



As componentes da variância

Considere uma batelada de um processo que produz uma pasta de um pigmento onde a qualidade de interesse é o conteúdo de umidade.

Supor que foi feita uma batelada, uma mostra química foi retirada para o laboratório, e que a porção da amostra foi testada para produzir uma estimativa do conteúdo de umidade.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

1



As componentes da variância

A variância da estimativa do conteúdo de umidade, y , reflete a variação devido ao teste, a variação devido a amostragem, e a variação devido ao processo.

As componentes da variância separa a variação total em partes atribuíveis às várias causas

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

2



As componentes da variância

Importância dessa abordagem:

1. Essa análise mostra onde os esforços para reduzir a variação devem ser direcionados;
2. Ela esclarece a questão de qual é a estimativa apropriada de variação do erro em experimentos comparativos
3. Ela mostra como planejar um procedimento de amostragem e teste a um custo mínimo para qualquer produto em particular

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

3



As componentes da variância

Considere o modelo usado para representar a criação das observações

η É a média do conteúdo do processo a longo prazo, Então o erro total $e = y - \eta$, conterá 3 componentes:

$$e = e_T + e_S + e_P$$

e_T é o erro do teste analítico;

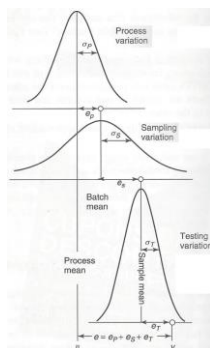
e_S é o erro da amostragem; e,

e_P é o erro devido a variação inerente ao processo

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

4



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

5



As componentes da variância

O cálculo das médias e variâncias V_T , V_S e V_P para um dos três conjuntos de dados, mostrados na transparência a seguir

- (a) 10 testes feitos a partir de uma única amostra;
- (b) 10 amostras testados apenas uma vez; e,
- (c) um único teste, de uma única amostra tirada de 10 diferentes bateladas.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

6



As componentes da variância

	(a)	(b)	(c)
	59,6	57	62,2
	59,2	63,2	56,8
	61,3	61,4	64,5
	60,4	64,9	70,3
	59,7	57,9	54,1
	60,8	62,5	53,3
	58,8	59,1	64,2
	59,9	61,3	59,7
	60,4	60,5	62,4
	60,1	60,2	71,5
Médias	60,02	60,80	61,90
Variâncias	$V_1=0,56 \rightarrow \sigma_1^2$	$V_2=5,81 \rightarrow \sigma_2^2 + \sigma_1^2$	$V_3=37,86 \rightarrow \sigma_3^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2$
Componentes da variância	$\sigma_1^2 = 0,55$	$\sigma_2^2 = 5,81 - 0,55 = 5,26$	$\sigma_3^2 = 37,86 - 5,81 = 32,05$
Desvios padrões	$\sigma_1 = 0,74$	$\sigma_2 = 0,2,29$	$\sigma_3 = 5,66$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

7



Obtendo a estimativa correta do erro

Segundo Box et al 2005, uma estimativa das componentes da variância é importante em um planejamento experimental.

Considere a comparação de duas médias:
Problema em questão : Comparação entre dois processos :

A: processo padrão

B: processo modificado

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

8



Obtendo a estimativa correta do erro

Resultados obtidos:

Processo A	Processo B
58,3	63,2
57,1	64,1
59,7	62,4
59,0	62,7
58,6	63,6
$\bar{y}=58,54$	$\bar{y}=63,20$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

9



Obtendo a estimativa correta do erro

Comparação entre os processos A e B

Processos	N	Mean	StDev	SE Mean
A	5	58,540	0,961	0,43
B	5	63,200	0,682	0,30

Difference = $\mu(A) - \mu(B)$

Estimate for difference: -4,660

95% CI for difference: (-5,875; -3,445)

T-Test of difference = 0 (vs \neq): T-Value = -8,84 P-Value = 0,000 DF = 8

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

10



Obtendo a estimativa correta do erro

Qualquer diferença entre as duas médias do processo foi sujeita a testes mais amostragem mais erros de processo,

A diferença estimada dentro de cada conjunto de dados é apenas devido ao teste.

O que você poderia concluir a partir desses dados é que a diferença entre as duas médias é quase certamente não devido ao erro de teste.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

11



Obtendo a estimativa correta do erro

Dois métodos de teste.

