

1

電力系統モデルの安定化制御

チャプター概要

1.1 周波数安定化制御

1.1.1 ブロードキャスト型 PI コントローラによる自動発電制御

(1) **自動発電制御**とは 本節では、未知の負荷変動に対して適切に発電量を調整するための**自動発電制御**（AGC：Automatic Generation Control）の動作原理を説明する。自動発電制御では、いくつかの発電機の周波数偏差を観測することによって、電力の需要に対して供給が少なければ発電量を増加し、供給が多ければ発電量を減少するような制御動作を行う^{†*}。この制御動作は、電力系統の一般的な特性として、需要に対して供給が少なければ負の周波数偏差が生じ、供給が多ければ正の周波数偏差が生じるという事実に基づく。**なお、電力系統工学では、周波数偏差を 0 に漸近収束させる制御全般を総称して周波数安定化制御と呼ぶ。**

自動発電制御の難しさの 1 つは、実際の電力系統には未知のパラメータが数多く存在することにある。例えば、30 分程度の時間スケールにおいて負荷の総量を大掴みに予測することは可能であるが、時々刻々と変化する個々の負荷の値を正確に把握することはできない^{††}。また、各送電線のコンダクタンスやサ

^{†*} 現実の電力系統運用では、中央給電指令所が自動発電制御を行なっている。基本となる動作原理は共通であるが、目的によりいくつかの方式が存在する。50Hz や 60Hz の基準周波数に対して、 $\pm 0.2\text{Hz}$ 程度の範囲に周波数を維持することが目標とされている。

^{††} 現実の電力系統運用では、天候や気温などの気象予測情報や過去の実績情報などを用い

2 1. 電力系統モデルの安定化制御

セプタンスなどのすべてのパラメータを正確に知ることも難しい。したがって、電力系統全体のモデルを知らなくても適用可能な制御アルゴリズムを設計することが必要となる。

一方で、第??節の数値例で確認したように、需給バランスが取れていない状況においても、発電機群の周波数は漸近的に同期するという特性をもつ。この事実、1つ以上の発電機群の外部入力値を適切に制御することによって、それらの周波数偏差を0にすることができれば、残りのすべての発電機群の周波数偏差も自動的に0となることを意味する。具体的には、いくつかの発電機群の周波数偏差の平均値を計測して、その平均値を0とするように発電機群の外部入力値を制御すれば、すべての発電機の周波数偏差を漸近的に0に収束させることが可能となる。このような制御動作は、基本的にはPI制御によって実現することができる[†]。コントローラに含まれる積分器が、未知の負荷や送電網のパラメータなどに合わせて適切な入力値を探索する動作を行う。

(2) **自動発電制御の定式化** 以下では、第??節における電圧フェーザを入力とする発電機モデルを考える。その動特性を再掲すると

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_0 \Delta\omega_i \\ M_i \Delta\dot{\omega}_i = -D_i \Delta\omega_i - P_i + P_{\text{mech}i} \\ \tau_{di} \dot{E}_i = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i| \cos(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i) + V_{\text{field}i} \end{cases} \quad (1.1a)$$

である。有効電力と無効電力を出力とする場合には

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{E_i |\mathbf{V}_i|}{X_{qi}} \sin(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i), \\ Q_i &= \frac{|\mathbf{V}_i| E_i}{X_{qi}} \cos(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i) - \frac{|\mathbf{V}_i|^2}{X_{qi}} \end{aligned} \quad (1.1b)$$

である。この表現に合わせて、電圧フェーザを入力、有効電力と無効電力を出力とする負荷モデルも再掲する。定インピーダンスモデルは、

て、ある程度の範囲のエリアに関する総需要の変化を予測している。手法によってエリアの大きさなどは様々であるが、需要を完全に予測することは不可能である。

[†] PI制御は、観測した偏差とその積分値の重み付き和によって入力を調整する制御アルゴリズムである。なお、PとIはProportional（比例）とIntegral（積分）を指す。

$$P_i = -\operatorname{Re} [\bar{z}_{\text{load}i}^{-1}] |\mathbf{V}_i|^2, \quad Q_i = -\operatorname{Im} [\bar{z}_{\text{load}i}^{-1}] |\mathbf{V}_i|^2 \quad (1.2a)$$

である。ただし、 $z_{\text{load}i}$ は負荷のインピーダンスを表す定数である。同様に、定電流モデルは、負荷の電流フェーザを表す定数を $\mathbf{I}_{\text{load}i}$ として、

$$P_i = \operatorname{Re} [\bar{\mathbf{I}}_{\text{load}i} \mathbf{V}_i], \quad Q_i = \operatorname{Im} [\bar{\mathbf{I}}_{\text{load}i} \mathbf{V}_i] \quad (1.2b)$$

と書き表される。定電力モデルは、 $P_{\text{load}i}$ と $Q_{\text{load}i}$ を定数として、

$$P_i = P_{\text{load}i}, \quad Q_i = Q_{\text{load}i} \quad (1.2c)$$

である。これらの発電機モデルや負荷モデルが、代数方程式

$$\begin{cases} P_1 + jQ_1 = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{1j} |\mathbf{V}_1| |\mathbf{V}_j| e^{j(\angle \mathbf{V}_1 - \angle \mathbf{V}_j)} \\ \vdots \\ P_N + jQ_N = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{Nj} |\mathbf{V}_N| |\mathbf{V}_j| e^{j(\angle \mathbf{V}_N - \angle \mathbf{V}_j)} \end{cases} \quad (1.3)$$

により結合されることで、電力系統全体を記述する微分代数方程式系モデルが得られる。ただし、発電機バスの添字集合を \mathcal{I}_G 、負荷バスの添字集合を \mathcal{I}_L とするとき、

$$\mathcal{I}_G \cap \mathcal{I}_L = \emptyset, \quad \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L = \{1, \dots, N\}$$

である。すなわち、発電機バスと負荷バスの添字に重複はなく、それらを合わせるとすべてのバスの添字集合となる。

自動発電制御は、式 (1.1) の機械的トルク $P_{\text{mech}i}$ を調整する制御アルゴリズムである。以下では、すべての発電機に対する周波数偏差の平均値を観測し、すべての発電機に対して適当に重み付けされた制御入力を送信するブロードキャスト型 PI コントローラを考える。具体的には、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ について

$$P_{\text{mech}i}(t) = -\alpha_i \underbrace{\left\{ k_P \Delta\omega_{\text{sum}}(t) + k_I \int_0^t \Delta\omega_{\text{sum}}(\tau) d\tau \right\}}_{P_0(t)} \quad (1.4a)$$

