



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Projetos fatoriais fracionados em dois níveis, DOE 2^{k-p}

Quando se suspeita que 5 ou mais variáveis possam influenciar o fenômeno em questão, a série experimental (que cresce geometricamente) torna-se impossível de ser conduzida por razões de custos experimentais e disponibilidade de tempo.



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Projetos fatoriais fracionados em dois níveis, DOE 2^{k-p}

Além disso, a série completa traria informações que poderiam não apresentar interesse prático, como interações de quatro fatores em diante.

Por esta razão, é recomendado o uso de planejamento fatorial fracionado



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Projetos fatoriais fracionados em dois níveis, DOE 2^{k-p}

Além disso, a série completa traria informações que poderiam não apresentar interesse prático, como interações de quatro fatores em diante.

Por esta razão, é recomendado o uso de planejamento fatorial fracionado



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Projetos fatoriais fracionados em dois níveis, DOE 2^{k-p}

Em sua forma saturada (quando todas as observações são usadas na estimativa da média e dos efeitos principais) eles são empregados na seleção de variáveis independentes (fatores, variáveis de processo, variáveis de entrada).

Existem várias categorias de projetos fracionados: os projetos em dois níveis, os projetos em 3 ou mais níveis, os projetos mistos, e assim por diante.



Compreendendo um projeto Fracionado em dois níveis

Projetos fatoriais fracionados em dois níveis, DOE 2^{k-p}

Aqui, a ênfase será dada aos projetos fatoriais fracionados em dois níveis como o grande mensageiro de informações para desdobramentos futuros.

Estes planejamentos têm a capacidade de fornecer informações preciosas para a compreensão de problemas específicos.



Compreendendo um projeto Fracionado em dois níveis

A construção

Box, Hunter, W e Hunter, J. (1978) falam da redundância que um planejamento completo com 7 ($2^7=128$ ensaios) variáveis, avaliando quais ele deveria selecionar para serem estimadas, e questionando sobre a importância de cada uma das 128 estatísticas.

Por exemplo, o que as interações de 4 fatores em diante poderiam trazer de benefício ao estudo?



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

Se fossem realizados os 128 ensaios, e os valores desses 127 efeitos (1 grau de liberdade é consumido para a estimativa da média) fossem representados graficamente em escala de probabilidade normal, provavelmente 3, 4 ou 5 efeitos seriam considerados importantes. O que fazer com os 122 efeitos restantes?

Eles teriam dimensões tão próximas do erro que não apresentariam interesse prático.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

7



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

Nos projetos fracionados, as informações julgadas a priori como não importantes, irão ser estimadas junto com as eleitas (as de maior interesse). Esses contrastes são denominados de "alias", e neles dois ou mais efeitos são representados pela mesma comparação (diferentes nomes para o mesmo efeito computado).

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

8



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

As "alias" consideradas significativas são interpretadas pelo princípio da hierarquia dos efeitos. Desta forma a atribui-se, em princípio, a significância ao efeito de mais alta ordem. Portanto, pode-se considerar que interações de terceira ordem em diante são negligenciadas.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

9



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

As "alias" consideradas significativas são interpretadas pelo princípio da hierarquia dos efeitos. Portanto, pode-se considerar que interações de terceira ordem em diante são negligenciadas.

		Interações					
	efeitos	2-	3-	4-	5-	6-	7-
média	principais	fatores	fatores	fatores	fatores	fatores	fatores
1	7	21	35	35	21	7	1

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

10



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

O desdobramento do efeito aqui apresentado indica que é desnecessário, em uma investigação preliminar, estimar tantas quantidades sendo que apenas poucas sejam selecionadas

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

11



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A fração 1/2

da fração 1/2 de um planejamento fatorial 2^5 (série completa constituída por 32 observações), cuja fração 1/2 é 2^{5-1} , isto é, .

