

## Trabalho 4: Processos aleatórios

**Aluno:** Vitor Eduardo Schuh  
**Número de matrícula:** 19100591

Data: 11/11/2021

### 1 Introdução

Sinais utilizados em sistemas de comunicação tipicamente correspondem a representação de uma informação transmitida de um para um ou de um para muitos pontos. Independentemente do contexto da informação que o sinal carrega, a definição do mesmo pode ser abstraída para uma função matemática em função da variável tempo  $t$  definida sob algum intervalo (ou janela) de observação. Sinais podem ser considerados como funções aleatórias da perspectiva de que não é possível conhecer sua forma de onda até que seja realizado um experimento (seja o de aplicar o sinal a um sistema LTI ou mesmo de amostrar o mesmo sob alguma frequência de interesse).

No ramo da probabilidade e estatística, o número resultante de um experimento aleatório é definido como uma variável aleatória. Quando o resultado do experimento aleatório é mapeado em uma forma de onda que é função do tempo (como um sinal), denota-se o mesmo como um **processo aleatório**. Formalmente, um processo aleatório corresponde a um conjunto funções do tempo e uma regra de probabilidade que atribui uma probabilidade à todo conjunto de funções (espaço amostral) do processo.

Este trabalho apresenta o cálculo e a visualização dos parâmetros de potência de um processo aleatório que representa um ruído característico presente nos dispositivos MOSFET. Junto aos cálculos de potência também foram realizadas estimativas da função autocorrelação associada ao processo. Para popular o *ensemble* de funções no tempo foram gerados 100 sinais de ruído em uma mesma janela de tempo através de simulações Monte Carlo. Como ferramental foi utilizado o *software* matemático MATLAB juntamente com o material didático da disciplina.

### 2 Discussão

A primeira tarefa solicitada foi a definição do processo aleatório objeto de estudo. No caso particular do trabalho em questão, a codificação escolhida para representar o processo foi um ruído telegráfico aleatório (RTN), gerado a partir de um *script* externo disponibilizado pelo professor. O RTN consiste em um efeito de ruído que ocorre nos transistores MOS de efeito de campo (MOSFET's) causando a variabilidade de um de seus parâmetros elétricos (a corrente de dreno  $I_{DS}$  que percorre o canal do dispositivo).

Durante a manufatura dos transistores de efeito de campo, pequenas falhas no processo de fabricação acabam por deixar más formações a nível atômico nas interfaces óxido-óxido e óxido-semicondutor dos dispositivos. Tais imperfeições são chamadas de armadilhas de carga, e recebem tal denominação pela capacidade de aprisionar por um certo período de tempo as cargas elétricas  $Q$  presentes na corrente que percorre o canal do dispositivo. A atividade de aprisionamento e liberação de cargas das armadilhas é estabelecida pelos coeficientes de captura  $\tau_c$  e emissão  $\tau_e$ .

Quando os coeficientes de captura e emissão são iguais (ou suficientemente próximos), a atividade das traps não causará grandes gradientes entre a corrente de entrada e a corrente de saída do MOSFET, porém causará uma oscilação indesejada na corrente do mesmo cuja forma de onda é representada na literatura como sinal telegráfico aleatório (RTS). A presença recorrente do sinal RTS na corrente que percorre o canal do dispositivo causa o ruído RTN que é utilizado neste trabalho.

A função geratriz do ruído RTN possui o escopo `rtn_simple(t, dt, tc, impact)`. Os parâmetros  $t$ ,  $dt$ , e  $tc$  referem-se respectivamente ao tempo de simulação, passo de simulação e a constante de tempo relativa à atividade de captura das armadilhas. O parâmetro *impact* se refere à variação da corrente de dreno ( $\Delta I_{DS}$ ) causada pela ocorrência do ruído ( $[impact] = mA$ ). Na geração dos sinais RTN foi

utilizada uma janela de tempo de 2 s junto a um passo de simulação de 20 ms ( $t = -1 : 2e - 4 : 1$ ). O *impact* adotado foi de 7 mA. A figura 1 apresenta uma *bitstream* exemplo de 50 bits correspondente à oscilação RTN gerada pelo *script* com os parâmetros adotados.

Após a definição do processo aleatório foram realizados sorteios de Monte Carlo visando a obtenção de diferentes sinais RTN. Os métodos Monte Carlo correspondem à técnicas estatísticas que se baseiam em amostragens aleatórias para gerar resultados numéricos distintos. Neste trabalho, as simulações desta classe se referem à diferentes chamadas da função geratriz do RTN dentro de um laço. A quantidade de sorteios realizados foi reduzida em uma ordem de grandeza em relação à especificação do trabalho (de  $10^3$  para  $10^2$ ) para fins de praticidade, para aumentar/reduzir a quantidade de simulações basta alterar o valor da variável monte no arquivo .m submetido. O *ensemble* obtido a partir das simulações Monte Carlo se encontra na figura 2.