4 1. 電力系統モデルの安定化制御

とする。ただし、 α_i は発電機 i の寄与を指定する正定数であり、

$$\Delta\omega_{\text{sum}}(t) := \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \beta_i \Delta\omega_i(t)$$

は周波数偏差の正定数 β_i に関する重み付き和とする。また、 k_P , k_I は PI コントローラのゲインを表す正定数である。この自動発電制御器は、 α_i や β_i の重み付けのもと、単一の PI コントローラによって生成された信号 $P_0(t)$ をすべての発電機に同時送信（ブロードキャスト）する構造をもつ。なお、式 (1.4a) を微分方程式で表現すれば

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Delta\omega_{\text{sum}} \\ P_{\text{mech}i} = -\alpha_i (k_P \Delta\omega_{\text{sum}} + k_I \xi) \end{cases} \quad (1.4b)$$

である。電力系統工学では、正定数 α_i は発電機 i の**寄与係数** (participation factor) と呼ばれる。

寄与係数の比率を変えることにより、需給がバランスした定常潮流状態において、各々の発電機が供給する有効電力の値を変更することができる。システム制御工学の観点では、コントローラの切り替えにより、電力系統モデルの安定な平衡点を移動させることとして解釈できる。第??節で解析したように、電力系統の安定性は平衡点の選び方によって変化する。また、電力系統全体の発電コストや送電損失の値も平衡点の選び方に依存する。したがって、寄与係数を需要の分布に合わせて適切に切り替えることは、系統安定度の向上や経済的コストの低減などにつながる。このことは、第 1.1.3 節で後述する[†]。

1.1.2 周波数安定化制御の数値シミュレーション

界磁電圧は潮流計算されたものに固定して、負荷変動に対して周波数偏差が 0 に収束するところを見せる。

[†] 現実の電力系統運用では、寄与係数の更新は 30 分程度の間隔で行われるのが一般的である。電力系統工学の用語では、この寄与係数を更新するスキームは、**経済負荷配分制御** (EDC: Economic load Dispatching Control) と呼ばれる。また、寄与係数を 30 分程度の時間区間で定数として用いる制御アルゴリズムは**負荷周波数制御** (LFC: Load Frequency Control) と呼ばれる。ただし、経済負荷配分制御と負荷周波数制御の明確な区別がない文献もあるため注意が必要である。

1.1.3 コントローラのパラメータ調整による発電コストの低減

需要分布（の予測）が与えられたとして、需要が多いエリアの発電機を中心に
して送電する場合と、遠い発電機から送電する場合でコストを比較するとか？
わかりやすく燃料費は共通にしておけば、送電ロスの大きさ＝コストの大きさ
になるはず。

1.2 周波数安定化制御系の数学的な安定性解析 *

1.2.1 対象とする電力系統モデル *

（１）電力系統モデルと自動発電制御に関する仮定 第??節では、電力系統モデルが定常潮流状態の近傍にあることを仮定して近似線形モデルを導出し、定態安定性の必要条件や十分条件を解析した。本節では、同様の受動性の概念を用いて、非線形の微分代数方程式で記述される電力系統モデルの安定性を解析する。特に、自動発電制御が組み込まれたフィードバック制御系全体の安定性を考える。具体的には、以下のモデルに対して安定性解析を行う。

- すべての発電機は、式 (1.2) の発電機モデルで表されたとする。ただし、各発電機の界磁電圧は、適当な定数に設定されていることを仮定する。
- すべての負荷は、式 (1.2c) の定電力モデルで表されたとする。
- 式 (1.3) の送電網の代数方程式において、すべての送電線のコンダクタンスは 0 であることを仮定する。
- 式 (1.4) のブロードキャスト型 PI コントローラによって、自動発電制御が行われているとする。ただし、寄与係数と周波数偏差の重みについて、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ に対して $\alpha_i = \beta_i$ が成り立つことを仮定する。

1 つ目と 2 つ目は、発電機と負荷の標準的なモデルを考えることを意味している。3 つ目の送電網に関する仮定は、送電損失が 0 であることを意味しており、数学的な安定性解析には欠かすことができない。実際、送電損失がある場合には、電力系統モデルの安定性解析は数値的手法に頼らざるを得ないことが多くの文献で指摘されている [?, ?]。また、4 つ目の仮定は、ブロードキャスト

6 1. 電力系統モデルの安定化制御

型 PI コントローラの入出力特性が受動的となるために必要である。

なお、第??節で解析したように、

- 定常潮流状態において、すべての発電機の周波数偏差は同じ値となる。

以下では、この事実が成り立つことを前提とする。

(2) 自動発電制御を組み込んだ電力系統のフィードバック系による表現

第??節の議論と同様に、電力系統モデルを2つのサブシステムのフィードバック系として記述することを考える。1つ目のサブシステムは、

$$\mathbf{F} : \begin{cases} M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega + u_{\mathbf{F}} \\ y_{\mathbf{F}} = \omega_0\Delta\omega \end{cases} \quad (1.5)$$

とする。ただし、 $\Delta\omega$ は $\Delta\omega_i$ を並べたベクトルであり、 M と D は M_i と D_i を対角に並べた行列である。この \mathbf{F} は、第??節の機械サブシステムに等しい。2つ目のサブシステムは、第??節の電気サブシステムを非線形の微分代数方程式系で表現した

$$\mathbf{G}_i : \begin{cases} \dot{\delta}_i = u_{\mathbf{G}_i} \\ \tau_{di}\dot{E}_i = -\frac{X_{di}}{X_{qi}}E_i + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1\right)|\mathbf{V}_i|\cos(\delta_i - \angle\mathbf{V}_i) + V_{\text{field}i}^* \\ y_{\mathbf{G}_i} = \frac{E_i|\mathbf{V}_i|}{X_{qi}}\sin(\delta_i - \angle\mathbf{V}_i) \end{cases} \quad (1.6a)$$

である。これは、発電機バス $i \in \mathcal{I}_G$ に関するサブシステムであるが、式 (1.6a) におけるバスの電圧フェーザは、発電機バス $i \in \mathcal{I}_G$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j \neq i}^N B_{ij}|\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_j|\sin(\angle\mathbf{V}_i - \angle\mathbf{V}_j) \\ Q_i = -B_{ii}|\mathbf{V}_i|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij}|\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_j|\cos(\angle\mathbf{V}_i - \angle\mathbf{V}_j) \end{cases} \quad (1.6b)$$