Se você quisesse comparar dois métodos de teste A e B, então você precisaria comparar determinações usando o método de teste A com determinações usando o teste B na mesma amostra, com todos os testes feitos em ordem aleatória.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

12



Obtendo a estimativa correta do erro

Dois métodos de amostragem:

Para comparar dois métodos de amostragem diferentes (A e B), você precisaria comparar determinações usando o método de amostragem A com aquelas feitas em um conjunto de diferentes amostras usando o método B com amostras A e B escolhidas aleatoriamente a partir da mesma batelada.



Obtendo a estimativa correta do erro

Dois processos:

Para comparar um processo padrão A com um processo modificado B, você precisa comparar os dados de bateladas escolhidas aleatoriamente do processo padrão A, com os dados de bateladas escolhidas aleatoriamente do processo modificado B



As componentes da variância

Em qualquer processo industrial é muito importante localizar, estimar e controlar as fontes de variação. A variabilidade pode ser estudada de acordo com o interesse, por algumas ferramentas estatísticas, a saber: as cartas de controle, a propagação de erros e por meio das componentes da variância, (Box et al, 2005).



As componentes da variância

O termo análise de variância resulta da decomposição da variabilidade total em um conjunto de dados em suas partes componentes. A análise de variância "one-way" que leva em conta apenas uma fonte de variação, cujo modelo geral está apresentado na equação 1, pode servir de base a ambos os estudos da análise de variância



As componentes da variância

$$y_{ij} = \mu_i + \tau_i + \xi_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

k é o número de níveis e n o número de observações em cada nível

O estudo baseado nos efeitos fixos, quando o experimentador especifica os valores dos níveis e realiza os experimentos de uma forma totalmente aleatória.

A hipótese é testada em torno τ_i ($H_0: \tau_i = 0; e H_1: \tau_i \neq 0$)

As conclusões não podem ser estendidas a níveis que não foram considerados



As componentes da variância

Por outro lado se os níveis são tiradas aleatórias de uma população de níveis, pode-se então estender as conclusões (tiradas a partir da amostra) a todos os níveis da população, quer eles sejam ou não especificados na análise. Neste caso, τ_i são variáveis aleatórias e conhecidas, então testa-se a hipótese em torno da variabilidade de τ_i , e tenta-se estimar esta variabilidade. Isto é chamado de efeitos aleatórios ou componentes da variância (Montgomery, 2004).



As componentes da variância

Na análise das componentes da variância, τ_i e ξ_{ij} são variáveis aleatórias e independentes. O modelo serve para o estudo com níveis fixos e também para níveis aleatórios. Porém, os parâmetros τ_i e ξ_{ij} têm interpretação diferente. Logo, se a variância de τ_i é σ_T , então a variância de qualquer observação y é dada por:

$$\sigma_y^2 = \sigma_p^2 + \sigma_T^2$$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

19



As componentes da variância

As variâncias σ_p^2 e σ_T^2

são denominadas de componentes da variância e o modelo é chamado de **Componentes da Variância ou Modelo dos efeitos aleatórios**.

Ainda segundo Montgomery (2004), para testar a hipótese neste modelo é requerido que $\{\xi_{ij}\}$ seja estatisticamente independente e se distribua como uma normal com média zero e variância σ_T^2 , e que $\{\tau_i\}$ seja estatisticamente independente e se distribua como uma normal com média zero e variância σ_p^2 .

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

20



Uma investigação para determinação das componentes da Variância

Um processo químico em batelada produz um pigmento no qual é testado rotineiramente o conteúdo de umidade, por meio de um único teste em uma única amostra. Eles acham conveniente tomar uma unidade de medida de conteúdo de umidade como sendo um décimo de 1%.

Em termos dessas unidades, de conteúdo de umidade assim determinados, variam em torno de uma média de aproximadamente 25 com desvio padrão em torno de 6. Esta variação foi declarada como excessiva. O analista acreditou que a grande variação ocorreu devido a falta do processo pelos engenheiros.

O engenheiro de processo pensou que isso ocorreu devido à inexistência nos procedimentos analíticos.

