Sinais bidimensionais

- Podem ser expressos através da expressão:

$$e^{i(\alpha x+\beta y)} = e^{2\pi i(px+qy)},$$

where p and q are frequencies in the x and y directions.

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = e^{i(\alpha x+\beta y)} = e^{i\alpha x}e^{i\beta y}$$
$$= \cos(\alpha x+\beta y) + i\sin(\alpha x+\beta y)$$
$$= \cos(\alpha x)\cos(\beta y) - \sin(\alpha x)\sin(\beta y) + i(\sin(\alpha x)\cos(\beta y) + \cos(\alpha x)\sin(\beta y))$$

Fourier

forward transform $S(k) = F\{s(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{-2\pi ikx}dx$

inverse transform $s(x) = F^{-1}\{S(k)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(k)e^{2\pi ikx}dk$

sistema

- Um sistema transforma um sinal de entrada (i.e. excitação) em um sinal de saída (i.e. resposta)

$$s_o = \mathcal{L}\{s_i\},$$

Sistemas lineares

System response L: $s_o = L\{s_i\}$

- might be a function of time t or space x

$$s_o(t) = L\{s_i(t)\} \quad \text{or} \quad s_o(x) = L\{s_i(x)\}$$

Finding the mathematical relationship between in- and output is called *modeling*

Linear systems fulfill *superposition principle*:

$$L\{c_1 s_1 + c_2 s_2\} = c_1 L\{s_1\} + c_2 L\{s_2\} \quad \forall c_1, c_2 \in \Re$$

where s_1, s_2 are arbitrary signals

- for example, consider an amplifier with gain A:

$$L\{c_1 s_1 + c_2 s_2\} = A(c_1 s_1 + c_2 s_2)$$
$$= c_1 A s_1 + c_2 A s_2 = c_1 L\{s_1\} + c_2 L\{s_2\}$$

Sistemas não lineares

- Muitos sistemas do mundo real possuem natureza não-linear

$$\mathcal{L}\{c_1 s_1 + c_2 s_2\} = (c_1 s_1 + c_2 s_2)^2$$
$$\neq (c_1 s_1)^2 + (c_2 s_2)^2$$

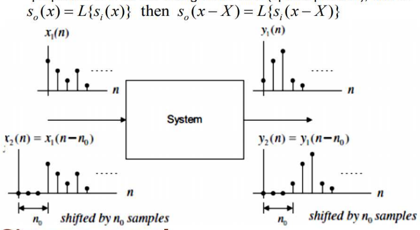
- Porém podem ser aproximados por uma soma ponderada de sinais.

Invariância espacial e temporal

Time-invariance (shift-invariance = LSI):

- properties of L do not change over time (spatial position), that is:

$$s_o(x) = L\{s_i(x)\} \quad \text{then} \quad s_o(x-X) = L\{s_i(x-X)\}$$



Sistema causal

- A causal system is the one in which the output $y(n)$ at time n depends only on the current input $x(n)$ at time n, and its past input sample values such as $x(n-1)$, $x(n-2)$, …. Otherwise, if a system output depends on future input values such as $x(n+1)$, $x(n+2)$, …. the system is noncausal.
- The noncausal system cannot be realized in real time.
  - Determine whether the following systems are causal or not.

$y(n) = 0.5x(n) + 2.5x(n-2)$, for $n \geq 0$

$y(n) = 0.25x(n-1) + 0.5x(n+2) - 0.4y(n-1)$ for $n \geq 0$

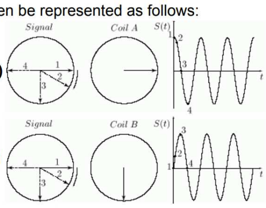
Representação do sinal

To improve SNR, we use two coils, one aligned with the *x*-axis and one aligned with the *y*-axis (*quadrature* scheme)

- the detected signal can then be represented as follows:

$$s_x(t) = Ae^{-\frac{t}{T_2}}\cos(-\omega_0 t)$$

$$s_y(t) = Ae^{-\frac{t}{T_2}}\sin(-\omega_0 t)$$



thus, coil x gives the real part and coil y the imaginary part of a complex-valued signal:

$$s(t) = Ae^{-\frac{t}{T_2}}e^{-i\omega_0 t}$$

Critério de Nyquist

Definition: The Nyquist frequency is ½ the sampling frequency (1/Ts)

