

第 1 章

電力系統モデルの安定性解析

1.1 近似線形化に基づく安定性解析

1.1.1 発電機バスと負荷バスがクロン縮約された電力系統モデルの近似線形化

本節では、第??節で議論した発電機バスがクロン縮約された等価な常微分方程式モデルに対して、定常潮流状態における近似線形システムを導出する。まず、第??節におけるバスの同期に基づき、つぎの用語を導入する。

定義 1.1.1 式 (??) の連立方程式によって機器群が結合された電力系統モデルを考える。定常潮流状態にあり、かつ、すべてのバス i とバス j の組に対して式 (??) が成り立つとき、電力系統モデルは**同期状態**にあると呼ぶ。

以下では、式 (??) において $X'_{di} = X_{qi}$ である場合を考える。このとき、定理??で示されているように、電力系統モデルは式 (??) の等価な常微分方程式系により表現される。なお、一般に $X_{qi} > X_{di}$ である。以下では、電力系統モデルの挙動が同期状態の近傍にあることを仮定して、等価な微分方程式系に対する近似線形システムを導出する。このために、式 (??) の非線形項を

$$\begin{aligned} f_i(\delta_i, E_i)_{i \in \mathcal{I}_G} &:= E_i \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}_G|} E_j \{ \operatorname{Re} [\gamma_{ij}^{-1}] \sin(\delta_i - \delta_j) + \operatorname{Im} [\gamma_{ij}^{-1}] \cos(\delta_i - \delta_j) \} \\ g_i(\delta_i, E_i)_{i \in \mathcal{I}_G} &:= \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}_G|} E_j \{ \operatorname{Re} [\gamma_{ij}^{-1}] \cos(\delta_i - \delta_j) - \operatorname{Im} [\gamma_{ij}^{-1}] \sin(\delta_i - \delta_j) \} \end{aligned} \quad (1.1)$$

と表す。これらの非線形関数の各変数に関する偏微分を求めるために

$$k_{ij}(\delta_{ij}) := \operatorname{Re} [\gamma_{ij}^{-1}] \cos \delta_{ij} - \operatorname{Im} [\gamma_{ij}^{-1}] \sin \delta_{ij}, \quad h_{ij}(\delta_{ij}) := \operatorname{Re} [\gamma_{ij}^{-1}] \sin \delta_{ij} + \operatorname{Im} [\gamma_{ij}^{-1}] \cos \delta_{ij} \quad (1.2)$$

を定義する。ただし、 $\delta_{ij} := \delta_i - \delta_j$ である。このとき、 f_i に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \delta_i} &= E_i \sum_{j=1, j \neq i}^{|\mathcal{I}_G|} E_j k_{ij}(\delta_{ij}), & \frac{\partial f_i}{\partial E_i} &= 2E_i h_{ii}(\delta_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^{|\mathcal{I}_G|} E_j h_{ij}(\delta_{ij}), \\ \frac{\partial f_i}{\partial \delta_j} &= -E_i E_j k_{ij}(\delta_{ij}), & \frac{\partial f_i}{\partial E_j} &= E_i h_{ij}(\delta_{ij}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

が得られる。ただし、 $j \neq i$ とする。同様に、 g_i に対して

$$\frac{\partial g_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{|\mathcal{I}_G|} E_j h_{ij}(\delta_{ij}), \quad \frac{\partial g_i}{\partial \delta_j} = E_j h_{ij}(\delta_{ij}), \quad \frac{\partial g_i}{\partial E_i} = k_{ii}(\delta_{ii}), \quad \frac{\partial g_i}{\partial E_j} = k_{ij}(\delta_{ij}) \quad (1.4)$$

が得られる。これらを用いて、式 (??) の常微分方程式系の近似線形システムがつぎのように得られる。

補題 1.1.1 式 (??) の連立方程式によって式 (??) の発電機モデルが結合された電力系統モデルを考える。ただし、すべての $i \in \mathcal{I}_G$ に対して $X'_{di} = X_{qi} > 0$ であるとする。電力系統モデルが同期状態にあることを仮定し、周波数偏差の定常値を $\Delta\omega^*$ と表す。また、発電機 i の機械的トルク、界磁電圧、内部電圧の定常値を P_{mech}^* , V_{field}^* , E_i^* と表し、発電機 i と発電機 j の回転子偏角差の定常値を δ_{ij}^* と表す。このとき、式 (??) の等価な常微分方程式系の近似線形システムは

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}^{\text{lin}}(t) \\ \text{diag}(M_i) \Delta \dot{\omega}^{\text{lin}}(t) \\ \text{diag}(\tau_{di}) \dot{E}^{\text{lin}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 I & 0 \\ -L & -\text{diag}(D_i) & -C \\ B & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{\text{lin}}(t) \\ \Delta \omega^{\text{lin}}(t) \\ E^{\text{lin}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\text{mech}}^{\text{lin}}(t) \\ V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

と得られる。ただし、状態変数および入力変数は、対応する変数の定常値との微小偏差を並べたベクトルであり、式 (1.2) の関数 k_{ij} および h_{ij} に対して

$$\begin{aligned} L &:= \begin{bmatrix} E_1^* \sum_{j \neq 1} E_j^* k_{1j}(\delta_{1j}^*) & -E_1^* E_2^* k_{12}(\delta_{12}^*) & \cdots & -E_1^* E_N^* k_{1N}(\delta_{1N}^*) \\ -E_2^* E_1^* k_{21}(\delta_{21}^*) & E_2^* \sum_{j \neq 2} E_j^* k_{2j}(\delta_{2j}^*) & \cdots & -E_2^* E_N^* k_{2N}(\delta_{2N}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_N^* E_1^* k_{N1}(\delta_{N1}^*) & -E_N^* E_2^* k_{N2}(\delta_{N2}^*) & \cdots & E_N^* \sum_{j \neq N} E_j^* k_{Nj}(\delta_{Nj}^*) \end{bmatrix} \\ A &:= \text{diag}(X_{di} - X_{qi}) \begin{bmatrix} k_{11}(\delta_{11}^*) & k_{12}(\delta_{12}^*) & \cdots & k_{1N}(\delta_{1N}^*) \\ k_{21}(\delta_{21}^*) & k_{22}(\delta_{22}^*) & \cdots & k_{2N}(\delta_{2N}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(\delta_{N1}^*) & k_{N2}(\delta_{N2}^*) & \cdots & k_{NN}(\delta_{NN}^*) \end{bmatrix} - \text{diag}\left(\frac{X_{di}}{X_{qi}}\right) \\ B &:= \text{diag}(X_{di} - X_{qi}) \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq 1} E_j^* h_{1j}(\delta_{1j}^*) & E_2^* h_{12}(\delta_{12}^*) & \cdots & E_N^* h_{1N}(\delta_{1N}^*) \\ E_1^* h_{21}(\delta_{21}^*) & -\sum_{j \neq 2} E_j^* h_{2j}(\delta_{2j}^*) & \cdots & E_N^* h_{2N}(\delta_{2N}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^* h_{N1}(\delta_{N1}^*) & E_2^* h_{N2}(\delta_{N2}^*) & \cdots & -\sum_{j \neq N} E_j^* h_{Nj}(\delta_{Nj}^*) \end{bmatrix} \\ C &:= \text{diag}(2E_i^* h_{ii}(\delta_{ii}^*)) + \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1} E_j^* h_{1j}(\delta_{1j}^*) & E_1^* h_{12}(\delta_{12}^*) & \cdots & E_1^* h_{1N}(\delta_{1N}^*) \\ E_2^* h_{21}(\delta_{21}^*) & \sum_{j \neq 2} E_j^* h_{2j}(\delta_{2j}^*) & \cdots & E_2^* h_{2N}(\delta_{2N}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_N^* h_{N1}(\delta_{N1}^*) & E_N^* h_{N2}(\delta_{N2}^*) & \cdots & \sum_{j \neq N} E_j^* h_{Nj}(\delta_{Nj}^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

である。

証明 ...

式 (1.5) の近似線形システムの安定性を解析するために、その安定性を特徴づけるシステム行列として

$$\Psi := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(M_i) & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\tau_{di}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 I & 0 \\ -L & -\text{diag}(D_i) & -C \\ B & 0 & A \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

に注目する。ここで、式 (1.6) の行列 L と B に注目すると、各行の和はすべて 0 となっていることがわかる。すなわち

$$L\mathbf{1} = 0, \quad B\mathbf{1} = 0 \quad (1.8)$$

が成り立つ。このことから、 Ψ は正則ではなく、

$$\mathcal{M} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.9)$$

は Ψ の零固有値に対する固有空間であることがわかる。これは、入力が 0 である場合にも、原点以外にシステムの平衡点が存在することを意味する。この平衡点の集合は、同期状態にある電力系統モデルにおいて、相対的な値を一定に保ってすべての発電機の偏角を変化させた場合にも等価な同期状態となることを表すものである。したがって、システ

ムの状態が式 (1.9) の平衡点集合のうちのどの点に収束するかは問題とならない。この事実に基づき、つぎの定義を与える。

定義 1.1.2 式 (1.5) の近似線形システムを考える。任意の初期値に対して、内部状態が式 (1.9) の平衡点集合 M のいずれかの点に収束するとき、近似線形システムは**同期する**と呼ぶ。ただし、入力恒等的に 0 とする。

定義 1.1.2 の意味で近似線形システムが同期するためには、式 (1.7) の Ψ の零固有値に対する固有空間が 1 次元であること、すなわち、式 (1.9) の M が Ψ の核空間にちょうど等しい必要がある。その理由は、 M 以外の零固有値に対する固有空間に初期値が与えられたとすると、システムの状態はその初期値から変化せず M の点には収束しないためである。なお、この必要条件はつぎのように表現できる。

補題 1.1.2 式 (1.7) の Ψ を考える。ただし、 ω_0 は非零であり、 L と B は式 (1.8) を満たすものとする。このとき、 Ψ の核空間が式 (1.9) の M に等しいための必要十分条件は

$$\ker \begin{bmatrix} -L & -C \\ B & A \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.10)$$

である。特に、 A が正則である場合には、式 (1.10) は

$$\ker(L - CA^{-1}B) = \text{span} \{\mathbf{1}\} \quad (1.11)$$

と等価である。

証明 行列 Ψ の 1 行目のブロックに注目すると、 Ψ の核空間にあるベクトルは、必ず $\text{col}(x, 0, y)$ の構造をもつことがわかる。いま、 L と B の仮定から、式 (1.9) の M が Ψ の核空間に包含されることは明らかである。したがって、式 (1.10) が成り立つことが、 Ψ の核空間が M だけであるための必要十分条件である。特に、 A が正則である場合には

$$\begin{bmatrix} -L & -C \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (L - CA^{-1}B)x = 0, \quad y = -A^{-1}Bx$$

であることから、式 (1.11) と式 (1.10) は等価である。 ■

式 (1.5) の近似線形システムの同期を解析する方法のひとつは、式 (1.7) の Ψ の固有値を直接的に調べることである。実際、式 (1.9) の固有空間に対する零固有値を除くすべての固有値の実部が負であることが、近似線形システムが同期することの必要十分条件である。このことは第 1.1.3 節で詳述する。しかしながら、一般に高次元の行列のすべての固有値を解析的に求めることはできないため、この直接的なアプローチによりシステムの同期に関する知見を得ることは難しい。以下の議論のため、つぎの 2 つの基本的な用語を定義しておく。

定義 1.1.3 正方行列 A に対して、そのすべての固有値の実部が負であるとき、 A は**安定**であると呼ぶ。

定義 1.1.4 線形の微分方程式で記述される

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.12)$$

に対して、行列 A が安定であるとき、式 (1.12) の線形システムは**漸近安定**であると呼ぶ。

例 1 (近似線形システムの同期に関する数値実験)

式 (1.5) の近似線形システムの挙動を数値的に確認してみよう。図 1.1 に示される 3 つの発電機で構成される電力系

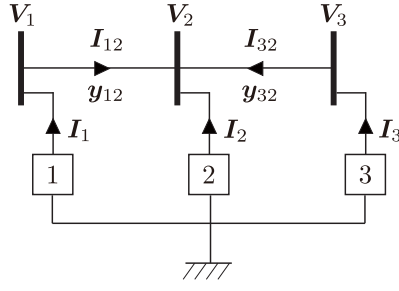


図 1.1 3つの発電機からなる電力系統モデル (要変更)

統モデルを考える。以下では，すべての発電機で物理定数は共通であるとして

$$M_i = 1, \quad D_i = 1, \quad \tau_{di} = 0.01, \quad X_{di} = 1.01, \quad X_{qi} = 1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

