

# Trabalho Prático 2 - Ant Colony Optimization

Vitor Rodarte Ricoy - 2019007112<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)  
Belo Horizonte – MG – Brazil

vitorricoy@ufmg.br

**Resumo.** Trabalho Prático da disciplina de Computação Natural do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais. O trabalho consiste em implementar um Algoritmo de Ant Colony Optimization para resolver o problema do caminho simples mais longo em um grafo.

## 1. Introdução

O trabalho proposto é a implementação de um algoritmo de otimização de colônia de formigas para resolver o problema de caminho simples mais longo em um grafo, com o objetivo de praticar os conceitos aprendidos sobre o assunto em sala de aula.

Para o desenvolvimento do trabalho foram disponibilizados três grafos distintos, sendo que em dois deles o valor do caminho ótimo é conhecido. Com isso, foi desenvolvido um programa que executa um algoritmo de Ant Colony Optimization para resolver o problema do caminho simples mais longo em um grafo qualquer.

Por fim, foram executados experimentos para analisar a parametrização do programa de acordo com cada entrada fornecida para o problema. Para cada grafo foram analisados os parâmetros ótimos.

## 2. Implementação

A implementação do programa foi feita em C++11, utilizando a biblioteca pthreads, e os experimentos foram realizados em um sistema operacional Linux Ubuntu 20.04. A seguir serão descritos diversos aspectos do código desenvolvido e de decisões tomadas.

### 2.1. Organização do Código

O código está contido em apenas um arquivo fonte: “main.cpp”. Devido à possibilidade de se criar as estruturas de dados necessárias (matrizes e uma lista de adjacência) com apenas tipos padrões do C++, foi possível manter o código mais simples e, portanto, não foi necessária uma organização do código em classes.

### 2.2. Leitura da Entrada

A entrada é lida por meio dos arquivos fornecidos com o enunciado do trabalho. Para cada linha do arquivo de entrada é preenchida uma entrada da matriz de adjacência, indicando a aresta representada pela linha do arquivo, assim como também é adicionada uma entrada na lista de adjacência, representando a mesma aresta.

Foram mantidas as duas estruturas para representar um grafo, pois a matriz de adjacência torna o cálculo do peso total de um caminho mais barato, ao permitir acessar em tempo constante o custo de uma aresta, dado os seus dois vértices. Já a lista de

adjacência permite iterar pelos vizinhos de um vértice com um custo menor, ao permitir que essa iteração seja feita diretamente, sem verificações adicionais.

Também vale notar que as arestas que indicam um laço, ou seja, arestas em que o vértice de entrada e saída são os mesmos, são ignoradas. Isso é feito para simplificar a entrada, já que essas arestas nunca podem ser utilizadas em um caminho simples, pois nesse tipo de caminho nenhum vértice é visitado mais de uma vez.

### **2.3. Execução do Algoritmo**

A execução do algoritmo foi separada em uma função independente “executarAlgoritmo”. Isso foi feito para permitir a experimentação, possibilitando que a função principal do programa execute o algoritmo um determinado número de vezes. A execução ocorre basicamente com os passos: inicializa a matriz de feromônios, executa o laço de iterações do ACO e retorna a melhor solução dentre todos os caminhamentos das formigas.

#### **2.3.1. Inicialização da Matriz de Feromônios**

Como foi utilizado o método Max-Min para atualizar os feromônios, a matriz de feromônios é inicializada com o valor máximo do feromônio, para favorecer a exploração no início do algoritmo.

#### **2.3.2. Laço de Iterações do ACO**

Cada iteração do ACO consiste em simular o caminhamento de  $n$  formigas, sendo  $n$  o número total de formigas, e em seguida atualizar a matriz de feromônios. Vale notar que a simulação do caminhamento das formigas é feita paralelamente, para que se tenha uma melhor performance.

#### **2.3.3. Caminhamento de Uma Formiga**

O caminhamento de uma formiga é implementado na função “caminharFormiga”, que é paralelizada. Para implementar a limitação de se começar no nó 1 e terminar no nó  $N$ , sendo  $N$  o número de nós do grafo, foi considerado para essa simulação o subgrafo que não contém os vértices 1 e  $N$ .

A função inicia escolhendo um nó aleatório do subgrafo, que seja vizinho do nó 1 no grafo original, para a formiga iniciar seu caminhamento. A partir disso, é feita uma simulação em que a formiga verifica quais nós ainda não visitados ela pode alcançar a partir do nó em que ela está no momento.

Para cada um desses nós é atribuído um peso à aresta  $i$  que liga o vértice atual a eles, igual a  $f_i^\alpha * p_i^\beta$ , sendo  $p_i$  o peso da aresta  $i$ ,  $f_i$  a sua quantidade de feromônios e  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros do algoritmo. Assim, o valor utilizado para a desirability é o peso da aresta  $i$ .

Esses pesos das arestas são normalizados e passam a representar a probabilidade da formiga escolher passar por essa aresta. Ou seja, a formiga escolhe determinada aresta

com a probabilidade  $\frac{f_i^\alpha * p_i^\beta}{\sum_j f_j^\alpha * p_j^\beta}$ , sendo  $A$  o conjunto de arestas no subgrafo que possuem o nó atual da formiga como nó de entrada e um nó de saída que ainda não foi visitado. Ao escolher qual aresta será caminhada, o nó de destino da aresta passa a ser o nó atual e essa escolha é registrada.

Quando a formiga não possui mais opções de arestas para caminhar a partir do seu nó atual, ou seja, quando ela já visitou todos os vizinhos do seu nó atual ou quando o seu nó atual não possui vizinhos, a simulação de caminhamento é encerrada.

Ao encerrar a simulação, o caminho entre os nós 1 e  $N$  no grafo original é construído a partir desse caminho gerado para o subgrafo. Para isso, primeiramente o nó 1 é inserido no caminho. Como o nó inicial da simulação é escolhido dentre os vizinho de 1, essa conexão é válida.

Após isso, é verificado se o último nó do caminho possui uma aresta para  $N$ . Caso possua,  $N$  é inserido no final do caminho. Caso não possua, o nó é removido do caminho e essa verificação é realizada novamente para o novo último nó. Caso nenhum nó do caminho possua uma aresta para  $N$ , ou seja, caso o caminho se torne vazio após executar os passos descritos, a solução é considerada inválida, tem um custo 0 associado a ela e a estatística de solução inválida é registrada.

Após construir o caminho entre 1 e  $N$ , é calculado o custo desse caminho e, caso esse custo seja o melhor custo da iteração atual, o caminho e o custo são salvos em uma variável global de melhor caminho da iteração.

#### 2.3.4. Atualização da Matriz de Feromônios

Utilizando-se da informação do melhor custo encontrado durante a iteração, os feromônios são atualizados. Caso a aresta da matriz de feromônios pertença ao caminho percorrido pela melhor formiga da iteração, o seu novo valor passa a ser  $f_{i+1} = f_i * (1 - ev) + (1 - \frac{1}{c})$ , sendo  $f_i$  a quantidade de feromônios da aresta  $i$ ,  $ev$  o parâmetro de taxa de evaporação dos feromônios e  $c$  o custo do caminho da melhor formiga da iteração. Caso a aresta não pertença ao caminho, o seu valor passa a ser  $f_{i+1} = f_i * (1 - ev)$ .

Com isso, podemos ver que quanto maior o caminho encontrado, maior é o valor do feromônio depositado. Vale observar que o caminho utilizado para atualizar os feromônios é o caminho construído pela formiga entre 1 e  $N$ .

Foi usado o método de atualização do feromônio Max-Min, com o  $t_{max} = 10$  e  $t_{min} = 0$ . Assim, temos na prática que  $f_{i+1} = \min(f_i * (1 - ev) + (1 - \frac{1}{c}), 10)$ , para as arestas utilizadas no melhor caminho. O valor de  $t_{max}$  foi escolhido devido às arestas nas três entradas terem peso máximo 10.

Também vale lembrar que a formiga utilizada para atualizar os feromônios é a melhor formiga da iteração, e não a melhor formiga desde o princípio.

### **2.3.5. Retorno do Algoritmo**

Por fim, após todas as iterações do ACO, de acordo com o parâmetro de número de iterações, o melhor caminho encontrado, ou seja, o caminho de maior custo encontrado em todas as iterações, é retornado como resposta. Assim, não necessariamente o valor retornado é o valor encontrado pela melhor formiga da última iteração, e sim o valor da melhor formiga dentre todas as formigas de todas as iterações.

### **2.4. Geração de Números Aleatórios**

A geração de números aleatórios foi feita por meio da estrutura “mt19937” do C++. Com ela, são gerados números inteiros e reais aleatórios, utilizados para simular o caminhar de uma formiga. Vale notar que, devido à paralelização, mesmo com seeds idênticas os resultados das execuções podem diferir entre si, devido à preempção do sistema operacional. Mesmo assim, as execuções feitas para testar os parâmetros utilizaram seeds diferentes entre si.