Uma das características de interesse em um processo aleatório é a potência média do conjunto de sinais gerado, dado pela média (ou valor esperado) da variável aleatória obtida em algum instante do processo. Matematicamente, a potência média pode ser obtida através da equação:

$$p_{avg} = \mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

onde  $f_{X(t)}(x)$  é a função densidade de probabilidade do processo aleatório no tempo  $t$ .

Para obter este parâmetro no *script* do trabalho, a potência individual de cada ruído foi acumulada em uma variável auxiliar e o montante final foi dividido pelo número de simulações Monte Carlo, resultando em uma potência média  $p_{avg} = 6.2482$  e-4.

O quarto item solicitado foi a obtenção da função autocorrelação do processo aleatório, isto é, a esperança do produto entre duas variáveis aleatórias obtidas a partir de observações em instantes de tempo distintos. Para o cálculo deste parâmetro, foi utilizado um  $\tau$  auxiliar para percorrer a janela de tempo variando de  $-0.5t$  até  $0.5t$ . A função autocorrelação é definida matematicamente como:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

ou ainda como:

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

expandindo o operador esperança. A representação gráfica da função aplicada ao *ensemble* de ruídos do trabalho pode ser avaliada na figura 5 da seção de imagens.

Outro parâmetro que pode ser extraído de um processo aleatório é a densidade espectral de potência, característica que descreve como a potência do sinal se distribui ao longo das componentes de frequência do sinal no domínio  $j\omega$ . A densidade espectral de potência é dada pela transformada de Fourier da autocorrelação das variáveis aleatórias do processo, e suas representações em diferentes escalas são apresentadas nas figuras 7 e 8.

Após a obtenção da potência média, autocorrelação e densidade espectral de potência do processo, o *ensemble* de sinais RTN foi transmitido através de um filtro passa-baixas de primeira ordem utilizando a operação de convolução. A figura 3 mostra as características do *ensemble* completo após a filtragem e a 4 mostra a sobreposição do sinal RTN antes (em azul) e depois (em laranja) da transmissão através do passa-baixas para uma simulação Monte Carlo individual.

A aplicabilidade básica da filtragem passa-baixas é a atenuação das altas frequências de um ou de uma série de sinais. Comparando a função autocorrelação do processo antes e depois da transmissão no canal com característica passa-baixa é possível ver que a correspondente em frequência do instante  $\tau = 0$  é atenuada, indicando uma redução da potência envolvida no processo. Avaliando a potência média do *ensemble* filtrado, obtém-se um valor de  $p_{avg} = 2.1257$  e-4 (proporcional à máxima amplitude da função autocorrelação do processo em questão), confirmando que a potência é realmente menor.

Quanto ao impacto da transmissão através do passa-baixas na densidade espectral de potência dos processos, é possível verificar através da figura 11 que o filtro atenua a potência das altas componentes de frequência, indicando que tal redução possa ser responsável pelo gradiente entre as potências médias dos processos antes e depois da passagem pelo filtro. Em escala log (12) é possível visualizar que o comportamento do parâmetro é mantido mesmo após a transmissão, indicando que as características principais do processo são preservadas.

### 3 Conclusão

Através deste trabalho foi possível colocar na prática o ferramental matemático utilizado para obtenção dos parâmetros de potência e autocorrelação de processos aleatórios apresentados na reta final da disciplina de princípios. Avalio que o trabalho tenha sido adequado e suficiente para abranger os tópicos relacionados e achei interessante o detalhe de trabalhar com o fenômeno RTN ao invés de uma codificação de linha arbitrária.

Diferente de trabalhos anteriores o fluxo de projeto e simulação foi demasiadamente lento devido à erros de abordagem empregados no código. Nas primeiras versões do projeto acabei implementando uma ciclomática equivocada, alocando todos os resultados da simulação em memória e calculando a potência e a estimativa da autocorrelação em blocos separados, dificultando o processamento da ferramenta. Empregando a ordem de operações sugerida por e-mail e reduzindo o número de simulações Monte Carlo o fluxo de projeto melhorou consideravelmente.

Gostaria de ver os resultados das simulações variando os parâmetros da função de síntese do RTN (principalmente o *impact* e a constante de tempo), bem como a relação da variação dos mesmos com a potência envolvida no processo, mas acabou sendo inviável neste momento por conta de outros trabalhos desta reta final do semestre letivo.