に設定する。また，系統周波数は $\omega_0 = 1$ とする。内部電圧の定常値は各発電機で異なる値として

$$E_1^* = 1, \quad E_2^* = 2, \quad E_3^* = 3$$

に設定する。回転子偏角の定常値は，パラメータ $\theta_1 \in [0, 1]$ を用いて

$$\delta_{12}^* = -\frac{\pi}{2}\theta_1, \quad \delta_{13}^* = \frac{\pi}{2}\theta_1$$

と表す。パラメータ θ_1 の大きさは，定常状態における回転子偏角の大きさに対応している。送電網のアドミタンス行列もパラメータ $\gamma > 0$ および $\theta_2 \in [0, 1]$ を用いて

$$\mathbf{Y} = \theta_2 \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} + j(1 - \theta_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と表す。ここで， γ はアドミタンス行列の実部の絶対値を指定するパラメータであり， θ_2 は実部と虚部の相対的な大小関係を指定するパラメータである。以下では，このパラメータ $(\gamma, \theta_1, \theta_2)$ を変化させて，近似線形システムの同期を数値的に解析する。なお，入力恒等的に 0 であるとする。

まず， $\gamma = 2$ ， $\theta_1 = 0.3$ ， $\theta_2 = 0.2$ とした場合のシステムの初期値応答を確認してみよう。適当な初期値を設定した場合の結果を図 1.2 に示す。この図から，このパラメータ設定の場合は定義 1.1.2 の意味で近似線形システムの同期が達成されていることがわかる。つぎに，(a) $\gamma = 0.1$ ，(b) $\gamma = 2$ ，(c) $\gamma = 5$ に設定する。この (a)–(c) の場合において， θ_1 と θ_2 を 0.01 の刻み幅で変化させて式 (1.7) の Ψ の固有値を調べることで，同期が達成されるか否かを網羅的に確認してみよう。図 1.3 にその結果を示す。青の領域が同期が達成されるパラメータを表している。図 1.3(a)–(c) から， γ が大きくなる，すなわち，アドミタンス行列の実部が大きくなるにしたがって，同期が達成されるパラメータの領域が狭くなっていることがわかる。また，どの図においても原点付近のパラメータ領域，すなわち，定常状態における回転子偏角が小さく，かつ，アドミタンス行列の実部が虚部よりも相対的に小さい場合には，システムの同期が達成されていることがわかる。なお， $\gamma = 5$ ， $\theta_1 = 1$ ， $\theta_2 \in [0.56, 0.99]$ のパラメータでは，システムの挙動は非常に振動的であるが，例外的に同期が達成されていた。これらの結果から，定常状態における回転子偏角が小さく，アドミタンス行列の実部が虚部よりも相対的に小さい場合に，同期が達成されやすい傾向にあることが示唆される。しかしながら，このような実験的なアプローチだけでは，設定された定数の値以外に対して，同期が達成されるか否かを判定することはできない。また，この結果だけでは，システムの同期が達成されなかった原因を特定することも難しい。

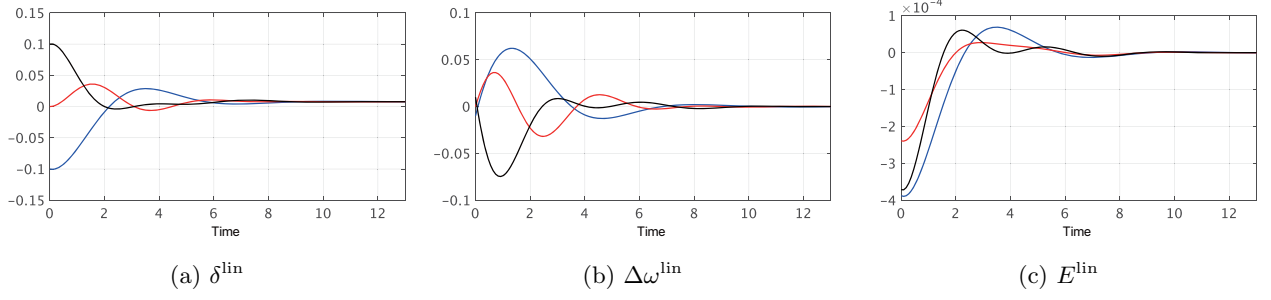


図 1.2 近似線形システムの初期値応答 (青：発電機 1, 赤：発電機 2, 黒：発電機 3)

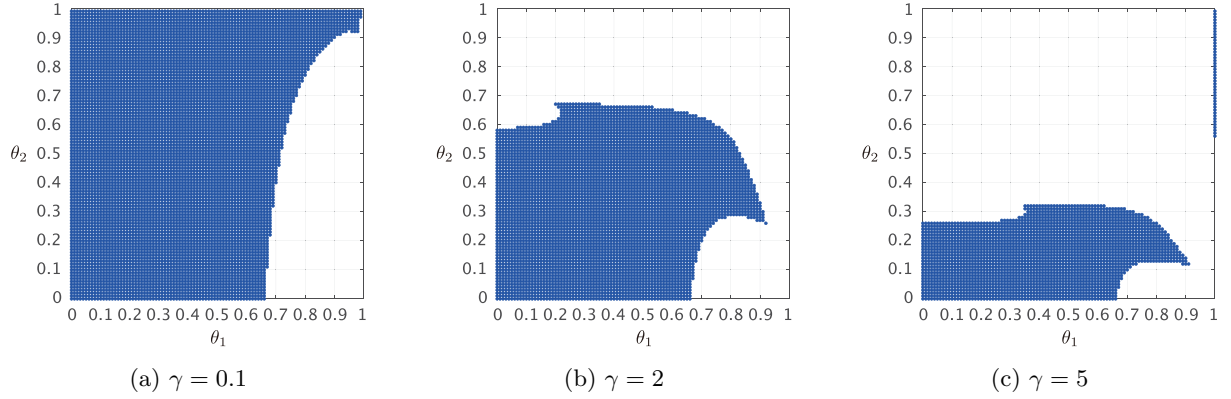


図 1.3 同期が達成されるパラメータの領域

1.1.2 伝達関数の正実性に基づく安定性解析

近似線形システムの伝達関数表現

システム制御理論における伝達関数の正実性やそれに類する概念に基づいて、式 (1.5) の近似線形システムの同期を解析することを考えよう。まず、時間領域における式 (1.5) の微分方程式をラプラス変換して、ラプラス領域（周波数領域）におけるシステム表現を導出する。図 1.4 は式 (1.5) をラプラス変換して得られるブロック線図である。この図は以下の手順により導出できる。いま、3 行目の E^{lin} に関する微分方程式に注目すると、そのラプラス変換は

$$s \text{diag}(\tau_{di}) E^{\text{lin}}(s) = B \delta^{\text{lin}}(s) + A E^{\text{lin}}(s) + V_{\text{field}}^{\text{lin}}(s)$$

と得られる。ただし、ラプラス領域の変数も時間領域の変数と同じ記号を用いて表している。これを $E^{\text{lin}}(s)$ に関して解けば

$$E^{\text{lin}}(s) = (\text{diag}(\tau_{di})s - A)^{-1} \{B \delta^{\text{lin}}(s) + V_{\text{field}}^{\text{lin}}(s)\}$$

が得られる。これは図 1.4 の最下段にある右と中央のブロックに相当する。同様に、式 (1.5) の 1 行目と 2 行目の微分方程式もラプラス変換し、注目している変数に関する方程式を代数的に解くことによって、図 1.4 のその他のブロックも得られる。なお、図 1.4 左側に位置する P^{lin} は、各発電機バスに供給される有効電力を並べたベクトルであると解釈できる。

つぎに、図 1.4 のブロック線図を解析しやすい形式に変形することを考える。具体的には、右上の $\frac{\omega_0}{s} I$ のブロックを分割し、左上のブロックと ω_0 の積として

$$F(s) := \text{diag} \left(\frac{\omega_0}{M_i s + D_i} \right) \quad (1.13)$$

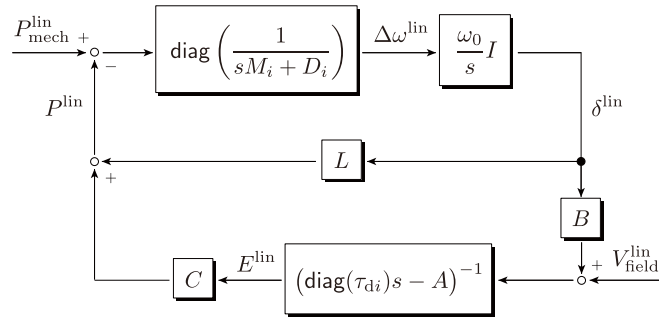


図 1.4 伝達関数に基づく近似線形システムのブロック線図表現

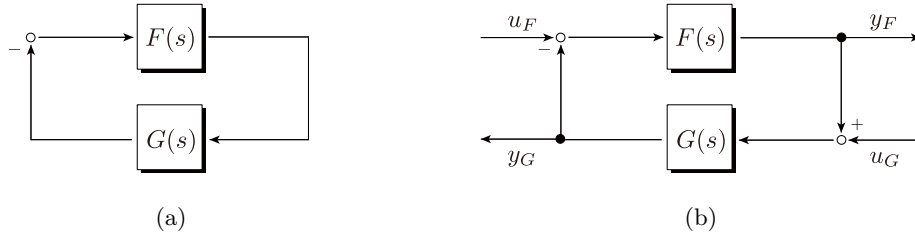


図 1.5 ネガティブ・フィードバック系

を定義する。また、残りの $\frac{1}{s}I$ の項を下側のブロックに移動させ、それらの積として

$$G(s) := -\frac{1}{s} \underbrace{\left\{ -C(\text{diag}(\tau_{di})s - A)^{-1}B - L \right\}}_{H(s)} \quad (1.14)$$

を定義する。これにより、図 1.4 から入力を除いたブロック線図は、図 1.5(a) のように 2 つのシステムのネガティブ・フィードバック結合として表現できる。

伝達関数の安定性と正実性

図 1.5(a) による式 (1.5) の伝達関数表現においては、伝達関数 $F(s)$ は単純な 1 次系が並列されたシステムであるため、その性質は容易に調べられる。例えば、 ω_0 , M_i , D_i はすべて正の定数であることから、 $F(s)$ は常に安定である。伝達関数に対する安定性はつぎのように定義される。

定義 1.1.5 伝達関数 $Q(s)$ のすべての極の実部が負であるとき、 $Q(s)$ は**安定**であると呼ぶ。

式 (1.13) の $F(s)$ の極、すなわち、分母多項式 $M_i s + D_i$ の零点は $s = -\frac{D_i}{M_i}$ であることから $F(s)$ は安定である。この伝達関数の極は、時間領域における状態空間実現 (付録??) である

$$F : \begin{cases} \dot{x}_f = -\text{diag}\left(\frac{D_i}{M_i}\right)x_f + u_f \\ y_f = \omega_0 x_f \end{cases} \quad (1.15)$$

に対するシステム行列の固有値と一致する。なお、 $F(s)$ の微分方程式による実現は、座標変換の自由度があるため唯一ではないが、その固有値は実現に依らず不変である。

さらに、式 (1.13) の $F(s)$ は正実性 (positive realness) と呼ばれる特性をもつ。伝達関数に対する正実性はつぎのように定義される。

定義 1.1.6 正実な伝達関数 $Q(s)$ に対して

$$\Omega_0 := \{\omega_0 \in \mathbb{R} : \text{純虚数 } j\omega_0 \text{ が } Q(s) \text{ の極である}\} \quad (1.16)$$

を定義する。つぎの3条件が満たされるとき、 $Q(s)$ は**正実**であると呼ぶ。

- $Q(s)$ のすべての極の実部は非正である。
- すべての $\omega \in [0, \infty) \setminus \Omega_0$ に対して、 $Q(j\omega) + Q^T(-j\omega)$ が半正定である。
- 純虚数の極が存在するとき、それらの重複度は1であり、かつ、留数に対して

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0)Q(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \{(s - j\omega_0)Q(s)\}^* \succeq 0, \quad \forall \omega_0 \in \Omega_0$$

が成り立つ。

定義 1.1.6 において、特に重要なものは1つ目と2つ目の条件である。1つ目の条件は伝達関数の安定性を表している。ただし、極の実部が0である場合も許容されている。2つ目の条件は、伝達関数を虚軸上で評価したときの複素対称な部分の正定性に関するものである。特に、 $Q(s)$ がスカラーの場合、すなわち、入力と出力がどちらもスカラーである場合には、2つ目の条件はすべての $\omega \in [0, \infty) \setminus \Omega_0$ に対して $Q(j\omega)$ の実部が非負であることを表している。ただし、 $Q(s)$ が行列である場合には、一般に

$$Q(j\omega) + Q^T(-j\omega) \neq 2 \operatorname{Re} [Q(j\omega)]$$

であることに注意されたい。なお、実数係数をもつ $Q(s)$ に対しては $Q^T(-j\omega)$ は $\{Q(j\omega)\}^*$ に等しい。3つ目の条件は、 $Q(s)$ が純虚数の極をもつ場合の例外的なものであるが、例えば、式 (1.14) の $G(s)$ のように原点に極をもつ伝達関数を解析するために必要となる。