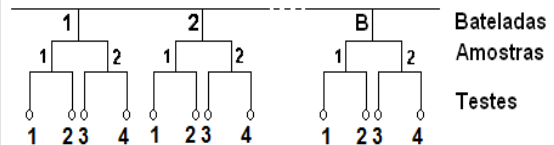
EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

21



Uma investigação para determinação das componentes da Variância



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

22



Resultados da investigação

		total	entre	dentro	entre	dentro	total	entre	dentro
		SS	df	MS	SS	df	MS	SS	df
1	25	100	1	100	100	1	100	100	1
2	25	100	1	100	100	1	100	100	1
3	25	100	1	100	100	1	100	100	1
4	25	100	1	100	100	1	100	100	1
5	25	100	1	100	100	1	100	100	1
6	25	100	1	100	100	1	100	100	1
7	25	100	1	100	100	1	100	100	1
8	25	100	1	100	100	1	100	100	1
9	25	100	1	100	100	1	100	100	1
10	25	100	1	100	100	1	100	100	1
11	25	100	1	100	100	1	100	100	1
12	25	100	1	100	100	1	100	100	1
13	25	100	1	100	100	1	100	100	1
14	25	100	1	100	100	1	100	100	1
15	25	100	1	100	100	1	100	100	1
16	25	100	1	100	100	1	100	100	1
17	25	100	1	100	100	1	100	100	1
18	25	100	1	100	100	1	100	100	1
19	25	100	1	100	100	1	100	100	1
20	25	100	1	100	100	1	100	100	1
21	25	100	1	100	100	1	100	100	1
22	25	100	1	100	100	1	100	100	1
23	25	100	1	100	100	1	100	100	1
24	25	100	1	100	100	1	100	100	1
25	25	100	1	100	100	1	100	100	1
26	25	100	1	100	100	1	100	100	1
27	25	100	1	100	100	1	100	100	1
28	25	100	1	100	100	1	100	100	1
29	25	100	1	100	100	1	100	100	1
30	25	100	1	100	100	1	100	100	1
31	25	100	1	100	100	1	100	100	1
32	25	100	1	100	100	1	100	100	1
33	25	100	1	100	100	1	100	100	1
34	25	100	1	100	100	1	100	100	1
35	25	100	1	100	100	1	100	100	1
36	25	100	1	100	100	1	100	100	1
37	25	100	1	100	100	1	100	100	1
38	25	100	1	100	100	1	100	100	1
39	25	100	1	100	100	1	100	100	1
40	25	100	1	100	100	1	100	100	1

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

23



Uma investigação para determinação das componentes da Variância

Os multiplicadores utilizados na coluna mean square esperada do ANOVA são escolhidos de modo que, se não houvesse variação devida as bateladas ou as amostras, cada mean square forneceria uma estimativa separada de σ_T^2 .

O mean square esperado para as bateladas é $4\sigma_p^2 + 2\sigma_s^2 + \sigma_T^2$, e o multiplicador para σ_p^2 é 4 porque a média de cada batelada é baseada em 4 testes, σ_s^2 é multiplicado por 2 porque existem 2 testes para cada amostra. O mean square dos testes, tal como está, fornece uma estimativa do componente de variância devido ao teste.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

24



ANOVA da Componentes

General layout of analysis of variance table for separation of variance components associated with batches, samples, and tests

source of variation	sum of squares	degrees of freedom	mean square	expected value of mean square
average	$BST\bar{y}^2$	1		
batches	$ST \sum_b (\bar{y}_b - \bar{y})^2$	$B - 1$	m_B	$ST\sigma_B^2 + T\sigma_S^2 + \sigma_T^2$
samples	$T \sum_{b=1}^B \sum_{s=1}^S (\bar{y}_{bs} - \bar{y}_b)^2$	$B(S - 1)$	m_S	$T\sigma_S^2 + \sigma_T^2$
tests	$\sum_{b=1}^B \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T (y_{bst} - \bar{y}_{bs})^2$	$BS(T - 1)$	m_T	σ_T^2
total	$\sum_{b=1}^B \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T y_{bst}^2$	BST		

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

25



ANOVA das Componentes da investigação

Analysis of variance table, pigment paste example

source of variation	sum of squares	degrees of freedom	mean square	expected value of mean square
average	43,040.8	1		
batches	1,211.0	14	86.6	$4\sigma_B^2 + 2\sigma_S^2 + \sigma_T^2$
samples	869.7	15	58.0	$2\sigma_S^2 + \sigma_T^2$
tests	27.5	30	0.9	σ_T^2
total	45,149.0	60		

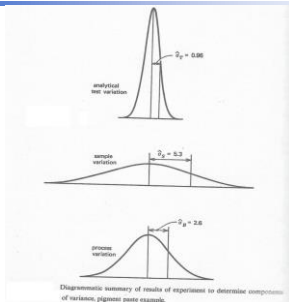
EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

26



Esquema das distribuições das Componentes



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

27