**CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI**
**MESTRADO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

Vitor Stabile Garcia N° 417121-1

# Resolução Lista de Exercícios 01
# Métodos Matemáticos em Engenharia Química
# Luís F. Novazzi

São Bernardo do Campo

1° Período de 2017

1) Defina as matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
b) $\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{A}$
c) $\boldsymbol{AB}$
d) $\boldsymbol{BA}$

```
%Defina as Matrizes A e B
A=[2,-4,5;3,1,-2;1,1,4]
B=[-5,6,7;0,-1,2;4,0,4]

A =

     2    -4     5
     3     1    -2
     1     1     4

B =

    -5     6     7
     0    -1     2
     4     0     4
```

a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

```
%Faça A + B
C = A + B



C =

    -3     2    12
     3     0     0
     5     1     8
```

b) $\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{A}$

```
%Faça B - 3A
D = B - 3*A



D =

   -11    18    -8
    -9    -4     8
     1    -3    -8
```

c) $\boldsymbol{AB}$

```
%Faça AB
E = A*B



E =

    10    16    26
   -23    17    15
    11     5    25
```

d) $\boldsymbol{BA}$

```
%Faça B*A
F = B*A



F =

    15    33    -9
    -1     1    10
    12   -12    36
```

2) Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Determinar $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ e $\boldsymbol{A}^8$. Descreva a matriz $\boldsymbol{A}^n$ para valores elevados do número inteiro $n$.

```
%Seja A
A = [1,1/3;0,1/4];


%Faça A^2
B = A^2;

B =

    1.0000    0.4167
         0    0.0625

%Faça A^3
C = A^3;

C =

    1.0000    0.4375
         0    0.0156
```

```
%Faça A^8
D = A^8;


D =

   1.0000    0.4444
   0         0.0000
```

```
%Matriz para A^n onde n são números inteiros
function An = calcAn(n)
A = [1,1/3;0,1/4];
An = A^n;
F = round(n);
G = mod(n,F);
if G>0
    An = ['digitar um numero inteiro']
else
    An
end

%Exemplo: Calculando A^8 com a function criada

calcAn(8)

An =

   1.0000    0.4444
   0         0.0000
```

3) Sejam as seguintes matrizes:

$$\boldsymbol{A11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A12} = \text{zeros}(2,2) \text{ e } \boldsymbol{A22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Construa uma matriz $\boldsymbol{A}$ constituída pelos seguintes elementos $[\boldsymbol{A11}\boldsymbol{A12}; \boldsymbol{A12}\boldsymbol{A22}]$.

```
A11 = [1,0;0,-1];
A12 = zeros(2,2);
A22 = [1,1;0,0];


%a) Construa a matriz A constituída de [A11,A12;A12,A22]
A = [A11,A12;A12,A22];


A =

     1     0     0     0
     0    -1     0     0
     0     0     1     1
     0     0     0     0
```

b) Determine o menor valor de um número positivo e inteiro $n$, diferente de 1 e que satisfaça a relação $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}$.

```
%O próximo valor, diferente de 1, positivo e inteiro, será n = 2.

A11 = [1,0;0,-1];
A12 = zeros(2,2);
A22 = [1,1;0,0];
A = [A11,A12;A12,A22];

A =

     1     0     0     0
     0    -1     0     0
     0     0     1     1
     0     0     0     0

n=2
B = A^n

B =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     1
     0     0     0     0

C = sum(sum(A)) == sum(sum(B))

%Se a igualdade acima for verdadeira, o valor de C será 1, caso
%contrario será falso, logo 0.

C =

   logical

   0


%Como C é 0, iremos testar com n = 3

n=3
B = A^n

C = sum(sum(A)) == sum(sum(B))

C =

   logical

   1
%Como C é 1, a igualdade é verdadeira, logo, o menor valor de n,
positivo e inteiro, diferente de 1, que satisfaça a igualdade A^n =
A é 3
```

4) Um planejamento fatorial dois a dois com ponto central foi usado para se avaliar a influência da porcentagem de catalisador ($x_1$) e da temperatura ($x_2$) sobre o grau de conversão ($Y$) de uma reação para a produção de biodiesel. Foram obtidos os seguintes dados experimentais:

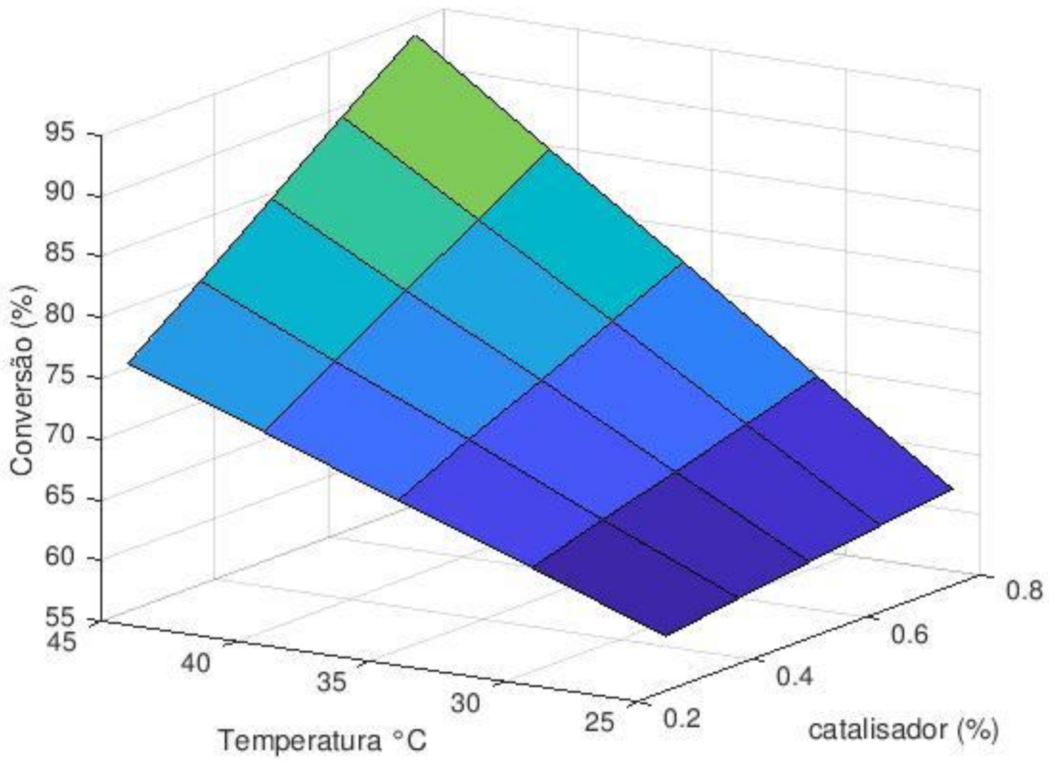
| $x_1$ / % | $x_2$ / ºC | $Y$ / % |
|---|---|---|
| 0,25 | 25 | 58,32 |
| 0,75 | 25 | 61,61 |
| 0,25 | 45 | 74,01 |
| 0,75 | 45 | 92,42 |
| 0,50 | 35 | 78,14 |

Sugeriu-se que o grau de conversão da reação pode ser aproximado por uma função do tipo $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2$, na qual os parâmetros $a_i$ devem ser ajustados em função dos dados experimentais. Verifique se a aproximação é boa, determinando o coeficiente de correlação entre os valores experimentais e os previstos pelo modelo.Calcule os coeficientes $a_i$ e represente a função graficamente, em três dimensões, utilizando a função *surf* em Matlab. Nesse tipo de problema, os coeficientes podem ser ajustados pela expressão $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$, na qual$\boldsymbol{a}$ é o vetor de coeficientes escrito como$[a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$, **X** uma matriz que contém os dados de entrada acrescidos de uma coluna de **1**, ou seja, $X = [1\ x_1x_2x_1x_2;\ \cdots]$e **Y** é um vetor que contém os dados experimentais.

```
%Calcular os Coeficientes ai, através do ajuste a = ((X'*X)^-1)*X'*Y
X =
[1,0.25,25,0.25*25;1,0.75,25,0.75*25;1,0.25,45,0.25*45;1,0.75,45,0.75*
45;1,0.5,35,0.5*35];
A = X';
B = A*X;
C = inv(B);
Y = [58.32;61.61;74.01;92.42;78.14];
a = C*A*Y;

a =

   47.8225
  -31.2200
    0.4065
    1.5120

a0 = a(1,1);

a0 =

   47.8225

a1 = a(2,1);

a1 =

  -31.2200

a2 = a(3,1);

a2 =

    0.4065
```

```
a3 = a(4,1);

a3 =

    1.5120

%Teste da equação pegando os valores da tabela
Y1 = a0 + a1*0.25+a2*25+a3*0.25*25
Y2 = a0 + a1*0.75+a2*25+a3*0.75*25
Y3 = a0 + a1*0.25+a2*45+a3*0.25*45
Y4 = a0 + a1*0.75+a2*45+a3*0.75*45
Y5 = a0 + a1*0.5+a2*35+a3*0.5*35

Y1 =

   59.6300


Y2 =

   62.9200


Y3 =

   75.3200


Y4 =

   93.7300


Y5 =

   72.9000
```

```
%Realizando plotagem gráfica em 3D
x1 = linspace(0.25,0.75,5);
x2 = linspace(25,45,5);
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
Z = a0 + a1.*X1 + a2.*X2 + a3.*X1.*X2;
surf(X1,X2,Z)
xlabel('catalisador (%)')
ylabel('Temperatura °C')
zlabel('Conversão (%)')
```