と負荷バス $i \in \mathcal{I}_L$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} P_{\text{load}i} = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) \\ Q_{\text{load}i} = -B_{ii} |\mathbf{V}_i|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) \end{cases} \quad (1.6c)$$

を同時に満たさなければならない。ただし、式 (1.6b) の有効電力 P_i と無効電力 Q_i は、式 (1.1b) で定義される。また、 B_{ij} は \mathbf{Y}_{ij} の虚部であるサセプタンスを表す。以下では、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ に対して、式 (1.6a) から式 (1.6c) をまとめたものをひとつのサブシステムとみなし、それを電気サブシステム \mathbf{G} と表す。

さらに、式 (1.4) のブロードキャスト型 PI コントローラの動特性を

$$\mathbf{K} : \begin{cases} \dot{\xi} = h^\top u_K \\ y_K = h (k_P h^\top u_K + k_I \xi) \end{cases} \quad (1.7)$$

と表す。ただし、 h は α_i を並べた列ベクトルである。このとき、上記のサブシステム \mathbf{F} 、 \mathbf{G} とコントローラ \mathbf{K} の入出力を

$$u_F = -y_K + v_F, \quad u_K = \frac{1}{\omega_0} y_F \quad (1.8a)$$

$$u_G = y_F, \quad v_F = -y_G \quad (1.8b)$$

のように結合すれば、自動発電制御を組み込んだフィードバック制御系全体が表現できる。ただし、 u_G と y_G は u_{G_i} と y_{G_i} を並べたベクトルである。

1.2.2 電力系統モデルの平衡点に依らない受動性 *

(1) **平衡点に依らない受動性** 第??節の議論は、近似線形モデルに基づく解析であったため、その内部状態が0に漸近収束することが、もとの非線形モデルにおける特定の平衡点への漸近収束を表していた。一方で、非線形の微分代数方程式系として表現される電力系統モデルでは、電力の需要と供給がバランスする定常潮流状態においても内部状態は0とはならない。さらに、定常潮流状態そのものが機械的トルクの設定値に依存して変化する。したがって、個々の平衡点の選択に依存しない安定性解析が望ましい。このために提唱された概

8 1. 電力系統モデルの安定化制御

念が、**平衡点に依存しない受動性** (equilibrium-independent passivity) と呼ばれるものである [?,?]. なお、文献によっては、**シフトされた受動性** (shifted passivity) とも呼ばれている [?]. その定義はつぎのように与えられる。

定義 1.1 (平衡点に依らない受動性) 非線形システム

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + Bu \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

を考える。ただし、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ は滑らかな関数であり、 B は行列である。また、 \mathcal{X} は許容可能な状態の領域である。定常的な入力によって実現可能な平衡点の集合を

$$\mathcal{E}_\Sigma := \{x^* \in \mathcal{X} : 0 = f(x^*) + Bu^* \text{ を満たす } u^* \text{ が存在する} \} \quad (1.10)$$

と表す。各々すべての平衡点 $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$ に対して、 $W_{x^*}(x^*) = 0$ であり、かつ、任意の入力 u に対して

$$\frac{d}{dt} W_{x^*}(x(t)) \leq (u - u^*)^\top (y - y^*), \quad t \geq 0 \quad (1.11)$$

を満たす微分可能な半正定値関数 $W_{x^*}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在するとき、 Σ は**平衡点に依らず受動的**であると呼ぶ。ただし、平衡点 x^* における定常的な入力と出力を

$$u^* := -(B^\top B)^{-1} B^\top f(x^*), \quad y^* := h(x^*) \quad (1.12)$$

と表している。特に、上記の半正定値関数 $W_{x^*}(x)$ に加えて

$$\frac{d}{dt} W_{x^*}(x(t)) \leq (u - u^*)^\top (y - y^*) - \rho \|y - y^*\|^2, \quad t \geq 0 \quad (1.13)$$

を満たすある定数 $\rho > 0$ が存在するとき、 Σ は**平衡点に依らず強受動的**であると呼ぶ。

定義 1.1 では、システムの平衡点 $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$ を基準としてその受動性が定義されていると解釈できる。線形システムの範疇では、システムが零固有値をもたない限り、第??節の受動性の定義と等価である [?]. なお、上記の関数 W_{x^*} は **蓄積関数** と呼ばれる。

文献 [?] において、システムが平衡点に依らず受動的である場合には、その蓄積関数はある関数 $U(x)$ を用いて

$$W_{x^*}(x) = U(x) - U(x^*) - \nabla U^T(x^*)(x - x^*) \quad (1.14)$$

の形式で表せることが示されている^{†*}。また、定義 1.1 では、式 (1.14) の蓄積関数 $W_{x^*}(x)$ は半正定値関数であることが条件として課されている。具体的には、任意の $(x, x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ に対して、

$$U(x) \geq U(x^*) + \nabla U^T(x^*)(x - x^*)$$

が成り立つならば、各々すべての平衡点 $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$ に対して、 $W_{x^*}(x)$ は半正定値関数である。これは、 $U(x)$ が **凸関数** (convex function) であることを表す^{††}。後述するように、関数 $U(x)$ が凸であるような領域 \mathcal{X} が、平衡点に依存しない受動性を用いた安定性解析に重要な役割を果たす。

(2) **機械サブシステムの解析** 第??節で示されているように、機械サブシステム \mathbb{F} は強受動的である。同様に、式 (1.5) の \mathbb{F} が平衡点に依らず強受動的であることを確認する。まず、機械サブシステムを

^{†*} 統計学などでは、凸関数である $U(x)$ に対して、式 (1.14) の右辺の量は x と x^* の $U(x)$ に関する **ブレグマン距離** (Bregman distance) と呼ばれている [?]. なお、 $U(x) = \|x\|^2$ とするとき、 $W_{x^*}(x) = \|x - x^*\|^2$ はユークリッド距離に一致する。

^{††} 関数 $f(x)$ に対して、定義域内から選ばれた任意の 2 点の組 (x, y) について

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は **凸関数** であると呼ぶ。特に、 $f(x)$ が微分可能であるとき、 $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件は、任意の 2 点の組 (x, y) について

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f^T(y)(x - y)$$

が成り立つことである。

10 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\mathbb{F} : \begin{cases} \dot{x}_{\mathbb{F}} = A_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}} + B_{\mathbb{F}}u_{\mathbb{F}} \\ y_{\mathbb{F}} = C_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}} \end{cases} \quad (1.15)$$

