GRADUAÇÃO
UniCesumar

Pesquisa Operacional

Prof. Msc. Aparecido Vilela Junior
aparecido.vilela@unicesumar.edu.br

Pesquisa Operacional
Método Simplex

Método Simplex

- O método simplex é um algoritmo.
- É um método notavelmente eficiente que é usado rotineiramente para resolver os enormes problemas dos computadores de hoje.
- Um algoritmo é simplesmente um processo onde um procedimento sistemático é repetido (iterado) seguidamente até que o resultado desejado seja obtido.
- Cada percurso do procedimento sistemático é chamado de iteração.

O Método Simplex

- Objetivo:
  - Este é o procedimento geral para resolver problemas de programação linear.
  - Serão apresentados os principais aspectos do método simplex para resolver qualquer problema de programação linear tal que $b_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

O Método Simplex

- O método simplex é um algoritmo.
  - Um algoritmo é um processo onde um procedimento sistemático é repetido (iterado) seguidamente até que o resultado desejado seja obtido.
  - Cada percurso do procedimento sistemático é chamado de *iteração.*
  - Conseqüentemente, um algoritmo substitui um problema difícil por uma série de outros fáceis.
  - Além das iterações, os algoritmos também incluem um procedimento de dar início e um critério para determinar quando parar.

O Método Simplex

- Em resumo:

Estrutura dos Algoritmos:

Passo de inicialização — Preparar para iniciar iterações

Passo iterativo — Repetir quantas vezes necessário

Regra de parada — Foi obtido o resultado desejado?

Se sim — Pare

Se não

O Método Simplex

- Aplicação do método simplex ao problema da Wyndor Glass Co.
- Estabelecimento do Método Simplex
  - É muito mais conveniente lidar com equações do que com relações de desigualdade.
  - Por isso, o primeiro passo para se estabelecer o método simplex é converter as restrições funcionais de desigualdade em restrições equivalentes de igualdade.
  - Isto é feito introduzindo variáveis de folga.

O Método Simplex

- Consideremos a primeira restrição do exemplo:

$$x_1 \leq 4$$

A variável de folga para esta restrição é:

$$x_3 = 4 - x_1$$

Portanto,

$$x_1 + x_3 = 4$$

A constate original $x_1 \leq 4$ se mantém sempre que $x_3 \geq 0$. Conseqüentemente, $x_1 \leq 4$ é inteiramente equivalente ao conjunto de restrições

e $$x_1 + x_3 = 4 \qquad x_3 \geq 0$$

O Método Simplex

- Pela introdução de variáveis de folga de maneira idêntica para as outras variáveis funcionais, o modelo de programação linear original pode agora ser substituído pelo modelo *equivalente*.

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & x_1 + x_3 & = & 4 \\
(2) & 2x_2 + x_4 & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

e

$$x_j \geq 0, \text{ para } j = 1,2,\ldots,5$$

O Método Simplex

- Note-se que o novo sistema de restrições funcionais tem duas variáveis mais que equações. (3 equações e 5 variáveis)
- Isto nos dá dois *graus de liberdade* na solução do sistema, uma vez que quaisquer duas variáveis podem ser escolhidas para serem consideradas igual a qualquer valor arbitrário a fim de resolver as três equações em termos das três variáveis restantes.
- O método simplex usa o zero para este valor arbitrário.
- As variáveis consideradas zero são chamadas de **variáveis não-básica.**
- As outras são chamadas de **variáveis básicas.**
- A solução resultante é chamada de **solução básica.**
- Se todas as variáveis básicas forem não-negativas, tratar-se-á de uma **solução básica viável.**
- Pela teoria da programação linear, uma solução ótima *tem* que ser uma solução básica viável.

O Método Simplex

- É conveniente considerar e manipular a equação da função-objetivo ao mesmo tempo que as novas equações de restrição. Por isso, antes de começar o método simplex o problema é escrito mais uma vez de maneira equivalente como:

Maximizar Z,

sujeito a

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\
(1) & x_1 + x_3 & = & 4 \\
(2) & 2x_2 + x_4 & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

e

$$x_j \geq 0, \text{ para } j = 1,2,\ldots,5$$

O Método Simplex

- Agora podemos resumir simplesmente a idéia básica do método simplex.

  - O sistema de equações é resolvido repetidamente para uma seqüência de soluções básicas viáveis, cada uma melhor que a sua predecessora, até que seja alcançada uma solução (básica viável) ótima.