### **2.5. Registro de Estatísticas**

São coletadas as estatísticas da execução logo após cada iteração do ACO. As estatísticas são salvas para cada iteração e indicam: o custo encontrado pela melhor formiga da iteração, os valores da matriz de feromônios após a sua atualização naquela iteração e o número de formigas que encontraram uma solução inválida na iteração. Essas estatísticas são salvas em um arquivo de saída, para cada execução do algoritmo. Vale observar que, para a terceira entrada, foram registradas apenas algumas instâncias da matriz de feromônios, devido ao seu tamanho.

### **2.6. Paralelismo**

A paralelização do algoritmo foi feita por meio da criação de threads para a simulação do caminhar de uma formiga. O acesso aos dados compartilhados do grafo e dos feromônios foi facilitado por todos os dados estarem em vetores somente leitura, portanto não foi necessário o uso de mutex para controlar o acesso a eles.

Os pontos em que foram utilizados um mutex compartilhado foram: o acesso à variável global que indica o maior custo encontrado na iteração e a variável global que indica soluções inválidas. Isso foi feito pois todas as threads potencialmente podem preencher essas variáveis.

## **3. Experimentos**

Primeiramente, vale notar que os gráficos da matriz de feromônios foram movidos para uma seção de anexo no fim do documento. Isso foi feito por esses plots serem facilmente descritos por texto e ocuparem um espaço grande.

### **3.1. Repetições de Execuções**

Para definir o número de repetições de execuções, o programa foi executado para o segundo grafo de entrada, com 20 vértices, e com os parâmetros de 100 formigas, 100 iterações, beta igual a 2, alfa igual a 1 e taxa de evaporação de 0.2.

Número de Repetições	5	10	20	30	50	100	200
Desvio Padrão	2.000	1.435	1.150	1.163	1.148	1.188	1.162
Intervalo de Confiança	[163.2, 168.8]	[165.8, 167.6]	[166.2, 167.2]	[166.0, 166.9]	[166.4, 167.1]	[166.5, 167.0]	[166.6, 166.9]

**Tabela 1. Desvio Padrão e Intervalo de Confiança encontrado para cada número de iterações**

Para cada um desses conjuntos de execuções, foi coletado o desvio padrão e o intervalo de confiança do resultado encontrado. Os dados coletados estão registrados na Tabela 1.

Com esses dados, concluímos que 200 execuções levariam a um teste com um ótimo intervalo de confiança. Entretanto, devido às limitações de tempo de execução, soluções que sejam executadas até 10 vezes possuem um certo grau de assertividade, como demonstrado pelo intervalo de confiança.

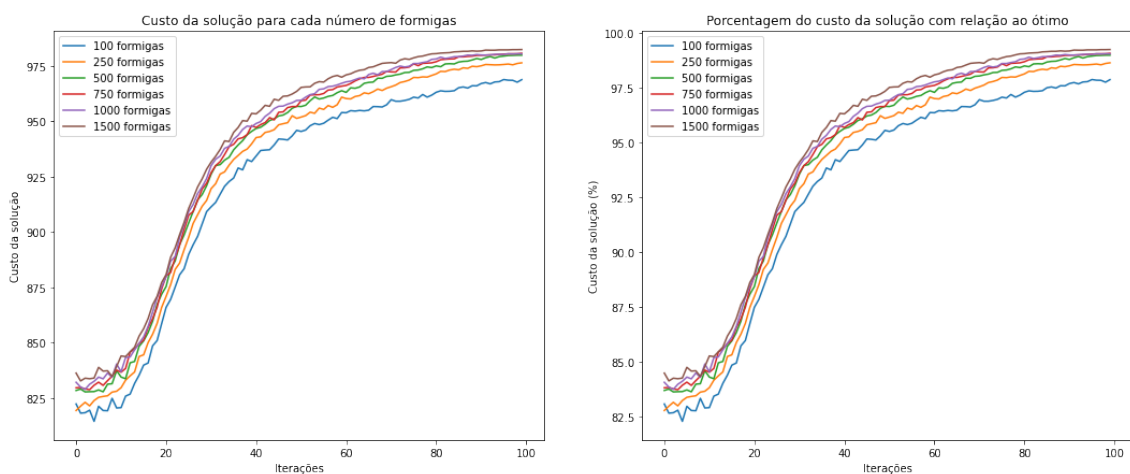
### 3.2. Primeiro Grafo

Primeiramente, vale notar que a análise foi realizada com 20 repetições. Ou seja, todos os valores apresentados são a média dos valores encontrados em 20 execuções do algoritmo.

Vale notar também, que a estatística de soluções inválidas se manteve a mesma para todos os parâmetros: nenhuma solução inválida foi gerada.

#### 3.2.1. Análise da Influência do Número de Formigas

Para analisar a influência do número de formigas foram utilizados os parâmetros de 100 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e taxa de evaporação de 20%. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com 100, 250, 500, 750, 1000 e 1500 formigas.



**Figura 1. Custo da solução para cada número de formigas na primeira entrada**

Número de Formigas	100	250	500	750	1000	1500
Solução Encontrada	968.8	976.4	979.85	980.7	980.45	982.4

**Tabela 2. Soluções encontradas para cada número de formigas na primeira entrada**

Na Figura 1 podemos observar uma tendência de que, quanto mais formigas são utilizadas, melhor é a resposta encontrada. Entretanto, obviamente, o crescimento é menor quanto mais a resposta se aproxima do ótimo. Isso é acarretado por mais formigas implicarem em uma maior exploração, pois mais arestas do grafo são visitadas em seus caminhamentos. Dessa forma, o valor de formiga que traz uma melhor resposta são 1500 formigas.

Já com a Figura 10 podemos observar o comportamento da matriz de feromônios, que se inicia com valores altos, favorecendo a exploração. Em poucas iterações o seu valor começa a diminuir, devido à evaporação, e na faixa das 20 iterações, se tem poucas arestas com valores mais relevantes de feromônio. Por fim, após 100 iterações, os caminhos que geram a melhor solução encontrada são os pontos com valores altos de feromônios, enquanto o restante da matriz tem um valor muito próximo de zero. Vale notar que o número de formigas não parece afetar significativamente o comportamento da matriz.

Esse comportamento da matriz de feromônios indica que se teve uma convergência dos feromônios, pois apenas as poucas arestas interessantes para o problema permanecem com um valor mais afastado de zero.

Por fim, com a Tabela 2 confirmamos a tendência das respostas serem melhores ao se aumentar o número de formigas.

Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro do número de formigas é 1500. Entretanto, devido a limitações de tempo de execução do algoritmo e também devido ao pequeno ganho entre escolher 500 formigas ou 1500, será utilizado a partir daqui o valor de 500 formigas, como o melhor.

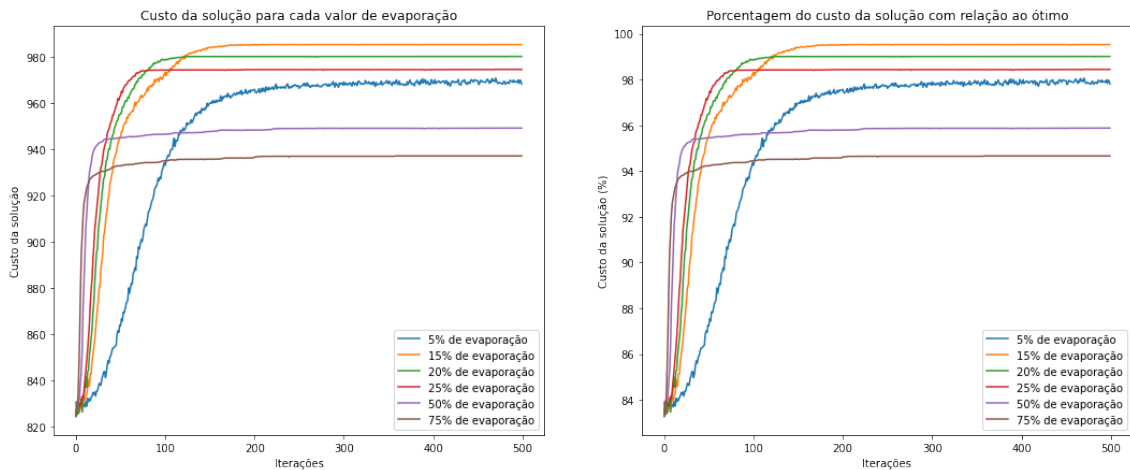
### 3.2.2. Análise da Influência da Taxa de Evaporação

Para analisar a influência da taxa de evaporação foram utilizados os parâmetros de 500 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e 500 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as taxas de evaporação de 5%, 15%, 20%, 25%, 50% e 75%.

Taxa de Evaporação	5%	15%	20%	25%	50%	75%
Solução Encontrada	968.3	985.35	980.2	974.6	949.2	937.15

**Tabela 3. Soluções encontradas para cada taxa de evaporação na primeira entrada**

Na Figura 2 podemos observar que os valores de evaporação de 15%, 20% e 25%,



**Figura 2. Custo da solução para valores de evaporação na primeira entrada**

nessa ordem, geram respostas melhores. Os valores mais altos são os piores, e o valor de 5% chega relativamente próximo ao valor de 25%. Com isso, podemos perceber que o valor ótimo gira em torno de 15%, pois ao diminuir para 5% se tem uma perda de qualidade e ao aumentar para 20% também se tem uma perda.