例 2 (並列された安定な1次系の正実性)

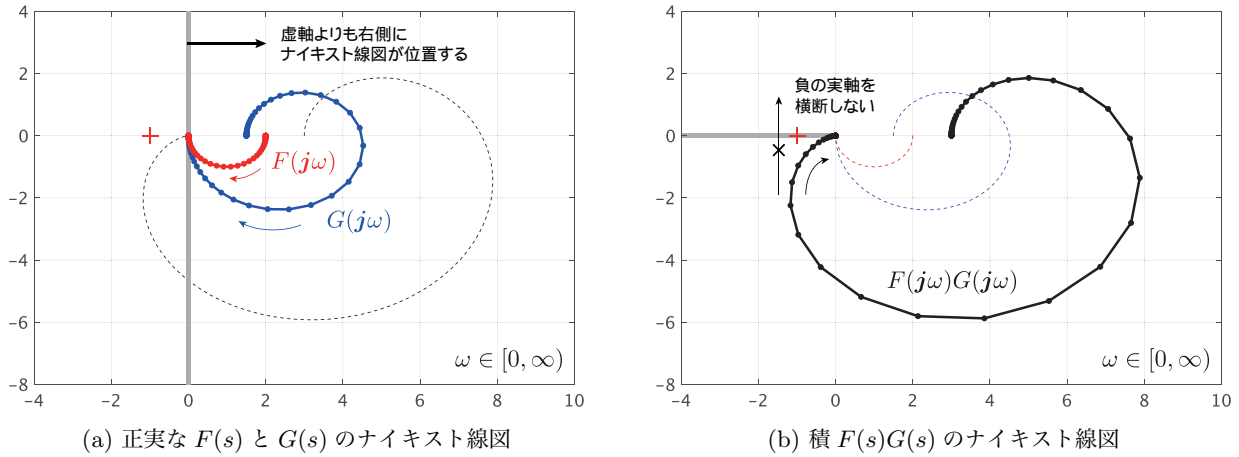
式 (1.13) の $F(s)$ が正実であることを確認してみよう。まず、 $F(s)$ のすべての極の実部は負であるため、1つ目の条件は満たされている。また、純虚数の極は存在しないため、3つ目の条件を考慮する必要はない。さいごに、2つ目の条件について

$$\operatorname{diag} \left(\frac{\omega_0}{j\omega M_i + D_i} \right) + \left\{ \operatorname{diag} \left(\frac{\omega_0}{j\omega M_i + D_i} \right) \right\}^* = \operatorname{diag} \left(\frac{2\omega_0 D_i}{\omega^2 M_i^2 + D_i^2} \right)$$

であることから、すべての $\omega \in [0, \infty)$ に対してその半正定性が示される。なお、 $\Omega_0 = \emptyset$ である。

正実性に基づくフィードバック系の安定性解析

以下では、伝達関数の正実性が、図 1.5(a) のようなフィードバック系の安定性を示すために有用な性質であることを説明する。ただし、その準備として、伝達関数で表現されたフィードバック系に対する安定性を新たに定義する必要がある。その理由は、図 1.5(a) では、 $F(s)$ や $G(s)$ の入出力信号はフィードバック結合に使われてしまっており、外部から印加する入力信号や観測する出力信号が存在しないためである。このことは、図 1.5(a) のフィードバック系には、入力と出力の関係を表す「伝達関数」そのものが定義されないことを意味する。したがって、伝達関数に基づくフィードバック系の安定性解析に、定義 1.1.5 の安定性の定義をそのまま用いることはできない。以下の議論では、フィードバック系に対してつぎの安定性の定義を用いる。

図 1.6 正実な伝達関数とそれらの積のナイキスト線図 (赤十字は $-1 + 0j$ の点を表す)

定義 1.1.7 図 1.5(a) のネガティブ・フィードバック系に対して、図 1.5(b) に示されるように入力と出力を追加することを考える。このとき、 (u_F, u_G) から (y_F, y_G) までの伝達関数

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{y_F u_F}(s) & T_{y_F u_G}(s) \\ T_{y_G u_F}(s) & T_{y_G u_G}(s) \end{bmatrix}}_{T(s)} := \begin{bmatrix} (I + F(s)G(s))^{-1}F(s) & -(I + F(s)G(s))^{-1}F(s)G(s) \\ (I + G(s)F(s))^{-1}G(s)F(s) & (I + G(s)F(s))^{-1}G(s) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

に対して、 $T(s)$ を構成する 4 つの伝達関数がすべて安定であるとき、図 1.5(a) のネガティブ・フィードバック系は**内部安定**であると呼ぶ。

定義 1.1.7 における 4 つの伝達関数の安定性は、図 1.5(a) のフィードバック系を時間領域の微分方程式で表現した場合に、そのシステムが漸近安定となることと等価であることが知られている。したがって、定義 1.1.7 は一見すると煩雑であるが、素朴に直感する時間領域における安定性と同義であると解釈すれば良い。なお、式 (1.13) の $F(s)$ の定義から、図 1.5(b) における u_F と y_F の信号は、図 1.4 における $P_{\text{mech}}^{\text{lin}}$ と $\omega_0 \Delta \omega^{\text{lin}}$ にそれぞれ対応することがわかる。また、 y_G は図 1.4 の P^{lin} に対応する。一方で、 u_G は式 (1.5) の微分方程式には存在せず、伝達関数に基づくフィードバック系の内部安定性を定義するために現れた「仮想的な」入力信号であることに注意されたい。

例 3 (ナイキストの安定判別法に基づく正実な伝達関数のフィードバック系の安定性解析)

正実な伝達関数から構成されるネガティブ・フィードバック系の内部安定性をナイキストの安定判別法 (付録??) の観点で考察してみよう。説明の簡単化のため、図 1.5(a) における $F(s)$ と $G(s)$ はスカラーの伝達関数であるとする。具体的には

$$F(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G(s) = \frac{3(12s+1)}{2(3s+1)(s+1)}$$

と設定する。このとき、 $F(s)$ と $G(s)$ が正実な伝達関数であることは、図 1.6(a) に示されるように、それらのナイキスト線図が複素平面上の虚軸より右側に存在することを意味している。すなわち、 $F(s)$ と $G(s)$ の周波数応答関数を

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\angle F(j\omega)}, \quad G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

と極座標で表示したときに、それらの位相 $\angle F(j\omega)$ と $\angle G(j\omega)$ はどちらも、すべての ω に対して $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ の範囲に収まっていることを表している。したがって、それらの積の周波数応答関数

$$F(j\omega)G(j\omega) = |F(j\omega)||G(j\omega)|e^{j\{\angle F(j\omega)+\angle G(j\omega)\}}$$

の位相は、すべての ω に対して $[-\pi, \pi]$ の範囲にあることが導かれる。この「位相が $[-\pi, \pi]$ の範囲にある」という事実は、一見すると複素平面上のすべての位相を表しており特別な意味がないように見えるが、重要な点は「積の周

波数応答関数のナイキスト線図は、負の実軸を横断するような軌跡は描かないこと」を表していることである。この様子を図 1.6(b) に示している。したがって、 $F(s)$ と $G(s)$ の積のナイキスト線図が、それらのネガティブ・フィードバック系の内部安定性を特徴づける $-1 + 0j$ の点を右に見ながら周回しないことが結論づけられる。

しかしながら、 $F(s)$ と $G(s)$ の正実性だけでは、積のナイキスト線図が $-1 + 0j$ の点の上を「ちょうど通過する」ような安定限界となる場合が含まれている。実応用においては、このような状況、すなわち

$$F(j\omega_0)G(j\omega_0) = -1 + 0j$$

となる ω_0 が存在するような状況は、 $F(s)$ と $G(s)$ を意図的に選ばない限りはほとんど起こらないが、数学的に厳密にフィードバック系の内部安定性を示すためには、正実性よりも少しだけ強い条件を $F(s)$ や $G(s)$ に課す必要がある。この「少しだけ強い条件」の与え方には様々なものが考えられる。例えば、すべての $\omega \in [0, \infty)$ に対して、 $F(j\omega)$ の位相が $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ の境界には触れないこと、すなわち、 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の範囲にあることがわかるだけで、 $F(s)$ と $G(s)$ のネガティブ・フィードバック系の内部安定性が数学的に証明できる。

例 3 で示されているように、伝達関数の正実性はフィードバック系の内部安定性を議論するために有用である。しかしながら、注目する伝達関数が式 (1.13) の $F(s)$ のように単純なものではない場合には、その伝達関数が正実かどうかを解析的に判断することは難しい。一方で、式 (1.5) のような微分方程式を解析する場合には、ラプラス領域の伝達関数に対して、「時間領域での状態空間実現をあらかじめ知っている」ことに注意されたい。

つぎの事実、システム制御理論において**正実補題** (positive real lemma) として知られているものであり [1]、時間領域での状態空間実現に基づいて伝達関数の正実性を判定することを可能にする。

補題 1.1.3 安定かつ正方な伝達関数 $Q(s)$ に対して、その時間領域における実現のひとつが

$$Q: \begin{cases} \dot{x}_Q = Ax_Q + Bu_Q \\ y_Q = Cx_Q + Du_Q \end{cases} \quad (1.18)$$

で与えられているとする。このとき、ある対称かつ正定な行列 P が存在して

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -(D + D^T) \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (1.19)$$

が満たされるならば、 $Q(s)$ は正実である。特に、式 (1.18) において (A, B) が**可制御**であるならば、式 (1.19) の正定解 P が存在することと $Q(s)$ が正実であることは等価である。

証明 後半の等価性の証明には、本書で扱わない概念が必要となるため、ここでは前半の十分性の証明のみを示す。式 (1.19) より、任意の複素ベクトル x と u に対して

$$\begin{bmatrix} x^* & u^* \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -C^T \\ -C & -(D + D^T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.20)$$

が成り立つ。ここで、一般に $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ であることを用いると

$$\begin{bmatrix} x^* & u^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \text{tr} \{ P \{ x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^* \} \}$$

が得られる。さらに、**付録の補題??**を用いることにより、 $x \neq 0$ かつ

$$x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^* = 0 \quad (1.21)$$

であることと、ある $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して $Ax + Bu = j\omega x$ が成り立つことが等価であることがわかる。したがって、式 (1.21) が成り立つすべての $x \neq 0$ と u の組、すなわち、任意の u と ω により構成される非零の $x = (j\omega I - A)^{-1}Bu$ に対して式 (1.20) の不等式を考えることにより、

$$\begin{bmatrix} \{ (j\omega I - A)^{-1}Bu \}^* & u^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -C^T \\ -C & -(D + D^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}Bu \\ u \end{bmatrix} \leq 0$$

が, $Bu \neq 0$ を満たす任意の u と ω に対して成り立つことがわかる. なお, $D + D^T$ は半正定であることから, この不等式は $Bu = 0$ であるような u に対しても成り立つ. したがって, 式 (1.19) が成り立つ正定な P が存在するのであれば, 任意の u と ω に対して

$$u^* \left[C(j\omega I - A)^{-1}B + D + \{C(j\omega I - A)^{-1}B + D\}^* \right] u \geq 0$$

が成り立つことが導かれる. これは $Q(s)$ が正実であることを意味する. ■

正定行列 P が式 (1.19) の行列不等式を満たすことは, ある行列 L と W が存在して

$$A^T P + PA + L^T L = 0, \quad PB + L^T W = C^T, \quad W^T W = D + D^T \quad (1.22)$$

が成り立つことと等価であることも知られている. 一般に, P を数値的に探索する場合には式 (1.19) の不等式表現がしばしば都合が良い. 一方で, 数学的な解析を行う場合には式 (1.22) の方程式表現が便利な場合もあるため, 目的に応じて2つの等価表現が使い分けられている.