  - Cada nova solução básica viável é obtida a partir de sua predecessora, transformando uma variável não-básica em variável básica (a **variável básica entrando**) e transformado uma variável básica numa variável não-básica (a **variável básica saindo).**

  - Duas destas soluções básicas viáveis diferindo apenas por uma única troca de variáveis básica e não-básica são chamadas de **adjacentes**.

O Método Simplex

- Resumo do Método Simplex

Passo de inicialização Identificar uma solução básica viável inicial

Passo iterativo Mover-se para a melhor solução básica viável adjacente

Regra de parada Parar quando não houver nenhuma solução básica viável adjacente melhor.

- Cada uma destas partes do algoritmo será descrita para o exemplo.

O Método Simplex

- Passo de inicialização:
  - Introduza variáveis de folga (x_3,x_4,x_5) como descrito acima.
  - Selecione as variáveis originais (x_1,x_2) para serem as variáveis não-básicas originais, iguale a zero e considere as variáveis de folga como sendo as variáveis básicas iniciais.
  - Quando estiver resolvendo um problema à mão, é conveniente usar a *forma tabular* do método simplex.

O Método Simplex

- Passo de inicialização:
  - O quadro simplex para registro de informações inclui:

1. Os coeficientes das variáveis
2. As constantes do lado direito das equações e
3. A variável básica que aparece em cada equação.

  - O quadro simplex para o exemplo é mostrado abaixo:

		Coeficiente de						
Variável básica	Eq. No.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	Lado direito
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
x3	1	0	1	0	1	0	0	4
x4	2	0	0	2	0	1	0	12
x5	3	0	3	2	0	0	1	18

O Método Simplex

- Passo de inicialização:
  - Uma vez que cada equação contém apenas uma variável básica, a qual tem um coeficiente de +1, cada variável básica é igual à constante do lado direito de sua equação.
  - Assim, a solução básica viável inicial para o exemplo $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,0,4,12,18)$.
  - Vá a seguir para a regra de para parada para determinar se essa solução é ótima

O Método Simplex

- Regra de parada:
  - A atual solução básica viável é ótima se e somente se cada coeficiente na Eq. (0) for não-negativo (≥ 0).
  - Se assim é, pare; de outro modo, vá para o passo iterativo para obter a próxima solução básica viável – a qual envolve transformar uma variável não-básica numa variável básica (parte 1) e vice-versa (parte 2) e então resolva para a nova solução (parte 3).
  - O exemplo possui dois coeficientes negativos, portanto, vá para o passo iterativo.

O Método Simplex

- Passo iterativo:
  - *Parte 1:*
    - Determine a *variável básica entrando* selecionando a variável com o *maior coeficiente negativo* na Eq. (0).
    - Faça um retângulo circunscrevendo a coluna abaixo deste coeficiente que será chamada de **coluna pivô**.
  - *Parte 2:*
    - **Determine a *variável básica saindo***
      1. selecionando cada coeficiente na coluna circunscrita que seja estritamente positivo.
      2. Dividindo o valor "lado direito" de cada linha pelo coeficiente correspondente.
      3. Identificando as equações que tenham as *menores* destas razões.
      4. Selecionando a variável básica para esta equação.

O Método Simplex

- Passo iterativo:
  - *Parte 2:*
    - Faça um retângulo circunscrevendo esta linha da equação no quadro à direita da coluna Z, e chame a linha circunscrita de **linha pivô**.
    - Chame também o número que está em ambos os retângulos de **número pivô**.

O Método Simplex

- Passo iterativo:
  - *Parte 3:*
    - Determine a nova solução básica viável a partir da construção de um novo quadro simplex abaixo do atual.
    - As três primeiras colunas não são modificadas com exceção de que a variável básica saindo na primeira coluna é substituída pela variável básica entrando.
    - O coeficiente da nova variável básica deverá ser mudado para +1, dividindo-se toda a linha pivô pelo número pivô, de modo que:

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{antiga linha pivô}}{\text{número pivô}}$$

O Método Simplex

Variável básica que entra

Maior coeficiente negativo

Variável Básica que sai

		Coeficiente de						
Variável básica	Eq. No.	Z	x1	**x2**	x3	x4	x5	Lado direito
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
x3	1	0	1	0	1	0	0	4
x4	2	0	0	**2**	0	1	0	12
x5	3	0	3	2	0	0	1	18