O melhor desempenho desse parâmetro é um indicativo de que ele traz um equilíbrio melhor aos valores da matriz de feromônios. É evaporado o suficiente para deixar de explorar arestas que não são interessantes, mas não em excesso a ponto de se perder os feromônios em arestas interessantes.

Já com a Figura 11 podemos observar o comportamento da matriz de feromônios, que se inicia com valores altos. Com taxas de evaporação maiores, esse valor da matriz se aproxima de 0 rapidamente, tendo muito poucas arestas com um valor mais alto a partir de 20 iterações. Já com taxas de evaporações menores, a matriz demora mais a convergir para se ter mais arestas com um valor próximo de zero e mantém mais arestas com valores altos de feromônios nas iterações finais.

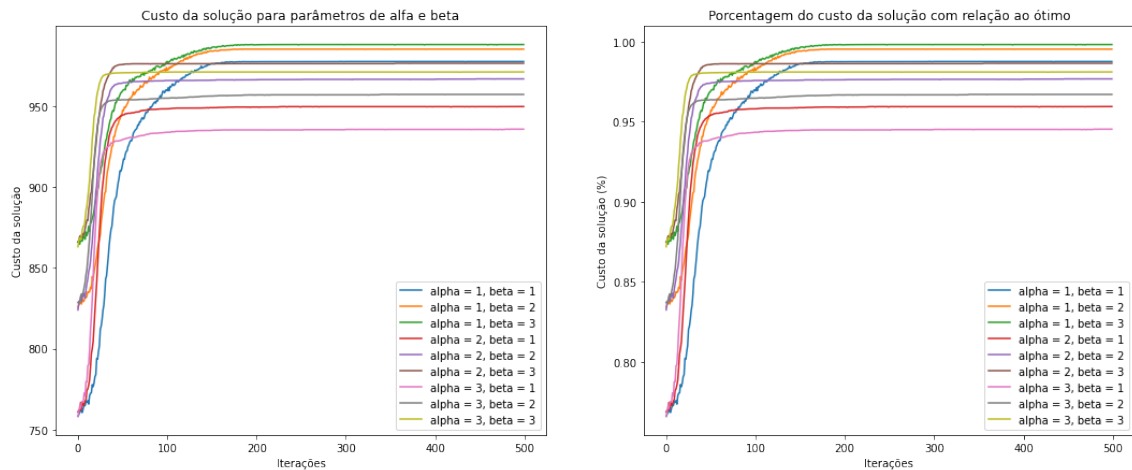
Dessa forma, valores menores de evaporação levam a uma exploração mais extensiva, enquanto valores médios levam a um exploitation a partir das primeiras iterações. Já os valores de evaporação muito altos, como 75%, chegam até a levar a um efeito de exploração, pois a grande maioria das arestas possui o mesmo valor, já que se tem muitas poucas arestas com valores altos.

Por fim, com a Tabela 3 confirmamos a superioridade do parâmetro de 15% para a taxa de evaporação. Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro é de 15% de evaporação.

### 3.2.3. Análise da Influência dos Parâmetros Alfa e Beta

Para analisar a influência dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram utilizados os parâmetros de 500 iterações, evaporação de 15% e 500 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as combinações de  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$  com  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$

Na Figura 3 podemos observar que os valores de  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$  são



**Figura 3. Custo da solução para valores de alfa e beta na primeira entrada**

Alfa - Beta	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
<b>Solução Encontrada</b>	977.6	985.25	988.1	949.75	966.85	976.5	935.75	957.25	971.15

**Tabela 4. Soluções encontradas para cada combinação de alfa e beta na primeira entrada**

consideravelmente melhores, sendo  $\beta = 3$  o melhor deles. Portanto, dar um peso maior ao valor do desirability do que ao valor do feromônio gera resultados melhores, além de se favorecer valores grandes do desirability, devido ao valor maior de  $\beta$ . Também podemos notar que os parâmetros com valores de  $\alpha$  maiores parecem levar a uma convergência mais rápida para um valor pior.

A matriz de feromônios nesse caso se comporta de forma similar aos resultados obtidos no teste do parâmetro do número de formigas.

Por fim, com a Tabela 4 confirmamos a superioridade do parâmetro de  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ . Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor é  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ .

### 3.2.4. Análise do Número de Iterações

Pelos gráficos usados para a análise dos outros parâmetros, podemos observar facilmente que por volta de 200 iterações não se tem uma melhora dos valores encontrados. Dessa forma, podemos considerar como valor ótimo de iterações como 200.

### 3.2.5. Conclusão

Com toda a análise, os parâmetros escolhidos parecem ser os melhores possíveis, considerando a limitação do número de formigas, apresentando bons resultados. Pelos testes, a solução média encontrada foi correspondente a 99.8% da solução ótima do problema. Além disso, não foram observadas gerações de soluções inválidas, portanto esse problema



parece ser desprezível na prática para essa entrada.

Dessa forma, os parâmetros escolhidos para esse grafo são: 500 formigas, 200 iterações, uma taxa de evaporação de 15%,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ .

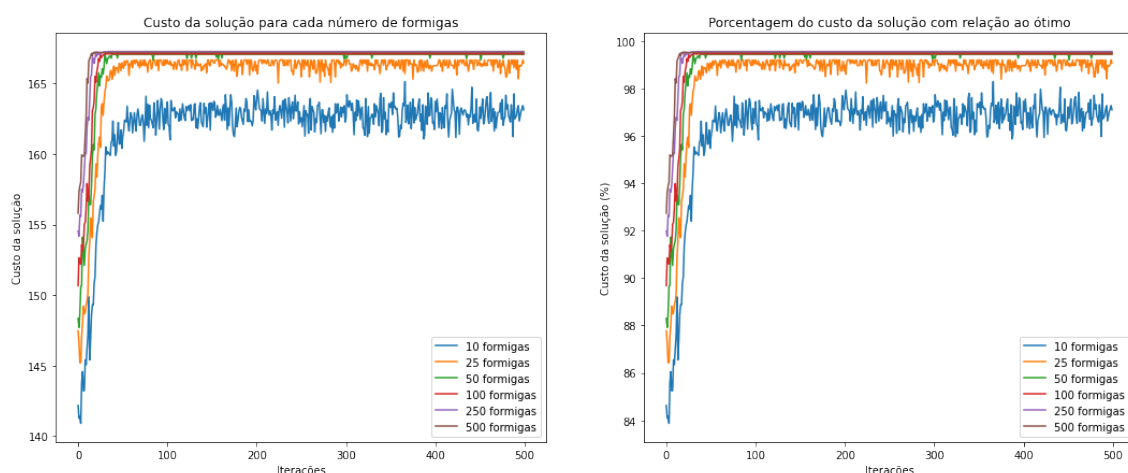
### 3.3. Segundo Grafo

Primeiramente, vale notar que a análise foi realizada com 30 repetições. Ou seja, todos os valores apresentados são a média dos valores encontrados em 30 execuções do algoritmo.

Vale notar também, que a estatística de soluções inválidas se manteve a mesma para todos os parâmetros: nenhuma solução inválida foi gerada.

#### 3.3.1. Análise da Influência do Número de Formigas

Para analisar a influência do número de formigas foram utilizados os parâmetros de 500 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e taxa de evaporação de 15%. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com 10, 25, 50, 100, 250, 500 formigas.



**Figura 4. Custo da solução para cada número de formigas na segunda entrada**

Número de Formigas	10	25	50	100	250	500
Solução Encontrada	163.13	166.47	167.07	167.1	167.27	167.2

**Tabela 5. Soluções encontradas para cada número de formigas na segunda entrada**

Na Figura 4 podemos observar uma tendência de que, quanto mais formigas são utilizadas, melhor é a resposta encontrada. Isso se dá pelos mesmos motivos discutidos para o primeiro grafo. Entretanto, a partir de 100 formigas a melhora da solução é muito reduzida. Além disso, ao analisar a Tabela 5, podemos perceber que o resultado de 250 formigas e 500 formigas é praticamente equivalente, já que 500 formigas inclusive encontram um resultado pior, justificado pela variação causada pela aleatoriedade. Dessa forma, o valor de 250 formigas parece ser o ideal.

Já com a Figura 12 podemos observar que o comportamento da matriz de feromônios é igual ao comportamento da primeira entrada: valores altos no início e uma convergência da maior parte das arestas para valores baixos em aproximadamente 20 iterações. Após 100 iterações podemos observar que se tem arestas com feromônios mais fortes, indicativas do melhor caminho encontrado.

Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro do número de formigas é 250.

### 3.3.2. Análise da Influência da Taxa de Evaporação

Para analisar a influência da taxa de evaporação foram utilizados os parâmetros de 200 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e 250 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as taxas de evaporação de 5%, 15%, 20%, 25%, 50% e 75%.