Neste caso a série completa seria constituída de:

		interações			
	efeitos				
média	principais	2-fatores	3-fatores	4-fatores	5-fatores
1	5	10	10	5	1

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

12



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

O roteiro, para esta construção

1. construir matriz de sinais – e +, também conhecida como matriz de contrastes, do projeto básico 2⁴. Este planejamento tem 4 colunas de sinais correspondentes as variáveis, A, B, C e D (notação usada nos programas estatísticos);
2. definir a coluna de sinais – e + correspondente a quinta variável, E, a partir das colunas de sinais do projeto básico, multiplicando-se os sinais das colunas algebricamente;
3. a coluna 5 neste caso tem exatamente a sequência de sinais da coluna ABCD, por exemplo.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

13



	projeto					interações de dois fatores									
	A	B	C	D	E	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
17	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
3	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+
20	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	-
5	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
22	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-
23	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-
8	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
9	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-
26	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+
27	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
12	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
29	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
14	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
15	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-
32	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

14



Relação entre os pares de colunas

Padrão de confundimentos
“(confounding)”

A = BCDE	$\ell_A \rightarrow A + BCDE$
B = ACDE	$\ell_B \rightarrow B + ACDE$
C = ABDE	$\ell_C \rightarrow C + ABDE$
D = ABCE	$\ell_D \rightarrow D + ABCE$
E = ABCD	$\ell_E \rightarrow E + ABCD$
AB = CDE	$\ell_{AB} \rightarrow AB + BCDE$
AC = BDE	$\ell_{AC} \rightarrow AC + CDE$
AD = BCE	$\ell_{AD} \rightarrow AD + BCE$
AE = BCD	$\ell_{AE} \rightarrow AE + BCD$
BC = ADE	$\ell_{BC} \rightarrow BC + ADE$
BD = ACE	$\ell_{BD} \rightarrow BD + ACE$
BE = ACD	$\ell_{BE} \rightarrow BE + ACD$
CD = ABE	$\ell_{CD} \rightarrow CD + ABE$
CE = ABD	$\ell_{CE} \rightarrow CE + ABD$
DE = ABC	$\ell_{DE} \rightarrow DE + ABC$

EPI

(I=ABCDE)

15



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Para construir um planejamento desta natureza de uma forma mais concisa é comum usar a notação apresentada na próxima transparência

Atenção!!!

A partir deste princípio pode se construir qualquer projeto fracionado. Lembrando que não se deve definir as colunas arbitrariamente, isto é, nunca gerar “alias” ou “confounding” de um efeito principal com outro efeito principal. Porque na hierarquia de efeitos eles seriam potencialmente os mais importantes.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

16



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

A construção

1. cada coluna de sinais – e + pode ser representada por uma ou mais letras maiúsculas, como já foi apresentado no início deste item. Assim, a variável 2 pode ser representada por B e a interação das quatro primeiras variáveis, ABCD;
2. nas operações entre colunas de sinais qualquer coluna multiplicada por ela mesma gera uma coluna de sinais +, aqui identificada como matriz coluna identidade I. Isto é: $A \times A = A^2 = I$. A identidade I é usada como elemento neutro da multiplicação de colunas. Ou seja, $A \times I = A$, $AB \times I = AB$ e assim por diante.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

17



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

O complemento da fração 1/2

A série completa de ensaios foi substituída por um projeto alternativo, com 16 ensaios, que será capaz de fornecer informações preciosas, já que os efeitos principais só seriam confundidos com interações de 4 fatores, que podem ser desprezadas sem risco para as conclusões sobre o estudo.

O número da primeira coluna da matriz de sinais corresponde ao ensaio na ordem padrão do projeto 2⁵

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

18



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

O complemento da fração $\frac{1}{2}$

Agora surge uma nova questão: o que os outros 16 ensaios fariam se fossem eles os eleitos? Como seria a geração da quinta variável? Ela poderia ser gerada por $E = -ABCD$. Então quinta coluna fica com a sequência de sinais dos 16 experimentos restantes, isto é, a fração complementar. Neste caso, a matriz Identidade seria: $I = -ABCDE$, e os modelos confundidos seriam os apresentados no slide a seguir