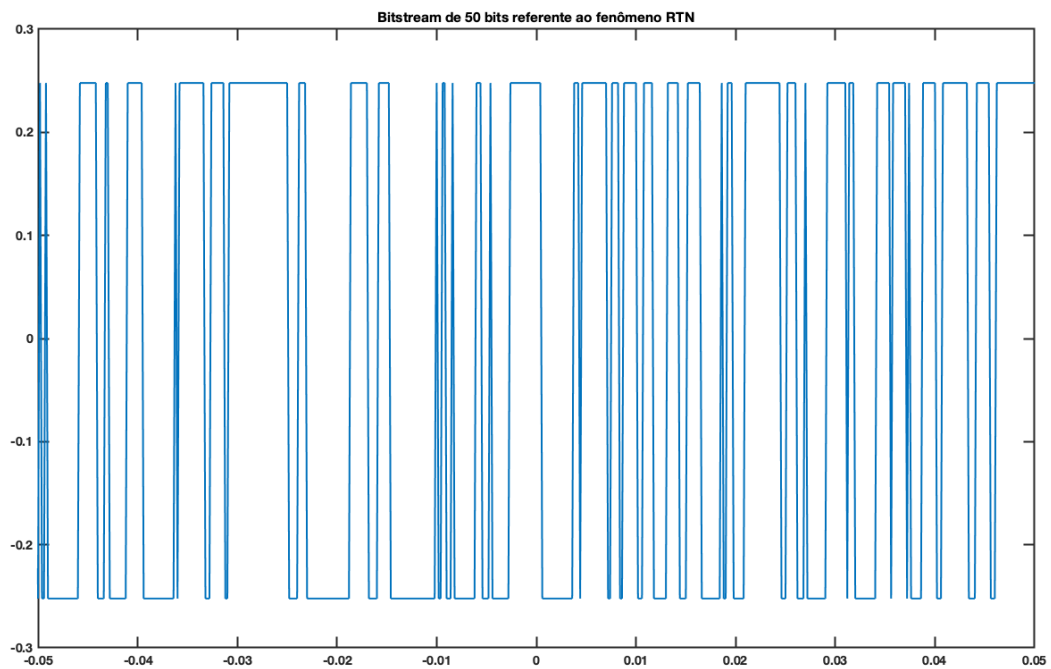


Figura 1: *Bitstream* de 50 bits que representa o ruído RTN.

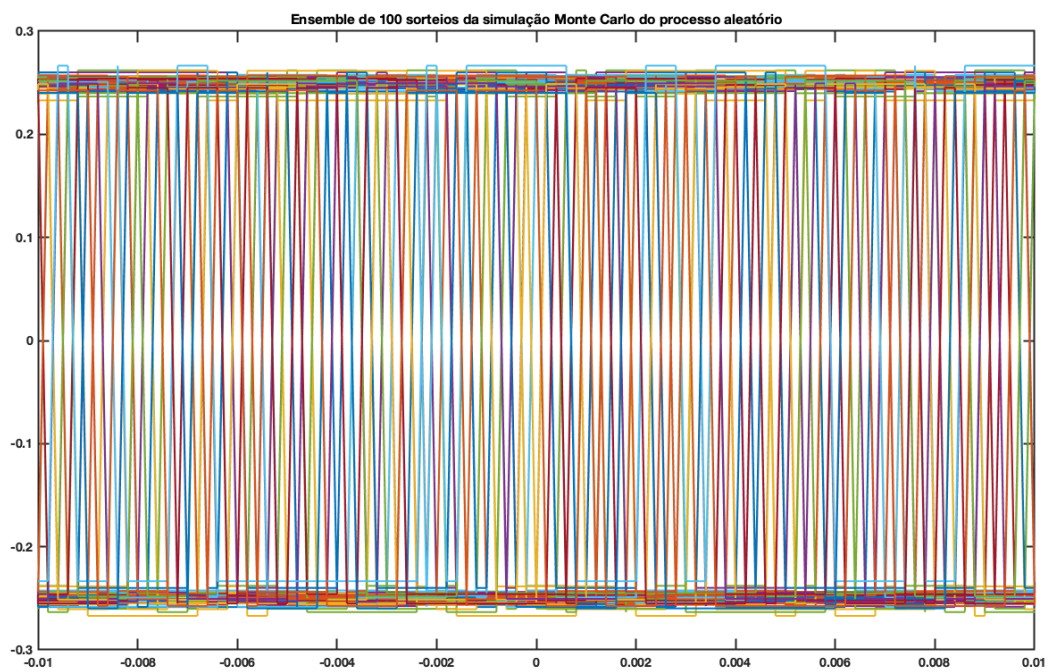


Figura 2: *Ensemble* de 100 sorteios Monte Carlo do processo aleatório RTN.