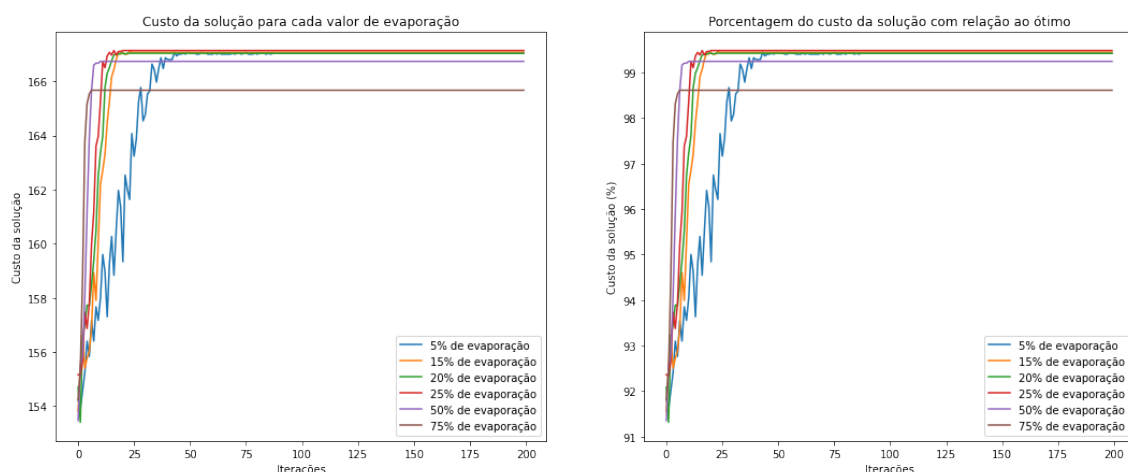


Figura 5. Custo da solução para valores de evaporação na segunda entrada

Taxa de Evaporação	5%	15%	20%	25%	50%	75%
Solução Encontrada	167.03	167.1	167.03	167.13	166.73	165.67

Tabela 6. Soluções encontradas para cada taxa de evaporação na segunda entrada

Na Figura 5 podemos observar que os valores de evaporação de 5%, 15%, 20% e 25% geram respostas melhores. Já os valores mais altos, de 50% e 75%, geram resultados definitivamente piores. Analisando a Tabela 6, podemos ver que a taxa de evaporação de 25% gera resultados marginalmente melhores, apesar desse melhor resultado poder ser um reflexo de aleatoriedade. Apesar disso, esse parâmetro será considerado como o melhor.

O bom desempenho desse parâmetro provavelmente se dá pela mesma razão apresentada no primeiro grafo: um melhor equilíbrio aos valores de feromônios. A evaporação

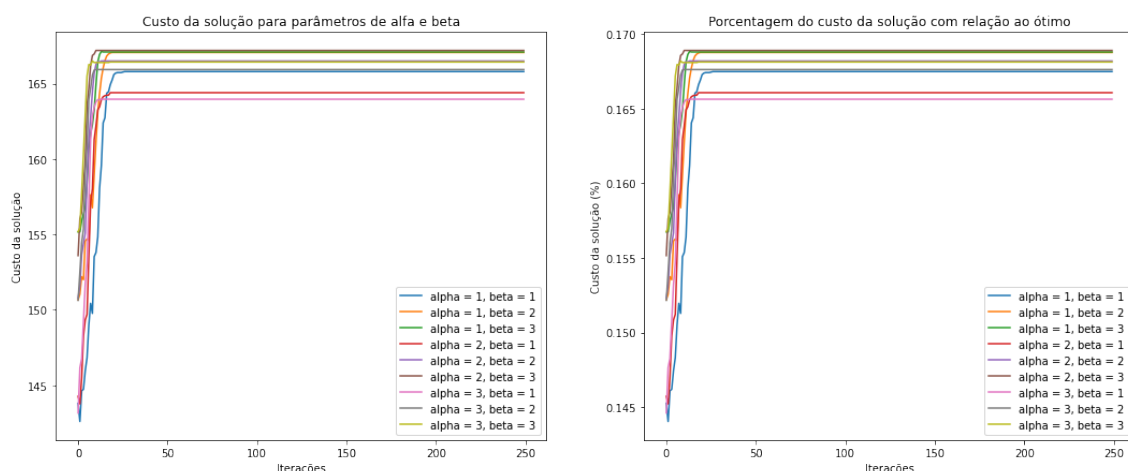
é suficientemente grande para evitar a exploração de arestas com resultados ruins, e suficientemente pequena para não evaporar o feromônio de arestas promissoras.

Já com a Figura 13 podemos observar o comportamento da matriz de feromônios, que se assemelha com o comportamento da primeira entrada: taxa de evaporação maiores levam a valores próximos de 0 rapidamente e poucas arestas com valores mais altos de feromônios, já taxas de evaporação menores levam a uma convergência mais lenta da matriz e um número maior de arestas com mais feromônios nas iterações finais.

Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro é de 25% de evaporação.

### 3.3.3. Análise da Influência dos Parâmetros Alfa e Beta

Para analisar a influência dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram utilizados os parâmetros de 250 iterações, evaporação de 25% e 250 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as combinações de  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$  com  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$



**Figura 6. Custo da solução para valores de alfa e beta na segunda entrada**

Alfa - Beta	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
Solução Encontrada	165.8	167.1	167.1	164.4	166.5	167.2	164.0	165.93	166.43

**Tabela 7. Soluções encontradas para cada parâmetro alfa e beta na segunda entrada**

Na Figura 6 podemos observar que se tem quatro patamares de valores. No maior deles, temos os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ , sendo  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  o melhor deles. No segundo patamar, temos  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$  e  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 3$ . No terceiro patamar, temos  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ . Por fim, no quarto patamar temos  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ . Assim, o melhor valor para o parâmetro, com uma margem próxima dos outros parâmetros no primeiro patamar, é  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ .

Isso indica que para esse grafo os feromônios possuem um peso mais próximo ao desirability. Entretanto, o desirability segue tendo um papel mais importante. Além disso,

valores mais altos de  $\alpha$  e  $\beta$  indicam um fortalecimento de valores mais altos, em oposição a valores menores.

A matriz de feromônios nesse caso se comporta de forma similar aos resultados obtidos no teste do parâmetro do número de formigas.

Por fim, com a Tabela 7 confirmamos a superioridade do parâmetro de  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ . Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor é  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ .

#### 3.3.4. Análise do Número de Iterações

Pelos gráficos usados para a análise dos outros parâmetros, podemos observar facilmente que 50 iterações são mais do que o necessário para se atingir uma convergência do valor encontrado. Dessa forma, podemos considerar 50 iterações como sendo um valor ótimo para o número de iterações para esse grafo.

#### 3.3.5. Conclusão

Com toda a análise, os parâmetros escolhidos parecem ser os melhores possíveis, apresentando bons resultados, chegando a uma solução média correspondente a 99.5% da solução ótima do problema. Além disso, não foram observadas gerações de soluções inválidas, portanto esse problema parece ser desprezível na prática para essa entrada.

Dessa forma, os parâmetros escolhidos para esse grafo são: 500 formigas, 200 iterações, uma taxa de evaporação de 15%,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ .

### 3.4. Terceiro Grafo

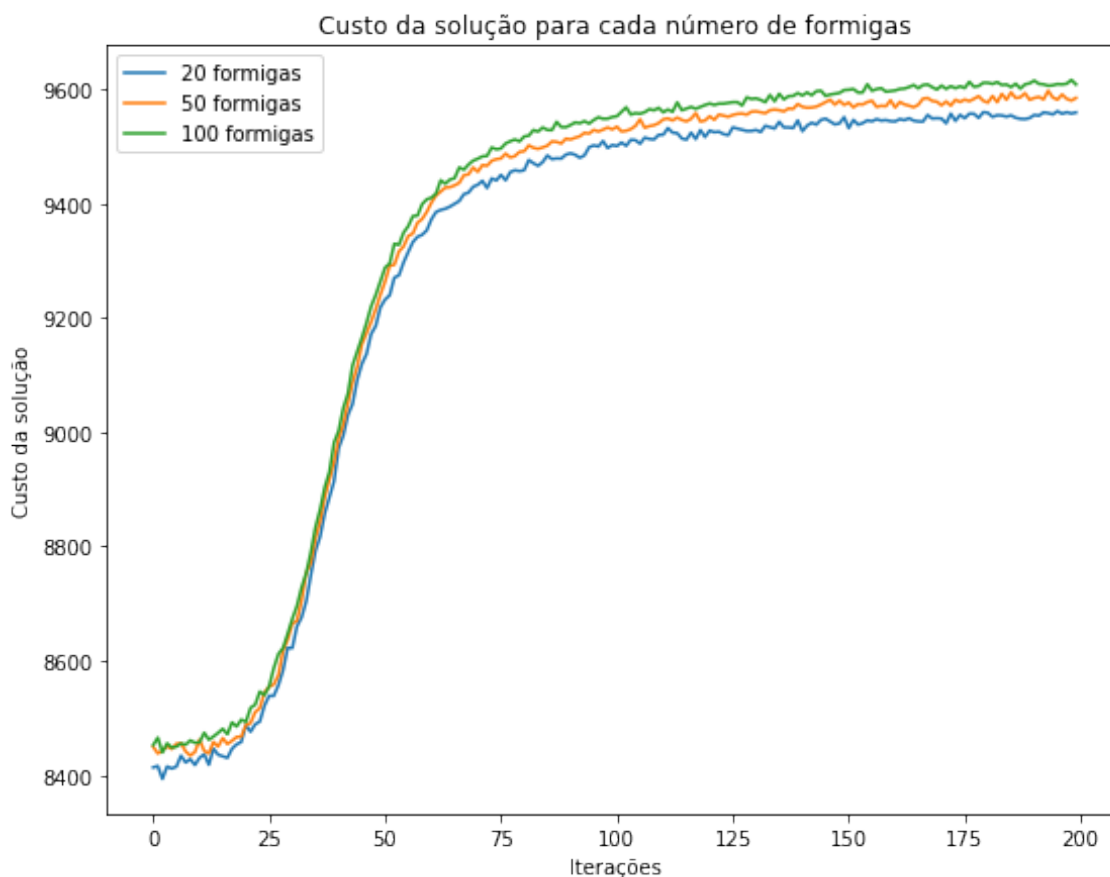
Primeiramente, vale notar que a análise foi realizada com 10 repetições. Ou seja, todos os valores apresentados são a média dos valores encontrados em 10 execuções do algoritmo. Esse número menor de execuções foi escolhido devido ao maior tempo necessário para solucionar o problema para esse grafo. Isso acontece porque o algoritmo implementado é da ordem de  $O(n^2)$ , sendo  $n$  o número de nós do grafo da entrada, portanto a terceira entrada, que possui 1000 vértices tem uma complexidade de execução bem superior às outras entradas.

