

## 1

## 電力系統モデルの安定化制御

## チャプター概要

## 1.1 周波数安定化制御

## 1.1.1 ブロードキャスト型 PI コントローラによる自動発電制御

(1) **自動発電制御とは** 本節では、未知の負荷変動に対して適切に発電量を調整するための**自動発電制御** (AGC: Automatic Generation Control) の動作原理を説明する。自動発電制御では、いくつかの発電機の周波数偏差を観測することによって<sup>†1</sup>、電力の需要に対して供給が少なければ発電量を増加し、供給が多ければ発電量を減少するような制御動作を行う<sup>†2</sup>。この制御動作は、電力系統の一般的な特性として、需要に対して供給が少なければ負の周波数偏差が生じ、供給が多ければ正の周波数偏差が生じるという事実に基づく。なお、電力系統工学では、周波数偏差を 0 に漸近収束させる制御全般を総称して**周波数安定化制御**と呼ぶ。

自動発電制御の難しさの 1 つは、実際の電力系統には未知のパラメータが数多く存在することにある。例えば、30 分程度の時間スケールにおいて負荷の総量を大掴みに予測することは可能であるが、時々刻々と変化する個々の負荷の

<sup>†1</sup> 一般に、発電機の周波数とその近傍の変電所における電圧フェーザの周波数は近い値となるため、発電機の周波数偏差の代わりに、近傍の変電所における電圧フェーザの周波数偏差を観測する場合もある。

<sup>†2</sup> 現実の電力系統運用では、中央給電指令所が自動発電制御を行なっている。基本となる動作原理は共通であるが、目的によりいくつかの方式が存在する。50Hz や 60Hz の基準周波数に対して、 $\pm 0.2\text{Hz}$  程度の範囲に周波数を維持することが目標とされている。

## 2 1. 電力系統モデルの安定化制御

値を正確に把握することはできない<sup>†1</sup>。また、各送電線のコンダクタンスやサセプタンスなどのすべてのパラメータを正確に知ることも難しい。したがって、電力系統全体のモデルを知らなくても適用可能な制御アルゴリズムを設計することが必要となる。

一方で、??節の数値例で確かめられたように、需給バランスが取れていない状況においても、発電機群の周波数は漸近的に同期するという特性をもつ。この事実は、1つ以上の発電機群の外部入力値を適切に制御することによって、それらの周波数偏差を0にすることができれば、残りのすべての発電機群の周波数偏差も自動的に0となることを意味する。具体的には、いくつかの発電機群の周波数偏差の平均値を計測して、その平均値を0とするように発電機群の外部入力値を制御すれば、すべての発電機の周波数偏差を漸近的に0に収束させることが可能となる。このような制御動作は、基本的にはPI制御によって実現することができる<sup>†2</sup>。コントローラに含まれる積分器が、未知の負荷や送電網のパラメータなどに合わせて適切な入力値を探索する動作を行う。

**(2) 自動発電制御の定式化** 以下では、??節における電圧フェーズを入力とする発電機モデルを考える。その動特性を再掲すると

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_0 \Delta\omega_i \\ M_i \Delta\dot{\omega}_i = -D_i \Delta\omega_i - P_i + P_{mech_i} \\ \tau_{di} \dot{E}_i = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i + \left( \frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |V_i| \cos(\delta_i - \angle V_i) + V_{field_i} \end{cases} \quad (1.1a)$$

である。有効電力と無効電力を出力とする場合には

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{E_i |V_i|}{X_{qi}} \sin(\delta_i - \angle V_i), \\ Q_i &= \frac{|V_i| E_i}{X_{qi}} \cos(\delta_i - \angle V_i) - \frac{|V_i|^2}{X_{qi}} \end{aligned} \quad (1.1b)$$

<sup>†1</sup> 現実の電力系統運用では、天候や気温などの気象予測情報や過去の実績情報などを用いて、ある程度の範囲のエリアに関する総需要の変化を予測している。手法によってエリアの大きさなどは様々であるが、需要を完全に予測することは不可能である。

<sup>†2</sup> PI制御は、観測した偏差とその積分値の重み付き和によって入力を調整する制御アルゴリズムである。なお、PとIはProportional（比例）とIntegral（積分）を指す。

である。この表現に合わせて、電圧フェーザを入力、有効電力と無効電力を出力とする負荷モデルも再掲する。定インピーダンスモデルは、

$$P_i = -\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\bar{z}_{\text{load}i}^*} \right] |V_i|^2, \quad Q_i = -\operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\bar{z}_{\text{load}i}^*} \right] |V_i|^2 \quad (1.2a)$$

