



Cartas alternativas as cartas de Shewhart

- 1 Carta da soma cumulativa conhecida como CUSUM
 - Cartas CUSUM podem detetar pequenas mudanças no processo mais rápido do que as cartas de Shewhart
 - Cartas CUSUM são menos poderosas que as cartas de Shewhart para grandes mudanças na média

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

1



Cartas alternativas as cartas de Shewhart

- 2 Cartas da média móvel exponencialmente ponderada (MMEP) em Inglês (EWMA)
 - Estas cartas podem ser combinadas com o controle do processo de engenharia para dar uma visão de como um processo poderia ser ajustado

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

2



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

A carta CUSUM incorpora toda informação na sequência de valores da amostra, graficando as somas cumulativas dos desvios dos valores da amostra de um valor referência (alvo)

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

3



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Seleção do alvo: ao usar técnicas CUSUM, é preciso ter uma hipótese para testar:

- É preciso ter alguma idéia do que os dados devem significar;
- Por exemplo, o ponto médio da faixa de especificação pode ser considerado o valor médio alvo;
- A técnica CUSUM examinará dados para ver se as medidas estão "no alvo" ou não;
- NOTA: O gráfico CUSUM pode ser muito afetado por esta média tomada como hipótese, portanto, é importante que esse valor seja razoável para o período de tempo examinado.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

4



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Medida da Dispersão: Para medidas individuais, a amplitude móvel é usada para determinar o desvio padrão da amostra.

O uso do gráfico CUSUM pra valores individuais é muito comum na prática, daí a sua grande utilidade nos processos químicos.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

5



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

30 Observações, sendo 20 para uma distribuição normal com média 10 e desvio padrão 1. Para limites de controle 3σ , Tem-se

$$LSC=13$$

$$LC=10$$

$$LIC=7$$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

6



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

Amostra i	(a) xi	(b) xi-10	Ci=(xi-10)+Ci-1	Amostra i	(a) xi	(b) xi-10	Ci=(xi-10)+Ci-1
1	9.45	-0.55	-0.55	16	9.37	-0.63	-0.37
2	7.99	-2.01	-2.56	17	10.62	0.62	0.25
3	9.29	-0.71	-3.27	18	10.31	0.31	0.56
4	11.66	1.66	-1.61	19	8.52	-1.48	-0.92
5	12.16	2.16	0.55	20	10.84	0.84	-0.08
6	10.18	0.18	0.73	21	10.90	0.90	0.82
7	8.04	-1.96	-1.23	22	9.33	-0.67	0.15
8	11.46	1.46	0.23	23	12.29	2.29	2.44
9	9.20	-0.80	-0.57	24	11.50	1.50	3.94
10	10.34	0.34	-0.23	25	10.60	0.60	4.54
11	9.03	-0.97	-1.20	26	11.08	1.08	5.62
12	11.47	1.47	0.27	27	10.38	0.38	6.00
13	10.51	0.51	0.78	28	11.62	1.62	7.62
14	9.40	-0.60	0.18	29	11.31	1.31	8.93
15	10.08	0.08	0.26	30	10.52	0.52	9.45

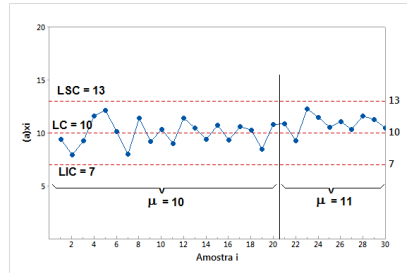
EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

7



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

8



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Todos os pontos dentro dos limites, porém os 10 últimos valores com 9 pontos acima da LC. Indicando uma mudança da média.

O gráfico de Shewhart não conseguiu perceber a mudança no processo, porque ela foi pequena.