5) Dados os vetores $x = [1\ 5\ 2\ 8\ 9\ 5\ 1]$ e $y = [5\ 2\ 2\ 6\ 0\ 0\ 2]$, executar e explicar os resultados dos seguintes comandos:

a) $x > y$

b) $x == y$

c) $(x > y)\&(x < 8)$

```
x = [1,5,2,8,9,5,1];
y = [5,2,2,6,0,0,2];
```

a) $x > y$

```
ans =

  1×7 logical array

   0   1   0   1   1   1   0

%o mesmo compara os valores de cada membro do vetor linha x com os
membros do vetor
%linha y, mediante o uso do operador logico >. Logo, para valores 0, o
resultado é falso. Para valores 1, o
%resultado é verdadeiro. Como 1>5, 2>2 e 1>2, são condições falsas,
sabemos
%que o resultado será 0.Como 5>2, 8>6, 9>0, e são condições
verdadeiras, o
%resultado será 1.
```

b) $x == y$

```
ans =

  1×7 logical array

   0   0   1   0   0   0   0
```

```
%o mesmo compara os valores de cada membro do vetor linha x com os
membros do vetor
%linha y, mediante o uso do operador logico ==. Logo, para valores 0,
o resultado é falso. Para valores 1, o
%resultado é verdadeiro. Como 2==2, é uma condição verdadeira, sabemos
%que o resultado será 1.
```

c) $(x > y)\&(x < 8)$

```
ans =

  1×7 logical array

   0   1   0   0   0   1   0
```

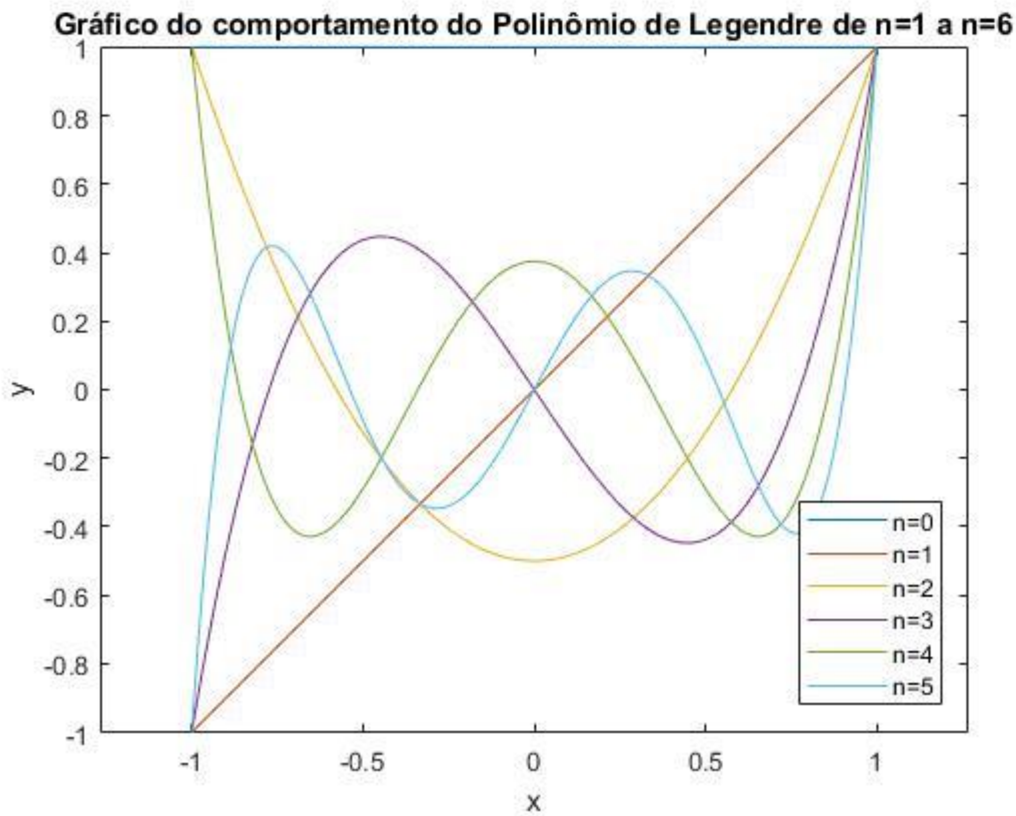
```
%o mesmo compara os valores de cada membro do vetor linha x com os
membros do vetor
%linha y, mediante o uso do operador logico >, e se os valores do
vetor x<8.
%Satisfeita essas DUAS condições, o resultado é verdadeiro, ou seja,
1.
%Caso contrário, será 0
%Como os únicos valores do vetor x que são maiores do que o vetor y, e
%menores que 8, são os valores, 5 da coluna 2 e 5 da coluna 6. Os
resultados são verdadeiros
```