Vale notar também, que a estatística de soluções inválidas se manteve a mesma para todos os parâmetros: nenhuma solução inválida foi gerada.

#### 3.4.1. Análise da Influência do Número de Formigas

Para analisar a influência do número de formigas foram utilizados os parâmetros de 200 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e taxa de evaporação de 15%. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com 20, 50 e 100 formigas.

Na Figura 7 podemos observar uma tendência de que, quanto mais formigas são utilizadas, melhor é a resposta encontrada. Isso ocorre pela mesma razão apresentada no primeiro grafo. Devido à limitações de tempo de execução para essa entrada, o valor de



**Figura 7. Custo da solução para cada número de formigas na terceira entrada**

Números Formigas	20	50	100
Solução Encontrada	9559.3	9584.7	9608.4

**Tabela 8. Soluções encontradas para cada número de formigas para a terceira entrada**

100 formigas será assumido como ótimo, embora provavelmente um número maior de formigas levaria a uma solução ainda melhor. Na Tabela 8 confirmamos essa análise.

Já com a Figura 14 podemos observar que o comportamento da matriz de feromônios é igual ao comportamento da primeira e segunda entrada: valores altos no início e uma convergência da maior parte das arestas para valores baixos em aproximadamente 20 iterações. Após 100 iterações podemos observar que se tem arestas com feromônios mais fortes, indicativas do melhor caminho encontrado, embora essas arestas sejam pouco visíveis, por dois motivos. O primeiro é que elas não têm valores tão fortes quanto o observado nas outras entradas, pois se tem muito mais opções de arestas nesse grafo. O segundo é devido ao plot representar 1 milhão de valores.

Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro do número de formigas é 100.

### 3.4.2. Análise da Influência da Taxa de Evaporação

Para analisar a influência da taxa de evaporação foram utilizados os parâmetros de 200 iterações,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e 100 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as taxas de evaporação de 5%, 15%, 25% e 50%.

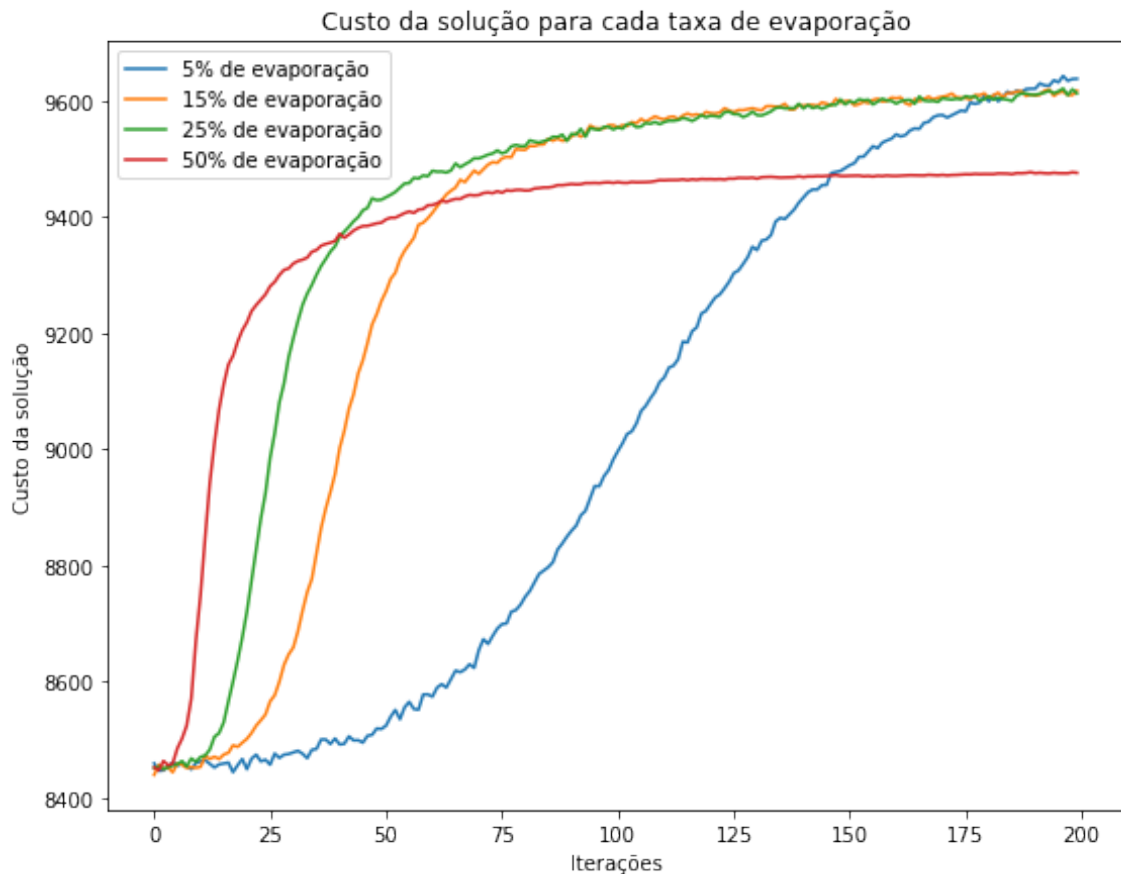


Figura 8. Custo da solução para valores de evaporação na terceira entrada

Taxa de Evaporação	5%	15%	25%	50%
Solução Encontrada	9637.0	9616.4	9611.9	9475.2

Tabela 9. Soluções encontradas para cada taxa de evaporação para a terceira entrada

Na Figura 8 podemos observar que os valores de evaporação de 15% e 25% geram respostas bem semelhantes. O valor de 50% gera a pior resposta, com uma convergência mais rápida. Por fim, o valor de 5% parece ser o melhor valor, apesar de ele não parecer ter convergido em 200 iterações. Analisando a Tabela 9, podemos confirmar a superioridade da evaporação de 5%.

O melhor desempenho desse parâmetro pode ser explicado pela maior demora em evaporar o feromônio de arestas que foram encontradas como melhor solução em algum

