

# Trabalho Prático 3

Vitor Rodarte Ricoy - 2019007112

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Belo Horizonte – MG – Brasil

vitorrycoy@ufmg.br

## 1. Introdução

O problema proposto foi implementar um programa para determinar o menor custo de uma viagem de metrô. Essa viagem é feita por meio de uma sequência de escalas e o preço da passagem de cada escala está condicionado a um sistema de descontos cumulativos de acordo com o número de escalas dentro de um intervalo de tempo pré-definido. Também é definido que é permitido esperar o tempo que for necessário para reiniciar o ciclo de descontos, ou seja, é possível esperar que o período em que um desconto é válido termine para reiniciar a contagem dos descontos cumulativos antes de pagar a próxima escala.

Para resolver o problema é fornecida a lista de escalas que serão usadas, as porcentagens da progressão acumulada de descontos, o custo da passagem e o tempo de viagem de cada escala, o valor do maior intervalo de tempo possível para a duração do desconto acumulado, e o número máximo de escalas em que um desconto se aplica.

Por fim, o programa deve imprimir apenas o menor custo possível da viagem, considerando os descontos, truncado em duas casas decimais.

## 2. Modelagem Computacional do Problema

Para modelar o problema foi pensado nos seguintes casos:

- Não existem mais escalas a serem tomadas, logo o custo da viagem é zero.
- Existe alguma escala, logo o custo para tomá-la até o destino final é igual ao preço da passagem com o desconto atual mais o preço das escalas seguintes.
- O desconto cumulativo não é válido para a próxima escala, logo é iniciado um novo ciclo de descontos na próxima escala. Caso o desconto não seja válido pelo período de validade ter expirado, a próxima escala inicia outro ciclo de descontos naturalmente. Caso o desconto não seja válido pois foram feitas mais de  $d$  escalas, sempre vale a pena esperar o período do desconto expirar para iniciar a próxima escala com um novo ciclo de descontos.
- O desconto cumulativo é válido para a próxima escala. Nesse caso, a opção ótima será o menor custo entre iniciar um novo ciclo de descontos na próxima escala e continuar o ciclo de descontos atual.

Com base nesses casos, a solução do problema foi modelada com uma equação de Bellman, para possibilitar que ele seja resolvido com a técnica de programação dinâmica. A equação modelada para o problema foi a seguinte:

$$OPT(i, u) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = n \\ OPT(i+1, i+1) & \text{se } tempo_{[u,i]} + tempo_i \geq t \vee i - u \geq d - 1 \\ (1 - descontos_{u,i}) * valor_i + \min\{OPT(i+1, i+1), OPT(i+1, u)\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

A equação define a função  $OPT(i, u)$ , que retorna o custo mínimo para alcançar o final da viagem a partir da escala  $i$  e com um desconto iniciado na escala  $u$ . Vale notar que  $i$  e  $u$  são indexados a partir de zero.

Também foram definidos os seguintes termos para a equação:  $tempo$  indica o tempo gasto em uma viagem, sendo que  $tempo_i$  é o tempo gasto pela viagem da escala  $i$  e  $tempo_{[u, i]}$  é o tempo gasto da escala  $u$  até o momento do embarque para a escala  $i$ ;  $descontos_{u, i}$  indica o desconto acumulado para a escala  $i$  considerando que o desconto começou na escala  $u$ ;  $valor_i$  indica o preço da passagem da escala  $i$ ;  $t$  indica a duração do intervalo em que um desconto é válido; e, por fim,  $n$  indica o número total de escalas.

Essa função não é a solução mais direta do problema. Existe uma função mais ingênua definida como  $OPT(i, tempo, numeroDescontos)$ , que indicaria o custo mínimo de uma viagem a partir da escala  $i$ , tendo corrido  $tempo$  minutos desde a primeira escala com o desconto e tendo  $numeroDescontos$  escalas realizadas com o desconto atual. Essa função também é capaz de gerar a solução para o problema, porém seu custo de tempo é da ordem de  $O(ndt)$ , sendo  $n$  o número de escalas,  $d$  o limite de escalas com o desconto cumulativo e  $t$  o tamanho do intervalo de tempo em que um desconto é válido, o que não executa em 5 segundos para os limites estabelecidos. Já a função apresentada acima, como será mostrado mais à frente, é da ordem de  $O(n^2 + nd)$ , executando dentro do tempo máximo apresentado.