6) Os polinômios de Legendre, $P_n(x)$, são definidos pela seguinte relação de recorrência:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{(n+1)}$$

com $P_0(x) = 1$ e$P_1(x) = x$. Escreva um *script* em Matlab que compute os próximos três polinômios de Legendre e faça um gráfico do comportamento desses seis polinômios no intervalo de [-1,1].

```
%Construir um Script para polinômios de Legendre e contruir o gráficos
desses 6 polinomios
syms x;
k = 7;
n = 1;
P=sym([0,1,x]);
while length (P) ~= k
P(1,n+3)=(((2*(n))+1)*x*P(1,n+2)-(n)*P(1,n+1))/(n+1);
n = n+1;
end

P(1,2)

1

P(1,3)

x

P(1,4)

(3*x^2)/2 - 1/2

P(1,5)

(5*x*((3*x^2)/2 - 1/2))/3 - (2*x)/3

P(1,6)

3/8 - (9*x^2)/8 - (7*x*((2*x)/3 - (5*x*((3*x^2)/2 - 1/2))/3))/4

P(1,7)

(8*x)/15 - (4*x*((3*x^2)/2 - 1/2))/3 - (9*x*((7*x*((2*x)/3 -
(5*x*((3*x^2)/2 - 1/2))/3))/4 + (9*x^2)/8 - 3/8))/5

ezplot(x,P(1,2),[-1,1])
hold on
ezplot(x,P(1,3),[-1,1])
ezplot(x,P(1,4),[-1,1])
ezplot(x,P(1,5),[-1,1])
ezplot(x,P(1,6),[-1,1])
ezplot(x,P(1,7),[-1,1])
title('Gráfico do comportamento do Polinômio de Legendre de n=1 a
n=6')
legend('n=0','n=1','n=2','n=3','n=4','n=5','n=6','Location','southeast
')
```




7) O valor de $\pi$ pode ser estimado pela seguinte série:

$$\frac{\pi^2 - 8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

Em qual termo a série deve ser truncada para se obter uma precisão de $10^{-12}$ ? Qual é a precisão tem a soma de 100 termos dessa série?

```
%Calculo da Precisão da Serie
n = 1;
k = 1;
i=0
V = [1./(((2*n-1).^2).*((2*n+1).^2))];
S = sum(V);
pi0 = sqrt(S*16+8);
while abs(pi0-pi)>10^-12
k=k+1;
    n=(1:k);
    V = [1./(((2*n-1).^2).*((2*n+1).^2))];
    S = sum (V);
pi0 = sqrt(S*16+8);
    i=i+1
end
format long
i

i =

        3756
```

```
%Precisão para n = 100
k = 100;
n=(1:k);
V = [1./(((2*n-1).^2).*((2*n+1).^2))];
S = sum (V);
pi0 = sqrt(S*16+8);
d = abs(pi-pi0);

d =

   5.2262e-08
```