Frequencies above the Nyquist frequency appear as aliases

No aliases appear if the function being sampled has no frequencies above the Nyquist frequency

Antialiasing

Simple idea:

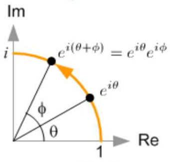
Remove frequencies above the Nyquist frequency before sampling

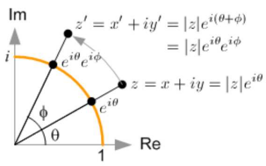
How? Filtering before sampling

Filtragem

Na conversão analógico → digital é necessário garantir que a entrada contenha apenas frequências representáveis, o que é feito por um filtro passa-baixa com frequência de corte $\frac{N}{2}$ Hz:

Rotações em 2D





$$\begin{aligned} z' &= |z'|e^{i(\theta+\phi)} \\ &= |z|e^{i(\theta+\phi)} \quad (\because |z'| = |z|) \\ &= |z|e^{i\theta}e^{i\phi} \\ &= (x+iy)e^{i\phi} \quad (\because z = |z|e^{i\theta} = x+iy) \\ &= (x+iy)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= \cos\phi\cdot x - \sin\phi\cdot y + i(\sin\phi\cdot x + \cos\phi\cdot y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Espaços vetoriais

The vector space $\mathbb{R}^N$ consists of vectors $\mathbf{x}$ of the form

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{1.6}$$

where the x_k are all real numbers. Vector addition and scalar multiplication are defined component by component as

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N), \quad c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_N),$$

where $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ and $c \in \mathbb{R}$. The space $\mathbb{R}^N$ is appropriate when we work with sampled audio or other one-dimensional signals. If we allow the x_k in (1.6) and scalar c to be complex numbers, then we obtain the vector space $\mathbb{C}^N$. That $\mathbb{R}^N$ or $\mathbb{C}^N$ satisfy the properties of a vector space (with addition and scalar multiplication as defined) follows easily, with zero vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ and additive inverse $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ for any vector $\mathbf{x}$.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é um conjunto V munido das operações de soma (entre elementos de V) e multiplicação de elementos de V por escalares (em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$) com as seguintes propriedades:

1. Fecho por adição: $\forall u, v \in V$ a soma $u + v$ está bem definida e pertence a V;
2. Fecho por multiplicação por escalar: $\forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\forall \alpha \in \mathbb{C}$) temos αu bem definido e pertence a V;
3. A soma e o produto por escalar satisfazem as propriedades algébricas abaixo $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $\forall u, v \in V$:

(a) $u + v = v + u$ (comutatividade)

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associatividade)

(c) $\exists$ um vetor $\mathbf{0}$ t.q. $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ (elemento neutro da soma)

(d) $\forall u \in V$ $\exists$ um vetor w t.q. $u + w = \mathbf{0}$ (elemento inverso da soma)

(e) $(ab)u = a(bu)$

(f) $(a + b)u = au + bu$

(g) $a(u + v) = au + av$

(h) $1u = u$

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_11 & \ldots & a_1n \\ a_21 & \ldots & a_2n \\ \vdots & \ddots & \\ a_n1 & \ldots & a_nn \end{pmatrix} a_{i,j} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \right\}$$

$$M_{m,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_11 & \ldots & a_1n \\ a_21 & \ldots & a_2n \\ \vdots & \ddots & \\ a_n1 & \ldots & a_nn \end{pmatrix} a_{i,j} \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \right\}$$

TABLE 1.1 Discrete Signal Models and Uses

Notation	Vector Space Description
$\mathbb{R}^N$	$\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \mathbb{R}\}$, finite sampled signals
$\mathbb{C}^N$	$\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \mathbb{C}\}$, analysis of sampled signals
$L^\infty(\mathbb{N})$ or ℓ^∞	$\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) : x_i \in \mathbb{R},\ \lvert x_i\rvert \leq M$ for all $i \geq 0\}$ bounded, sampled signals, infinite time
$L^2(\mathbb{N})$ or ℓ^2	$\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}$ or $x_i \in \mathbb{C}$, $\sum_k \lvert x_k\rvert^2 < \infty\}$ sampled signals, finite energy, infinite time
$L^2(\mathbb{Z})$	$\{\mathbf{x} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}$ or $x_i \in \mathbb{C}$, $\sum_k \lvert x_k\rvert^2 < \infty\}$ sampled signals, finite energy, bi-infinite time
$M_{m,n}(\mathbb{R})$	Real $m \times n$ matrices, sampled rectangular images
$M_{m,n}(\mathbb{C})$	Complex $m \times n$ matrices, analysis of images