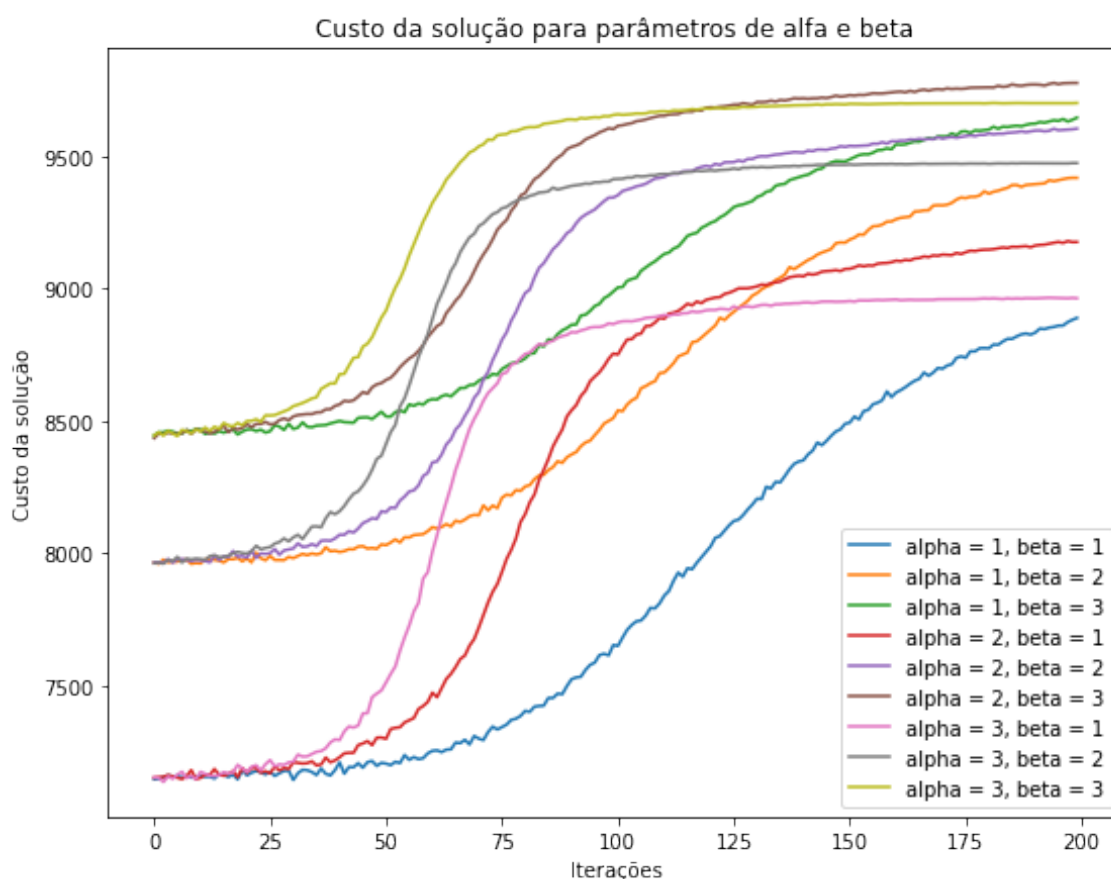
ponto. Como o grafo de entrada é muito grande, isso se torna uma vantagem, pois guia melhor o caminhamento das formigas favorecendo uma exploração mais longa, seguida de uma exploitation mais ampla.

Já com a Figura 15 podemos observar o comportamento da matriz de feromônios, que se assemelha com o comportamento da primeira e segunda entrada. Vale destacar que os parâmetros de menor evaporação apresentam um número consideravelmente maior de arestas com valor de feromônio mais longe de zero na última iteração, sendo até mais visíveis no gráfico.

Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor para o parâmetro é de 5% de evaporação.

### 3.4.3. Análise da Influência dos Parâmetros Alfa e Beta

Para analisar a influência dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram utilizados os parâmetros de 200 iterações, evaporação de 5% e 100 formigas. Serão analisadas as estatísticas da execução do programa com as combinações de  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$  com  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$



**Figura 9. Custo da solução para valores de alfa e beta na terceira entrada**

Na Figura 9 podemos observar que o valor de  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  gera os melhores resultados, com uma distância razoável do parâmetro  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 3$ , que é o segundo melhor. Isso indica um bom desempenho ao aumentar a importância de valores altos de

Alfa - Beta	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
Solução Encontrada	8888.2	9417.7	9645.3	9175.3	9603.9	9776.5	8962.6	9473.6	9700.8

**Tabela 10. Soluções encontradas para cada alfa e beta para a terceira entrada**

feromônios e desirability, pois se tem valores maiores de  $\alpha$  e  $\beta$  com um bom desempenho. Além disso, o bom desempenho do parâmetro  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 3$ , mesmo sendo pior que  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ , indica uma aproximação da importância dos feromônios e do desirability, apesar do desirability permanecer mais importante.

A matriz de feromônios nesse caso se comporta de forma similar aos resultados obtidos no teste do parâmetro do número de formigas.

Por fim, com a Tabela 10 confirmamos a superioridade do parâmetro de  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ . Dessa forma, concluímos, com essas análises, que o melhor valor é  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ .

#### 3.4.4. Análise do Número de Iterações

Pelos gráficos usados para a análise dos outros parâmetros, podemos observar que 200 iterações parece alcançar uma certa convergência, apesar de não se ter uma estabilidade de fato. Dessa forma, poderíamos concluir que caso se aumente o número de iterações se teria uma pequena melhora na solução encontrada. Entretanto, devido à limitações de tempo de execução, a solução encontrada com 200 iterações será considerada a melhor.

#### 3.4.5. Conclusão

Com toda a análise, os parâmetros escolhidos parecem ser os melhores possíveis, apresentando uma solução média de 9776.5. Como o ótimo do problema não é conhecido, não podemos realizar afirmações sobre a qualidade dessa solução encontrada. Além disso, não foram observadas gerações de soluções inválidas, portanto esse problema parece ser desprezível na prática para essa entrada.

Dessa forma, os parâmetros escolhidos para esse grafo são: 100 formigas, 200 iterações, uma taxa de evaporação de 5%,  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ .

### 4. Conclusão

Primeiramente, podemos concluir que o algoritmo implementado alcançou bons resultados para as duas entradas em que o ótimo é conhecido. Mesmo ao considerar a possível influência da aleatoriedade, o intervalo de confiança do número de execuções utilizados garante que os resultados encontrados são de fato bons resultados.

Também vemos que os parâmetros influenciaram razoavelmente na solução da terceira entrada, então a otimização dos parâmetros levou a uma solução superior, o que é um indicativo que a resposta final encontrada é uma boa resposta, mesmo com as limitações de tempo de execução para a análise dessa entrada. Além disso, se tem uma limitação



do número de execuções utilizados devido à complexidade da entrada, o que leva a um intervalo de confiança pior.

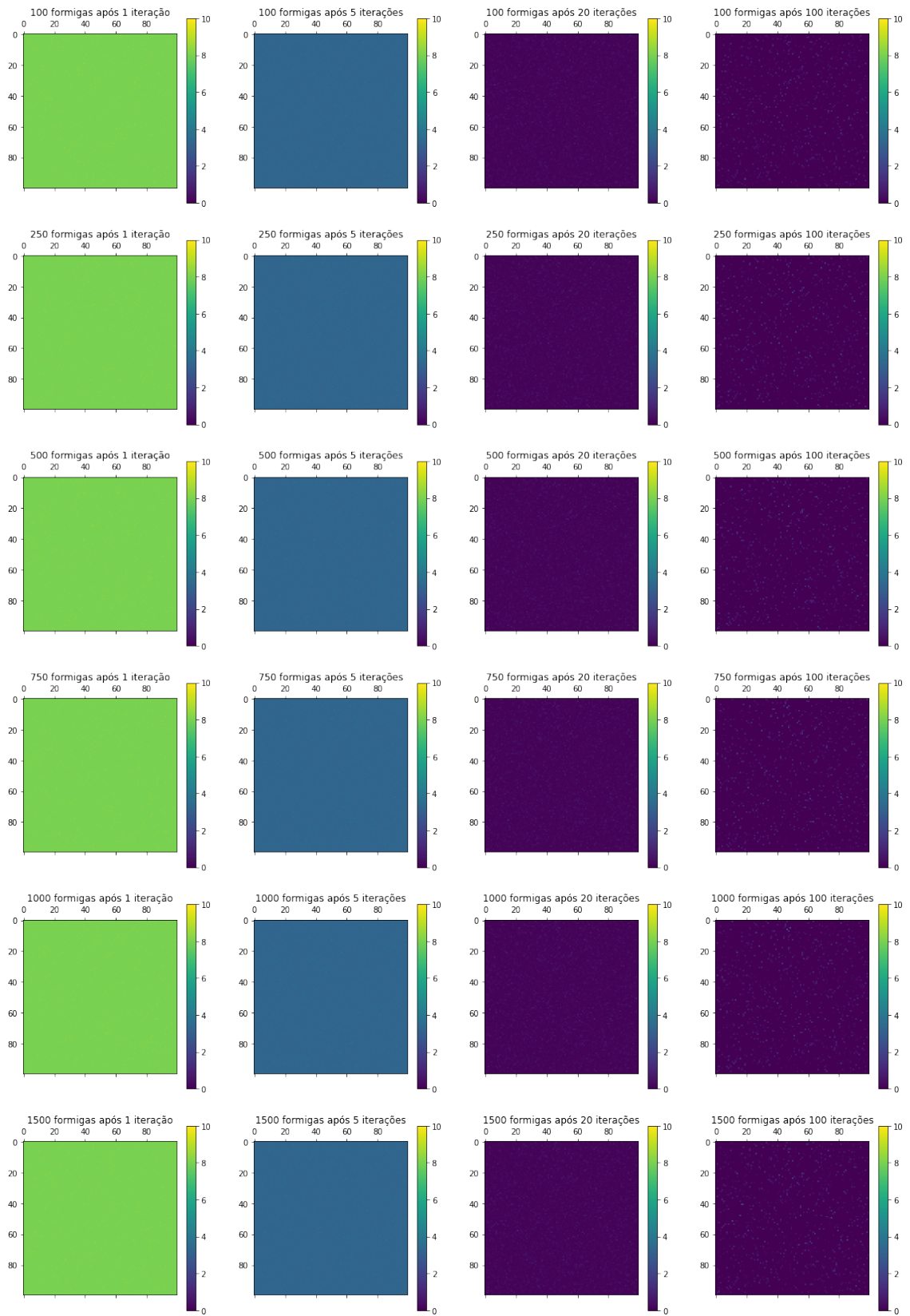
Também, com a análise dos parâmetros, foi possível perceber que a geração de soluções inválidas não foi um problema, pois em todas as execuções feitas não foi detectado nenhum caso de solução inválida sendo gerada. Era esperado que se tenha poucas soluções inválidas, pois a situação de solução inválida deveria ser rara. No caso, provavelmente, não se teve nenhuma solução inválida devido à estrutura favorável dos grafos.