である。ただし、 $z_{\text{load}i}^*$  は負荷のインピーダンスを表す定数である。同様に、定電流モデルは、負荷の電流フェーザを表す定数を  $I_{\text{load}i}^*$  として、

$$P_i = \operatorname{Re} \left[ \bar{I}_{\text{load}i}^* V_i \right], \quad Q_i = \operatorname{Im} \left[ \bar{I}_{\text{load}i}^* V_i \right] \quad (1.2b)$$

と書き表される。定電力モデルは、 $P_{\text{load}i}^*$  と  $Q_{\text{load}i}^*$  を定数として、

$$P_i = P_{\text{load}i}^*, \quad Q_i = Q_{\text{load}i}^* \quad (1.2c)$$

である。これらの発電機モデルや負荷モデルが、代数方程式

$$\begin{cases} P_1 + jQ_1 = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{1j} |V_1| |V_j| e^{j(\angle V_1 - \angle V_j)} \\ \vdots \\ P_N + jQ_N = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{Nj} |V_N| |V_j| e^{j(\angle V_N - \angle V_j)} \end{cases} \quad (1.3)$$

により結合されることで、電力系統全体を記述する微分代数方程式系モデルが得られる。ただし、発電機母線の添字集合を  $\mathcal{I}_G$ 、負荷母線の添字集合を  $\mathcal{I}_L$  とするとき、

$$\mathcal{I}_G \cap \mathcal{I}_L = \emptyset, \quad \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L = \{1, \dots, N\}$$

である。すなわち、発電機母線と負荷母線の添字に重複はなく、それらを合わせるとすべての母線の添字集合となる。

自動発電制御は、式 (1.1) の機械的トルク  $P_{\text{mech}i}$  を調整する制御アルゴリズムである。以下では、すべての発電機に関する周波数偏差の重み付き和を観測し、すべての発電機に対して適当に重み付けされた制御入力を送信するブロードキャスト型 PI コントローラを考える。具体的には、すべての  $i \in \mathcal{I}_G$  について

## 4 1. 電力系統モデルの安定化制御

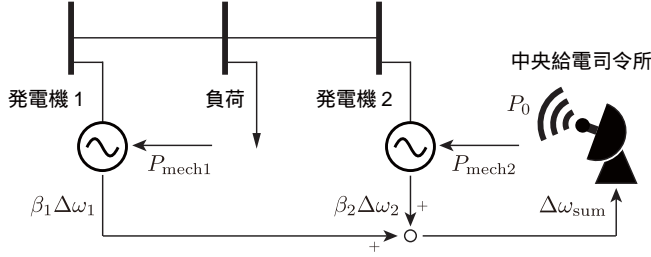


図 1.1 自動発電制御の信号伝達構造

$$P_{mechi}(t) = P_{mechi}^* - \alpha_i \underbrace{\left\{ k_P \Delta\omega_{sum}(t) + k_I \int_0^t \Delta\omega_{sum}(\tau) d\tau \right\}}_{P_0(t)} \quad (1.4a)$$

とする。ただし、 $P_{mechi}^*$  は機械的トルクの標準設定値を表す定数である。また、 $\alpha_i$  は発電機  $i$  の寄与を指定する非負定数であり、

$$\Delta\omega_{sum}(t) := \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \beta_i \Delta\omega_i(t)$$

は周波数偏差の非負定数  $\beta_i$  に関する重み付き和とする。さらに、 $k_P$ ,  $k_I$  は PI コントローラのゲインを表す正定数である。この自動発電制御器は、 $\alpha_i$  や  $\beta_i$  の重み付けのもと、単一の PI コントローラによって生成された信号  $P_0(t)$  をすべての発電機に同時送信（ブロードキャスト）する構造をもつ（図 1.1）。なお、式 (1.4a) を微分方程式で表現すれば

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Delta\omega_{sum} \\ P_{mechi} = P_{mechi}^* - \alpha_i (k_P \Delta\omega_{sum} + k_I \xi) \end{cases} \quad (1.4b)$$

である<sup>†</sup>。電力系統工学では、非負定数  $\alpha_i$  は発電機  $i$  の**寄与係数** (participation factor) と呼ばれる。

<sup>†</sup> 現実の火力発電や原子力発電では、火力や原子力で発生させた高圧の蒸気によりタービンを回転させて機械的トルクを発生させる**原動機** (prime mover) が存在する。原動機には、発電機の回転速度を自動制御する**ガバナ** (governor) が組み込まれている。より現実的な自動発電制御の解析には、中央給電指令所からの指令値を入力とし、発電機に与える機械的トルクを出力とする原動機モデルを考慮する必要がある [?, 3 章]。