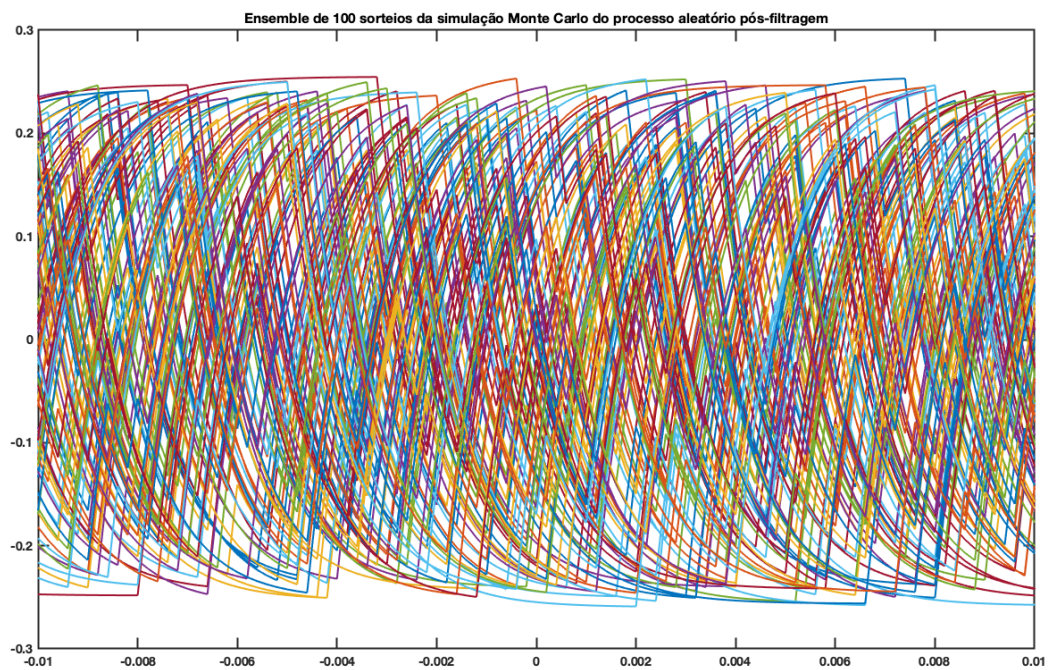


Figura 3: *Ensemble* do processo aleatório após a passagem pelo filtro passa-baixas.

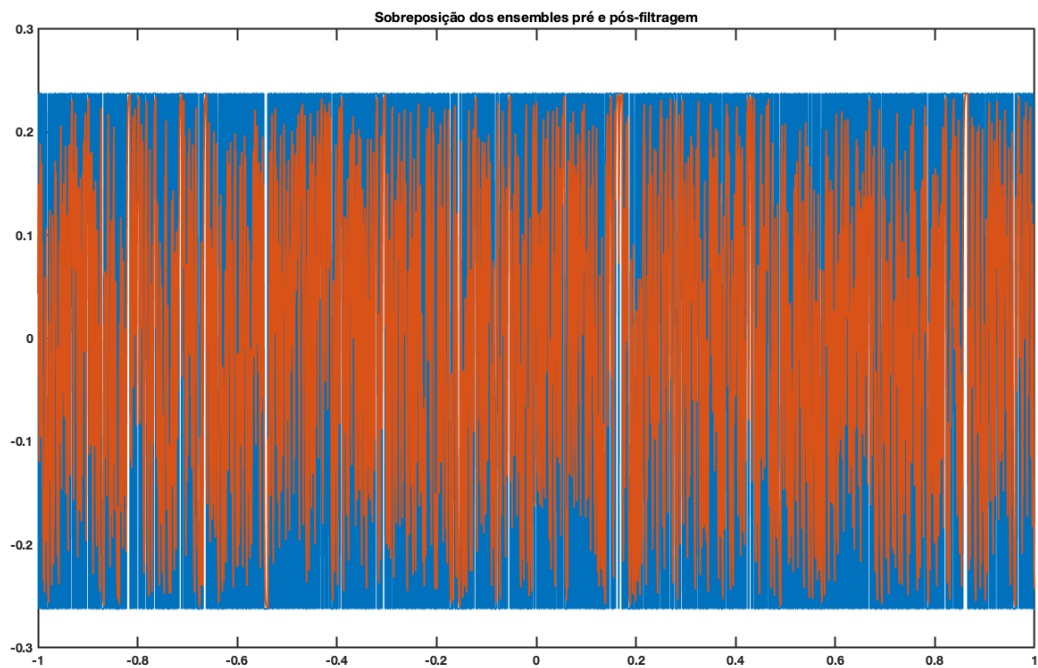


Figura 4: Comparação entre os *ensembles* pré e pós filtragem passa-baixas para uma simulação de Monte Carlo individual.