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

19

Relação entre os pares de colunas	Padrão de confundimentos “(confounding)”
A = - BCDE	$\ell'_A \rightarrow A - BCDE$
B = - ACDE	$\ell'_B \rightarrow B - ACDE$
C = - ABDE	$\ell'_C \rightarrow C - ABDE$
D = - ABCE	$\ell'_D \rightarrow D - ABCE$
E = - ABCD	$\ell'_E \rightarrow E - ABCD$
AB = - CDE	$\ell'_{AB} \rightarrow AB - BCDE$
AC = - BDE	$\ell'_{AC} \rightarrow AC - CDE$
AD = - BCE	$\ell'_{AD} \rightarrow AD - BCE$
AE = - BCD	$\ell'_{AE} \rightarrow AE - BCD$
BC = - ADE	$\ell'_{BC} \rightarrow BC - ADE$
BD = - ACE	$\ell'_{BD} \rightarrow BD - ACE$
BE = - ACD	$\ell'_{BE} \rightarrow BE - ACD$
CD = - ABE	$\ell'_{CD} \rightarrow CD - ABE$
CE = - ABD	$\ell'_{CE} \rightarrow CE - ABD$
DE = - ABC	$\ell'_{DE} \rightarrow DE - ABC$

EPI

(I=ABCDE)



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

O complemento da fração $\frac{1}{2}$

Os efeitos, estimados com os contrastes da fração complementar, seriam muito parecido com os do da fração anterior, porque certamente as interações de 3, 4 e 5 fatores teriam valores negligenciáveis.

A combinação das duas frações gera o projeto completo por meio dos contrastes ℓ e ℓ' , como é mostrado a seguir:

$$\frac{1}{2}(\ell_A + \ell'_A) = \frac{1}{2}[(A + BCDE) + (A - BCDE)] = \frac{1}{2} \times 2A = A$$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

21



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

O complemento da fração $\frac{1}{2}$

É possível reconstruir novamente um projeto a partir da composição das frações até chegar ao projeto completo.

É claro que isso traz alguns inconvenientes, porque cada fração pode funcionar como um bloco de experimentos, o que pode trazer algum efeito indesejável.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

22



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Resolução de um projeto fatorial fracionado

Existe um critério básico usado nos projetos fracionados chamado de **resolução do projeto**. Seria semelhante a se fazer uma análise cromatográfica na qual alguns componentes da mistura analisadas tivessem tempo de retenção na coluna cromatográfica muito próximos. O que aconteceria com os picos destes dois componentes?

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

23



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Resolução de um projeto fatorial fracionado

O analista não saberia discernir qual o teor de cada componente. Ele, na realidade, encontraria um teor que corresponderia a soma dos teores individuais de cada um deles. Esta mesma comparação pode ser usada para os projetos fracionados.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taguella

24



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Resolução de um projeto fatorial fracionado

Para evitar estas impropriedades usa-se o conceito de resolução mencionado. A resolução escolhida para a construção do projeto deve levar em conta, principalmente, o custo e o tempo gastos na experimentação.

Usam-se basicamente três tipos de resolução, assim designadas R-III, R-IV e R-V ou R-V₊.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

25



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Resolução de um projeto fatorial fracionado

1. Um projeto que tem Resolução III não confunde efeito principal com outro, mas confunde efeitos principais com interações de dois fatores;
2. Um projeto que tem resolução IV não confunde efeitos principais com interações de dois fatores, mas confunde interações de dois fatores com outras interações de dois fatores.
- 3 Um projeto que tem resolução V não confunde efeitos principais nem interações de dois fatores umas com as outras, mas confunde interações de dois fatores com interações de três fatores e assim por diante.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

26



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Notação do projeto fatorial fracionado incluindo a Resolução

O projeto fracionado que estuda 5 variáveis com 16 ensaios, isto é, 2^{5-1} (fração $\frac{1}{2}$ do 2^5) é representado incluindo a sua resolução com: 2^{5-1}_V

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

27



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Outra definição para Resolução

Os padrões ou modelos confundidos (*confounding pattern*) são escritos a partir da relação completa de definição, que também é conhecida como “*palavras*”, expressa a partir do(s) gerador(es) do projeto.