例 4 (並列された安定な 1 次系に対する正実補題)

補題 1.1.3 を用いて式 (1.13) の $F(s)$ の正実性を確認してみよう. 式 (1.15) は $F(s)$ の時間領域における実現であることから, 補題 1.1.3 の行列に当てはめて考えると

$$A = -\text{diag} \left(\frac{D_i}{M_i} \right), \quad B = I, \quad C = \omega_0 I, \quad D = 0$$

となる. このとき, $P = \omega_0 I$ と選べば, 式 (1.19) の行列不等式に対して

$$\begin{bmatrix} -2 \text{diag} \left(\frac{\omega_0 D_i}{M_i} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \preceq 0$$

が得られるため, $F(s)$ が正実であることが結論づけられる. なお, この例のように, 出力に inputs が直接的に現れないシステム, すなわち, $D = 0$ であるシステムについては, その伝達関数の正実性は

$$A^T P + PA \preceq 0, \quad PB = C^T \quad (1.23)$$

を満たす正定な P が存在することと等価である. ただし, (A, B) は可制御とする.

式 (1.13) に対して, $\tilde{x}_f := \omega_0 x_f$ の座標変換を考えてみよう. このとき, $F(s)$ の別の実現として

$$F: \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_f = -\text{diag} \left(\frac{D_i}{M_i} \right) \tilde{x}_f + \omega_0 u_f \\ y_f = \tilde{x}_f \end{cases}$$

が得られる. この実現に対しては, $P = \frac{1}{\omega_0} I$ が式 (1.19) の行列不等式の解として得られることがわかる. このように, 式 (1.19) の行列不等式の解は, その状態空間実現に依存して変化することに注意されたい.

式 (1.15) の F のように, 入力信号が出力信号に直接的に現れないシステムの場合, すなわち, 出力信号が状態変数の線形結合のみで記述される場合, その伝達関数の分母多項式の次数は分子多項式の次数よりも厳密に大きい. このような伝達関数は, **厳密にプロパー**な伝達関数と呼ばれる. 図 1.5(a) において, $F(s)$ と $G(s)$ の両方が厳密にプロパーでない場合には, それらのフィードバック系が定義されない場合があることに注意されたい. これは, $F(s)$ への入力信号が瞬時的にその出力信号として現れ, その出力信号が $G(s)$ を通して瞬時的に $F(s)$ にフィードバックされるような, 入出力信号の瞬時的な無限ループが生じ得るためである. なお, $F(s)$ と $G(s)$ の少なくともどちらか一方が厳密にプロパーであればそのような問題は生じないため, 以下では必要に応じて伝達関数が厳密にプロパーであることを条件として課す.

つぎの補題が示すように, 2つの正実な伝達関数によるネガティブ・フィードバック系は正実性をもつ.

補題 1.1.4 図 1.5(b) において、伝達関数 $F(s)$ と $G(s)$ はどちらも正実であるとする。ただし、 $F(s)$ と $G(s)$ の少なくともどちらか一方は厳密にプロパーであるとする。このとき、式 (1.17) の $T(s)$ によって定義される (u_F, u_G) から (y_F, y_G) までの伝達関数は正実である。

証明 時間領域において、 $F(s)$ と $G(s)$ のネガティブ・フィードバック系は

$$F: \begin{cases} \dot{x}_F = A_F x_F + B_F u_F \\ y_F = C_F x_F + D_F u_F, \end{cases} \quad G: \begin{cases} \dot{x}_G = A_G x_G + B_G y_F \\ u_G = -C_G x_G \end{cases}$$

と表せる。ただし、 $G(s)$ が厳密にプロパーである場合を考えているが、 $F(s)$ が厳密にプロパーである場合も同様である。このとき、フィードバック系の状態方程式をひとつにまとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{x}_G \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_F & -B_F C_G \\ B_G C_F & A_G - B_G D_F C_G \end{bmatrix}}_{A_T} \begin{bmatrix} x_F \\ x_G \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_F & 0 \\ B_G D_F & B_G \end{bmatrix}}_{B_T} \begin{bmatrix} u_F \\ u_G \end{bmatrix}$$

が得られる。同様に、出力方程式は

$$\begin{bmatrix} y_F \\ y_G \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_F & -D_F C_G \\ 0 & C_G \end{bmatrix}}_{C_T} \begin{bmatrix} x_F \\ x_G \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_T} \begin{bmatrix} u_F \\ u_G \end{bmatrix}$$

とまとめられる。定義より、 $T(s) = C_T(sI - A_T)^{-1}B_T + D_T$ である。ここで、 $F(s)$ と $G(s)$ の正実性の仮定から

$$\begin{bmatrix} A_F^T P_F + P_F A_F & P_F B_F - C_F^T \\ B_F^T P_F - C_F & -(D_F + D_F^T) \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{cases} A_G^T P_G + P_G A_G \preceq 0 \\ P_G B_G = C_G^T \end{cases} \quad (1.24)$$

を満たす正定な P_F と P_G が存在する。また、 P_F と P_G をブロック対角に並べた行列を P_T とすると

$$A_T^T P_T + P_T A_T = \begin{bmatrix} A_F^T P_F + P_F A_F & (C_F^T - P_F B_F) C_G \\ C_G^T (C_F^T - P_F B_F)^T & A_G^T P_G + P_G A_G - C_G^T (D_F + D_F^T) C_G \end{bmatrix}, \quad P_T B_T = \begin{bmatrix} P_F B_F & 0 \\ C_G^T D_F & C_G^T \end{bmatrix}$$

が得られる。ただし、式 (1.24) 右の等式を用いた。したがって

$$\begin{bmatrix} A_T^T P_T + P_T A_T & P_T B_T - C_T^T \\ B_T^T P_T - C_T & -(D_T + D_T^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

となる。ただし

$$X := \begin{bmatrix} A_F^T P_F + P_F A_F & -(P_F B_F - C_F^T) C_G & P_F B_F - C_F^T \\ -C_G^T (P_F B_F - C_F^T)^T & -C_G^T (D_F + D_F^T) C_G & C_G^T (D_F + D_F^T) \\ (P_F B_F - C_F^T)^T & (D_F + D_F^T) C_G & -(D_F + D_F^T) \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_G^T P_G + P_G A_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。式 (1.24) 右の不等式より、 Y は半負定であることから、式 (1.25) の半不定性を示すためには、 X が半不定であることを示せば良い。実際、 X は

$$X = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -C_G^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F^T P_F + P_F A_F & P_F B_F - C_F^T \\ B_F^T P_F - C_F & -(D_F + D_F^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -C_G^T \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$$

と書き換えられることから、式 (1.24) 左の不等式によって、式 (1.25) の半不定性が示される。これは $F(s)$ と $G(s)$ のフィードバック系が正実であることを意味している。 ■

補題 1.1.4 に示されている正実性が保存される性質は、式 (1.5) の近似線形システムを伝達関数に基づき解析する場合にも有用である。例 2 や例 4 で示されているように、式 (1.13) の $F(s)$ は正実である。このとき、式 (1.14) の $G(s)$ の正実性が示されるのであれば、それらのネガティブ・フィードバック系は正実となることから、少なくとも式 (1.5) の内部状態は発散しないことが保証できる。一方で、 $F(s)$ と $G(s)$ が正実であることだけでは、フィードバック系の内部安定性を数学的に保証することはできない。この内部安定性を示すために、つぎの事実が利用できる。

補題 1.1.5 図 1.5(a) において, 伝達関数 $F(s)$ は正実かつ厳密にプロパーであり, $G(s)$ は対称行列 G_0 であるとする. このとき, G_0 が正定であるならば, そのネガティブ・フィードバック系は内部安定である.

証明 ナイキストで言ったほうが早いかも? 時間領域において, $F(s)$ と $G(s)$ のネガティブ・フィードバック系は

$$F: \begin{cases} \dot{x}_F = Ax_F + Bu_F \\ y_F = Cx_F, \end{cases} \quad G: u_F = -G_0 y_F$$

と表せる. ただし, F は最小実現であるものとする. この表現から, u_F と y_F を代入により消去すると, フィードバック系の簡潔な表現として

$$\dot{x}_F = (A - BG_0C)x_F$$

が得られる. 正実補題から, 式 (1.23) を満たすある正定な P が存在することに注意して, リアプノフ関数の候補として $V(x_F) := x_F^T P x_F$ と選ぶと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_F) &= \dot{x}_F^T P x_F + x_F^T P \dot{x}_F \\ &= x_F^T \underbrace{(A^T P + PA - 2C^T G_0 C)}_M x_F \end{aligned}$$

が得られる. ここで, (C, A) は可観測であることから M は負定である. ■

例 5 (正実性に基づくフィードバック系の安定性解析)

補題 1.1.4 と補題 1.1.5 を組み合わせることにより, 図 1.5(a) のフィードバック系の内部安定性を解析してみよう. ただし, 以下では, 式 (1.14) の $G(s)$ が正実であることを仮定して議論する. まず, 式 (1.15) の $F(s)$ の状態空間実現について, それ自身が正実な伝達関数と正定な行列のネガティブ・フィードバック系であるとみなす. 具体的には, F を 2 つに分解することにより

$$F_0: \begin{cases} \dot{x}_f = -\text{diag}\left(\frac{D_i}{M_i} - \kappa_i\right)x_f + u_f + v_f \\ y_f = \omega_0 x_f, \end{cases} \quad K: y_k = \text{diag}\left(\frac{\kappa_i}{\omega_0}\right)y_f, \quad v_f = -y_k$$

とする. 仮想的な入出力信号である v_f と y_k を代入により消去すれば, この F_0 と K のフィードバック系が式 (1.15) に一致することは容易にわかる. この分解は図 1.7 において点線のブロックで示されている. また, $\kappa_i \in (0, \frac{D_i}{M_i})$ である適当な κ_i を選べば F_0 は正実であり, K は正定行列による静的なフィードバックを表すことがわかる. 一方で, $G(s)$ の正実性を仮定していることから, $F_0(s)$ と $G(s)$ を

$$F_0: \begin{cases} \dot{x}_f = -\text{diag}\left(\frac{D_i}{M_i} - \kappa_i\right)x_f + u_f + v_f \\ y_f = \omega_0 x_f, \end{cases} \quad G: \begin{cases} \dot{x}_g = A_g x_g + B_g y_f \\ y_g = C_g x_g, \end{cases} \quad u_f = -y_g$$

のようにフィードバック結合した場合において, v_f から y_f までの伝達関数は正実となる. したがって, 図 1.7 のように, 全体系は $F_0(s)$ と $G(s)$ から構成される正実な伝達関数に, K という正定行列のフィードバックを加えた系であるとみなすことができる. これは図 1.5(a) のフィードバック系が内部安定であることを意味している.

例 5 で示されているように, 式 (1.15) の $F(s)$ が安定な 1 次系の並列であるという事実から, 式 (1.14) の $G(s)$ が正実であれば図 1.5(a) のフィードバック系が内部安定であることが示される. しかしながら, この内部安定性が, 図 1.4 のフィードバック系の内部安定性を必ずしも意味しないことに注意されたい. 実際, 式 (1.9) が示すように, 式 (1.5) の近似線形システムには不変な固有空間が存在するため漸近安定ではない. したがって, 図 1.4 のフィードバック系は内部安定にはならない. この相違は, 図 1.4 を図 1.5(a) に変換して, 積分器を含むいくつかのブロックを $G(s)$ としてまとめたことにより, $G(s)$ の内部で積分器の原点極が零点と相殺されていることに起因する. 次節では, この $G(s)$ の内部の極零相殺にも注意して, より精密に近似線形システムの同期を解析していく.

