Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Sam Sales é o gerente de vendas e Pete Production o gerente de produção da Grommets Incorporated. Um dia, Sam entra no escritório de Pete e diz: "Adivinha Pete, vendemos mais 50 mil caixas de ilhós na semana passada do que previmos! Vamos colocar a previsão da próxima semana em 50.000". Mas Pete é mais cauteloso. Ele sabe que, por um lado, se ele produz muito, será sobrecarregado com um grande inventário, mas, por outro lado, se produzir muito pouco ele pode não conseguir atender a maiores demandas de vendas, caso elas se desenvolvam.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Então, Pete diz, "Sam, nós dois sabemos por experiência que as vendas flutuam para cima e para baixo, e são muito influenciadas pelo acaso. Eu sempre desconto 60% da diferença entre o que nós prevemos e o que nós realmente conseguimos. Portanto, neste caso, vamos descontar 60% das 50.000 caixas extras e aumentar a previsão em apenas 20.000 em vez de 50.000". A primeira vista, a regra de previsão de Pete parece simples demais para ser de muito interesse, mas na verdade, é mais sofisticada do que parece.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Suponha que na semana passada (t-1semana digamos) você tivesse previsto vendas para esta t -1semana como $\hat{Y}_t$. Agora, quando a t ésima observação, Y_t, realmente ocorrer, ela diferiria um pouco do previsto $\hat{Y}_t$. Então, de acordo com a regra de Pete, para obter a próxima previsão $\hat{Y}_{t+1}$, você deve descontar 60% da discrepância observada Y_t-$\hat{Y}_t$, e ajusta usando somente 40% dessa discrepância. Assim, a quantidade pela qual você deve ajustar a previsão para a próxima semana seria:

$$\hat{Y}_{t+1} - \hat{Y}_t = 0{,}4(Y_t - \hat{Y}_t)$$

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

$\hat{Y}_{t+1} - \hat{Y}_t = 0{,}4(Y_t - \hat{Y}_t)$, que simplificando, torna-se

$$\boldsymbol{\hat{Y}_{t+1} = 0{,}4Y_t + 0{,}6\hat{Y}_t}$$

De onde se conclui que a nova previsão é uma interpolação linear entre o novo valor de Y_t e o velho valor previsto $\hat{Y}_t$.

Pete tinha redescoberto a Previsão Exponencial!

Agora se você usou a regra de Pete, na semana t-1 você teria feito a previsão:

$$\boldsymbol{\hat{Y}_t = 0{,}4Y_t + 0{,}6\hat{Y}_{t-1}}$$

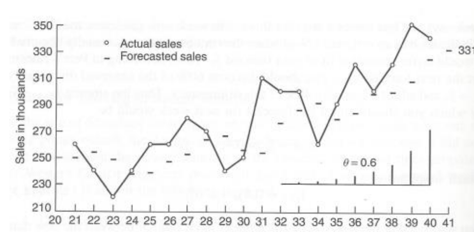
Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Substituindo recorrentemente nas equações precedentes:

$$\boldsymbol{\hat{Y}_{t+1} = 0{,}4(Y_t + 0{,}6Y_{t-1} + 0{,}6^2Y_{t-2} + 0{,}6^3Y_{t-3} + \cdots)}$$

A regra de Pete é equivalente a uma previsão $\boldsymbol{\hat{Y}_{t+1}}$ de Y_{t+1} por uma média ponderada de dados passados com cada um dos coeficientes de ponderação 0, 400, 0,240, 0,144,, etc., sendo 0,6 vezes o valor anterior.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)



Grommet sales in thousands of boxes with forecast sales.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

A quantidade 0,6 é chamada de *constante de suavização* ou *fator de desconto.*

A regra de Pete é idêntica a chamada media móvel exponencialmente ponderada, MMEP, (EWMA em Inglês) de dados passados com fator de desconto 0,6

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada

O modelo de Shewhart para o gerenciamento de controle pressupõe que a média é constante. Além disso, os erros devem ser normais, independentes com média zero e variância constante. Em muitas aplicações, essa suposição não é verdadeira.

As técnicas de média móvel exponencialmente, MMEP (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) oferecem uma alternativa que se baseia na suavização exponencial, também chamada suavização geométrica ponderada.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

O cálculo da MMEP como filtro é feito tomando a média ponderada de observações passadas com pesos progressivamente menores ao longo do tempo.

A MMEP tem flexibilidade de computação através da seleção de um fator de peso, usando esse fator para alcançar o equilíbrio entre dados mais antigos e observações mais recentes.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Considere uma sequência de observações Y1, Y2, Y3, ... Yt. OS dados poderiam ser examinados usando vários procedimentos com diferenças notáveis

1. Shewhart - sem ponderação de dados anteriores;
2. CUSUM - pesos iguais para dados anteriores;
3. Media móvel – pesos, por exemplo, para as 5 respostas mais recentes igualmente como uma média.
4. MMEP – Peso mais alto para a amostra mais recente e exponencialmente decrescentes para amostras anteriores.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Uma MMEP é retrospectiva quando plotado nas condições do modelo Shewhart. Suaviza o rastreamento do tempo, reduzindo o papel do ruído, que pode oferecer uma visão sobre qual o nível do processo, o que pode ser útil na identificação de causas especiais.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Para o modelo Shewhart, a média e a variância são constantes e independentes.

Também com o modelo Shewhart, a previsão para a próxima observação, ou a média das observações, é a linha central do gráfico (η_0 ou μ_0).

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Matematicamente para 0<λ<1pode-se expressar a MMEP como:

$$MMEP = \hat{Y}_{s,t} = \lambda Y_t + \theta \hat{Y}_{s,t-1}$$

Em que, θ=(1-λ), o que quer dizer:

A um tempo t o valor suavizado da resposta é igual ao múltiplo de λ vezes a observação de hoje mais θ vezes o valor suavizado de ontem.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Um modelo mais típico empregado no gràfico MMEP é:

$$MMEP = \hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \lambda e_t \quad \text{em que:}$$

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

O que quer dizer:

O valor predito para amanhã é igual ao valor predito de hoje mais um "parâmetro de profundidade da memória", λ, vezes a diferença entre a valor observado e o valor predito do dia corrente.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

λ é uma constante que varia entre zero e um,

$$0 < \lambda < 1$$

A primeira amostra, em t=1, é o alvo do processo.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

A determinação de λ é muito importante, e 1-λ é chamado de constante de suavisação (Smoothing constant) ou fator de desconto.

Será apresentado um método para esta determinação, de modo que a variabilidade do processo seja minima, após o uso da MMEP

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Os limites de controle para a carta MMEP são dados por:

$$\pm 3\sigma = \sqrt{\lambda/(2-\lambda)}\,[\pm 3\sigma_{Shewhart}$$

Ou ainda:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$$

$$IC = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$$

O uso destes limites pressupõe que o gráfico de controle está rodando por vários períodos de tempo, e que, estes limites são aproximações dos valores de estado estacionário.

Carta de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP, EWMA)

Exemplo do Forest

Bibliografia

Montgomery, D.C. Controle Estatístico da Qualidade. 7e. Rio de Janeiro LTC, 2016,

Forrest Breyfogle III. Implementing six sigma: smart solutions Using Statistical Methods, 2003.

Montgomery, D.C. Introduction to Statistical quality Control. 2001.