Por fim, a implementação do código foi simples, gerando um código fonte pequeno e uma estrutura simples. Além disso, o trabalho se mostrou proveitoso para entender e aplicar os conceitos aprendidos de otimização de colônia de formigas. Também, os resultados alcançados pelo algoritmo após otimizar os parâmetros se mostraram bem positivos, o que contribui para um bom resultado do trabalho.

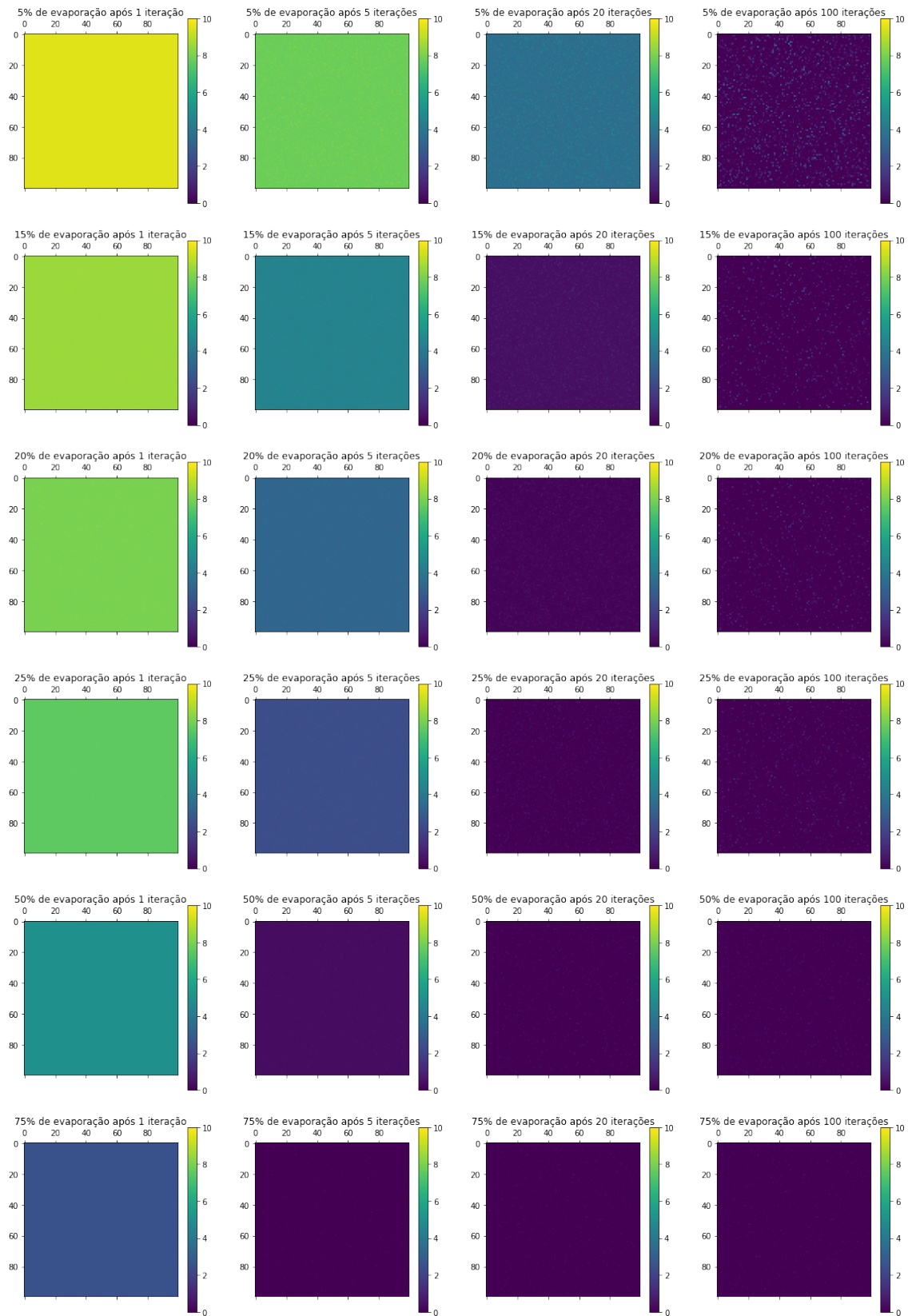
## **Referências**

[Pappa 2022] Pappa, G. L. (2022). *Slides da Disciplina - Computação Natural*. Departamento de Ciência da Computação. Universidade Federal de Minas Gerais.