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ i\sin x &= ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \\ e^{ix} = \cos x + i\sin x &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda = 2\pi/|\omega| \\ &q = l/\lambda = \omega/2\pi \\ &(\text{so } \omega = 2\pi q) \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} &e^{2\pi iqk/N} = e^{2\pi i\tilde{q}k/N} \\ &1 = \left(e^{2\pi i(\tilde{q}-q)/N}\right)^k \\ &\tilde{q} - q = mN \end{aligned}}$$

$$\mathbf{E}_{N,k} = \begin{bmatrix} e^{2\pi ik0/N} \\ e^{2\pi ik1/N} \\ \vdots \\ e^{2\pi ik(N-1)/N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{N,k}(m) = e^{2\pi ikm/N}$$

Geração de ondas acústicas

- As ondas de ultrassom são geradas devido ao efeito piezoelétrico
  - Consiste na variação das dimensões físicas de certos materiais quando sujeitos a campos elétricos
  - O contrário também ocorre, ou seja, a aplicação de pressões
- Por exemplo, pressões acústicas que causam variações nas dimensões de materiais piezoelétricos provocam o aparecimento de campos elétricos
- Tensão alternada produz oscilações nas dimensões do cristal.

Transdutores

- Pulsos de alta frequência são produzidos por um gerador de pulso e enviados ao transdutor por un transmissor
- O sinal elétrico faz com que o cristal momentaneamente mude de tamanho, aumentando e diminuindo a pressão na frente do transdutor, produzindo as ondas de ultrasom
- Os ecos ultrassônicos que retornam são convertidos novamente em sinais elétricos utilizando o mesmo ou outro transdutor

Características de um feixe de ultrassom

- Frentes da onda são paralelas à superfície do transdutor

Analógico e digital

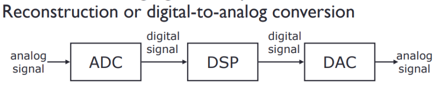
- Signals can be analog or digital
- Analog signals
  - Represent data that is continuous
  - Analog signals can have an infinite number of values in a range
- Digital signals
  - Represent data that can take only discrete values
  - Digital signals have a limited number of values

Sinal analógico

- An analog signal may be modeled as a real-valued function of a real independent variable t, which is usually time.
  - Suppose that at each time t within some interval $a<t<b$ we perform a measurement, and this measurement yields a real number
  - In this case our measurements are naturally represented by a real-valued function $x(t)$ with domain $a<t<b$.
  - We will refer to $x(t)$ as an *analog signal*.
  - The function $x(t)$ might represent the intensity of sound at a given location (an audio signal), the current through a wire, the speed of an object, and so on.
- Many physical processes are naturally modeled by analog signals
- Analog models also have the advantage of being amenable to analysis using methods from calculus and differential equations
- In general, in signal processing we are faced by a few persistent annoyances:
  - We almost never have an explicit formula for $x(t)$
  - Most signals are very complex
  - Most signals have noise.
- Exemplos: tensão e corrente, pressão, temperatura, velocidade, etc

Sinais digitais

- Represent signals by a sequence of numbers
  - Sampling or analog-to-digital conversions
- Perform processing on these numbers with a digital processor
  - Digital signal processing (DSP)
  - Reconstruct analog signal from processed numbers
  - Reconstruction or digital-to-analog conversion



- Sequência base de DNA 1. Sensores de Presença 2. Botões
- Número de alunos em uma turma
- População da enésima geração de certas espécies

Sinais periódicos

A signal is periodic if $f(x)=f(x+X)=f(x)$

- we call X the period of the signal
- if there is no such X then the signal is aperiodic
- we call X the period of the signal
- if there is no such X then the signal is aperiodic