O tamanho da menor *palavra* da definição completa do projeto, também identifica a resolução do projeto.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

28



Compreendendo um projeto fracionado em dois níveis

Outra definição para Resolução

No caso da fração $\frac{1}{2}$ a relação completa de definição tem apenas uma identidade (uma única *palavra* com 5 caracteres, I=ABCDE), ele é um projeto fracionado com resolução V.

Pela outra definição de resolução, a resolução V, isto é, efeitos principais são confundidos com interações de 4 fatores e interações de dois fatores com interação de três, chega-se a mesma conclusão da definição de resolução pelo tamanho da menor *palavra*.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

29



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo da bicicleta

Um projeto com resolução III: O Exemplo da bicicleta.

Os experimentos foram realizados em ordem aleatória em 8 dias sucessivos:

Variáveis independentes envolvidas:

- ❖ sela,
- ❖ dínamo,
- ❖ guidão,
- ❖ marcha,
- ❖ capa de chuva,
- ❖ café da manhã,
- ❖ pneus.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquedá

30



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo da bicicleta

Tabela apresentando a matriz de ensaios da fração 1/16 do projeto completo 2^7 (total de 8 ensaios)

($I = 124, I = 135, I = 236, I = 1237$)

ensaio	sela alta/ baixa 1	dinamo desli/ ligado 2	guidão p.cima/ p.baixo 3	marcha baixa/ média 4	c.chuva sim/não 5	café sim/não 6	pneus cheio/ suave 7	tempo de subida
1	-	-	-	+	+	+	-	69
2	+	-	-	-	+	+	+	52
3	-	+	-	-	-	+	+	60
4	+	+	-	+	-	-	-	83
5	-	-	+	-	-	+	+	71
6	+	-	+	-	+	-	-	50
7	-	+	+	-	-	+	-	59
8	+	+	+	+	+	+	+	88

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

31



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo da bicicleta

Tabela de contrastes e efeitos confundidos para o exemplo da bicicleta

sela	$\ell_1 = 3,5 \rightarrow 1 + 24 + 35 + 67$
dinamo	$\ell_2 = 12,0 \rightarrow 2 + 14 + 36 + 57$
guidão	$\ell_3 = 1,0 \rightarrow 3 + 15 + 26 + 47$
marcha	$\ell_4 = 22,5 \rightarrow 4 + 12 + 56 + 37$
capa de chuva	$\ell_5 = 0,5 \rightarrow 5 + 13 + 46 + 27$
café da manhã	$\ell_6 = 1,0 \rightarrow 6 + 23 + 45 + 17$
pneus	$\ell_7 = 2,5 \rightarrow 7 + 34 + 25 + 16$
	$\ell_1 = 66,5$ (média)

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

32



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo da bicicleta

Conclusões:

1. Apenas os contrastes 2 e 4 apresentaram efeitos significantes, embora o contraste I_1 também apresentou valor levemente significativo, que mais parece em decorrência da interação 24;
2. As variáveis mais importantes do experimento são: a MARCHA e o DÍNAMO

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

33



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo da bicicleta

3. Uma outra saída para eliminar dúvidas em relação a significância dos efeitos, poderíamos realizar outra fração com uma orientação bem definida, capaz de resolver as ambigüidades que podem surgir com respeito às variáveis 2 e 4 e às interações de dois fatores que elas tomam parte;
4. Para isso o projeto mais conveniente teria a capacidade de separar o efeito da variável 4 e suas interações de dois fatores.

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

34



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo a bicicleta

Tabela apresentando a matriz de ensaios da fração 1/16 do projeto completo 2^7 (total de 8 ensaios), que isola a variável 4.

