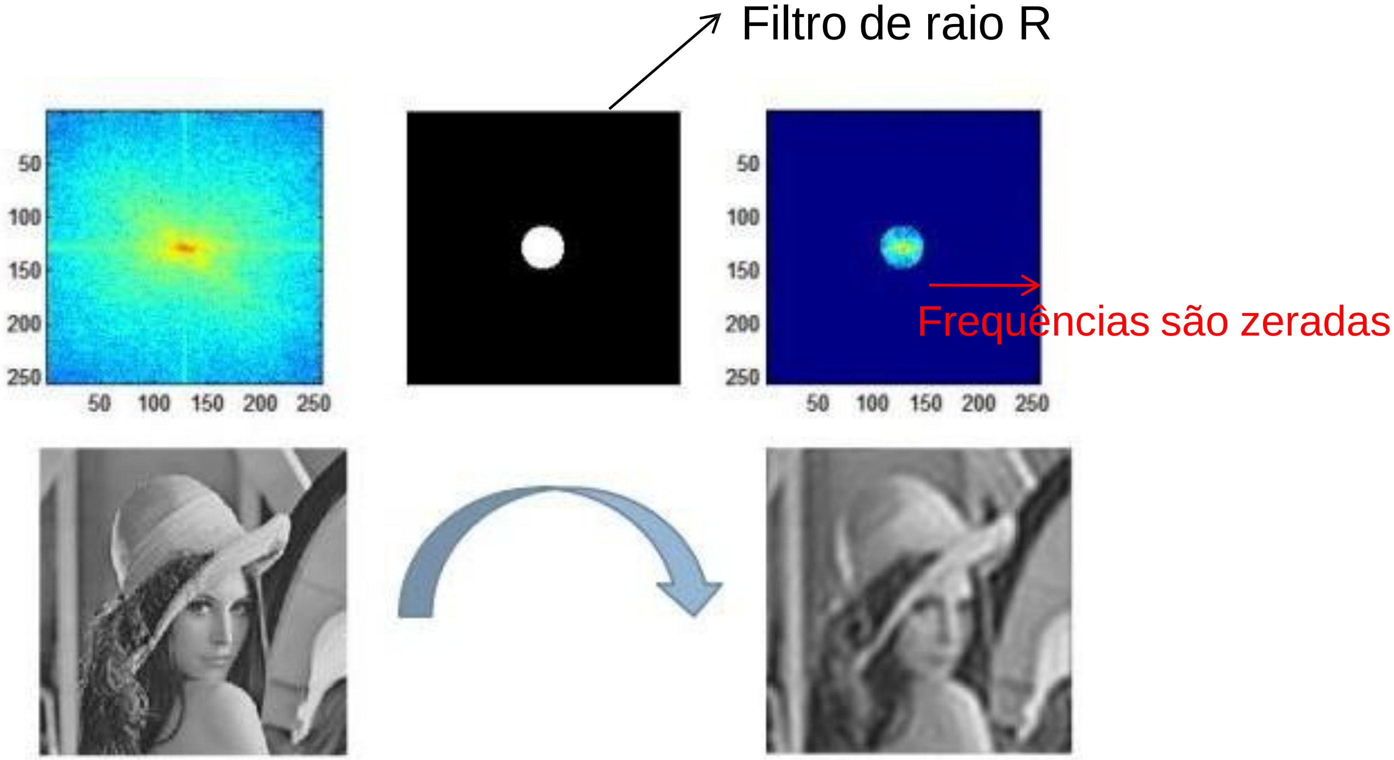
$$L(u,v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u,v) \leq D_l \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\}$$

$$H(u,v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u,v) \geq D_h \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\}$$