の形式で書き表す。ただし、状態 $x_{\mathbb{F}}$ は $\Delta\omega_i$ を並べたベクトルであり、 $u_{\mathbb{F}}$ と $y_{\mathbb{F}}$ は $u_{\mathbb{F}_i}$ と $y_{\mathbb{F}_i}$ を並べたベクトルである。また、システム行列は

$$A_{\mathbb{F}} := -M^{-1}D, \quad B_{\mathbb{F}} := M^{-1}, \quad C_{\mathbb{F}} := \omega_0 I$$

である。なお、行列 M と D は、 M_i と D_i を対角に並べた行列である。任意に選ばれた平衡点 $x_{\mathbb{F}}^* \in \mathcal{E}_{\mathbb{F}}$ に対して、蓄積関数を

$$W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = \frac{\omega_0}{2}(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)^{\top} M(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)$$

と選ぶ。ただし、平衡点に関する $(x_{\mathbb{F}}^*, u_{\mathbb{F}}^*, y_{\mathbb{F}}^*)$ は

$$0 = A_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}}^* + B_{\mathbb{F}}u_{\mathbb{F}}^*, \quad y_{\mathbb{F}}^* = C_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}}^* \quad (1.16)$$

を満たす。なお、式 (1.14) の形式で表すならば、

$$U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}) := \frac{\omega_0}{2} x_{\mathbb{F}}^{\top} M x_{\mathbb{F}}$$

とすることにより、蓄積関数は

$$W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}) - U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}^*) - \nabla U_{\mathbb{F}}^{\top}(x_{\mathbb{F}}^*)(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)$$

と表せる。この蓄積関数の勾配関数は

$$\nabla W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = \omega_0 M(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*) \quad (1.17)$$

であることから、蓄積関数の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}(t)) &= \nabla W_{x_{\mathbb{F}}^*}^{\top}(x_{\mathbb{F}}(t)) \dot{x}_{\mathbb{F}}(t) \\ &= \nabla W_{x_{\mathbb{F}}^*}^{\top}(x_{\mathbb{F}}(t)) \{A_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}(t) - x_{\mathbb{F}}^*) + B_{\mathbb{F}}(u_{\mathbb{F}}(t) - u_{\mathbb{F}}^*)\} \\ &\leq (y_{\mathbb{F}}(t) - y_{\mathbb{F}}^*)^{\top} (u_{\mathbb{F}}(t) - u_{\mathbb{F}}^*) - \frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_{\mathbb{F}}(t) - y_{\mathbb{F}}^*\|^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

と評価できる。ただし、2 つ目の等号の導出に式 (1.16) の関係を用いた。

(3) 機械サブシステムと自動発電制御器のフィードバック系の解析 同様にして、式 (1.7) のブロードキャスト型 PI コントローラの受動性も示すことができる。蓄積関数を

$$W_{\xi^*}(\xi) := \frac{1}{2}k_I(\xi - \xi^*)^2$$

と定義すれば、その時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_{\xi^*}(\xi(t)) &= (y_K - y_K^*)^T(u_K - u_K^*) - k_I u_K^T h h^T u_K \\ &\leq (y_K - y_K^*)^T(u_K - u_K^*) \end{aligned} \quad (1.19)$$

と評価できる。ただし、平衡点における (ξ^*, u_K^*, y_K^*) について

$$\begin{cases} 0 = h^T u_K^* \\ y_K^* = h(k_P h^T u_K^* + k_I \xi^*) \end{cases} \quad (1.20)$$

が成り立つことを用いた。

システム制御工学では、2つの受動的なシステムのネガティブ・フィードバック系は、受動的になることが知られている。この事実に基づき、式 (1.5) の機械サブシステム \mathbb{F} と式 (1.7) のブロードキャスト型 PI コントローラ \mathbb{K} をフィードバック結合した

$$\mathbb{F}_+ : \begin{cases} M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega - h(k_P h^T \Delta\omega + k_I \xi) + v_F \\ \dot{\xi} = h^T \Delta\omega \\ y_F = \omega_0 \Delta\omega \end{cases} \quad (1.21)$$

も平衡点に依らず強受動的であることが示される。具体的には、式 (1.18) と式 (1.19) の不等式を足し合わせることで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{W_{x_F^*}(x_F(t)) + \omega_0 W_{\xi^*}(\xi(t))\} \\ \leq (y_F(t) - y_F^*)^T(v_F(t) - v_F^*) - \frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_F(t) - y_F^*\|^2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

が得られる。ただし、式 (1.8a) の入出力関係を用いた。

12 1. 電力系統モデルの安定化制御

なお、式 (1.8b) の入出力関係により、式 (1.21) の F_+ と式 (1.6) の G を結合すれば、自動発電制御を組み込んだフィードバック制御系全体が表される。この事実に基づき、以下では G の平衡点に依らない受動性を解析する。

(4) **電気サブシステムの解析** 式 (1.6) の電気サブシステム G の平衡点に依らない受動性を解析する。以下では、 G のすべての時間変数である $(\delta_i, E_i)_{i \in \mathcal{I}_G}$ と $(|V_i|, \angle V_i)_{i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L}$ を並べた列ベクトルを x_G と表す。この表記のもと、ポテンシャルエネルギー関数を

$$\begin{aligned} U_G(x_G) := & \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \left\{ \frac{X_{di} E_i^2}{2X_{qi}(X_{di} - X_{qi})} - \frac{E_i |V_i|}{X_{qi}} \cos(\delta_i - \angle V_i) + \frac{|V_i|^2}{2X_{qi}} \right\} \\ & - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \{ P_{loadi} \angle V_i + Q_{loadi} \ln |V_i| \} \\ & - \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{B_{ii} |V_i|^2}{2} + \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |V_i| |V_j| \cos(\angle V_i - \angle V_j) \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

と定義する。ここで、式 (1.14) の表現に基づいて、蓄積関数の候補を

$$W_{x_G^*}(x_G) = U_G(x_G) - U_G(x_G^*) - \nabla U_G^T(x_G^*)(x_G - x_G^*) \quad (1.24)$$

と構成する。なお、その勾配関数は

$$\nabla W_{x_G^*}(x_G) = \nabla U_G(x_G) - \nabla U_G(x_G^*)$$

である。蓄積関数の時間微分を計算するため、ポテンシャルエネルギー関数の勾配関数を求める。まず、 $U_G(x_G)$ の δ_i と E_i に関する偏微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_G}{\partial \delta_i}(x_G) &= \frac{E_i |V_i|}{X_{qi}} \sin(\delta_i - \angle V_i), \\ \frac{\partial U_G}{\partial E_i}(x_G) &= -\frac{1}{X_{di} - X_{qi}} \left\{ -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |V_i| \cos(\delta_i - \angle V_i) \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって、各変数が式 (1.6) の微分代数方程式にしたがうならば、式 (1.6a) から、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ に対して、

$$\frac{\partial U_G}{\partial \delta_i}(x_G) = y_{G_i}, \quad \frac{\partial U_G}{\partial E_i}(x_G) = \frac{V_{\text{field}i}^* - \tau_{di} \dot{E}_i}{X_{di} - X_{qi}}$$