Com a definição dessa equação de Bellman, podemos concluir que a solução do problema é dada pelo valor de  $OPT(0, 0)$ . Vale notar que existe uma restrição de domínio do argumento  $u$ , que deve estar no intervalo  $\max(0, i - d + 1) \leq u \leq i$  para que seja válida a definição do termo  $descontos_{u, i}$ .

### 3. Estrutura de Dados e Algoritmos

#### 3.1. Estrutura de Dados

Para a solução foram utilizados três *vectors* para guardar as listas dos valores da entrada, sendo que o vetor dos percentuais de desconto é representado como um vetor de soma de prefixos, para que a posição  $i$  indique a porcentagem exata do desconto da  $i$ -ésima escala de um trecho com desconto, já que estes são cumulativos.

Também foi utilizado um *vector*, para implementar um vetor de soma de prefixos para o tempo de viagem das escalas, e dois *vectors* aninhados para implementar a matriz que guarda os dados da programação dinâmica.

##### 3.1.1. Soma de Prefixos

A soma de prefixos foi implementada em duas situações no código. A primeira para gerar o valor final do desconto cumulativo da  $i$ -ésima escala de um trecho com desconto. Essa soma de prefixo é a mais simples e é representada pelo seguinte pseudo-código:

```
lê o vetor descontoPercentual de tamanho d
para i de 1 até d-1
    descontoPercentual[i] += descontoPercentual[i-1]
    descontoPercentual[i] = min(descontoPercentual[i], 1)
```

Foi escolhida a soma de prefixo para esse caso para evitar o cálculo repetitivo do valor dessa soma dos descontos desde a escala que iniciou o desconto. Vale notar que o valor dos descontos foi convertido para a porcentagem decimal e que é feita uma verificação para que a soma não passe de 100%.

A segunda situação em que a soma de prefixos foi utilizada foi para calcular a soma dos

tempos das viagens de um trecho em tempo constante. O vetor dessa soma foi criado, diferente do restante do código, indexado de 1, para que se tenha o índice zero com o valor zero. Segue o pseudo-código desta estrutura:

le o vetor tempoViagem de tamanho  $n$

declara o vetor somaPrefixoTempo

somaPrefixoTempo[0] = 0

para  $i$  de 1 até  $n$

    somaPrefixoTempo[i] = tempoViagem[i-1] + somaPrefixoTempo[i-1]

O pseudo-código do cálculo da soma dos valores de um intervalo utilizando essa estrutura, considerando que *inicio* e *fim* são indexados de zero, é o seguinte:

somaTemposViagem(inicio, fim)

    retorne somaPrefixoTempo[fim+1]-somaPrefixoTempo[inicio]

Foi escolhida a soma de prefixo para esse caso porque, pela construção da solução com programação dinâmica, será necessário saber o tempo de uma viagem entre as escalas  $u$  e  $i-1$ , somando todos os tempos de viagem desse intervalo, e a soma de prefixo é uma estrutura simples que realiza essa operação em  $O(1)$ .

## 3.2. Algoritmos

### 3.2.1. Solução da Equação de Bellman

O principal algoritmo implementado foi a solução bottom-up com programação dinâmica da equação de Bellman apresentada na seção anterior.

Vale destacar que a solução foi implementada com uma otimização de espaço, em que a matriz da programação dinâmica salva apenas os valores da escala sendo calculada no momento e os valores da escala anterior a ela. Essa otimização reduz a complexidade de espaço de  $O(n^2)$  para  $O(n)$ , tendo como única desvantagem a impossibilidade de reconstruir as ações tomadas para gerar a solução, o que não é necessário nesse caso. Tal otimização foi implementada utilizando a paridade do identificador de cada escala, modificando-se pouco o código original.