Sinus

$A\sin(\frac{2\pi x}{X}+\varphi_x)$

where φ_x is the phase shift and A is the amplitude

Pros and Cons of Digital Signal Processing

- Advantages
  - Accuracy can be controlled by choosing word length
  - Dynamic range can be controlled using floating point numbers
  - Flexibility can be achieved with software implementations
  - Digital storage is cheap
  - Digital information can be encrypted for security
  - Price/performance and reduced time-to-market
- Disadvantages
  - Sampling causes loss of information
  - A/D and D/A requires mixed-signal hardware
  - Limited speed of processors
  - Quantization and round-off errors

Amostragem

- Função do objeto real
- Processo de discretização de uma função contínua em um array (e.g. matriz) de valores

Amostragem

measuring the signal's instantaneous value at specific times over a finite interval of interest.

analog-to-digital ("A-to-D")

More explicitly, suppose that the signal $x(t)$ is defined on the time interval $a \le t \le b$. Choose an integer $N \ge 1$ and define the *sampling interval* $\Delta t = (b-a)/N$. We then measure $x(t)$ at times $t = a, a+\Delta t, a+2\Delta t, \ldots$, to obtain samples

$$x_n = x(a+n\Delta t), \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Define $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Podemos mapear o intervalo $[-E,+E] \subseteq \mathbb{R}$ em 2^B códigos distintos subdividindo o intervalo em segmentos de tamanho $\frac{2E}{2^B}$ e associando cada intervalo da forma $\left[-E+k\frac{2E}{2^B}, -E+(k+1)\frac{2E}{2^B}\right)$ ao código k.

Amostragem e quantização

- The combination of sampling and quantization allows us to *digitize* a signal, and thereby convert it into a form suitable for computer storage and processing
- Unfortunately, quantization is a process that corrupts the algebraic structure afforded by the vector space model
- In addition quantization introduces irreversible, though usually acceptable, loss of information.

Ruído de amostragem

- If the noiseless samples are given by x_n, the noisy sample values y_n might be modeled as $y_n=x_n+e_n$ where e_n represents the noise in the nth measurement.
- The errors e are usually assumed to be distributed according to some probability distribution, known or unknown.

Amostragem em 2 dimensões

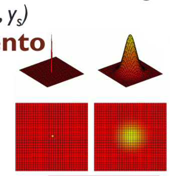
- Obtenção de valores $f_{m,n}$, para $m = 1,\ldots,M$ e $n = 1,\ldots,N$ onde $f_{m,n}=f(x_m, y_n)$,
- Os valores $x_1, x_2, \ldots$ são equiespaçados com intervalo Δx
  - ou frequência de amostragem $1/\Delta x$
- Os valores $y_1, y_2 \ldots$ são equiespaçados com intervalo Δy ou Δx
  - ou frequência de amostragem $1/\Delta y$
- Podemos utilizar algum tipo de função integral ou média próxima ao ponto (x_p, y_q)

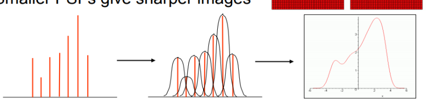
Função de espalhamento

Each pixel is not a sharp spike, but represented by a point spread function (PSF)

The PSFs overlap and form a continuous function (for the eye)

Smaller PSFs give sharper images

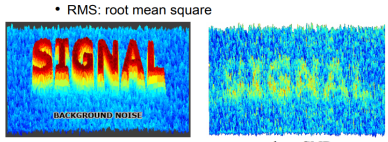




Razão sinal-ruído (SNR)

Signal-to-Noise ratio (SNR) = S_{RMS} / N_{RMS}

- RMS: root mean square



high SNR low SNR

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}.$$

The corresponding formula for a continuous function (or waveform) $f(t)$ defined over the interval $T_1 \le t \le T_2$ is

$$f_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} [f(t)]^2\,dt},$$

Fórmula de Euler

$$z(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

In the real-valued sine/cosine case we only need to work with $\omega > 0$, since $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ and $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$.

Any function that can be constructed as a sum using negative values of ω has an equivalent expression with positive ω.