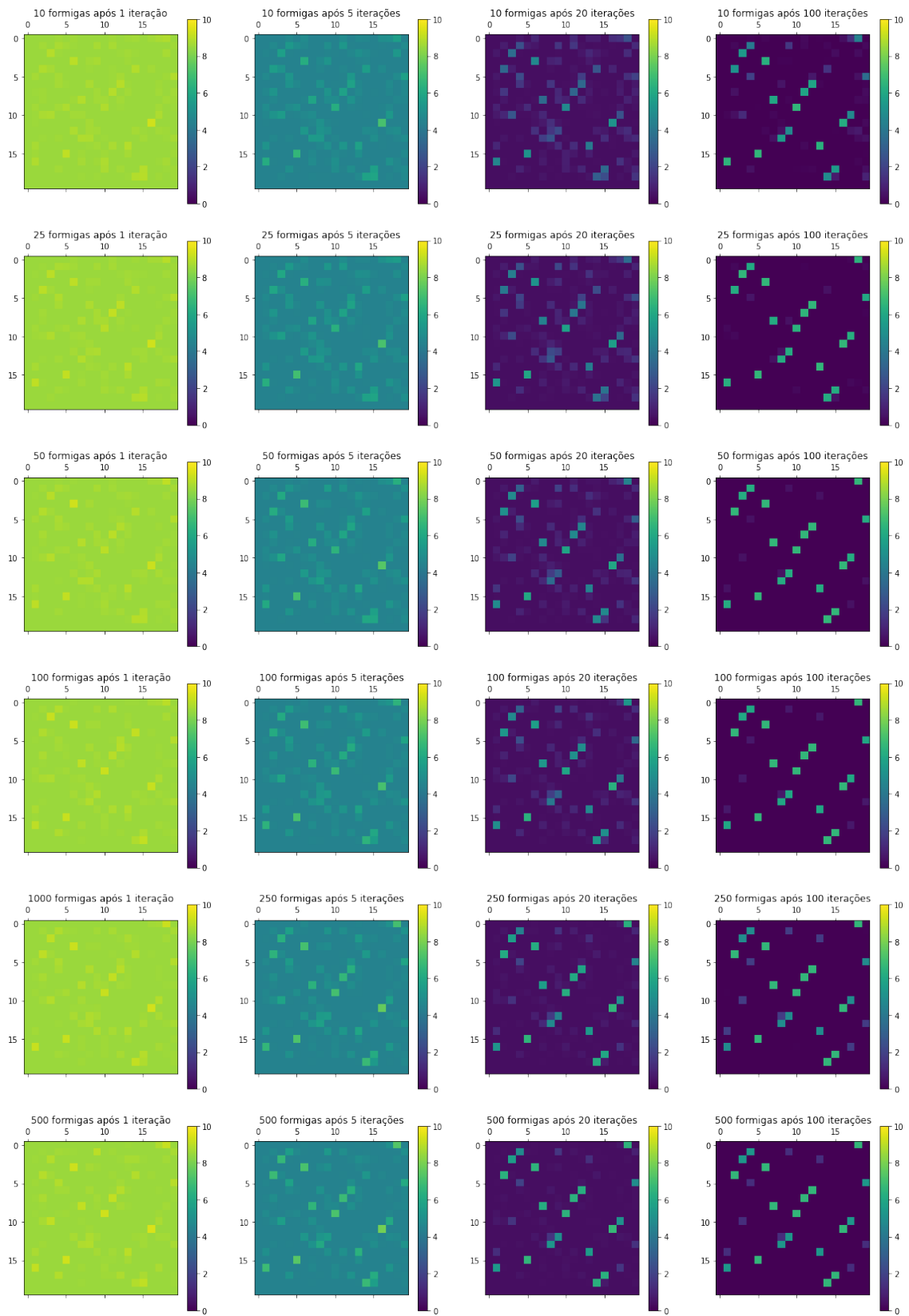
## **Anexos**



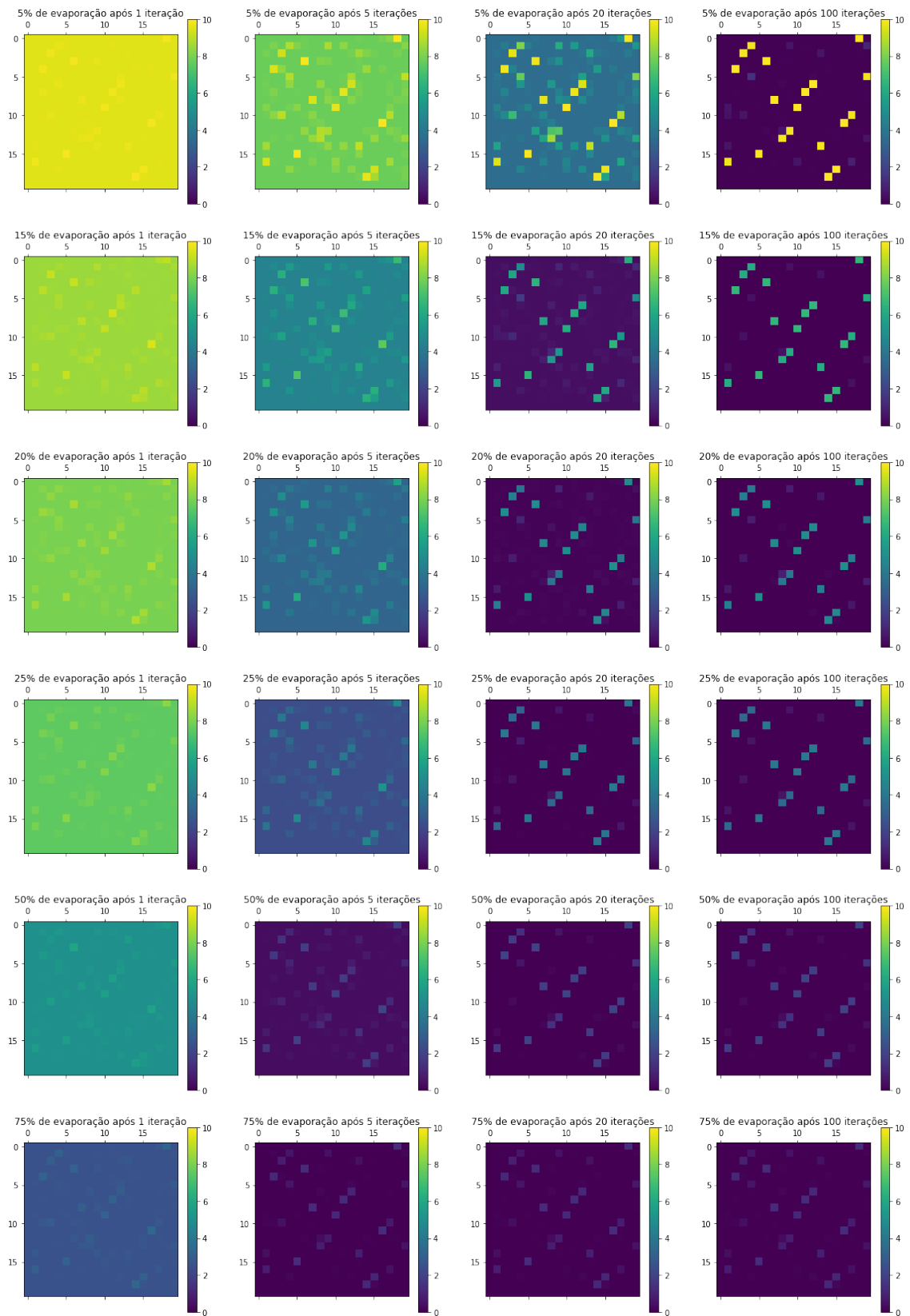
**Figura 10. Matriz de feromônios por iterações para cada número de formigas na primeira entrada**



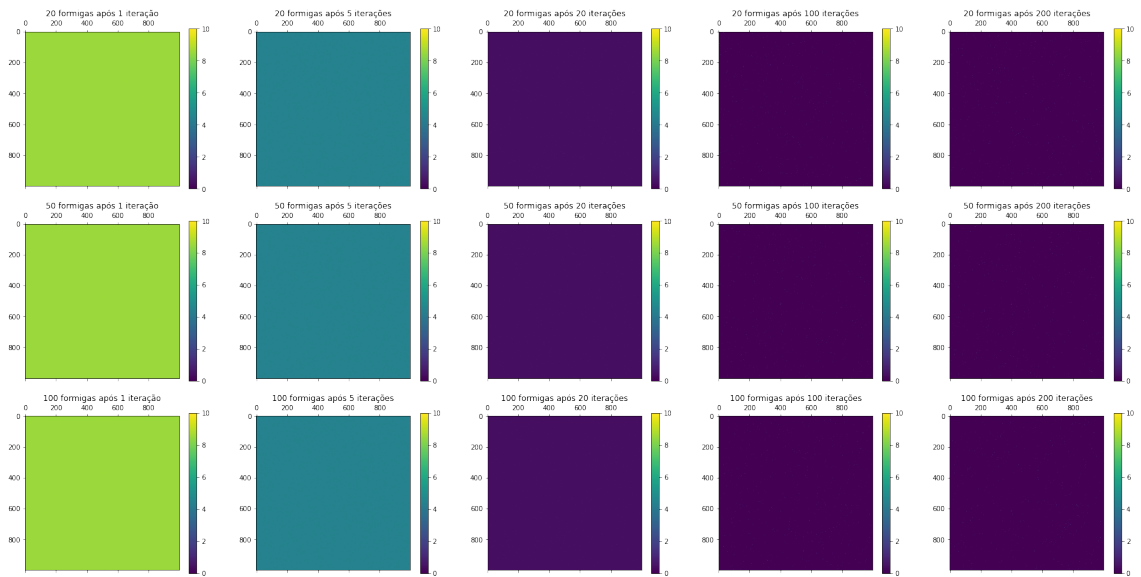
**Figura 11. Matriz de feromônios por iterações para os parâmetros de evaporação na primeira entrada**



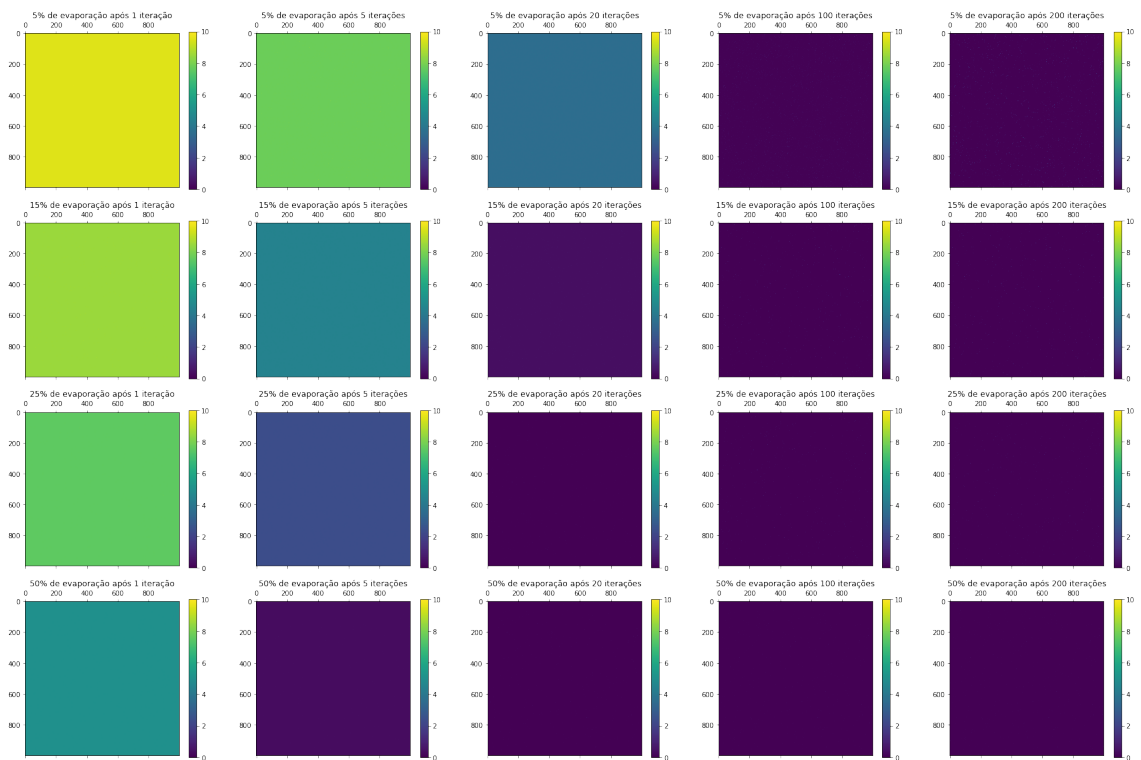
**Figura 12. Matriz de feromônios por iterações para cada número de formigas na segunda entrada**



**Figura 13. Matriz de feromônios por iterações para os parâmetros de evaporação na segunda entrada**



**Figura 14. Matriz de feromônios por iterações para cada número de formigas na terceira entrada**



**Figura 15. Matriz de feromônios por iterações para os parâmetros de evaporação na terceira entrada**