O gráfico CUSUM incorpora toda a informação na sequência de valores da amostra:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0) = (x_i - 10) + C_{i-1}$$

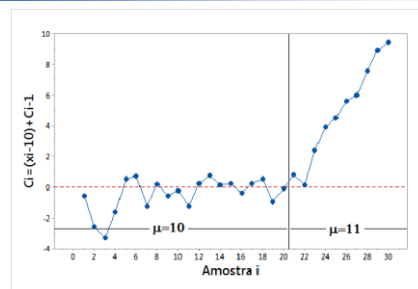
EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

9



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

10



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

O gráfico anterior não é um gráfico de controle (não tem os limites), mas dá uma indicação importante:

Os 20 primeiros pontos flutuam em torno de zero.

Quando a média sofre uma mudança nota-se uma forte tendência ascendente.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

11



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Há duas maneiras de representar as cartas CUSUM:

- A carta CUSUM por intervalo de decisão ou CUSUM Tabular (ou algoritmo)
- A carta CUSUM máscara V

Iremos abordar a forma de carta por intervalo de decisão

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

12



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O CUSUM pode ser usada com cartas construídos a partir de observações individuais ou a partir de médias de subgrupos racionais.

Na prática ocorre mais com observações individuais. Daí a grande aplicação na Engenharia Química.



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Quando o processo está sob controle, as observações seguem aproximadamente uma distribuição normal com média μ_0 e desvio padrão σ (supor valor confiável).

Pode-se considerar o μ_0 como alvo, para a característica de qualidade desejada.

Segundo, Montgomery, a indústria química usa esta abordagem quando quer controlar uma viscosidade em relação a um valor alvo especificado, p. ex.



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Quando o processo está sob controle, as observações O CUSUM dará o sinal logo que o processo começa a flutuar ou sai do valor alvo, sinalizando que algum ajuste deve ser feito, para trazer o processo de volta para o alvo.

Um sinal CUSUM também pode indicar a presença de uma causa atribuível que precisa ser investigada.



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O CUSUM Tabular ou por intervalo de decisão, trabalha acumulando desvios de μ_0 que estão acima ou abaixo do alvo por meio de duas estatísticas C^+ e C^- , que são chamadas CUSUMs unilaterais superior e inferior, assim calculadas:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - k) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Em que os valores iniciais são: $C_0^+ = C_0^- = 0$



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Segundo Montgomery, o minitab usa o CUSUM inferior como:

$$C_i^- = \min[0, x_i - \mu_0 + k + C_{i-1}^+]$$

Resultando um CUSUM inferior sempre ≤ 0 .

O intervalo de decisão definido como **h**, pode ser tomado como um múltiplo do desvio padrão. Um valor razoável seria tomar para **h** um valor 5 vezes o desvio padrão.



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O valor de **k** que aparece nas estatísticas C_i^+ e C_i^- é o valor de referência (valor de tolerância ou folga).

O valor de **k** é sempre definido entre o alvo, μ_0 e o novo valor da média fora de controle μ_1 .

A mudança de média pode ser expressa em unidades de desvio padrão. **k** pode ser tomado como:

$$k = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Plano CUSUM:

Portanto, os gráficos CUSUM são definidos por 2 parâmetros, h e k .

Estes são muitas vezes referidos como um "plano CUSUM". Em um primeiro momento podem ser tomados como dito anteriormene.

Mas, esses valores podem ser selecionados das tabelas ARL (**Average Run Length**) ou usando um nomograma.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

19



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

Especifique um valor para h :

Para CUSUMs unilaterais, h é o número de desvios padrão entre a linha central e os limites de controle.

Especifique um valor para k :

Para CUSUMs unilaterais, k é a "Folga" permitida no processo. O tamanho da mudança que queremos detectar, multiplicado por Sigma para "Folga"

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

20



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Construção

Amostras são tomadas freqüentemente dentro de um processo, e testadas dentro de um critério. Existem dois tipos de problemas de amostragem que podem ocorrer na coleta dos dados:

- O limiar para detectar problemas é grande. Então, pequenas perturbações e mudanças do processo podem levar um tempo "longo" para serem detetadas;
- Muitas amostras são tomadas dentro de um processo, e, eventualmente alarmes falsos ocorrerão devido ao acaso.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

21



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O design de um gráfico CUSUM aborda esses problemas diretamente ao se usar comprimento de execução médio (ARL, **Average Run Length**) como uma entrada do design. Em que L_r é o ARL ao nível de rejeição de qualidade (RQL) e L_a é o ARL ao nível de aceitação de qualidade (AQL).