Primeiramente, é implementado o caso base da equação de Bellman, que é dado pelo identificador da escala igual a  $n$ . Esse caso é implementado ao inicializar a matriz da programação dinâmica com zeros.

Já para o cálculo dos outros casos da equação são executados dois loops *for* aninhados. O primeiro *for* indica os valores do argumento  $i$  da função e é executado, com incremento decrescente, a partir da escala  $n-1$  até a escala 0. Essa ordem foi escolhida pelo fato do cálculo da escala  $i$  depender apenas do valor da função para a escala  $i+1$ . Já o segundo *for* indica os valores do argumento  $u$  e é executado, com incremento decrescente, a partir de  $i$  até o máximo entre zero e  $i-d+1$ . Essa restrição é feita pois é necessário que o  $j$ -ésimo desconto a partir de  $u$  seja válido, ou seja, a diferença entre o identificador  $u$  e  $i$  deve ser no máximo  $d-1$ , já que  $u+d-1$  é a última escala em que um desconto iniciado em  $u$  é válido.

Para cada iteração interna da construção bottom-up é calculado o número de escalas entre  $i$  e  $u$ , para ser calculado o valor do desconto de  $i$ . Além disso, também é calculado, por meio do vetor de soma de prefixos, o tempo gasto para ir de  $u$  até  $i-1$ .

Depois de calculados esses valores auxiliares, é salvo na posição sendo calculada da matriz da programação dinâmica o custo de comprar a passagem da escala  $i$ , com o desconto iniciado em

$u$ , utilizando-se do vetor de soma de prefixos dos descontos e do primeiro valor auxiliar calculado.

Após isso, é verificado se é possível continuar o desconto iniciado em  $u$  para a escala  $i + 1$ . Caso seja, é adicionado na matriz o valor mínimo entre dois custos: o de ir de  $i + 1$  até o fim da viagem iniciando outro desconto em  $i + 1$  e o de ir de  $i + 1$  até o fim da viagem mantendo o desconto iniciado em  $u$ . Caso não seja possível é adicionado na matriz apenas o custo de ir de  $i + 1$  até o fim da viagem iniciando outro desconto em  $i + 1$ .

Após executados os cálculos, a resposta do problema está na primeira linha e na primeira coluna da matriz da programação dinâmica. Para deixar o resultado truncado em duas casas decimais foi usado um pequeno cálculo. Segue o pseudo-código da programação dinâmica implementada:

```
inicializa uma matriz pd 2 por n+1 com zeros
para escala decrescente de n-1 até 0
    para escalaDesconto decrescente de escala até max(0, escala-d+1)
        descontosConsecutivos = escala - escalaDesconto
        tempoUltDesc = somaPrefixoTempo[escala]-somaPrefixoTempo[escalaDesconto]
        preco = (1-descontoPercentual[descontosConsecutivos])*custoBilhete[escala]
        pd[escala%2][escalaDesconto] = preco
        se tempoUltDesc+tempoViagem[escala] >= t ou descontosConsecutivos >= d-1
            pd[escala%2][escalaDesconto] += pd[(escala+1)%2][escala+1]
        senao
            valorDescontoAtual = pd[(escala+1)%2][escalaDesconto]
            valorNovoDesconto = pd[(escala+1)%2][escala+1]
            pd[escala%2][escalaDesconto] += min(valorDescontoAtual, valorNovoDesconto)
resultado = pd[0][0]
resultado = truncar(resultado*100)/100
```

Foi escolhida a implementação bottom-up da programação dinâmica por possibilitar a otimização de espaço utilizada e por ter uma implementação mais fácil de ser analisada do que a implementação top-down.

## 4. Análise de Complexidade de Tempo

Para a análise da complexidade de tempo do programa, primeiramente vamos analisar a complexidade de algumas partes que compõem esse programa, para facilitar a conclusão final. Também para auxiliar a análise, iremos definir  $n$  como o número de escalas da viagem,  $t$  como a duração máxima de um desconto e  $d$  como o número máximo de escalas com o desconto cumulativo. As análises feitas são referentes ao custo assintótico de tempo no pior caso.