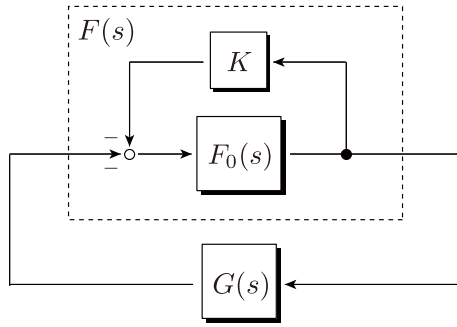


図 1.7 正実性に基づくフィードバック系の内部安定性の保証

1.1.3 正実性に基づく近似線形モデルの同期解析

同期偏差システムの安定性

式 (1.5) の近似線形システムの同期を解析するために、不変な固有空間を取り除くことを考えよう。具体的には、式 (1.5) の $3N$ 次元の微分方程式から 1 次元の不変部分空間を除いた $(3N - 1)$ 次元のサブシステムを求める。以下では、この $(3N - 1)$ 次元のサブシステムを**同期偏差システム**と呼ぶ。ここでの目的は、同期偏差システムが漸近安定であることが、式 (1.5) の近似線形システムが同期することの必要十分条件となることを確認することである。

同期偏差システムの導出には、固有値分解に基づくアプローチなどいくつかの方法が考えられるが、ここでは式 (1.14) の $G(s)$ の時間領域における実現を工夫することで、図 1.4 のフィードバック結合と同様の構造をもつ同期偏差システムを導出する。まず、式 (1.9) の不変な固有空間 \mathcal{M} は、式 (1.8) に示されている L と B の共通の核空間に由来することに注目しよう。この共通の核空間の存在は、 $\ker W = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ である任意の行列 $W \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ を用いて

$$L = L_0 W, \quad B = B_0 W \quad (1.26)$$

と分解できることを意味している。この事実を具体例で確認してみよう。

例 6 (同一の核空間をもつ行列による分解)

式 (1.6) の L について、 $N = 3$ である場合を考えてみよう。このとき、 L は

$$L = \begin{bmatrix} L_{12} + L_{13} & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{21} & L_{21} + L_{23} & -L_{23} \\ -L_{31} & -L_{32} & L_{31} + L_{32} \end{bmatrix}$$

と表せる。ただし、 $L_{ij} := E_i^* E_j^* k_{ij}(\delta_{ij}^*)$ である。これに対して、 $\ker W = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ を満たす行列、すなわち、 $W\mathbf{1} = 0$ を満たす行フルランクな行列の例として

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

を考える。この W を用いる場合には、 L は

$$L = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{12} + L_{13} & L_{13} \\ -L_{21} & L_{23} \\ -L_{31} & -(L_{31} + L_{32}) \end{bmatrix}}_{L_0} W$$

のように分解できる。一般に、 W の $WW^\dagger = I$ となる適当な右逆行列 W^\dagger を用いれば、 L_0 は LW^\dagger として求められる。この例の場合では、その右逆行列は

$$W^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

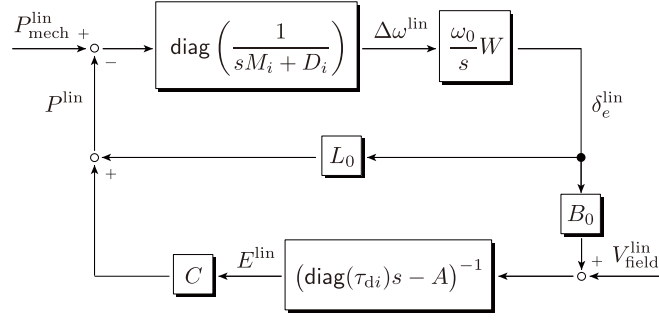


図 1.8 冗長な積分器が取り除かれた同期偏差システムのブロック線図表現

などのように選ぶことができる。このように、 W^\dagger は一意ではないが、 $WW^\dagger = I$ であれば、いかなる W^\dagger に対しても結果は等しい。なお、式 (1.6) の B も L と同様の構造をもつため、共通の W を用いて分解することが可能である。

式 (1.26) の分解を用いて、ラプラス領域における (1.14) の $G(s)$ の変形として

$$-\frac{1}{s}I \cdot \underbrace{\left\{ -C(\text{diag}(\tau_{di})s - A)^{-1}B - L \right\}}_{H(s)} = - \underbrace{\left\{ -C(\text{diag}(\tau_{di})s - A)^{-1}B_0 - L_0 \right\}}_{H_0(s)} \cdot \frac{1}{s}W \quad (1.27)$$

を考える。ラプラス領域においてこの等式は「自明な」ものであるが、時間領域における $G(s)$ の実現を考える場合には異なる解釈が与えられる。具体的には、 $G(s)$ への入力を $u_g(s)$ とすると、式 (1.27) の左辺は、 $u_g(s)$ を伝達関数 $H(s)$ に作用させて出てきた信号を $\frac{1}{s}$ で積分するものと解釈できる。一方で、右辺は $Wu_g(s)$ という信号を $\frac{1}{s}$ で積分した後で $H_0(s)$ に作用させるものと解釈できる。式 (1.27) の変形で重要な点は、「積分器の数が両辺で異なる」という事実である。具体的には、左辺では $H(s)u_g(s)$ という N 次元の信号を各要素で並列に積分するため、積分器は N 個存在するのに対して、右辺では $Wu_g(s)$ という $(N-1)$ 次元の信号の積分であるため、積分器は $(N-1)$ 個しか存在していない。これは、右辺の表現では $G(s)$ の入出力関係に影響しない冗長な積分器が削除されていることを意味している。この冗長な積分器は L や B の共通の核空間に由来するものであることに注意されたい。

式 (1.27) 右辺の表現によれば、図 1.4 のフィードバック系を図 1.8 のように変形することができる。この図の右上に位置する δ_e^{lin} は、 N 次元の δ^{lin} から不変な固有空間の成分を削除した $(N-1)$ 次元の偏差成分を表している。より正確にはつぎのように説明できる。まず、式 (1.5) の δ^{lin} に関する基底変換として

$$\delta_e^{\text{lin}} := W\delta^{\text{lin}}, \quad \bar{\delta}_e^{\text{lin}} := \frac{1}{N}\mathbf{1}^\top \delta^{\text{lin}} \quad (1.28)$$

を定義する。ただし、 $W \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ は $\ker W = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ を満たす適当な行列である。このとき

$$\begin{bmatrix} W \\ \frac{1}{N}\mathbf{1}^\top \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W^\dagger & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

が満たされるように W^\dagger を定義する。これは

$$\begin{bmatrix} W \\ \frac{1}{N}\mathbf{1}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^\dagger & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WW^\dagger & W\mathbf{1} \\ \frac{1}{N}\mathbf{1}^\top W^\dagger & \frac{1}{N}\mathbf{1}^\top \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

において $\frac{1}{N}\mathbf{1}^\top W^\dagger = 0$ であるような W^\dagger を選ぶことに等しい。このように定義すると、式 (1.28) の逆変換は

$$\delta^{\text{lin}} = W^\dagger \delta_e^{\text{lin}} + \mathbf{1} \bar{\delta}_e^{\text{lin}}$$

と表せる。ここで、 $\mathbf{1}$ は δ^{lin} の共通成分を表す基底であり、 W^\dagger はそれ以外の偏差成分を表す基底である。すなわち、 δ^{lin} の共通成分が $\bar{\delta}_e^{\text{lin}}$ であり、偏差成分が δ_e^{lin} である。式 (1.5) の近似線形システムにこの基底変換を行うと

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\delta}}_e^{\text{lin}} \\ \dot{\delta}_e^{\text{lin}} \\ \text{diag}(M_i)\Delta\dot{\omega}^{\text{lin}} \\ \text{diag}(\tau_{di})\dot{E}^{\text{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\omega_0}{N}\mathbf{1}^\top & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 W & 0 \\ 0 & -L_0 & -\text{diag}(D_i) & -C \\ 0 & B_0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_e^{\text{lin}} \\ \delta_e^{\text{lin}} \\ \Delta\omega^{\text{lin}} \\ E^{\text{lin}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\text{mech}}^{\text{lin}} \\ V_{\text{field}}^{\text{lin}} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

が得られる。ただし、 $L_0 = LW^\dagger$, $B_0 = BW^\dagger$ である。この表現において、1つ目の状態として現れている δ_e^{lin} が不変部分空間の成分であり、これが冗長な積分器に対応していることがわかる。また、図 1.8 のフィードバック系が、その冗長な積分器を削除したシステムである

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_e^{\text{lin}} \\ \text{diag}(M_i)\Delta\dot{\omega}^{\text{lin}} \\ \text{diag}(\tau_{di})\dot{E}^{\text{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 W & 0 \\ -L_0 & -\text{diag}(D_i) & -C \\ B_0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e^{\text{lin}} \\ \Delta\omega^{\text{lin}} \\ E^{\text{lin}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\text{mech}}^{\text{lin}} \\ V_{\text{field}}^{\text{lin}} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

に対応することがわかる。これが $(3N-1)$ 次元の同期偏差システムを記述する状態方程式である。したがって、式 (1.30) の同期偏差システムが漸近安定であること、すなわち、

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(M_i) & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\tau_{di}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 W & 0 \\ -L_0 & -\text{diag}(D_i) & -C \\ B_0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

が安定であることを示すためには、式 (1.13) の $F(s)$ と式 (1.27) 右辺の $G(s)$ から構成される $(3N-1)$ 次元のフィードバック系が内部安定であることを示せば良い。特に、式 (1.27) の右辺と左辺は s の関数としては等しいことから、左辺の伝達関数が正実であるならば右辺の伝達関数も正実である。以上の事実から、 $G(s)$ の表現形式にかかわらずその正実性が示されるのであれば、式 (1.5) の線形近似システムが同期することを結論づけられる。なお、式 (1.7) の Ψ の核空間が 1 次元、すなわち、式 (1.9) の M に等しい限りは、 $G(s)$ の内部で 2 つ以上の積分器が相殺されることはない。

近似線形システムの正実性

式 (1.6) のシステム行列に現れた関数 $k_{ij}(\delta_{ij}^*)$ や $h_{ij}(\delta_{ij}^*)$ には、式 (??) で定義される \mathbf{I} の逆行列の実部や虚部が混在しており、解析的な扱いは容易ではない。一方で、アドミタンス行列 \mathbf{Y} の実部が 0 であるとき、 \mathbf{I} は実対称かつ正定な行列となるため、式 (1.6) のシステム行列にも対称性や歪対称性などの扱いやすい構造が現れる。一般に、アドミタンス行列の非対角要素の実部はすべて非負であることから、定理 ?? より、アドミタンス行列の実部が 0 であることが、系統全体での有効電力の送電損失が 0 となるための必要十分条件であることがわかる。これらの事実に基づき、つぎの定義を導入する。

定義 1.1.8 式 (??) のアドミタンス行列 \mathbf{Y} の実部が 0 であるとき、送電網は**無損失**であると呼ぶ。

以下では、送電網が無損失であることが、式 (1.14) の $G(s)$ の正実性を特徴づけることを示す。その準備として、正実性と対になる概念である伝達関数の負虚性 (negative imaginaryness) を導入する [2, 3]。

定義 1.1.9 原点に極をもたない正実な伝達関数 $Q(s)$ に対して、式 (1.16) の Ω_0 を定義する。つぎの 3 条件が満たされるとき、 $Q(s)$ は**負虚**であると呼ぶ。

- $Q(s)$ のすべての極の実部は非正である。
- すべての $\omega \in (0, \infty) \setminus \Omega_0$ に対して、 $j\{Q(j\omega) - Q^T(-j\omega)\}$ が半正定である。
- 純虚数の極が存在するとき、それらの重複度は 1 であり、かつ、留数に対して

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0)jQ(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \{(s - j\omega_0)jQ(s)\}^* \geq 0, \quad \forall \omega_0 \in \Omega_0$$

が成り立つ。

定義 1.1.6 の正実性が、伝達関数の複素対称な部分に関する半正定性により定義されていたのに対して、定義 1.1.9 の負虚性は、伝達関数の複素歪対称な部分に関する半正定性により定義されている。特に、 $Q(s)$ がスカラーの場合には、

$$j\{Q(j\omega) - Q^T(-j\omega)\} = 2\text{Im}[Q(j\omega)]$$

であることから、2 つ目の条件はすべての $\omega \in (0, \infty) \setminus \Omega_0$ に対して $Q(j\omega)$ の虚部が非負であることを表している。なお、定義 1.1.9 では、定義 1.1.6 と対になるように、 $Q(s)$ が虚軸上に極をもつことを許容しているが、以下の議論では

安定な伝達関数に対して負虚性を考えるため、2つ目の条件のみに注目すれば良い。補題 1.1.3 の正実補題の対として、つぎの事実が**負虚補題** (negative imaginary lemma) として知られている。

補題 1.1.6 安定かつ正方な伝達関数 $Q(s)$ に対して、その時間領域における実現の1つが式 (1.18) で与えられているとする。このとき、 D が対称であり、かつ、ある対称かつ正定な行列 P が存在して

$$A^T P + P A \preceq 0, \quad -P A^{-1} B = C^T \quad (1.31)$$

が満たされるならば、 $Q(s)$ は負虚である。特に、式 (1.18) において (A, B) が可制御であるならば、 D が対称であり、かつ、式 (1.31) の正定解 P が存在することと $Q(s)$ が負虚であることは等価である。

証明 まず、 D の対称性が $Q(s)$ が負虚であるための必要条件であることを示すために

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} j \{Q(j\omega) - Q^T(-j\omega)\} = j(D - D^T)$$

を考える。ここで、 D が対称でないならば、 $D - D^T$ は非零であり、その固有値はすべて純虚数の組となる。したがって、 $j(D - D^T)$ が半正定であることは、 D が対称であることと等価である。なお、 D が対称であるとき、

$$Q(j\omega) - Q^T(-j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} - \{C(-j\omega I - A)^{-1}\}^T$$