Coluna pivô

Razão

$\frac{12}{2} = 6$ (mín)

$\frac{18}{2} = 9$

Linha pivô

Número pivô

2- O Método Simplex

Iteração	Variável básica	Eq. No.	Coeficiente de Z	x1	**x2**	x3	x4	x5	Lado direito
1	Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
	x3	1	0	1	0	1	0	0	4
	x4	2	0	0	**2**	0	1	0	12
	x5	3	0	3	2	0	0	1	18
2	Z	0	1						
	x3	1	0						
	x2	2	0	0	**1**	0	**1/2**	0	**6**
	x5	3	0						

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{antiga linha pivô}}{\text{número pivô}}$$

Para eliminar a nova variável básica das outras equações, todas as Linhas (inclusive da Eq.0), *exceto* a linha pivô, são modificadas para Usando se a seguinte fórmula:

Nova linha = antiga linha – (coeficiente da coluna pivô)x nova linha pivô

2- O Método Simplex

Nova linha = antiga linha – (coeficiente da coluna pivô)x nova linha pivô

- As nova linhas do exemplo são:

Linha 0	[-3	-5	0	0	0,	0]
-(-5)	[0	1	0	1/2	0,	6]
Nova linha=	[-3	0	0	5/2	0,	30]

Linha 1. Não modificada pois o coeficiente da coluna pivô é zero

Linha 3	[3	2	0	0	1,	18]
-(2)	[0	1	0	1/2	0,	6]
Nova linha=	[3	0	0	-1	1,	6]

O novo quadro para a iteração 1, é mostrado a seguir:

O Método Simplex

Iteração	Variável básica	Eq. No.	Coeficiente de Z	x1	**x2**	x3	x4	x5	Lado direito
1	Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
	x3	1	0	1	0	1	0	0	4
	x4	2	0	0	**2**	0	1	0	12
	x5	3	0	3	2	0	0	1	18
2	Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
	x3	1	0	1	0	1	0	0	4
	x2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
	x5	3	0	3	0	0	-1	1	6

Uma vez que cada variável básica é igual ao lado direito
de sua equação, a nova solução viável é (0, 6, 4, 0, 6), com Z=30
Como a Eq.0 ainda possui um coeficiente negativo a solução ainda não
é ótima e deve ser feita uma nova iteração.

O Método Simplex

Iteração 1

Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
x3	1	0	1	0	1	0	0	4
x2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
x5	3	0	3	0	0	-1	1	6

Razão

$\frac{4}{1} = 4$

$\frac{6}{3} = 2$ (mín)

Linha 3 = Esta é a nova linha pivô

Nova linha= 1/3 [3 0 0 -1 1, 6]

= [1 0 0 -1/3 1/3, 2]

Linha 0 [-3 0 0 -5/2 0, 30]

-(-3) [1 0 0 -1/3 1/3, 2]

Nova linha = [0 0 0 3/2 1, 36]

Linha 1 [1 0 1 0 0, 4]

-(1) [1 0 0 -1/3 1/3, 2]

Nova linha = [0 0 1 1/3 -1/3, 2]

O Método Simplex

Iteração	Variável básica	Eq. No.	Coeficiente de Z	x1	**x2**	x3	x4	x5	Lado direito
0	Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
	x3	1	0	1	0	1	0	0	4
	x4	2	0	0	**2**	0	1	0	12
	x5	3	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
	x3	1	0	1	0	1	0	0	4
	x2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
	x5	3	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	0	1	0	0	0	3/2	1	36
	x3	1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	x2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
	x1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

A solução básica viável é (2, 6, 2, 0, 0) com Z = 36 -> solução ótima

Exercício Prático (1)

- **Modelo Completo**
  - Variáveis:
    - $x1$ = cadeira e
    - $x2$ = mesa
  - Função Objetivo
    - MAXIMIZAR **Margem de Contribuição Total**
    - MAX MCT = $10x1 + 8x2$
  - Restrições
    - Montagem $3x1 + 3x2 <= 30$
    - Acabamento $6x1 + 3x2 <= 48$

Passo 1

- Inserir as variáveis de Folga:
  - **As variáveis de folga servem para eliminar a inequação.**
  - Uma variável de Folga para cada inequação
  - Utilizando a variável de folga, altera-se o sinal de <=, por somente =.
  - Todo o valor que está na diferença, agora vão estar na variável de folga.
  - Por exemplo, se não for fabricada nenhuma mesa e cadeira (Montagem 3x1 + 3x2 <= 30), a folga vai ser de 30 (0x1 + 0x2 + x3 = 30), que seria o valor de x3, na equação de montagem.
  - Sempre a diferença da equação estará depositada na folga.