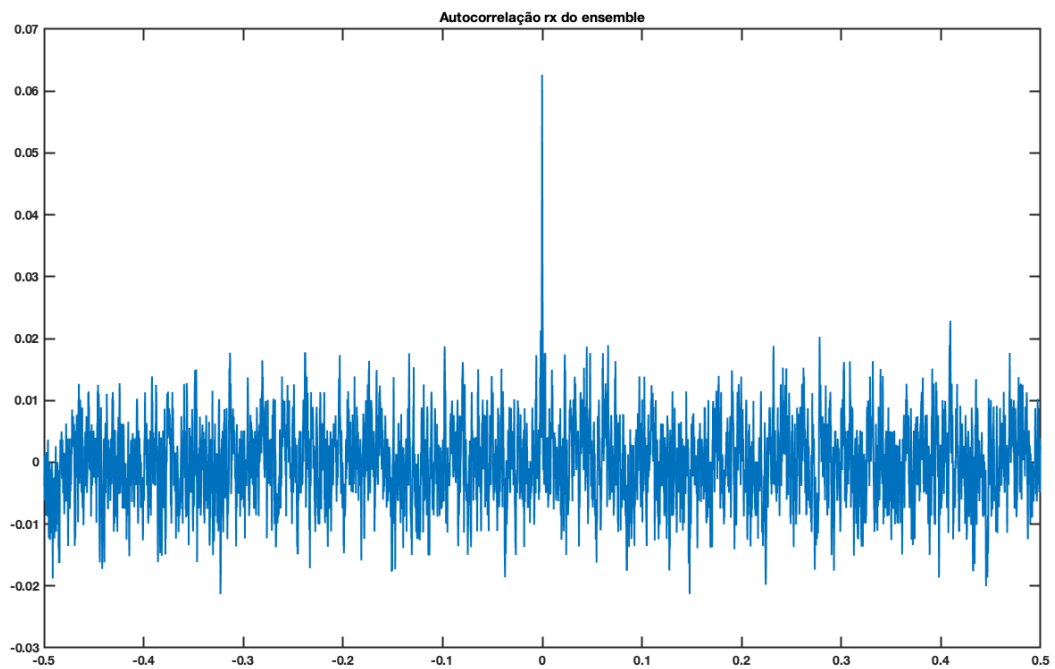


Figura 5: Estimativa da função autocorrelação do processo aleatório

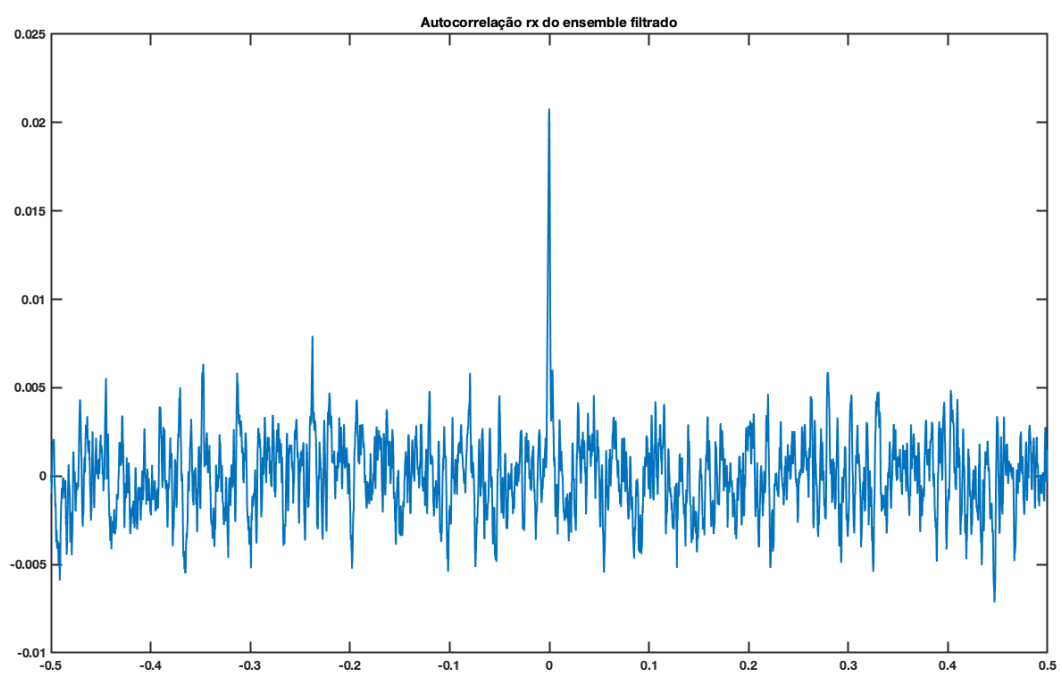


Figura 6: Estimativa da função autocorrelação do *ensemble* filtrado.