Relação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

From this we have (with $\theta = \omega t$ and $\theta = -\omega t$)

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\ \sin(\omega t),$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\ \sin(\omega t),$$

which can be solved for $\cos(\omega t)$ and $\sin(\omega t)$ as

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Periodicidade de $e^{i\omega t}$

O período (comprimento de onda) λ é o menor valor positivo que verifica a seguinte propriedade:

$$\lambda = \text{período de } e^{i\omega t} \Leftrightarrow e^{i\omega(t+\lambda)} = e^{i\omega t}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$e^{i\omega t}e^{i\omega\lambda} = e^{i\omega(t+\lambda)} = e^{i\omega t}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{i\omega\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow |\omega|\lambda = 2\pi$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Frequência

A frequência é dada por $q = \frac{1}{\lambda}$ que é o número de oscilações completas por unidade da variável t. Se t é tempo, q é medido em Hz. Se t é espaço, q é medido em ciclos/unidade espacial.

Note que $q = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\omega|}{2\pi}$. A função básica $e^{i\omega t}$ pode ser expressada equivalentemente como $e^{2\pi \cdot i \cdot q \cdot t}$ (admitindo que q poderia ser negativo também).

Representação geral

$$Ae^{i(2\pi kx+\phi)} = A(\cos(2\pi kx+\phi) + i\sin(2\pi kx+\phi))$$

- the *cos* term is the signal's real part
- the *sin* term is the signal's imaginary part
- *A* is the amplitude, φ the phase shift, *k* determines the frequency

se $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é limitada e tiver uma quantidade finita de descontinuidades, existem constantes $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ tais que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ik(\frac{1}{T})t}$$

Luz visível

- Radiação eletromagnética com comprimentos de onda na faixa entre 370nm e 750nm, composta por fótons capazes de sensibilizar o olho humano

Radiação eletromagnética

- Fótons que navegam em ondas periódicas
  - Transportam energia
  - Luz viaja em linha reta em um certo meio
  - Não requer meio de propagação

Ondas acústicas

- Ondas de pressão que propagam pela matéria através da compressão e expansão de material
- Requer meio material de propagação
- Classificação (frequência):
  - Infrassom • Som audível • Ultrassom

Humanos: 20Hz ~ 20kHz

O que é som ?

- Ondas mecânicas longitudinais de compressão e rarefação do meio capazes de sensibilizar o sistema auditivo humano
- Sound wave propagate by longitudinal motion (compression/expansion), but not transverse motion (side-to-side)

Processamento de sinais

- Humans are the most advanced signal processors
  - Speech and pattern recognition, speech synthesis,…
- We encounter many types of signals in various applications
  - Electrical signals: voltage, current, magnetic and electric fields,…
  - Mechanical signals: velocity, force, displacement,…
  - Acoustic signals: sound, vibration,…
  - Other signals: pressure, temperature,…
- Most real-world signals are analog
  - They are continuous in time and amplitude
  - Convert to voltage or currents using sensors and transducers
- Analog circuits process these signals using
  - Resistors, Capacitors, Inductors, Amplifiers, etc

Sinais e sistemas

- Sinais são funções matemáticas de uma ou mais variáveis independentes, capazes de representar uma variedade de processos físicos
- Sistemas são entidades que respondem aos sinais e por sua vez, produzem novos sinais
  - Exemplo: Instrumentos médicos realizam mensurações físicas (i.e. amostram sinais) e os transformam em imagens (i.e. geram novos sinais).

Sinal causal

- Um sinal é causal se for zero para t < 0
- O instante em que o sinal inicia é chamado de tempo inicial
- Nós geralmente tomamos a tempo inicial igual a zero
- Sinais causais são facilmente criados pela multiplicação de qualquer sinal contínuo pelo sinal de degrau unitário

Sequência causal

- Uma sequência que é diferente de zero em um intervalo finito de índices é chamada de seqüência de comprimento finito.
- Uma sequência cujas amostras são de valor zero para índices negativos é causal
- Uma sequência anti-causal pode ter amostras diferentes de zero apenas para índices negativos

Sinal determinístico

- Um sinal que pode ser descrito por uma forma matemática explícita é determinístico
- Um sinal determinístico pode ser periódico ou aperiódico
- Sinal periódico consiste em uma forma básica de duração finita que é replicada infinitamente
- Um sinal que não pode ser descrito em uma forma matemática explícita é chamado aleatório, também conhecido como não-determinístico ou estocástico.