Passo 1 - Folga

Maximizar $MCT = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$

Restrições: Montagem $\underbrace{3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2}_{\text{UTILIZAÇÃO}} + \underbrace{x_3}_{\text{FOLGA}} = \underbrace{30}_{\text{DISPONIBILIDADE}}$

Acabamento $\underbrace{6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2}_{\text{UTILIZAÇÃO}} + \underbrace{x_4}_{\text{FOLGA}} = \underbrace{48}_{\text{DISPONIBILIDADE}}$

com x_1, x_2, x_3 e $x_4 \geq 0$

Passo 2 / 3

- Passo 2: Montagem do quadro de coeficientes, incluindo-se a função objetivo com os sinais trocados.

- Passo 3: Criação da solução básica inicial, geralmente atribuindo-se valor 0 às variáveis originais.
- Incluir a função objetivo com os sinais trocados.

Quadro de Coeficientes

BASE	x1	x2	x3	x4		**b**
x3	3	3	1	0		**30**
x4	6	3	0	1		**48**
MCT	-10	-8	0	0		**0**

Passo 2/3

BASE	x1	x2	x3	x4		b
x3	3	3	1	0		**30**
x4	6	3	0	1		**48**
MCT	-10	-8	0	0		**0**

- Inicia-se com as variáveis de folga.
- Assim, se tornarmos x1 e x2 = 0 teremos **x3 = 30** e **x4 = 48** e **MCT = 0**

Passo 4

- Variável que entra na base:
- Aquela que tem o maior valor negativo na linha da função objetivo transformada.
- Quando não houver mais coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução encontrada é ótima.

Passo 4 - Matriz

BASE	x1	x2	x3	x4		b
x3	3	3	1	0		**30**
x4	6	3	0	1		**48**
MCT	-10	-8	0	0		**0**

Passo 5 - Matriz

- Definir a variável que sai da base:
  - Dividir os termos independentes pelos respectivos coeficientes positivos da variável que entra.
  - O menor quociente indica, pela equação em que ocorreu, a variável que deve sair da base.

Passo 5

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	3	3	1	0		**30**	(30/3) = 10
x4	6	3	0	1		**48**	(48/6) = 8
MCT	-10	-8	0	0		**0**	

Passo 6

- Operação 01: Na variável que entrou dividida toda a linha pelo primeiro número para obter o número 1.

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	3	3	1	0		**30**	
x4	6	3	0	1		**48**	**"/6"**
MCT	-10	-8	0	0		**0**	

Passo 6 – Etapa 01

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	3	3	1	0		**30**	
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	**"(X) - 3 + 1a. Linha**
MCT	-10	-8	0	0		**0**	

Nova linha pivô = antiga linha pivô / número pivô, ou seja o 6

Passo 6 – Etapa 02

- Operação 02: Na variável que restou multiplique pelo primeiro número negativo da variável que entrou e some toda a linha.

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	**0**	**"3/2"**	**1**	**"-1/2"**		**6**	
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	**"(X) - 3 + 1a. Linha**
MCT	-10	-8	0	0		**0**	

Passo 06 – Etapa 03

- Na função objetivo multiplique o primeiro número negativo da variável que entrou e some com todas as linhas

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	**0**	**"3/2"**	**1**	**"-1/2"**		**6**	
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	**"(X) - 3 + 1a. Linha**
MCT	-10	-8	0	0		**0**	

Nova linha = antiga linha – (coeficiente da coluna pivô) x nova linha pivô

Passo 06 – Etapa 03

- Com 8 cadeiras e 0 mesas o MCT = 80, mas como descrito no passo 4 existe ainda a possibilidade de otimização pois x2 = -3, retornamos a partir do passo 4.

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	**0**	**"3/2"**	**1**	**"-1/2"**		**6**	
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	**"(X) 10 + 3a. Linha**
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

Passo 6 – Etapa 04

- Variável que entra na base: Aquela que tem o maior número negativo na linha da função objetivo transformada.
- Quando não houver mais coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução encontrada é ótima.

BASE	x1	x2	x3	x4		b
x3	**0**	**"3/2"**	**1**	**"-1/2"**		**6**
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**

Passo 6 – Etapa 04

- Variável que sai da base: Dividir os termos independentes pelos respectivos coeficientes positivos da variável que entra.
- O menor quoeciente indica, pela equação em que ocorreu, a variável que deve sair da base.