が成り立つ。また、 $i \in \mathcal{I}_G$ に対して、電圧フェーザ変数に関するポテンシャルエネルギー関数の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) &= -B_{ii}|\mathbf{V}_i| - \sum_{j \neq i}^N B_{ij}|\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - \frac{Q_i}{|\mathbf{V}_i|} \\ \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) &= \sum_{j \neq i}^N B_{ij}|\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - P_i \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (1.6b) の方程式から、これらが 0 であることがわかる。同様に、式 (1.6c) の方程式から、 $i \in \mathcal{I}_L$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) &= -B_{ii}|\mathbf{V}_i| - \sum_{j \neq i}^N B_{ij}|\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - \frac{Q_{\text{load}i}}{|\mathbf{V}_i|} \\ \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) &= B_{ij}|\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - P_{\text{load}i} \end{aligned}$$

も 0 であることがわかる。したがって、すべての $i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L$ に対して

$$\frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) = 0, \quad \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) = 0$$

が成り立つことがわかる。

つぎに、 $\nabla U_G(x_G^*)$ について、 \mathbb{G} の平衡点に関する (x_G^*, u_G^*, y_G^*) を考える。ある電圧フェーザ変数 $(|\mathbf{V}_i^*|, \angle \mathbf{V}_i^*)_{i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L}$ が存在して、

$$\begin{cases} 0 = u_{G_i}^* \\ 0 = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i^* + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i^*| \cos(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*) + V_{\text{field}i}^* \end{cases} \quad (1.25a)$$

$$\begin{cases} P_i^* = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \sin(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \\ Q_i^* = -B_{ii} |\mathbf{V}_i^*|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \cos(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \end{cases} \quad (1.25b)$$

が成り立つ。ただし、 $i \in \mathcal{I}_G$ であり、有効電力と無効電力の定常値は

14 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$P_i^* := \frac{E_i^* |\mathbf{V}_i^*|}{X_{qi}} \sin(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*),$$

$$Q_i^* := \frac{|\mathbf{V}_i^*| E_i^*}{X_{qi}} \cos(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*) - \frac{|\mathbf{V}_i^*|^2}{X_{qi}}$$

である。また、 $y_{G_i}^* = P_i^*$ である。したがって、 $i \in \mathcal{I}_G$ に対して、

$$\frac{\partial U_G}{\partial \delta_i}(x_G^*) = y_{G_i}^*, \quad \frac{\partial U_G}{\partial E_i}(x_G^*) = \frac{V_{\text{field}i}^*}{X_{di} - X_{qi}}$$

が成り立つ。同様に、すべての $i \in \mathcal{I}_L$ に対して

$$\begin{cases} P_{\text{load}i} = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \sin(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \\ Q_{\text{load}i} = -B_{ii} |\mathbf{V}_i^*|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \cos(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \end{cases} \quad (1.25c)$$

が成り立つことから、バスの電圧フェーズ変数に関する偏微分は、すべての $i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L$ に対して、

$$\frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G^*) = 0, \quad \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G^*) = 0$$

となる。以上の計算結果より、蓄積関数の G の解軌道に沿った時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{x_G^*}(x_G(t)) &= \nabla W_{x_G^*}^\top(x_G(t)) \dot{x}_G(t) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \left((u_{G_i} - u_{G_i}^*)(y_{G_i} - y_{G_i}^*) - \frac{\tau_{di}}{X_{di} - X_{qi}} \dot{E}_i^2 \right) \\ &\leq (y_G - y_G^*)^\top (u_G - u_G^*) \end{aligned} \quad (1.26)$$

と評価できる。ただし、 $u_G^* = 0$ であることを用いた。このことから、式 (1.24) の関数 $W_{x_G^*}(x_G)$ が、電気サブシステム G の平衡点に依らない受動性に対する蓄積関数となることがわかる。ただし、 x_G や x_G^* の領域は、 $W_{x_G^*}(x_G)$ が半正定値関数となる領域、すなわち、式 (1.23) のポテンシャルエネルギー関数 $U_G(x_G)$ が凸関数となる領域に限られることに注意されたい。

1.2.3 周波数安定化制御系の安定性解析 *

(1) 受動性に基づく未知平衡点の安定性解析 以下では、平衡点に依らない受動性を用いて、第??節における近似線形モデルの受動性に基づく安定性解析とほとんど同様の手順により、自動発電制御が組み込まれたフィードバック制御系の安定性を解析する。ただし、電気サブシステム \mathbb{G} の解軌道 $x_{\mathbb{G}}(t)$ に対して、式 (1.24) の蓄積関数の値 $W_{x_{\mathbb{G}}}^*(x_{\mathbb{G}}(t))$ が非負となることを仮定して議論を進める。この点は次項で議論する。

式 (1.22) と式 (1.26) の不等式の和に対して、式 (1.8b) の結合の関係を用いると、フィードバック制御系全体に対して

$$\frac{d}{dt} \{W_{x_{\mathbb{F}}}^*(x_{\mathbb{F}}(t)) + \omega_0 W_{\xi}^*(\xi(t)) + W_{x_{\mathbb{G}}}^*(x_{\mathbb{G}}(t))\} \leq -\frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_{\mathbb{F}}(t) - y_{\mathbb{F}}^*\|^2$$

が得られる。蓄積関数の和は単調非増加でありその下限値は 0 であることから、時間が十分に経過するとその和はある値に漸近収束する。すなわち、左辺の時間微分は 0 に漸近収束する。したがって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\mathbb{F}}(t) = y_{\mathbb{F}}^*$$

が導かれる。また、式 (1.5) の出力方程式に注目すると、出力 $y_{\mathbb{F}}$ は内部状態 $\Delta\omega$ の定数倍であることから、機械サブシステム \mathbb{F} に対して、

$$y_{\mathbb{F}}(t) = y_{\mathbb{F}}^*, \quad \forall t \geq 0 \implies \Delta\omega(t) = \frac{1}{\omega_0} y_{\mathbb{F}}^*, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.27)$$