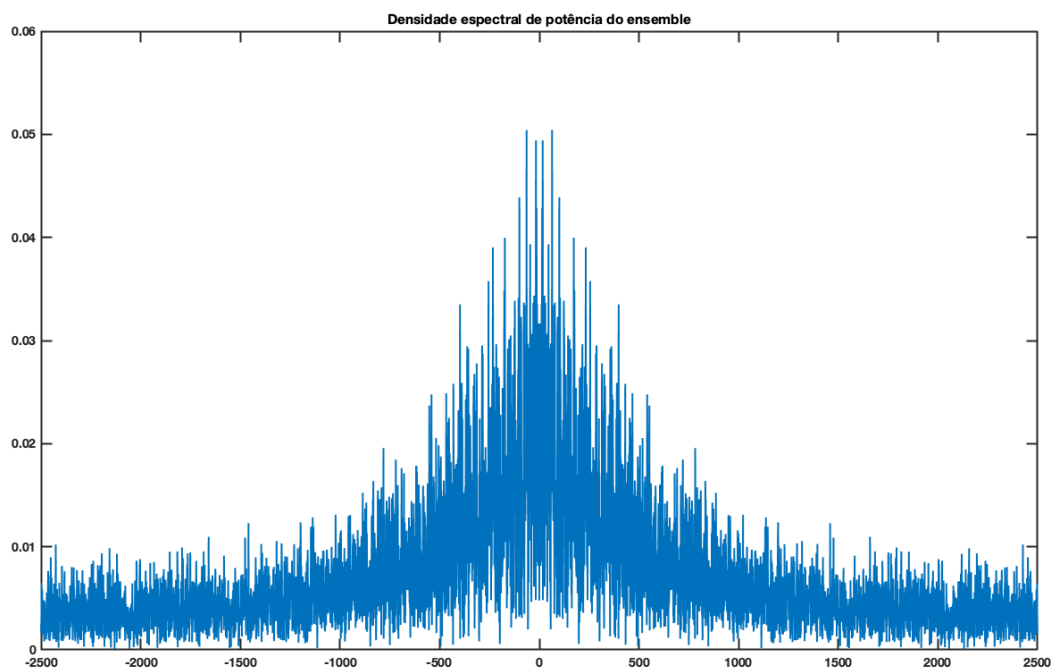


Figura 7: Densidade espectral de potência do processo.

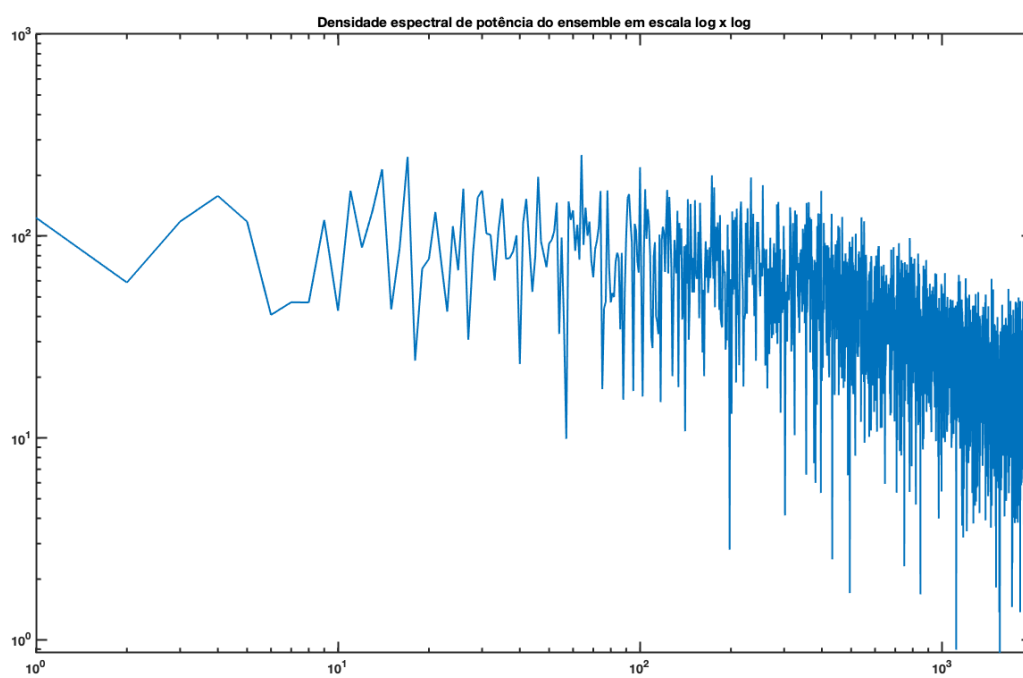


Figura 8: Densidade espectral de potência do processo em escala log x log.