      - D_l e D_h: valores empíricos > 0

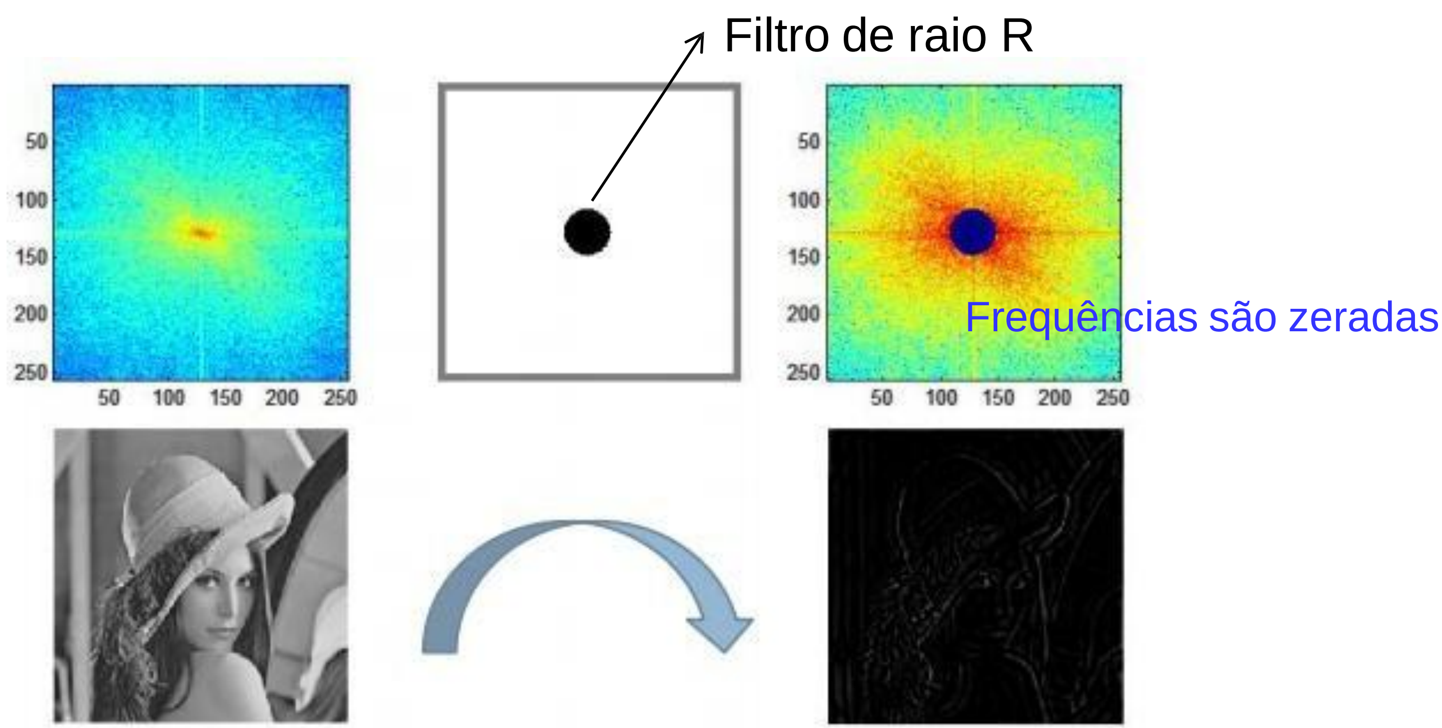
Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Ideal de Suavização**



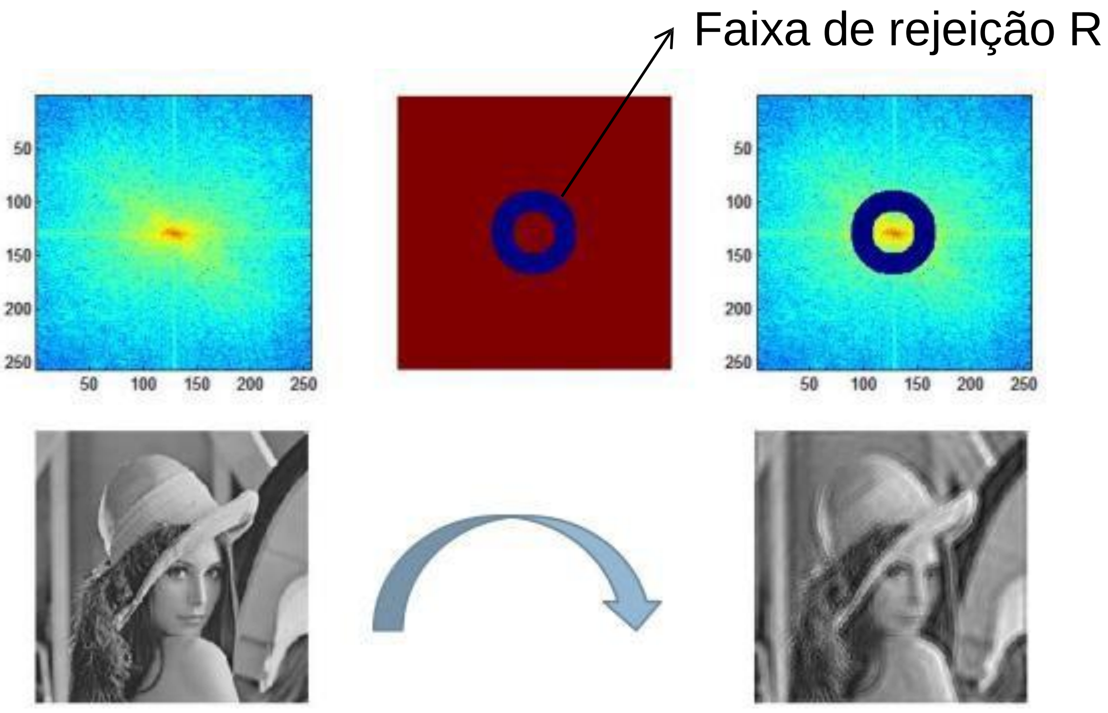
Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Ideal de Realce**