が成り立つ。さらに、第??節で解析したように、すべての発電機の周波数偏差は同じ値に収束する。この事実は、ある定数 γ_0 に対して

$$y_{\mathbb{F}}^* = \gamma_0 \mathbf{1}$$

であることを意味する。一方で、式 (1.20) の第 1 式から、

$$0 = h^T u_{\mathbb{K}}^* = \frac{1}{\omega_0} h^T y_{\mathbb{F}}^* = \frac{\gamma_0}{\omega_0} h^T \mathbf{1}$$

となる。ここで、 $h^T \mathbf{1} \neq 0$ であることから、 $\gamma_0 = 0$ が得られる。以上より、

16 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\omega(t) = 0$$

が示される。また、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{mech}i}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$$

が成り立つこともわかる。ただし、これらの収束値は、負荷の消費電力や送電線のインピーダンスなどが未知であるため、事前に計算することができない未知の値となる。同様に、式 (1.6) の電気サブシステム \mathbb{G} の内部状態やバスの電圧フェーズ変数も未知の値に漸近収束する。

(2) ポテンシャルエネルギー関数が凸となる条件 以下では、式 (1.23) のポテンシャルエネルギー関数 $U_G(x_G)$ が凸関数となるための条件が、第??節の近似線形モデルの受動性解析で現れた受動送電条件 (i) と (iii) に対応することを示す。なお、本節の議論では、受動送電条件 (ii) は仮定されている。

第??節における近似線形モデルの設定に合わせて、すべてのバスに発電機が接続されている場合を考える[†]。すなわち、発電機バスと負荷バスの添字集合は

$$\mathcal{I}_G = \{1, \dots, N\}, \quad \mathcal{I}_L = \emptyset$$

である。このとき、発電機バスのクロン縮約を適用することにより、式 (1.6) の電気サブシステム \mathbb{G} と等価な常微分方程式系が、 $i \in \mathcal{I}_G$ に関する

$$\mathbb{G}_i : \begin{cases} \dot{\delta}_i = u_{G_i} \\ \tau_{di} \dot{E}_i = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i - (X_{di} - X_{qi}) \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos \delta_{ij} + V_{\text{field}i}^* \\ y_{G_i} = -E_i \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \sin \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.28)$$

と得られる。ただし、 $\delta_{ij} := \delta_i - \delta_j$ である。また、縮約サセプタンス B_{ij}^{red} は、式 (1.6) の B_{ij} をまとめた送電網のサセプタンス行列を B として、

[†] 需給が均衡する定常潮流状態においては、一部の発電機は電力を消費するモータとなる。これは回転機の動特性をもつ負荷が接続されているものと解釈される。

$$B^{\text{red}} := -\{\text{diag}(X_{\text{qi}}) - \text{diag}(X_{\text{qi}}) B \text{diag}(X_{\text{qi}})\}^{-1}$$

の第 (i, j) 要素である。この常微分方程式系表現に対応する式 (1.23) のポテンシャルエネルギー関数は

$$U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}) := \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{G}}} \left\{ \frac{X_{\text{di}} E_i^2}{X_{\text{qi}}(X_{\text{di}} - X_{\text{qi}})} + E_i \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos \delta_{ij} \right\} \quad (1.29)$$

となる。ただし、すべての δ_i と E_i を並べたベクトルをあらためて x_{G} と表している。内部状態に関する偏微分を計算すると

$$\frac{\partial U_{\text{G}}^{\text{red}}}{\partial \delta_i}(x_{\text{G}}) = y_{\text{G}_i}, \quad \frac{\partial U_{\text{G}}^{\text{red}}}{\partial E_i}(x_{\text{G}}) = \frac{V_{\text{field}i}^* - \tau_{\text{di}} \dot{E}_i}{X_{\text{di}} - X_{\text{qi}}}$$

が得られる。同様に、定常状態に対して

$$\frac{\partial U_{\text{G}}^{\text{red}}}{\partial \delta_i}(x_{\text{G}}^*) = y_{\text{G}_i}^*, \quad \frac{\partial U_{\text{G}}^{\text{red}}}{\partial E_i}(x_{\text{G}}^*) = \frac{V_{\text{field}i}^*}{X_{\text{di}} - X_{\text{qi}}}$$

となる。したがって、対応する蓄積関数を

$$W_{x_{\text{G}}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}) = U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}) - U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}^*) - \{\nabla U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}^*)\}^{\text{T}} (x_{\text{G}} - x_{\text{G}}^*)$$

と定義すれば、式 (1.26) と同様に、その時間微分は

$$\frac{d}{dt} W_{x_{\text{G}}}^{\text{red}}(x_{\text{G}}(t)) \leq (y_{\text{G}} - y_{\text{G}}^*)^{\text{T}} (u_{\text{G}} - u_{\text{G}}^*)$$

と評価できる。

式 (1.29) の $U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}})$ が凸関数であることは、ヘッセ行列 $\nabla^2 U_{\text{G}}^{\text{red}}(x_{\text{G}})$ の半正定性として特徴づけられる[†]。そのヘッセ行列を計算すると

[†] 2 階微分可能な関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が、ある領域 \mathcal{X} において凸関数であるための必要十分条件は、すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して

$$\nabla^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

が半正定となることである。この行列は、関数 f の**ヘッセ行列** (Hessian matrix) と呼ばれる [?]

18 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\nabla^2 U_G^{\text{red}}(x_G) = \begin{bmatrix} L & -\hat{B}^\top \\ -\hat{B} & -\hat{A}_0 \end{bmatrix}$$

となる。ただし、

この関数 $W(\delta, E)$ の凸性は、ヘッセ行列 $\nabla^2 W(\delta, E)$ の正定性により特徴づけられる（付録??）。具体的には

$$\mathcal{D}_+ := \left\{ (\delta, E) \in \mathbb{R}^{2|I_G|} : \nabla^2 W(\delta, E) \succeq 0 \right\} \quad (1.30)$$

と表すことができる。ただし、この定義における領域 \mathcal{D}_+ は、領域 \mathcal{D} と厳密に一致するとは限らず、一般には $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$ となる領域である。その理由は、式 (1.31) の不等式では、平衡点を除く領域で $W(\delta, E)$ が狭義凸関数となることを条件として課しているのに対して、式 (1.35) では弱い意味での凸性を条件として課しているためである。なお、式 (1.35) の半正定性の条件を単純に正定性に強めることはできない。その理由は後述する。

1.3 XXXXXXXXXXXXXXXX

(1) ポテンシャルエネルギー関数の強凸性 以下では、 δ_i と E_i を並べた列ベクトルを δ, E と表す。同様に、それらの定常値として δ^*, E^* を定義する。なお、上記の x_G は、 δ と E を並べた列ベクトルであることから、文脈に応じて x_G と (δ, E) を同一のものとみなす。