において D は現れないことから、 $D = 0$ である場合のみを考えても一般性は失われない。

補題 1.1.3 を用いて題意を示す。まず、式 (1.31) の正定解 P が存在するならば、 $Q(s)$ は負虚であることを示す。定義より、厳密にプロパーな $Q(s)$ が負虚であるための必要十分条件は、 $sQ(s)$ が正実となることである。ここで、 $sQ(s)$ は、式 (1.18) において、 u_Q から $y_Q = C A x_Q + C B u_Q$ までの伝達関数であることから

$$sQ(s) = C A (sI - A)^{-1} B + C B \quad (1.32)$$

となる。なお、 $Q(s)$ が安定であれば $sQ(s)$ も安定である。したがって、式 (1.19) と等価な式 (1.22) より、ある正定行列 P および行列 L と W が存在して

$$A^T P + P A + L^T L = 0, \quad P B + L^T W = (C A)^T, \quad C B + (C B)^T = W^T W \quad (1.33)$$

が成り立つのであれば、 $sQ(s)$ は正実である。

以下では、式 (1.33) の条件と式 (1.31) の条件が等価であることを示す。式 (1.33) の1つ目の等式は式 (1.31) 左の不等式を意味する。つぎに、2つ目の等式から

$$B = P^{-1}(A^T C^T - L^T W) \quad (1.34)$$

であり、これを3つ目の等式に代入することで

$$C P^{-1}(A^T C^T - L^T W) + \{P^{-1}(A^T C^T - L^T W)\}^T = W^T W$$

が得られる。これを等価変形していくと

$$\begin{aligned} C P^{-1} A^T C^T + \{C P^{-1} A^T C^T\}^T &= W^T W + C P^{-1} L^T W + \{C P^{-1} L^T W\}^T \\ &= (W + L P^{-1} C^T)^T (W + L P^{-1} C^T) - C P^{-1} L^T L P^{-1} C^T \\ &= (W + L P^{-1} C^T)^T (W + L P^{-1} C^T) + C P^{-1} A^T C^T + \{C P^{-1} A^T C^T\}^T \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $L^T L$ の変形に式 (1.33) の1つ目の等式を用いた。これより、 $W + L P^{-1} C^T = 0$ が得られる。式 (1.34) から W を消去し、 $L^T L$ を再び書き換えることにより、式 (1.31) 右の等式が導かれる。したがって、式 (1.33) の条件と式 (1.31) の条件は等価である。

以上の事実から、式 (1.31) の正定解 P が存在するならば、 $sQ(s)$ は正実である。これは、厳密にプロパーな $Q(s)$ が負虚であることを意味する。逆に、 $Q(s)$ が負虚であり、式 (1.18) による実現において (A, B) が可制御であるならば、 $sQ(s)$ は正実であり、式 (1.32) による実現において (A, B) が可制御であることが導かれる。したがって、式 (1.31) の正定解 P の存在が示される。 ■

以上の正実性と負虚性の定義に基づいて、式 (1.14) の $G(s)$ に対してつぎの事実が示される。

定理 1.1.1 式 (1.14) の伝達関数 $H(s)$ は安定であると仮定する。このとき、 $H(s)$ が負虚であることは、送電網が無損失であることと等価である。また、式 (1.14) の伝達関数 $G(s)$ が正実であることは、送電網が無損失であり、かつ

$$L - CA^{-1}B = (L - CA^{-1}B)^T \succeq 0 \quad (1.35)$$

が成り立つことと等価である。

証明 まず、 $H(s)$ が負虚であるならば、送電網が無損失であることを示す。このためには、その対偶として、送電網が無損失でないならば、 $H(s)$ が負虚ではないことを示せば良い。ここで、式 (??) の Y の実部が 0 でない場合には L は非対称であることがわかる。一方で、 $H(s)$ が負虚であるための必要条件は L が対称となることである。したがって、送電網が無損失でないならば、 $H(s)$ は負虚ではないことが示される。

つぎに、送電網が無損失であるならば、 $H(s)$ は負虚であることを示す。補題 1.1.6 より、 $H(s)$ が負虚であることを示すためには、 L が対称であり、かつ

$$\tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} \preceq 0, \quad Q \tilde{A}^{-1} \tilde{B} = C^T \quad (1.36)$$

を満たす正定な行列 Q が存在することを示せば良い。ただし、

$$\tilde{A} := \text{diag}(\tau_{di}^{-1})A, \quad \tilde{B} := \text{diag}(\tau_{di}^{-1})B$$

とする。ここで、送電網が無損失であるならば、式 (??) の Y の実部は 0 であるため、 Γ^{-1} の虚部は 0 であることから、

$$k_{ij}(\delta_{ij}^*) = k_{ji}(\delta_{ji}^*), \quad h_{ij}(\delta_{ij}^*) = -h_{ji}(\delta_{ji}^*), \quad h_{ii}(\delta_{ii}^*) = 0$$

が成り立つ。このとき、 L は対称である。また、 $H(s)$ は安定であることから

$$\tilde{A} = \text{diag} \left(\frac{X_{di} - X_{qi}}{\tau_{di}} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11}(\delta_{11}^*) & k_{12}(\delta_{12}^*) & \cdots & k_{1N}(\delta_{1N}^*) \\ k_{21}(\delta_{21}^*) & k_{22}(\delta_{22}^*) & \cdots & k_{2N}(\delta_{2N}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(\delta_{N1}^*) & k_{N2}(\delta_{N2}^*) & \cdots & k_{NN}(\delta_{NN}^*) \end{pmatrix}}_{\tilde{A}'} - \text{diag} \left(\frac{X_{di}}{X_{qi}(X_{di} - X_{qi})} \right)$$

において、 \tilde{A}' は負定である。ただし、 $X_{qi} > X_{di}$ であることを用いた。したがって、 $Q = -\tilde{A}'$ は式 (1.36) を満たす正定行列となることから、 $H(s)$ が負虚であることが示される。

つぎに、 $G(s)$ に関する等価性を示す。いま、 $H(s)$ は安定であることを仮定していることから、 $G(s)$ の虚軸上の極は原点のみである。したがって、 $G(s)$ が正実であるための必要十分条件は、

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) \succeq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.37)$$

が成り立つこと、かつ

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sG(s)\}^T \succeq 0 \quad (1.38)$$

が成り立つことである。送電網が無損失であるとき、式 (1.37) が成り立つことは

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = \frac{j}{\omega} \{H(j\omega) - H^T(-j\omega)\}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.39)$$

より、 $H(s)$ が負虚であることから示される。また、

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = L - C\tilde{A}^{-1}\tilde{B} = L - CA^{-1}B$$

であることから、式 (1.38) の半正定性は式 (1.35) の条件に等しい。なお、送電網が無損失であるとき、 L は対称であり、

$$C\tilde{A}^{-1}\tilde{B} = CQ^{-1}C^T$$

も対称であることから、式 (1.38) の対称性も示される。

逆に、送電網が無損失でない、または、式 (1.35) の条件が満たされないならば $G(s)$ が正実でないことを示す。後者については、式 (1.35) の条件が式 (1.38) の条件に等しいことから明らかである。また、送電網が無損失でないとき、 $H(s)$ は負虚ではないことから、

$$\lambda_{\min} [j \{H(j(\omega_0 + \alpha)) - H^T(-j(\omega_0 + \alpha))\}] < 0, \quad \forall \alpha \in (0, \epsilon]$$

となるある点 $\omega_0 \geq 0$ および十分に小さな $\epsilon > 0$ が存在する。ただし、 λ_{\min} は最小固有値を表す。したがって、0 ではないすべての $\omega \in (\omega_0, \omega_0 + \epsilon]$ に対して $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ は半正定ではない。■

定理 1.1.1 は、送電網が無損失であることが、式 (1.14) の伝達関数 $G(s)$ が正実であることを特徴づける条件の 1 つであることを示している。なお、もう 1 つの条件である式 (1.35) の意味はつぎのように説明できる。式 (1.5) の近似線形システムにおいて、内部電圧の状態方程式である

$$\text{diag}(\tau_{di}) \dot{E}^{\text{lin}} = AE^{\text{lin}}(t) + B\delta^{\text{lin}}(t) + V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t)$$

に注目する。この微分方程式において、すべての時定数 τ_{di} が 0 に漸近する極限を考える。これは「内部電圧が定常状態に達するために必要な時間が、 $\delta^{\text{lin}}(t)$ や $V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t)$ が変動する時間と比較して十分に短いような極限を考えること」に相当する。例えば、 $\delta^{\text{lin}}(t)$ と $V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t)$ の時間変化が非常に緩やかであり、定数 δ_0^{lin} と $V_{\text{field}0}^{\text{lin}}$ とみなせると仮定すると、 $E^{\text{lin}}(t)$ は一定の時間が経過すれば

$$E_0^{\text{lin}} = -A^{-1}B\delta_0^{\text{lin}} - A^{-1}V_{\text{field}0}^{\text{lin}}$$

という値に漸近する。ただし、 A は安定である必要がある。したがって、 $E^{\text{lin}}(t)$ が定常状態に達する時間が十分に短い、すなわち、すべての時定数 τ_{di} が十分に小さい場合には、 $E^{\text{lin}}(t)$ と比較して緩やかに変化する $\delta^{\text{lin}}(t)$ や $V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t)$ に対しても

$$E^{\text{lin}}(t) \simeq -A^{-1}B\delta^{\text{lin}}(t) - A^{-1}V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t) \quad (1.40)$$

という近似が成り立つ。このような状態変数の時間スケールの違いを利用して、収束が速い微分方程式を代数方程式で近似する方法は、システム制御理論において**特異摂動近似** (singular perturbation approximation) と呼ばれている。実際、内部電圧の動特性は、機械的なタービンの動特性に比較して時定数が小さいため、このような**特異摂動近似**を介して電力系統モデルの挙動を解析することは有意義である。式 (1.40) が等号として成り立つものとして $\Delta\omega^{\text{lin}}(t)$ の微分方程式に代入すれば

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}^{\text{lin}} \\ \text{diag}(M_i)\Delta\dot{\omega}^{\text{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 I \\ -(L - CA^{-1}B) & -\text{diag}(D_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{\text{lin}} \\ \Delta\omega^{\text{lin}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & CA^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\text{mech}}^{\text{lin}} \\ V_{\text{field}}^{\text{lin}} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

が得られる。ただし、近似的な動特性であることを表すため状態変数を $\hat{\delta}^{\text{lin}}$, $\Delta\hat{\omega}^{\text{lin}}$ として区別した。また、内部電圧の近似的な値は

$$\hat{E}^{\text{lin}} := -A^{-1}B\hat{\delta}^{\text{lin}} - A^{-1}V_{\text{field}}^{\text{lin}}$$

として与えられる。式 (1.41) の特異摂動近似システムは、線形 2 次振動子の結合系となっており、式 (1.35) の条件は、ばね定数をまとめた行列の半正定性を保証するものであることがわかる。また、式 (1.41) の平衡点集合は

$$\mathcal{M}_{\text{sp}} := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.42)$$

である。

例 7 (特異摂動近似システムの初期値応答)

例 1 で扱った 3 つの発電機で構成される近似線形システムに対して、式 (1.41) の特異摂動近似システムの初期値応答を確認してみよう。図 1.3 と同じ設定で、特異摂動近似システムの初期値応答を重ねてプロットしたものが図 1.9 である。この例では、内部電圧の時定数がすべての発電機で $\tau_{di} = 0.01$ という相対的に小さな値に設定されているた

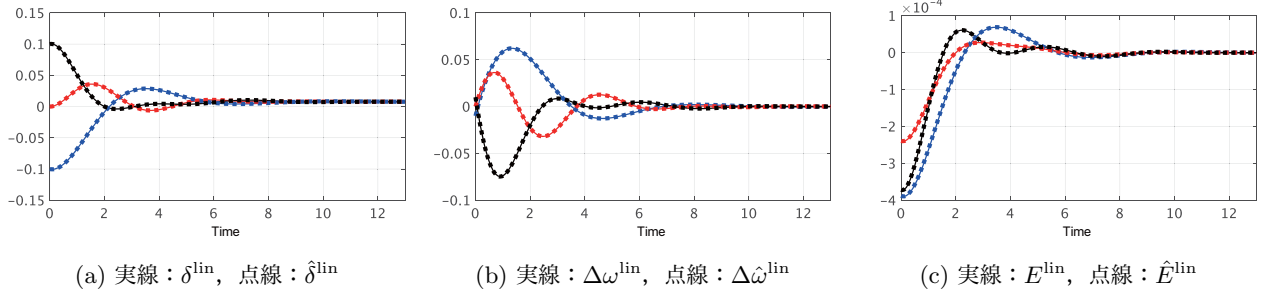


図 1.9 近似線形システムと特異摂動近似システムの初期値応答 (青: 発電機 1, 赤: 発電機 2, 黒: 発電機 3)

め, 近似線形システムと特異摂動近似システムの状態の軌道の差はほとんど生じていないことがわかる. また, 内部状態が式 (1.42) の平衡点集合 \mathcal{M}_{sp} の点に収束していることもわかる.