8) Considere as seguintes fórmulas de recorrência:

$$F_1 = 2 \qquad\qquad G_1 = 1$$
$$F_2 = 1 \qquad\qquad G_2 = 2$$
$$F_n = 2F_{n-1} + G_{n-2} \text{ com } n \geq 3 \qquad\qquad G_n = G_{n-1} + 3F_{n-2} \text{ com } n \geq 3$$

Escreva uma *function* em Matlab que tenha como variável de entrada um número inteiro $n$ maior ou igual a 1 retorne como saída os valores de $F_n$ e $G_n$. Teste seu programa com $n$ igual a 5, por exemplo.

```
%Escrever uma function que tenha como entrada um número n >= 1 e sua
saída seja os valores de Fn e Gn
function [G,F] = calcFG(n)
k=3;
if n == 1
F = [2,1];
G = [1,2];
F = F(1,1);
G = G(1,1);
elseif n == 2
F = [2,1];
G = [1,2];
F = F(1,2);
G = G(1,2);
elseif n>=3
F = [2,1];
G = [1,2];
while length (F) ~= n && length (G) ~= n
    F(1,k) = 2*F(1,k-1)+G(1,k-2);
    G(1,k) = G(1,k-1)+3*F(1,k-2);
    k = k+1;
end
end
F = F(1,n);
G = G(1,n);

%Teste com n= 5
>> [F,G] = calcFG(5)

F =

    20


G =

    24
```

9) Diz-se que uma matriz quadrada composta por números inteiros é um quadrado mágico quando a soma dos elementos de cada linha, a soma dos elementos de cada coluna e a soma dos elementos das diagonais principal e secundária são iguais, como no seguinte caso:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Escreva uma *function* em Matlab que tenha como variável de entrada uma matriz quadrada e retorne 1 se se tratar de um quadrado mágico ou 0 se não for o caso.

```
%Escrever uma function que valide um quadrado mágico
function f = quamag(A)
B = size(A);
C = B(1,1);
D = B(1,2);
E = sum(A);
F = sum(A');
G = sum(diag(A));
H = sum(diag(fliplr(A)));
I = sum(sum(A));
J = sum(sum(A'));
K = I+J;
L = C*(G+H);
if C~=D
f = ('Por Favor, inserir uma matriz quadrada')
elseif I==J && G==H && K==L && C==D
f = ('1-Sua matriz é um quadrado mágico')
else
 f = ('0-Sua matriz não é um quadrado mágico')
end

%Teste do quadrado mágico do enunciado

 A = [8,0,7;4,5,6;3,10,2]




A =

     8     0     7
     4     5     6
     3    10     2

quamag(A)

f =

    '1-Sua matriz é um quadrado mágico'
```

10) Para condições de escoamento turbulento e incompressível de fluidos em tubulações, o fator de atrito de Darcy, $f$, pode ser estimado pela equação implícita de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86\ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Nessa equação, $\varepsilon/D$ representa a rugosidade relativa da tubulação e $Re$ indica o número de Reynolds. Escreva uma *function* em Matlab que tenha como argumentos de entrada os parâmetros de $\varepsilon/D$ e $Re$ e retorne como saída com o valor de $f$. Na resolução da equação implícita de Colebrook, utilize o método das substituições sucessivas. Faça um teste em sua função, levando em conta uma rugosidade relativa de $10^{-4}$ e um número de Reynolds igual a $5 \cdot 10^4$. Compare sua resposta com o diagrama de Moody.

```
%Escrever uma function para a equação de Coolebrook
function [f,i] = cole(r,k)
i = 1;
if r<2300
f = ('A Equação de Colebrook é valida para Reynolds >= 2300')
i = 1;
elseif k<0
f = ('A Rugosidade Relativa não pode ser negativa');
i= 1;
elseif k>0.05;
f = ('A Rugosidade Relativa não está no intervalo do diagrama de
Moody');
i = 1;
else
    format long
f1 = 1;
f = ((1)/(0.86*(log((k/3.7)+(2.51/(r*sqrt(f1)))))))^2;
    while abs(f - f1)>0.000001
f1 = f;
f = ((1)/(0.86*(log((k/3.7)+(2.51/(r*sqrt(f1)))))))^2;
i = i+1;
    end
end

>> [f,i] = cole(50000,0.0001)

f = 0.021629216513630

i = 7


%comparando o resultado obtido com o diagrama de Moody
```