式 (1.24) の関数 $W_{x_G^*}(x_G)$ が、任意の $(x_G, x_G^*) \in \mathcal{X}_G \times \mathcal{X}_G$ に対して正定値関数であることは、式??のポテンシャルエネルギー関数 $W_G(x_G)$ が、領域 \mathcal{X}_G において強凸関数であることを意味する。ただし、関数 $W_G(x_G)$ は、すべての実数 c_0 に対して

$$W_G(\delta, E) = W_G(\delta + c_0 \mathbf{1}, E)$$

を満たす、すなわち、回転子偏角差 $\delta_i - \delta_j$ のみが $W_G(x_G)$ に影響することから、 δ の変化を $\text{span}\{\mathbf{1}\}$ の直交補空間に限定することにより、 $W_G(x_G)$ が強凸

関数となる領域 \mathcal{X}_G を定義する。具体的には,

$$\frac{1}{|\mathcal{I}_G|} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top + VV^\top = I$$

を満たす適当な行列 $V \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_G| \times (|\mathcal{I}_G| - 1)}$ を用いて, 領域 \mathcal{X}_G を

$$\mathcal{X}_G := \{(\delta, E) : \bar{\delta} = V^\top \delta \text{ に対して } W_G(V\bar{\delta}, E) \text{ が強凸関数である} \}$$

と定義する。この行列 V の列ベクトルは, $\text{span}\{\mathbf{1}\}$ の直交補空間を張る正規直交基底である。定義より, 任意の $(x_G, x_G^*) \in \mathcal{X}_G \times \mathcal{X}_G$ に対して

$$W_{x_G^*}(x_G) \geq \alpha \left\| \begin{bmatrix} V^\top(\delta - \delta^*) \\ E - E^* \end{bmatrix} \right\|^2$$

を満たす正定数 α が存在する。

式 (1.25) を満たす G の平衡点のうち, 受動性に基づき漸近安定性が解析可能な平衡点に注目し, G の許容可能な平衡点集合 \mathcal{E}_G を定式化する。まず, 式 (1.25) を満たす G の最大の平衡点集合を

$$\mathcal{E}_G^+ := \left\{ (\delta^*, E^*) \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{I}_G|} : \begin{array}{l} \text{ある定数 } V_{\text{field}} \text{ に対して, 式 (1.25) を満たす} \\ (|V|^*, \angle V^*) \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

と表す。許容可能な平衡点集合 \mathcal{E}_G は, \mathcal{E}_G^+ の部分集合である。具体的には, 式 (1.24) の蓄積関数 $W_{(\delta^*, E^*)}(\delta, E)$ が正定値関数となるための不等式

$$\begin{aligned} W(\delta, E) - W(\delta^*, E^*) &> \nabla_\delta^\top W(\delta^*, E^*)(\delta - \delta^*) \\ &\quad + \nabla_E^\top W(\delta^*, E^*)(E - E^*), \quad (\delta, E) \neq (\delta^*, E^*) \end{aligned} \quad (1.31)$$

を条件として課す。このとき, 受動性に基づき漸近安定性が解析可能な G の平衡点集合は

$$\mathcal{E}_G := \left\{ (\delta^*, E^*) \in \mathcal{E}_G^+ : \begin{array}{l} \text{すべての } (\delta, E) \in \mathcal{B}_\epsilon(\delta^*, E^*) \text{ に対して} \\ \text{式 (1.31) が成り立つような } \epsilon > 0 \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

20 1. 電力系統モデルの安定化制御

と表現できる。ただし、 $\mathcal{B}_\epsilon(\delta^*, E^*)$ は点 (δ^*, E^*) を中心とする半径 ϵ の球の内部を表し、その中心点は集合から除くものとする。この平衡点の集合 \mathcal{E}_G は、その近傍で蓄積関数が正定となるような平衡点の集合を表している。また、 \mathcal{E}_G に含まれるいずれかの平衡点に漸近的に収束する状態の集合は

$$\mathcal{D} := \left\{ (\delta, E) \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{I}_G|} : \begin{array}{l} \text{すべての } (\delta^*, E^*) \in \mathcal{E}_G \text{ に対して} \\ \text{式 (1.31) が成り立つ} \end{array} \right\} \quad (1.32)$$

と表せる。なお、ある点 $(\delta^*, E^*) \in \mathcal{E}_G$ に注目すると、それを平衡点とする界磁電圧 V_{field} が存在する。この平衡点に依存する界磁電圧の値を V_{field}^* と表す。

式 (1.5) の \mathbb{F} に対して許容可能な平衡点は原点のみである。この理由は、 \mathbb{F} が原点以外の平衡点 $\Delta\omega^*$ にある場合には、 \mathbb{G} への入力 v_G^* が非零となり、状態 δ が平衡しないためである。また、各々の許容可能な平衡点 $(\delta^*, E^*) \in \mathcal{E}_G$ に対して、 \mathbb{F} が原点に平衡点をもつような機械的トルク P_{mech} の定常値が存在し、その値は

$$P_{\text{mech}i}^* = \frac{E_i^* |V_i^*|}{X_{qi}} \sin(\delta_i^* - \angle V_i^*), \quad i \in \mathcal{I}_G \quad (1.33a)$$

で与えられる。なお、 $(|V|, \angle V)$ は式 (1.31) を満たす (δ^*, E^*) の陰関数である。明らかに、平衡点での \mathbb{F} の出力は

$$\omega_0 \Delta\omega_i^* = 0, \quad i \in \mathcal{I}_G \quad (1.33b)$$

である。以上より、 \mathbb{F} と \mathbb{G} のフィードバック系として記述される電力系統モデルの許容可能な平衡点集合は

$$\mathcal{E} := \{0\} \times \mathcal{E}_G \quad (1.34)$$

と表せる。これらの定義のもとで、電力系統モデルの平衡点に依らない受動性がつぎのように示される。

以下では、第??節における近似線形モデルの漸近安定性解析の結果に基づいて、これら \mathcal{D} と \mathcal{D}_{\max} の間にどの程度の乖離があるのかを考察する。式 (1.31)

の不等式で表されているように、領域 \mathcal{D} は関数 $W(\delta, E)$ が凸関数となるような領域である。この関数 $W(\delta, E)$ の凸性は、ヘッセ行列 $\nabla^2 W(\delta, E)$ の正定性により特徴づけられる（付録??）。具体的には

$$\mathcal{D}_+ := \left\{ (\delta, E) \in \mathbb{R}^{2|I_G|} : \nabla^2 W(\delta, E) \succeq 0 \right\} \quad (1.35)$$