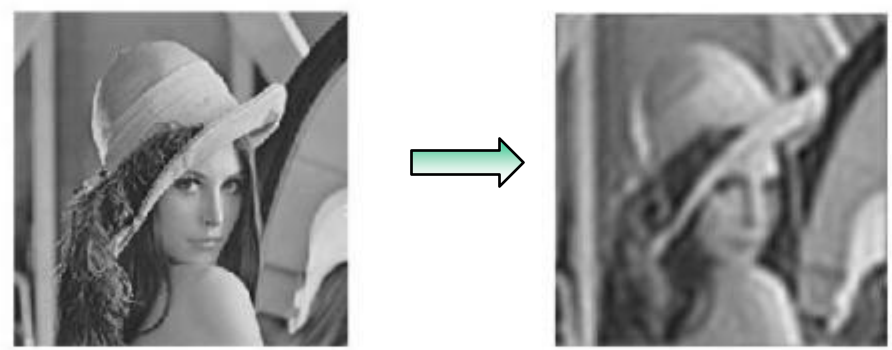
Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Ideal Passa/Rejeita Faixa**



Transformada de Fourier

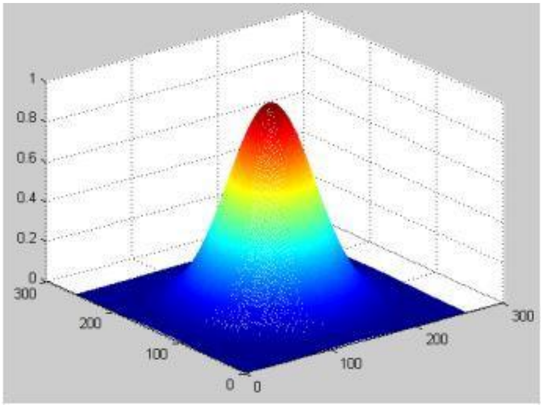
- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Ideais**
    - **Problemas: Gera Falsas Bordas (Ruído Oscilatório)**



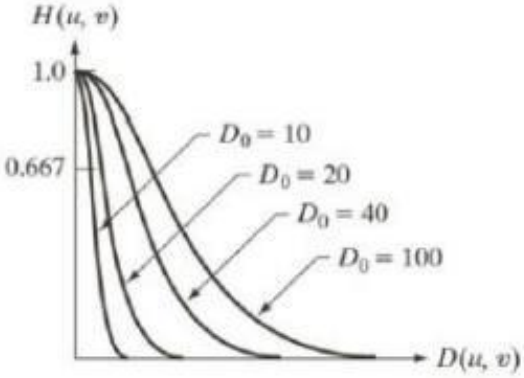
    - **Solução:** filtros com uma **variação mais suave** em torno das frequências de corte

Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Gaussiano**

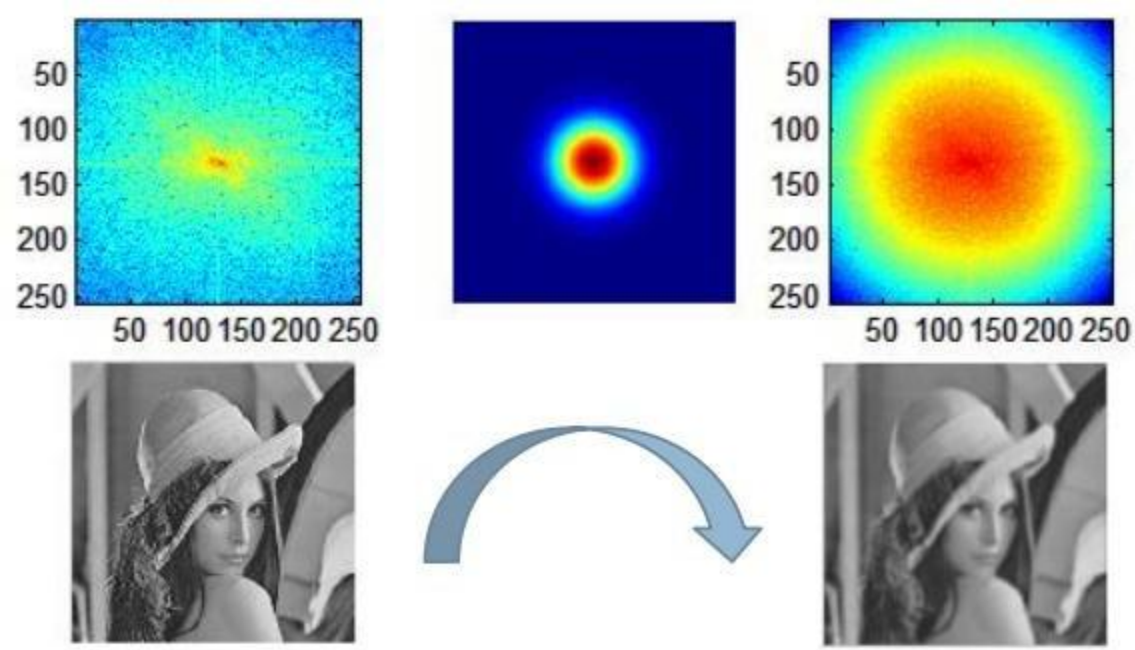


- corte suave
- não apresenta ruído oscilatório
- Definido por: $H(\mu,\nu) = e^{-D^2(\mu,\nu)/2D_0^2}$
  - D(µ,v): distância entre um ponto (µ,v) no domínio da frequência e o centro da função de frequência
  - D_0 é a frequência de corte (distância da origem)



Transformada de Fourier

- **Transformada discreta de Fourier (2D)**
  - **Filtragem no Domínio da Frequência: Filtro Gaussiano**

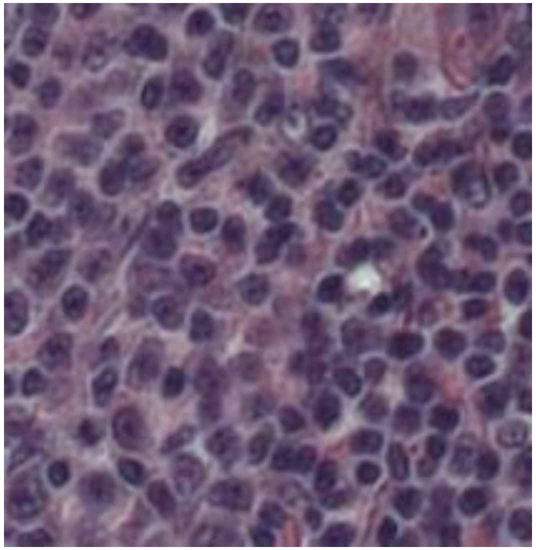


  - **Filtro Passa Alta Gaussiano:** $L(\mu,v) = 1 - H(\mu,v)$

Exercícios

1. Calcule a DFT para a sequência f(x)={1,2,0,1}. Apresente a magnitude do espectro e a transformada inversa.

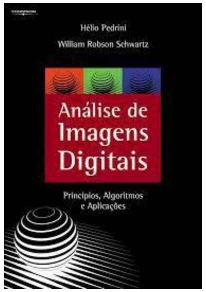
2. Para facilitar a elaboração dessa atividade, converta a imagem abaixo para níveis de cinza, 8 bits de quantização. Aplique o ruído gaussiano sobre a imagem. Em seguida, aplique a DFT sobre a imagem com ruído. Apresente o espectro de Fourier com o deslocamento da origem do plano de frequências. Proponha dois filtros no domínio da frequência. O objetivo é suavizar o ruído inserido previamente. Apresente os espectros de Fourier antes e após a etapa de processamento, bem como as imagens reconstruídas após cada processo de filtragem. Explique detalhadamente cada etapa e os filtros propostos. Indique qual foi o filtro que forneceu o melhor resultado em termos de minimização da presença. É permitido o uso de pacote DFT, disponível em ferramentas de PDI, a fim de facilitar o processamento da transformada e exibição de cada espectro. Não é permitido o uso de filtros disponíveis em ferramentas de PDI.



Referências

1. Pedrini, H., Schwartz, W. R. Análise de Imagens Digitais: Princípios Algoritmos e Aplicações. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

Leitura: Capítulo 3, tópico 3.2.



2. González, R. C., Woods, R. E. Processamento de Imagens Digitais. São Paulo: Edgard Blücher ltda, 2000.

Leitura: Capítulo 4.

3. Backes, A. R., Sá Junior, J. J. De M. Introdução à Visão Computacional Usando MatLab. Rio de Janeiro: Alta Books, 2016.

Leitura: Capítulo 5, tópico 5.2.