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x3	**0**	**"3/2"**	**1**	**"-1/2"**		**6**	" 4 = (6 / 3/2)
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	" 16 = (8 / 1/2)
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

Passo 6

- Operação 1: na variável que entrou divida toda a linha pelo primeiro número para obter o número 1.

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x2	**0**	**1**	**"2/3"**	**"-1/3"**		**4**	"/ (3/2)"
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

Passo 4

- Operação 2: na variável que restou multiplique pelo primeiro número negativo da variável que entrou e some com todas as linhas:

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x2	**0**	**1**	**"2/3"**	**"-1/3"**		**4**	"(X) * -1/2 + 2a linha
x1	1	"1/2"	0	"1/6"		**8**	
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

GRADUAÇÃO
UniCesumar

Passo 4 – Operação 02

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x2	**0**	**1**	**"2/3"**	**"-1/3"**		**4**	"(X) * -1/2 + 2a linha
x1	1	0	"-1/3	"1/3"		**6**	
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

Passo 4

- Operação 03: Na função objetivo multiplique pelo primeiro número negativo da variável que entrou e some com toda a linha:

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x2	**0**	**1**	**"2/3'**	**"-1/3"**		**4**	"(X) * 3 + 2a linha
x1	1	0	"-1/3	"1/3"		**6**	
MCT	0	-3	0	"5/3"		**80**	

Passo 4

- Operação 03

BASE	x1	x2	x3	x4		b	
x2	**0**	**1**	**"2/3'**	**"-1/3"**		**4**	"(X) * 3 + 2a linha
x1	1	0	"-1/3	"1/3"		**6**	
MCT	0	0	2	"2/3"		**92**	

Solução Final

- Com 6 cadeiras, 4 mesas e MCT = R$ 92,00 chegamos ao valor otimizado, pois na linha do MCT não há valores negativos.

BASE	x1	x2	x3	x4		b
x2	**0**	**1**	**"2/3'**	**"-1/3"**		**4**
x1	1	0	"-1/3	"1/3"		**6**
MCT	0	0	2	"2/3"		**92**

Problema de PL

Um empreendedor decidiu comerciar barcos.

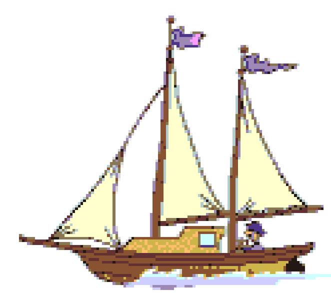
Depois de empregar alguns trabalhadores e de descobrir os preços aos quais venderia os modelos, chegou às seguintes observações: cada **modelo comum** rende um lucro de R$ 520,00, e cada **modelo rápido** rende um lucro de R$ 450,00.

Um modelo comum requer 40 horas para ser construído e 24 horas para o acabamento.

Cada modelo rápido requer 25 horas para a construção e 30 horas para o acabamento.

Este empreendedor dispõe de 400 horas de trabalho por mês para a construção e 360 horas para o acabamento.

Quanto deve produzir de cada um dos modelos de maneira a *maximizar* o lucro?



Montagem do Modelo

- Variáveis de decisão
  - x_1: quantidade de barcos a produzir do *Modelo Comum*
  - x_2: quantidade de barcos a produzir do *Modelo Rápido*

- Função-objetivo
  - Qual o objetivo?

  Maximizar o lucro.

$$L = 520x_1 + 450x_2$$

- Conjunto de restrições

  - Tempo para construção

$$\text{utilização de recurso} \leq \text{disponibilidade do recurso}$$

  - Tempo para acabamento

$$40x_1 + 25x_2 \leq 400$$

$$24x_1 + 30x_2 \leq 360$$

Modelo

$$\text{Maximizar } L = 520x_1 + 450x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 40x_1 + 25x_2 \leq 400 \\ 24x_1 + 30x_2 \leq 360 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \longrightarrow \text{Restrições de não-negatividade} \end{cases}$$

Procedimento do Método Simplex

1ª Iteração

- **Passo 1:** Introduzir as variáveis de folga.

$$\text{Maximizar } L = 520x_1 + 450x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 40x_1 + 25x_2 + x_3 = 400 \\ 24x_1 + 30x_2 + x_4 = 360 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- **<u>Passo 2</u>:** Montagem do quadro de cálculos.

$$L - 520x_1 - 450x_2 = 0$$

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	40	25	1	0	400
x_4	24	30	0	1	360
L	-520	-450	0	0	**0**

- **Passo 3:** Escolha da solução básica viável inicial.