と表すことができる。ただし、この定義における領域 \mathcal{D}_+ は、領域 \mathcal{D} と厳密に一致するとは限らず、一般には $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$ となる領域である。その理由は、式 (1.31) の不等式では、平衡点を除く領域で $W(\delta, E)$ が狭義凸関数となることを条件として課しているのに対して、式 (1.35) では弱い意味での凸性を条件として課しているためである。なお、式 (1.35) の半正定性の条件を単純に正定性に強めることはできない。その理由は後述する。

つぎの定理は、**各々すべてのバスに発電機モデルが接続されている場合に**、領域 \mathcal{D}^+ に対して有用な解釈を与える。

定理 1.1 （ポテンシャル関数のヘッセ行列と近似線形モデルの関係） 式 ?? の連立方程式により式 ?? の発電機モデルが結合された電力系統モデルを考える。また、式 ?? により、 (δ^*, E^*) の関数として行列 A, B, C, L を定義する。式 ?? の関数 $W(\delta, E)$ に対するヘッセ行列を

$$\nabla^2 W(\delta, E) = \begin{bmatrix} \nabla_{\delta}^2 W(\delta, E) & \nabla_{\delta, E}^2 W(\delta, E) \\ \nabla_{E, \delta}^2 W(\delta, E) & \nabla_E^2 W(\delta, E) \end{bmatrix}$$

と表すとき、 $\nabla_E^2 W(\delta^*, E^*)$ が正定であることは、 A が安定であることと等価である。特に、 A が安定であるとき、 $\nabla^2 W(\delta^*, E^*)$ が半正定であることは、 $L - CA^{-1}B$ が半正定であることと等価である。

証明 要素が M_{ij} である行列 M を $[M_{ij}]_{ij}$ と表す。まず、式 ?? の行列 A について考える。式 ?? の近似線形モデルの微分方程式から、 A は内部電圧 E の時間微分がそれ自身に依存する項を表すシステム行列であることがわかる。すなわち

22 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$A = \left[\frac{\partial}{\partial E_j} \left\{ -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i| \cos(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i) \right\} \right]_{(\delta, E) = (\delta^*, E^*)} \Big|_{ij}$$

である。ただし、 $(|\mathbf{V}|, \angle \mathbf{V})$ には式 (1.25a) を満たす $(|\mathbf{V}^*|, \angle \mathbf{V}^*)$ を代入するものとする。一方で、補題??の結果を用いると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial E_j} \frac{\partial W}{\partial E_i} \right]_{(\delta, E) = (\delta^*, E^*)} \Big|_{ij} &= \left[-\frac{1}{X_{di} - X_{qi}} \frac{\partial}{\partial E_i} \left\{ -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i| \cos(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i) \right\} \right]_{(\delta, E) = (\delta^*, E^*)} \Big|_{ij} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\nabla_E^2 W(\delta^*, E^*) = -\text{diag} \left(\frac{1}{X_{di} - X_{qi}} \right) A$$

であることから、 $\nabla_E^2 W(\delta^*, E^*)$ の正定性と A の安定性は等価であることがわかる。同様に、

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta, E}^2 W(\delta^*, E^*) &= -\text{diag} \left(\frac{1}{X_{di} - X_{qi}} \right) B, & \nabla_\delta^2 W(\delta^*, E^*) &= L \\ \nabla_{E, \delta}^2 W(\delta^*, E^*) &= C \end{aligned}$$

であることがわかる。したがって、 A が安定であるとき、すなわち、 $\nabla_E^2 W(\delta^*, E^*)$ が正定であるとき、シュア補行列の性質から、 $\nabla^2 W(\delta^*, E^*)$ が半正定であることは、 $L - CA^{-1}B$ が半正定であることと等価である。□

定理??に示されているように、送電網が無損失である場合には、 $L - CA^{-1}B$ が半正定であることが、式??の伝達関数 $G(s)$ が正実となるための必要条件となっている。定理 1.1 に基づいて言い換えれば、式 (1.35) の領域 \mathcal{D}_+ の内部で近似線形モデルを導出することが、そのシステムが受動的となるための必要条件である。この事実は、本節における非線形システムの解析結果と符合している。すなわち、式 (1.6a) の G の蓄積関数の定義域は $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$ となっている。

また、定理??に示されているように、 $L - CA^{-1}B$ の半正定性は、すべての発電機の物理パラメータに対して近似線形モデルが漸近安定となるための必要条件になっている。したがって、定理 1.1 の等価性から、式 (1.35) の領域 \mathcal{D}_+

は、最大の吸引領域 \mathcal{D}_{\max} を包含する領域であることがわかる。以上の議論により

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_{\max} \subseteq \mathcal{D}_+ \quad (1.36)$$

の包含関係が導かれる。前述のように、領域 \mathcal{D} は平衡点を除く領域で $W(\delta, E)$ が狭義凸関数となるように定義されているのに対して、領域 \mathcal{D}_+ は $W(\delta, E)$ が弱い意味で凸関数となるように定義されている。これは、 \mathcal{D} と \mathcal{D}_+ の差は、不等式の等号を含めるか否かだけの差であることを意味している。したがって、固有値の変化がパラメータ変化に関して連続的であることを考えると、式 (1.36) の 3 つの領域は本質的に同等であることが結論づけられる。これらの事実から、非線形システムに対する最大の吸引領域 \mathcal{D}_{\max} が、近似線形モデルに関する $L - CA^{-1}B$ の正定性により特徴づけられることがわかる。なお、 $L - CA^{-1}B$ は必ず零固有値をもつことから、ヘッセ行列 $\nabla^2 W(\delta, E)$ は狭義の正定行列にはならないため、式 (1.35) の行列不等式を等号を含めない不等式に単純に換えることはできない。

一般に、あるシステムの受動性が特定の蓄積関数に対して示されたとしても、それ以外に可能な蓄積関数が存在するか否かは自明ではない。したがって、非線形システムの最大の吸引領域 \mathcal{D}_{\max} が、式 (1.24) の蓄積関数を用いた受動性の議論だけから導かれるという事実は興味深いものである。この意味で、?? のポテンシャル関数は、物理的にも数学的にも電力システムモデルの本質的な特徴を捉えたものであることが示唆される。

1.4 同期安定化制御

1.4.1 系統安定化装置と自動電圧調整器

1.4.2 同期安定化制御の数値シミュレーション

1.4.3 レトロフィット制御理論に基づく同期安定化制御 *