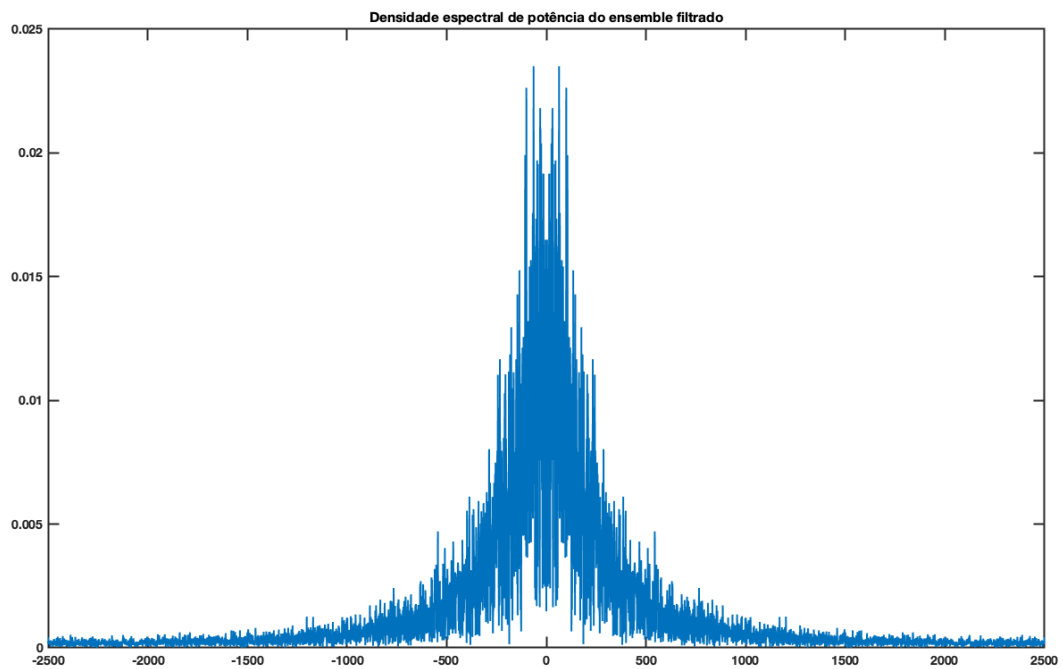


Figura 9: Densidade espectral de potência do processo pós filtragem passa-baixas.

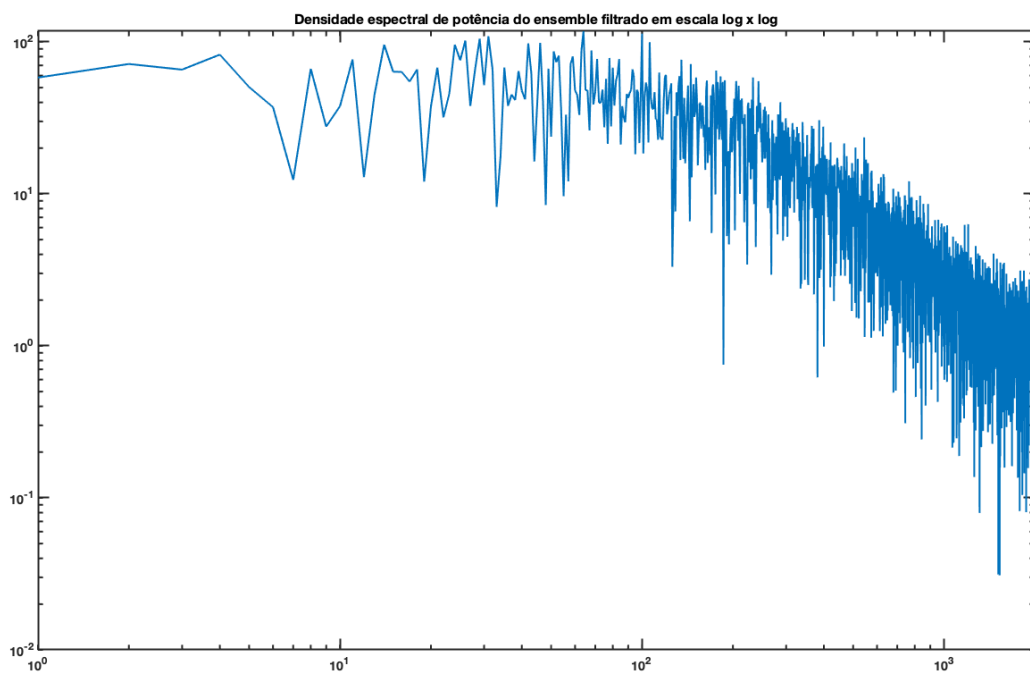


Figura 10: Densidade espectral de potência do processo pós filtragem passa-baixas em escala log x log.