  - Variáveis não-básicas:
  - Variáveis básicas:
  - Função objetivo:

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = 400$$

$$x_4 = 360$$

$$L = 0$$

- **Passo 4:** Variável que deve entrar na base.
  - Qual é o produto que mais contribui para o lucro?

$$X_1$$

- **<u>Passo 5</u>:** Variável que deve sair da base.

Divisões:

1ª linha: $400/40 = 10$

2ª linha: $360/24 = 15$

O menor quociente ocorreu na 1ª linha. Logo, a variável que deve sair é x_3.

Pivô

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	$\boxed{40}$	25	1	0	400
x_4	24	30	0	1	360
L	-520	-450	0	0	**0**

- **<u>Passo 6</u>:** Transformação da matriz.

Deverão ser realizadas as operações com as linhas da matriz, de forma que a coluna de venha a se tornar um vetor identidade, com o elemento 1 na 1ª linha.

$$x_1$$

- *<u>1ª operação</u>*: Dividir a 1ª linha por 40.

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	1	0,625	0,025	0	10
x_4	24	30	0	1	360
L	-520	-450	0	0	**0**

- *2ª operação*: Substituir a 2ª linha pela soma dela mesma com a 1ª linha multiplicada por (-24).

$$L_2 \Rightarrow L_2 - 24 \cdot L_1$$

- *3ª operação*: Substituir a 3ª linha pela soma dela mesma com a 1ª linha multiplicada por 520.

$$L_3 \Rightarrow L_3 + 520 \cdot L_1$$

Assim, obtemos o seguinte quadro:

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0,625	0,025	0	10
x_4	0	15	-0,6	1	120
L	0	-125	13	0	**5200**

- Nova solução:
  - Variáveis não-básicas:

$$x_2 = x_3 = 0$$

  - Variáveis básicas:

$$x_1 = 10$$
$$x_4 = 120$$

  - Função objetivo:

$$L = 5200$$

  - **<u>Passo 7</u>:** Voltar ao passo 4.

Pivô

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0,625	0,025	0	10
x_4	0	$\boxed{15}$	-0,6	1	120
L	0	-125	13	0	**5200**

2ª Iteração

- **Passo 4:** Variável que deve entrar na base: x_2
- **Passo 5:** Variável que deve sair da base:

Divisões:

1ª linha: $10/0{,}625 = 16$

2ª linha: $120/15 = 8$

O menor quociente ocorreu na 2ª linha. Logo, a variável que deve sair é .

$$x_4$$

- **<u>Passo 6</u>:** Transformação da matriz.

Encontrar o vetor identidade para a variável X_2 com o elemento 1 na 2ª linha.

$$X_2$$

- *<u>1ª operação</u>*: Dividir a 2ª linha por 15.

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0,625	0,025	0	10
x_4	0	1	-0,04	1/15	8
L	0	-125	13	0	**5200**

- *2ª operação*: Substituir a 1ª linha pela soma dela mesma com a 2ª linha multiplicada por (-0,625).

$$L_1 \Rightarrow L_1 - 0{,}625 \cdot L_2$$

- *3ª operação*: Substituir a 3ª linha pela soma dela mesma com a 2ª linha multiplicada por 125.

$$L_3 \Rightarrow L_3 + 125 \cdot L_2$$

Assim, obtemos o seguinte quadro:

BASE	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0,05	-0,042	5
x_2	0	1	-0,04	1/15	8
L	0	0	8	125/15	**6200**

- Nova solução:
  - Variáveis não-básicas:
  - Variáveis básicas:
  - Função objetivo:
- **Passo 7:** Voltar ao passo 4.

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 8$$

$$L = 6200$$

3ª Iteração

- **Passo 4:** Ao procurarmos a próxima variável que deve entrar na base, verificamos que todos os coeficientes da 3ª linha são positivos ou nulos, o que significa que qualquer aumento no valor das variáveis não-básicas faria diminuir o valor de L. Logo, concluímos que a solução encontrada é **ótima**.

- **Resposta (Solução ótima)**

5 barcos modelo comum

8 barcos modelo rápido

Lucro = 6200 reais