式 (1.35) の条件に基づいて, 特異摂動近似システムの同期がつぎのように特徴づけられる.

定理 1.1.2 式 (1.41) の特異摂動近似システムを考える. ただし, 入力は一時的に 0 とする. 任意の初期値および任意の正定数 M_i , D_i に対して, 内部状態が式 (1.42) の平衡点集合 \mathcal{M}_{sp} のいずれかの点に収束するための必要条件は, 式 (1.11) および

$$\Lambda(L - CA^{-1}B) \subseteq [0, \infty) \quad (1.43)$$

が成り立つことである. ただし, $\Lambda(\cdot)$ は固有値の集合を表す. 特に, 送電網が無損失であるとき, 上記の収束性の必要十分条件は, 式 (1.11) および式 (1.43) が成り立つことである.

証明 まず, 送電網が無損失である場合に, 式 (1.11) と式 (1.43) が成り立つことが, 題意の収束性の十分条件であることを示す. 式 (1.41) の特異摂動近似システムは, 式 (1.13) の $F(s)$ と

$$G_{\text{sp}}(s) := \frac{1}{s}(L - CA^{-1}B)$$

のネガティブ・フィードバック系として解釈できる. 送電網が無損失であるとき, $L - CA^{-1}B$ は対称であるため, 式 (1.43) の条件は式 (1.35) の条件, すなわち, $G_{\text{sp}}(s)$ が正実であることと等価である. したがって, 式 (1.35) が成り立つならば, 例 5 の議論と同様にして, そのネガティブ・フィードバック系が内部安定であることが示される. この内部安定性は, 式 (1.41) から冗長な積分器を削除した

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_e^{\text{lin}} \\ \text{diag}(M_i)\Delta\dot{\omega}^{\text{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 W \\ -(L_0 - CA^{-1}B_0) & -\text{diag}(D_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e^{\text{lin}} \\ \Delta\omega^{\text{lin}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & CA^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\text{mech}}^{\text{lin}} \\ V_{\text{field}}^{\text{lin}} \end{bmatrix}$$

が漸近安定であることと等価である. したがって, 任意の初期値および任意の正定数 M_i , D_i に対して, システムの状態は \mathcal{M}_{sp} のいずれかの点に収束することが示される.

つぎに, 式 (1.11) が必要であることは補題 1.1.2 の議論と同様に明らかであるため, 式 (1.43) が成り立つことが題意の収束性の必要条件であることを示す. このために, $K := L - CA^{-1}B$ として, つぎの 2 つの場合に分けて議論する.

- (a) K の固有値のうち, 実部が負であるもの, または, 純虚数であるものが存在する.
- (b) K の固有値のうち, 実部が正であり, かつ, 虚部が非零であるものが存在する.

まず, (a) である場合に, ある正定数 M_i , D_i が存在して, 式 (1.41) の特異摂動近似システムが不安定となることを示す. 以下では, すべての i に対して $M_i = 1$, $D_i = d$ と選ぶ. また, 正の定数倍に関してシステムの安定性は不変であるから, $\omega_0 = 1$ としても一般性は失われない. このとき, 式 (1.41) の固有方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -dI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

である。この方程式から w を代入により消去すれば

$$(\lambda^2 I + d\lambda I + K)v = 0$$

が得られる。この固有方程式は、 v が K の固有ベクトルであり、その固有値 κ に対して

$$\lambda^2 + d\lambda + \kappa = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4\kappa}}{2}$$

が成り立つことを意味する。したがって、(a) である場合に、 $\sqrt{d^2 - 4\kappa}$ の実部が d より大きいことを示せば良い。一般に、任意の複素数 z に対して

$$\operatorname{Re}[z] = \sqrt{\operatorname{Re}[z]^2 + (\operatorname{Im}[z])^2}$$

と表せることから、 $z = \sqrt{d^2 - 4\kappa}$ とすると

$$\operatorname{Re}[\sqrt{d^2 - 4\kappa}] = \sqrt{d^2 - 4\operatorname{Re}[\kappa] + (\operatorname{Im}[z])^2}$$

が得られる。この値は、(a) である場合、すなわち、 κ の実部が負、または、 κ の実部が 0 かつ κ の虚部が非零である場合には、必ず d より大きい。したがって、式 (1.41) の特異摂動近似システムは不安定である。

つぎに、(b) である場合を考える。いま、 K は実行列であるため、それが複素数の固有値をもつ場合には、虚部が負のものが必ず存在する。その固有値を κ と表す。このとき、 $G_{\text{sp}}(j\omega)$ は $\sigma(j\omega) := \frac{\kappa}{j\omega}$ を固有値にもつ。いま、ある適当な $\hat{\omega} \in (0, \infty)$ に対して

$$-\operatorname{Re}[\sigma(j\hat{\omega})] = \frac{D}{\omega_0}, \quad -\operatorname{Im}[\sigma(j\hat{\omega})] = \frac{\hat{\omega}M}{\omega_0} \quad (1.44)$$

となるように定数 D , M を選び、すべての i に対して $M_i = M$, $D_i = D$ とすれば

$$F(j\hat{\omega}) = -\frac{1}{\sigma(j\hat{\omega})}I$$

と表すことができる。なお、 κ の実部が正であり、虚部が負であることから、 D と M は正である。このとき、固有値 $\sigma(j\omega)$ に対する $G_{\text{sp}}(j\hat{\omega})$ の固有ベクトルを $v(j\hat{\omega})$ とすれば

$$\{I + G_{\text{sp}}(j\hat{\omega})F(j\hat{\omega})\}v(j\hat{\omega}) = 0$$

が得られる。これは $\det[I + G_{\text{sp}}(j\hat{\omega})F(j\hat{\omega})] = 0$ であることを意味する。したがって、 $F(s)$ と $G_{\text{sp}}(s)$ のネガティブ・フィードバック系は内部安定ではない。 ■

定理 1.1.2 は、送電網が無損失であるとき、内部電圧の時定数が十分に小さい極限では、式 (1.11) および式 (1.43) が成り立つことが、任意の慣性定数と制動係数に対して式 (1.5) の線形近似システムが同期を達成するための必要十分条件であることを意味している。また、それら 2 つの条件は、送電網が無損失であるかどうかに関わらず、同期のための必要条件であることも示している。特に、式 (1.43) の必要条件は、 $L - CA^{-1}B$ の固有値が非負の実数でない場合には、線形近似システムの同期が達成されないような発電機の定数が必ず存在することを示している。本節の結論はつぎの定理にまとめられる。

定理 1.1.3 式 (1.5) の線形近似システムを考える。任意の初期値および任意の正定数 M_i , D_i , τ_i に対して、線形近似システムが同期するための必要条件は、(i) A が安定であり、(ii) 式 (1.11) が成り立ち、かつ、(iii) 式 (1.43) が成り立つことである。特に、送電網が無損失であるとき、上記の収束性の必要十分条件は、条件 (i)–(iii) が成り立つことである。

証明 送電網が無損失である場合に、条件 (i)–(iii) が成り立つならば線形近似システムの同期が達成されることは、これまでの議論で示されている。一方で、条件 (ii) の必要性は補題 1.1.2 の議論で示されている。また、条件 (i) と条件 (iii) は、定理 1.1.2 に示されているように、すべての τ_{di} が十分に小さい極限において、同期偏差システムが漸近安定となるための必要条件である。 ■

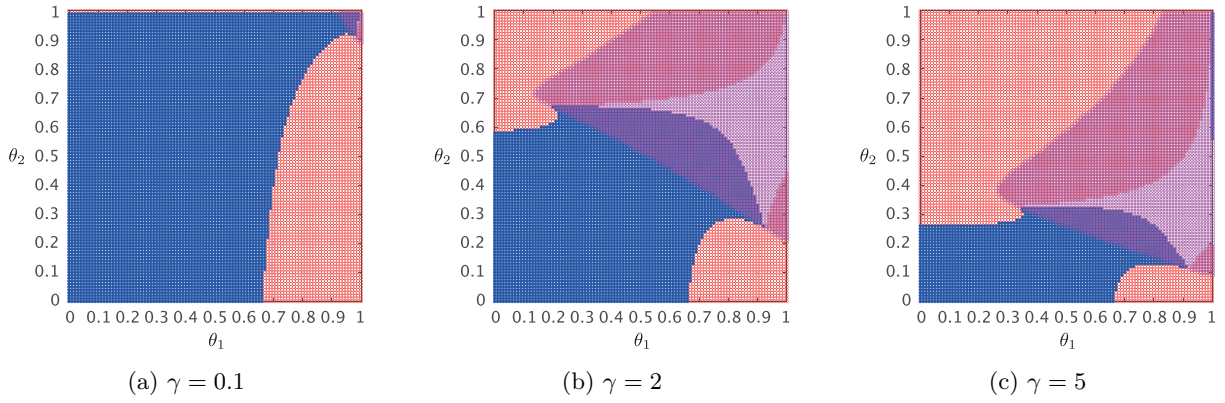


図 1.10 例 1 の定数に対する近似線形システムの同期解析

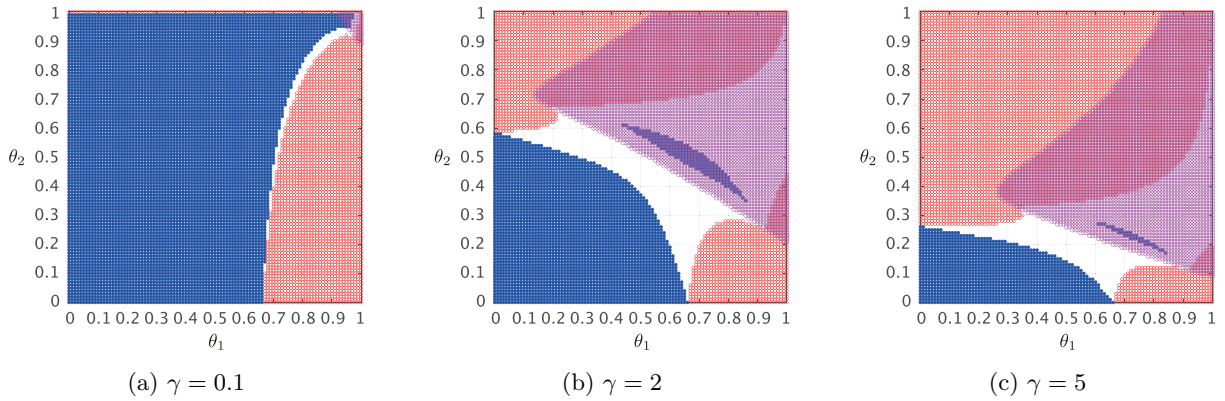


図 1.11 定数の設定を変更した場合の近似線形システムの同期解析

定理 1.1.3 は、送電網が無損失である場合に、任意の発電機の定数に対して式 (1.5) の線形近似システムの同期が達成されるための必要十分条件を与えている。また、送電網が無損失であるかどうかに関わらず、条件 (i)–(iii) がその必要条件であることも示している。なお、条件 (i) は発電機の同期リアクタンスの値に部分的に依存しているが、条件 (ii) や条件 (iii) は、送電網のアドミタンス行列、内部電圧と発電機偏角差の定常値のみに関するものであり、発電機の物理定数には依存しないことに注意されたい。また、 $L - CA^{-1}B$ は、図 1.4 において、内部電圧の時定数 τ_{di} が十分に小さい場合の発電機偏角 δ^{lin} と有効電力 P^{lin} の入出力関係を表す行列、すなわち

$$\hat{P}^{\text{lin}}(t) = (L - CA^{-1}B)\hat{\delta}^{\text{lin}}(t) - CA^{-1}V_{\text{field}}^{\text{lin}}(t)$$

の第 1 項目に現れる行列である。ただし、特異摂動近似を適用した場合の信号であることを表すため \hat{P}^{lin} として区別した。この定理を用いて、以下のように近似線形システムの同期を解析することができる。

例 8 (正実性や特異摂動近似に基づく近似線形システムの同期解析)

定理 1.1.3 を用いて、例 1 で扱った 3 つの発電機から構成される近似線形システムの同期を解析してみよう。発電機の物理定数などの設定はすべて例 1 と同じであるとする。図 1.3(a)–(c) に、定理 1.1.3 で示される必要条件が満たされないパラメータの領域を重ねてプロットしたものが図 1.10(a)–(c) である。ただし、条件 (i) と (ii) はすべてのパラメータに対して満たされていたため、条件 (iii) について、 $L - CA^{-1}B$ の固有値に実部が負であるものが含まれる場合を赤で示し、複素数の固有値が含まれる場合を紫で示している。この結果で注目すべき点はつぎの 2 つである。