### 4.1. Entrada dos dados

A entrada dos dados é dada por um comando de leitura do valor de  $n$ ,  $t$  e de  $d$ , por um loop para ler o percentual de cada desconto cumulativo e outro loop para ler o tempo de viagem e o custo do bilhete de cada escala.

A leitura das primeiras três variáveis tem custo  $O(1)$ , já que é feita apenas com um *cin*. Já o primeiro loop tem custo  $O(d)$ , já que é executado um *cin* para cada possível percentual de desconto. Por fim, o segundo loop tem custo  $O(n)$ , já que executa somente um *cin* para cada escala. Portanto, toda a leitura dos dados tem complexidade  $O(1 + d + n) = O(n + d)$ .

## 4.2. Cálculo das Somas de Prefixo

O cálculo das somas de prefixo é feito por meio de dois comandos *for*. O primeiro, que calcula a soma de prefixos dos descontos, é executado  $d - 1$  vezes, logo é da ordem de  $O(d)$ . O segundo, que calcula a soma de prefixos dos tempos das viagens, é executado  $n$  vezes, portanto é da ordem de  $O(n)$ . Assim, temos que os cálculos das somas de prefixo têm um custo total da ordem de  $O(d + n)$ .

## 4.3. Execução da Programação Dinâmica

O primeiro passo da execução da programação dinâmica é declarar a matriz, o que custa  $O(n)$ , já que a matriz tem um tamanho de dois por  $n + 1$  e é inicializada com zeros. Após a declaração da matriz é executado o algoritmo da programação dinâmica de fato.

O algoritmo é composto por dois loops *for*. O primeiro deles é executado  $n$  vezes. Considerando o valor do primeiro *for* como  $i$ , podemos ver que o segundo *for* é executado entre  $i$  e  $d$  vezes, devido à operação de *max* no seu limite inferior. E também podemos perceber que todos os comandos executados no corpo do segundo *for* são  $O(1)$ , já que todas as operações realizadas nele são trivialmente  $O(1)$ . Também, o único comando no corpo do primeiro *for* consiste apenas em uma operação de máximo e cálculos aritméticos, o que custa  $O(1)$ .

Dessa forma, concluímos que o custo da execução da programação dinâmica depende dos limites dos loops *for*. Assim, o custo do pior caso é igual ao produto do custo do primeiro *for* e o custo no pior caso do segundo *for*. Considerando o caso extremo do segundo *for* em que ele é executado  $d$  vezes, temos o custo  $O(nd)$ , já considerando o outro caso extremo do segundo *for* temos o custo  $O(\frac{n^2 - n}{2}) = O(n^2)$ . Logo, o custo do pior caso deste algoritmo será o maior valor entre esses dois casos, o que é dado pela complexidade  $O(n^2 + nd)$ .

## 4.4. Saída dos Dados

A saída dos dados executa apenas um comando *cout*, que custa  $O(1)$ , para o resultado. Logo, tem custo  $O(1)$ .

## 4.5. Análise do Programa Completo

Por fim, temos que a leitura de dados é  $O(n + d)$ , o cálculo dos vetores de soma de prefixos é  $O(n + d)$ , a execução da programação dinâmica é  $O(n^2 + nd)$  e a saída de dados é  $O(1)$ .

Também temos alguns trechos que são trivialmente menos complexos do que a execução dessas seções, como a inicialização dos vetores do tempo de cada viagem, dos percentuais de descontos, da soma de prefixos dos tempos das viagens e dos custos das passagens, além de trechos como cálculo do resultado truncado em duas casas decimais.

Como o programa completo consiste em, basicamente, executar tais trechos de código, sua complexidade é igual a  $O(n + d + n + d + n^2 + nd + 1) = O(n^2 + nd)$ , que é a mesma complexidade do cálculo da programação dinâmica.

Assim, concluímos que a complexidade de tempo da solução é igual a  $O(n^2 + nd)$ .

## Referências

- Kleinberg, Jon (2006). Algorithm Design: Chapter 6: Dynamic Programming. Pearson Education India.
- Almeida, Jussara. Slides da Disciplina Algoritmos I. Departamento de Ciência da Computação. Universidade Federal de Minas Gerais. 2021.