($I = -124, I = 135, I = 236, I = 1237$)

ensaio	sela alta/ baixa 1	dinamo desli/ ligado 2	guidão p.cima/ p.baixo 3	marcha baixa/ média 4	c.chuva sim/não 5	café sim/não 6	pneus cheio/ suave 7	tempo de subida
1	-	-	-	-	+	+	-	47
2	+	-	-	+	-	+	+	74
3	-	+	-	-	+	-	+	84
4	+	+	-	-	-	-	-	62
5	-	-	+	-	-	+	+	53
6	+	-	+	+	+	-	-	78
7	-	+	+	+	-	+	-	87
8	+	+	+	-	+	+	+	60

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

35



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo a bicicleta

Tabela de contrastes e efeitos confundidos para o segundo projeto do exemplo da bicicleta

sela	$\ell'_1 = 0,8 \rightarrow 1 - 24 + 35 + 67$
dinamo	$\ell'_2 = 10,2 \rightarrow 2 - 14 + 36 + 57$
guidão	$\ell'_3 = 2,7 \rightarrow 3 + 15 + 26 - 47$
marcha	$\ell'_4 = 25,2 \rightarrow 4 - 12 - 56 - 37$ (i.e., $\ell'_4 = -25,2 \rightarrow -4 + 12 + 56 + 37$)
capa de chuva	$\ell'_5 = -1,7 \rightarrow 5 + 13 - 46 + 27$
café da manhã	$\ell'_6 = 2,2 \rightarrow 6 + 23 - 45 + 17$
pneus	$\ell'_7 = -0,7 \rightarrow 7 - 34 + 25 + 16$

EPUSP/2018 - E. A. aos Processos Industriais

M. E. S. Taquela

36



Um projeto fracionário saturado, DOE 2^{k-p} , o exemplo a bicicleta

Análise do projeto com as 16 corridas, combinando as duas frações, para o exemplo da bicicleta

sela	$\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell'_1) = \frac{1}{2}(3,5 + 0,8) = 2,2 \rightarrow 1 + 35 + 67$
dinamo	$\frac{1}{2}(\ell_2 + \ell'_2) = \frac{1}{2}(12,0 + 10,2) = 11,1 \rightarrow 2 + 36 + 57$
guidão	$\frac{1}{2}(\ell_3 + \ell'_3) = \frac{1}{2}(1,0 + 2,7) = 1,9 \rightarrow 3 + 15 + 26$
marcha	$\frac{1}{2}(\ell_4 + \ell'_4) = \frac{1}{2}(22,5 + 25,2) = 23,9 \rightarrow 4$
capa de chuva	$\frac{1}{2}(\ell_5 + \ell'_5) = \frac{1}{2}(0,5 - 1,7) = -0,6 \rightarrow 5 + 13 + 27$
café da manhã	$\frac{1}{2}(\ell_6 + \ell'_6) = \frac{1}{2}(1,0 + 2,2) = 1,8 \rightarrow 6 + 23 + 17$
pneus	$\frac{1}{2}(\ell_7 + \ell'_7) = \frac{1}{2}(2,5 - 0,7) = 0,9 \rightarrow 7 + 25 + 16$
	$\frac{1}{2}(\ell_1 - \ell'_1) = \frac{1}{2}(3,5 - 0,8) = 1,3 \rightarrow 24$
	$\frac{1}{2}(\ell_2 - \ell'_2) = \frac{1}{2}(12,0 - 10,2) = 0,9 \rightarrow 14$
	$\frac{1}{2}(\ell_3 - \ell'_3) = \frac{1}{2}(1,0 - 2,7) = -0,9 \rightarrow 47$
	$\frac{1}{2}(\ell_4 - \ell'_4) = \frac{1}{2}(22,5 - 25,2) = -1,4 \rightarrow 12 + 56 + 37$
	$\frac{1}{2}(\ell_5 - \ell'_5) = \frac{1}{2}(0,5 + 1,7) = 1,1 \rightarrow 46$
	$\frac{1}{2}(\ell_6 - \ell'_6) = \frac{1}{2}(1,0 - 2,2) = -0,6 \rightarrow 45$
	$\frac{1}{2}(\ell_7 - \ell'_7) = \frac{1}{2}(2,5 + 0,7) = 1,6 \rightarrow 34$