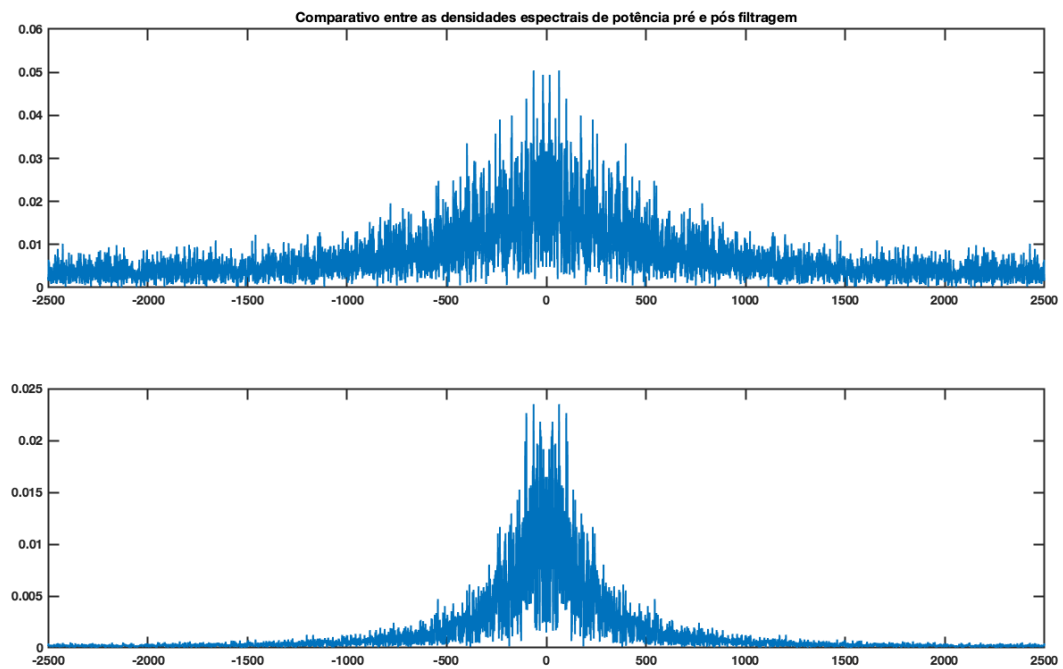


Figura 11: Comparativo 1:1 entre as densidades espectrais de potência.

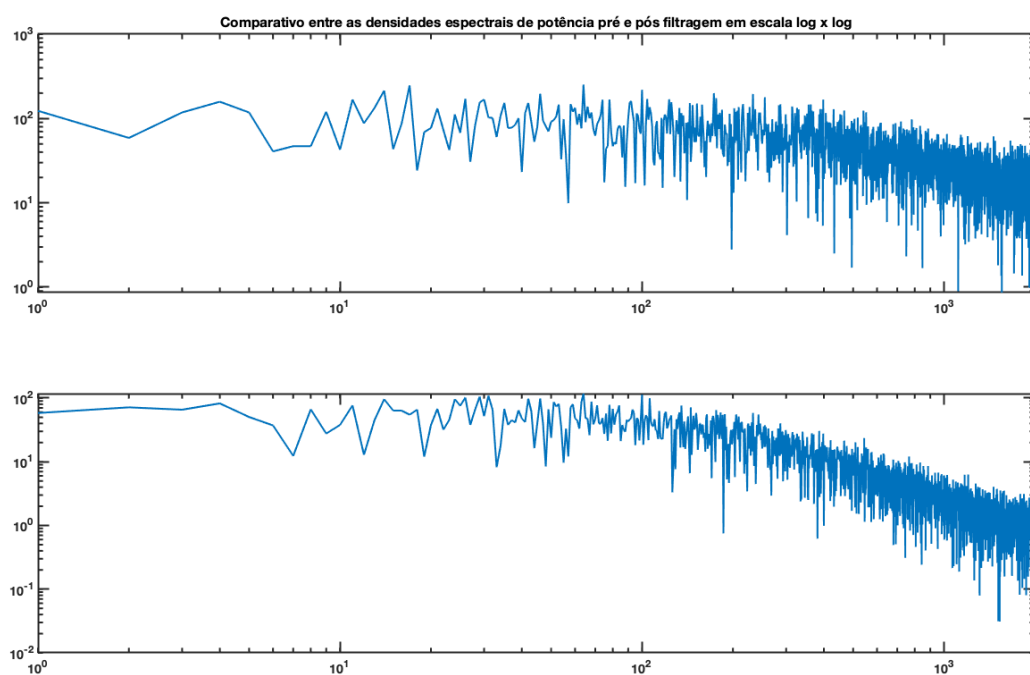


Figura 12: Comparativo 1:1 entre as densidades espectrais de potência em escala log x log.