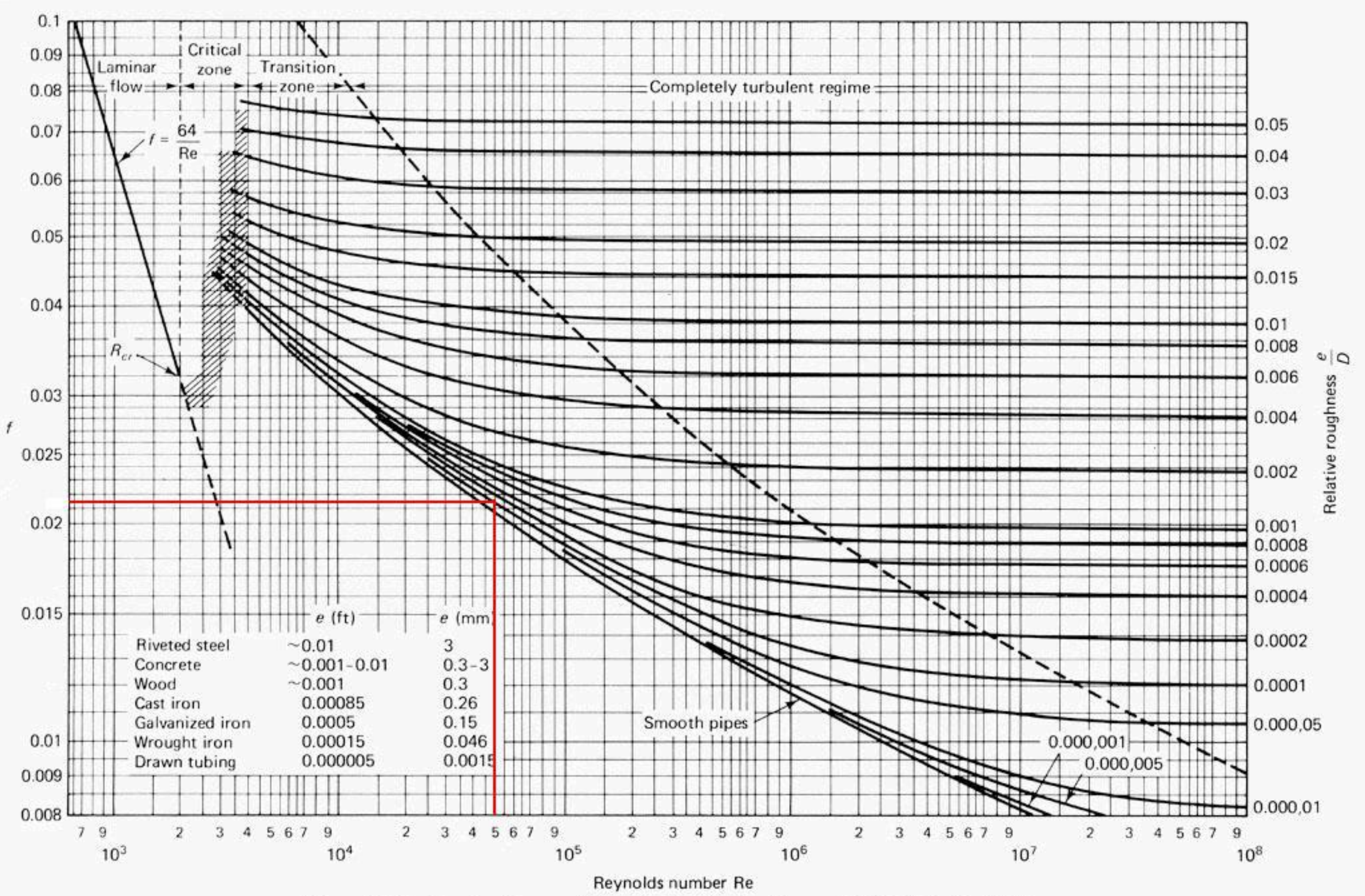



**Figure 7.13** Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)