Ao se considerar primeiro um procedimento de teste CUSUM, a seleção de valores de L_a e L_r pode parecer difícil, mas esta seleção pode ser facilitada para:

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

22



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

1. Alta freqüência de amostragem. (Por exemplo, L_r geralmente deve ser maior para um processo de alto volume de amostragem, isto é: que é verificado a cada hora em relação ao que é verificado mensalmente);
2. Baixa freqüência de amostragem. (Por exemplo, L_a geralmente deve ser menor para um plano de amostragem que tenha amostragem menos frequente do que o que tem amostragem frequente);

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

23



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

3. Outros gráficos do processo. (Por exemplo, L_r geralmente deve ser maior quando um produto possui muitos gráficos de controle de processo que têm frequentes intervalos de teste, porque a chance geral de falsos alarmes pode aumentar drasticamente);
4. Importância das especificações. (Por exemplo, L_r geralmente deve ser menor quando o limite de especificação é importante para a segurança e confiabilidade do produto).

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

24



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O requisito de entrada final para o projeto de um gráfico CUSUM é o desvio padrão do processo (σ).

O resultado de uma experiência projetada de pré-produção é uma fonte possível para essa informação

Observe que, após o início do teste CUSUM, pode ser necessário reajustar o plano de amostragem, devido a uma suposição errônea, ou uma melhoria (esperançosa), com o tempo, do parâmetro de interesse.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

25



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

O nomograma na Figura a seguir, pode ser usado para projetar o plano de amostragem

Ao colocar uma régua através do nomograma correspondente aos valores de L_u e L_r para o plano seguinte podem ser determinados:

$$|\mu - k| \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\frac{h\sqrt{n}}{\sigma}$$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

26



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)

No nível de rejeição de qualidade, $\mu - k$, é um parâmetro conhecido; Daí pode então ser determinado da primeira das duas equações anteriores. Com este valor de n , a segunda dessas duas equações pode então ser usada para produzir o valor de h .

Os dados são então plotados com o limite de controle h usando a equação:

$$S_m = \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - k)$$

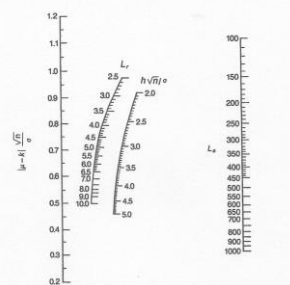
EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

27



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM)



EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

28



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

Os diâmetros de mancal de comando de válvulas coletados ao longo do tempo que tinham um alvo de especificação de 50.

Sequência	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Diametro	50	51	50.5	49	50	43	42	45	47	49
Sequência	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Diametro	46	50	52	52.5	51	52	50	49	54	51
Sequência	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Diametro	52	46	42	43	45	46	42	44	43	46
Sequência	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Diametro	42	43	42	45	49	50	51	52	54	51
Sequência	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Diametro	49	50	49.5	51	50	52	50	48	49.5	49

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

29



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

Para CUSUM Unilateral

Os valores de h e k usados pelo **minitab** foram $k=0,5$ ("folga"), e

$h=4$ ("intervalo de decisão")

Já Montgomery, sugere para:

$$k = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

e, para $h = 5\sigma$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquella

30



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

Os limites das cartas CUSUM por intervalo de decisão, são os CUSUMS unilaterais inferior e superior, e são assim calculados:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - k) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Já o programa minitab, calcula o limite inferior como:

$$C_i^- = \min [0, x_i - \mu_0 + k + C_{i-1}^-]$$



Carta da Soma Cumulativa (CUSUM) Exemplo

Mostrar exemplo no excel