- 赤で示されているパラメータ領域は、同期が達成される青いパラメータ領域の境界の一部を正確に捉えている。
- 紫で示されているパラメータ領域は、同期が達成される青いパラメータ領域と重なる部分が存在している。

まず、1 点目に関して、条件 (iii) の必要条件は「システムが不安定化するような発電機の物理定数の設定が少なくとも 1 つは存在すること」を表していることに注意されたい。したがって、例 1 で設定されている特定の定数に対して

は、同期が達成されるパラメータ領域を必ずしも正確に捉えられるとは限らない。一方で、実際に青い領域の境界の一部を正確に捉えられているという事実は、 $L - CA^{-1}B$ に実部が負の固有値が含まれる場合には、多くの場合で近似線形システムが不安定となることを示唆している。つぎに、2点目に関して、青の領域と紫の領域が重なっていることは、例1の物理定数の設定では同期が達成されている一方で、システムが不安定化するような他の定数が必ず存在することを意味している。すなわち、青と紫が重なる領域は、発電機の物理定数などの値に依存して同期する場合としない場合が混在するパラメータ領域であるといえる。なお、定理1.1.3では、送電網が無損失であるとき、すなわち、 $\theta_2 = 0$ である横軸上のパラメータに対しては、赤ではない値に θ_1 を設定する限り、それらの定数の値に依らず近似線形システムの同期が必ず達成されることも示されている。一方で、定理1.1.3により、定数に依存しない同期の達成を数学的に保証できるのは、この横軸上のパラメータのみであることに注意されたい。それ以外のパラメータ領域における同期を数学的に解析するためには、「送電網が無損失である」という仮定からある程度の逸脱を許すように理論を一般化する必要がある。

参考として、定数の設定の一部を変更し

$$E_1^* = 2, \quad E_2^* = 4, \quad E_3^* = 6, \quad D_1 = 2, \quad D_2 = 1.5, \quad D_3 = 1$$

とした場合の結果を図1.11に示そう。この図において現れている「白い領域」は、上記の定数の設定ではシステムが不安定である一方で、システムが不安定化するような定数が必ず存在することまでは数学的に証明されていないパラメータ領域である。より具体的には、 $L - CA^{-1}B$ が非負の実数固有値しかもたないにも関わらず、近似線形システムが何らかの理由で不安定化したパラメータ領域である。このような、白い領域のパラメータ設定に対しては、他の定数を設定した場合に同期が達成されるか否かについて、以上の解析だけで結論を与えることはできない。

送電網が無損失でない場合に近似線形システムの同期を特徴づける必要十分条件を導出することは難しい。一方で、送電網が無損失であることが、式(1.14)の $G(s)$ の正実性を特徴づける条件の1つであるという事実に基づいて、 $G(s)$ の正実な範囲からの逸脱を定量的に見積もることができれば、システムの同期が達成されるために発電機の物理定数などが満たすべき十分条件を求めることは可能である。

1.2 受動性に基づく非線形電力系統モデルの安定性解析

1.2.1 対象とする電力系統モデル

第1.1節では、電力系統モデルが同期状態の近傍にあることを仮定して近似線形システムを導出し、同期が達成されるための必要条件や十分条件を導出した。本節では、システム制御理論における受動性という概念を用いることによって、非線形の微分代数方程式で記述される電力系統モデルに対しても同様の解析が可能であることを示す。

解析する電力系統モデルの設定はつぎの通りである。

- 送電網は無損失であること、すなわち、式(??)のアドミタンス行列 \mathbf{Y} の実部は0であることを仮定する。
- 電力系統に接続されている発電機は、式(??)で記述されるものとする。ただし、 $X'_{di} = X_{qi}$ を仮定する。
- 発電機バスを除くすべてのバスには式(??)で記述される定電力の負荷が接続されているものとする。
- 定常潮流状態においてすべての発電機の周波数偏差が0となるような、各発電機の機械的トルクと界磁電圧の値の組は既知であるものとする。

まず、1点目の送電網の仮定については、数学的に電力系統モデルの同期を証明するためにはほとんど不可欠な仮定であるといえる。実際、送電損失がある場合には、電力系統モデルの解析には数値的手法に頼らざるを得ないことが多くの文献で議論されている[4,5]。また、第1.1節で示されているように、送電網は無損失であることは近似線形システムが正実性をもつことの必要条件となっている。なお、第??節で後述するように、線形システムの範疇では受動性と正実性の概念は数学的に等価であるため、受動性に基づく解析を行うためには不可欠な仮定であるといえる。

2点目、3点目においては、発電機と負荷についてどちらも標準的なモデルを仮定している。なお、定インピーダンス

スの負荷が存在する場合には、第??節で議論したクロン縮約により送電網のアドミタンス行列にあらかじめ組み込まれていると解釈することは可能であるが、送電網が無損失であることを仮定しているため、負荷のインピーダンスの実部も0であることが仮定されていることに注意されたい。

4点目については、実際の電力系統制御では負荷の値や送電線のアドミタンスの値などをすべて正確に知ることはできないため、これまでの議論から自明に示される仮定ではない。しかしながら、本節で議論する電力系統モデルの受動性を利用することによって、未知の定数が電力系統モデルに含まれていたとしても、機械的トルクや界磁電圧を自動的に調整して周波数偏差を0とするようなフィードバック制御機構の系統的な設計が可能となる。このことは、第??節で詳述する。

1.2.2 受動性に基づく安定性解析

受動性の定義

非線形の動的システムに対する受動性の概念を導入する。入力 u と出力 y の次元がどちらも m であり、状態 x の次元が $n \geq m$ であるような動的システム

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + Bu \\ y = h(x) + Du \end{cases} \quad (1.45)$$

を考える。ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は滑らかな関数であり、

$$f(0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (1.46)$$

を満たすものとする。また、 B と D は行列であるとする。なお、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の滑らかさに関する条件は、システム Σ の解軌道 $x(t)$ が一意に定まることを保証するために課されるものであり、以降の議論で陽に用いることはない。一方で、式 (1.46) の条件は、 $(x^*, u^*, y^*) = (0, 0, 0)$ においてシステムが平衡することを意味している。以下では、同様に平衡点は \star をつけて表記する。ここで、システム Σ の安定性は、平衡点 $x^* = 0$ に対して、つぎのように定義される。

定義 1.2.1 式 (1.45) のシステム Σ を考える。原点を中心とする半径 ϵ の球を

$$\mathcal{B}_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\}$$

と表す。任意の初期値 $x_0 \in \mathcal{B}_\epsilon$ に対して Σ の解軌道 $x(t)$ が0に収束するような、ある $\epsilon > 0$ が存在するとき、 Σ の平衡点 $x^* = 0$ は**漸近安定**であると呼ぶ。ただし、入力恒等的に0とする。

定義 1.1.4 における線形システムに対する安定性では、議論の対象とする平衡点を陽に指定する必要はなく、初期値に関する球領域 \mathcal{B}_ϵ を考える必要もなかった。これは、線形システムの場合には、初期値の球の大きさに依らず、球内の任意の初期値に対して、その解軌道がある1つの平衡点に収束するのであれば、その平衡点は原点のみであることが示されるためである。一方で、非線形システムの場合には、平衡点が1つであるとは限らず、**安定領域**の大きさ、すなわち、解軌道が平衡点に収束する初期値の領域の大きさも平衡点によって異なる。なお、ある平衡点が漸近安定であることは、その平衡点近傍で導出された近似線形システムが漸近安定であることと等価である。しかしながら、近似線形システムに基づく解析によって平衡点の漸近安定性を示すことができたとしても、その平衡点の安定領域の大きさを見積もることはできない。したがって、その安定領域の大きさに関して何らかの有益な知見を得ることが、非線形システムを直接的に解析する場合の重要な目標の1つとなる。

以降の議論のため、式 (1.45) のシステム Σ において、議論の対象とする入力 u の集合を $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ 、状態 x の集合を $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ と表す。また、これらの入力と状態の集合から作られる出力 y の集合を $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ と表す。なお、これらの集合は第??節において安定領域の大きさを議論する際に用いるが、その他の箇所では \mathcal{X} を \mathbb{R}^n 、 \mathcal{U} と \mathcal{Y} を \mathbb{R}^m と読み替えても構わない。この記法のもとで、システム Σ の受動性をつぎのように導入する。

定義 1.2.2 式 (1.45) のシステム Σ に対して, $W(0) = 0$ であり, かつ, 任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) \leq u^\top y, \quad t \geq 0 \quad (1.47)$$

を満たす微分可能な正定値関数 $W: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在するとき, Σ は**受動的**であると呼ぶ. 特に, 上記の正定値関数 W に加えて, $\rho(0) = 0$ であり, かつ

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) \leq u^\top y - \rho(y), \quad t \geq 0 \quad (1.48)$$

を満たす正定値関数 $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在するとき, Σ は**強受動的**であると呼ぶ.

定義 1.2.2 における正定値関数 $W(x)$ は一般に**蓄積関数** (storage function) と呼ばれている. 蓄積関数の時間微分は, システム Σ の解軌道 $x(t)$ に沿った微分であり, 微分の連鎖律を用いて

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = \nabla W^\top(x) \frac{dx}{dt} = \nabla W^\top(x)(f(x) + Bu)$$

と計算される. ただし, $\nabla W: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は $W(x)$ の勾配関数を表しており

$$\nabla W(x) := \text{col} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} W(x) \right)$$

で定義される. なお, 式 (1.48) を満たすシステムは, 出力強受動的 (output strictly passive) であると呼ぶべきものであるが, 本書では単に強受動的であると表記する.

線形システムの範疇では, システムの受動性は, その伝達関数の正実性と等価であることが知られている. 実際, 補題 1.1.3 に示される正定行列 P が存在するならば, 蓄積関数を $W(x) = x^\top P x$ と選ぶことにより, 式 (1.47) の不等式が満たされる. この事実は, 以下のように簡単に確認できる. まず, 蓄積関数の時間微分は

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = (Px)^\top (Ax + Bu) = \frac{1}{2} \{x^\top (A^\top P + PA)x + u^\top B^\top P x + x^\top P B u\}$$

となる. ただし, 任意のベクトル v, w および行列 M に対して, $v^\top M w = \frac{1}{2}(v^\top M w + w^\top M^\top v)$ であることを用いた. このとき, 式 (1.47) の不等式は

$$\begin{bmatrix} x^\top & u^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^\top P + PA & B^\top P - C \\ PB - C^\top & -(D + D^\top) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0$$

と書き換えられることから, 補題 1.1.3 の正定な P が存在するならば, 任意の x と u に対してこの不等式が成り立つことがわかる. 逆に, 式 (1.47) の不等式を満たす $W(x)$ が存在するとき, システムの伝達関数が正実であることも示される. 証明は [6, 第 5.9.1 節] などを参照されたい.

強受動を FDI の円条件で説明する? KYP 補題が必要

受動性に基づくフィードバック系の安定性解析

以下では, 受動性の概念を用いることによって, 第 1.1 節で説明された伝達関数の正実性に関する事実と同等の事実がより簡潔に導出できることを確認する. これらの理解にはリアプノフの安定理論の基礎的な知識が前提となるため, 必要に応じて**付録??**を参照されたい.

補題 1.2.1 式 (1.45) のシステム Σ が強受動的であり, かつ, $u = 0$ の場合の解軌道 $x(t)$ に対して

$$h(x(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.49)$$

が成り立つのが $x(t) = 0$ のみであるならば, Σ の平衡点 $x^* = 0$ は漸近安定である.

証明 リアプノフとラサールが必要

1.2.3 ...

以下では，発電機が接続されているバスの添字集合を \mathcal{I}_G と表し，定電力の負荷が接続されているバスの添字集合を \mathcal{I}_L と表す．

参考文献

- [1] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, Vol. 28, No. 1, pp. 7–10, 1996.
- [2] I. R. Petersen and A. Lanzon. Feedback control of negative-imaginary systems. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 30, No. 5, pp. 54–72, 2010.
- [3] J. Xiong, I. R. Petersen, and A. Lanzon. A negative imaginary lemma and the stability of interconnections of linear negative imaginary systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 55, No. 10, pp. 2342–2347, 2010.
- [4] N. Narasimhamurthi. On the existence of energy function for power systems with transmission losses. *IEEE transactions on circuits and systems*, Vol. 31, No. 2, pp. 199–203, 1984.
- [5] P. Yang, F. Liu, Z. Wang, and C. Shen. Distributed stability conditions for power systems with heterogeneous nonlinear bus dynamics. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019.
- [6] A. C. Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2005.