## 1.1 周波数安定化制御 5

寄与係数の比率を変えることにより、需給がバランスした定常潮流状態において、各々の発電機が供給する有効電力の値を調整することができる。システム制御工学の観点では、コントローラの切り替えにより、電力系統モデルの安定な平衡点を移動させることとして解釈できる。??章で解析したように、電力系統の安定性は平衡点の選び方によって変化する。また、電力系統全体の発電コストや送電損失の値も平衡点の選び方に依存する。したがって、寄与係数を需要の分布に合わせて適切に切り替えることは、系統安定度の向上や経済的コストの低減などにつながる。このことは、1.1.3 節で後述する<sup>†</sup>。

## 1.1.2 周波数安定化制御の数値シミュレーション

**例 1.1** (xxx) 界磁電圧は潮流計算されたものに固定して、負荷変動に対して周波数偏差が 0 に収束するところを見せる。

## 1.1.3 コントローラのパラメータ調整による発電コストの低減

**例 1.2** (xxx) 需要分布（の予測）が与えられたとして、需要が多いエリアの発電機を中心にして送電する場合と、遠い発電機から送電する場合でコストを比較するとか？わかりやすく燃料費は共通にしておけば、送電ロスの大きさ＝コストの大きさになるはず。

<sup>†</sup> 現実の電力系統運用では、寄与係数の更新は数分から数十分程度の間隔で行われるのが一般的である [?, 第 11.1 節]。電力系統工学の用語では、この寄与係数を更新するスキームは、**経済負荷配分制御**（EDC：Economic load Dispatching Control）と呼ばれる。また、寄与係数を更新間隔の間で定数として用いる制御アルゴリズムは、**負荷周波数制御**（LFC：Load Frequency Control）と呼ばれる。ただし、経済負荷配分制御と負荷周波数制御の明確な区別がない場合や、経済負荷配分制御を異なるスキームとする場合もあるため注意が必要である。

## 6 1. 電力系統モデルの安定化制御

## 1.2 周波数安定化制御系の数学的な安定性解析 \*

## 1.2.1 対象とする電力系統モデル \*

(1) 電力系統モデルと自動発電制御に関する仮定 ??節では、電力系統モデルが定常潮流状態の近傍にあることを仮定して近似線形モデルを導出し、定態安定性の必要条件や十分条件を解析した。本節では、同様の受動性の概念を用いて、非線形の微分代数方程式系として記述される電力系統モデルの周波数安定性を解析する。特に、自動発電制御が組み込まれたフィードバック制御系全体の安定性を考える。具体的には、以下の前提のもとで安定性解析を行う。

- すべての発電機は、式 (1.2) の発電機モデルで表される。ただし、各発電機の界磁電圧は定数に設定されていることを仮定する。
- すべての負荷は、式 (1.2c) の定電力モデルで表される。
- 式 (1.3) の送電網の代数方程式において、すべての送電線のコンダクタンスは 0 であることを仮定する。
- 式 (1.4) のブロードキャスト型 PI コントローラによって、自動発電制御が行われている。ただし、寄与係数と周波数偏差の重みについて、すべての  $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、 $\alpha_i = \beta_i$  が成り立つことを仮定する。

1 つ目と 2 つ目は、発電機と負荷の標準的なモデルを考えることを意味している。3 つ目の送電網に関する仮定は、送電損失が 0 であることを意味しており、数学的に安定性の解析を行うためには欠かすことができない<sup>†</sup>。実際、送電損失がある場合には、電力系統モデルの安定性解析は数値的手法に頼らざるを得ないことが多くの文献で指摘されている [?, ?, ?, ?]。また、4 つ目の仮定は、ブロードキャスト型 PI コントローラの入出力特性が受動的となるために必要である。なお、少なくとも 1 つの  $i \in \mathcal{I}_G$  に対して寄与係数  $\alpha_i$  が正であれば、い

<sup>†</sup> 現実の電力系統では、送電損失を完全に無くすることはできないが、高電圧により少ない電流で電力を送ることで送電損失を低減することが可能である。本節の議論は、近似的に送電損失が 0 とみなせるような高電圧による送電を前提にして、周波数安定性を解析することに相当する。

くつかの係数が0であっても構わない。

また、??節の解析で示されているように、

- 定常潮流状態において、すべての発電機の周波数偏差は同じ値となる。

以下の周波数安定性の解析では、この事実が成り立つことを前提とする。

## (2) 自動発電制御を組み込んだ電力システムのフィードバック系による表現

??節の議論と同様に、電力システムモデルを2つのサブシステムのフィードバック系として記述することを考える。1つ目のサブシステムは、

$$\mathbb{F} : \begin{cases} M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega + u_{\mathbb{F}} + P_{\text{mech}}^* \\ y_{\mathbb{F}} = \omega_0\Delta\omega \end{cases} \quad (1.5)$$

とする。ただし、 $\Delta\omega$  は  $\Delta\omega_i$  を縦に並べたベクトルであり、 $M$  と  $D$  は  $M_i$  と  $D_i$  を対角に並べた行列である。また、 $P_{\text{mech}}^*$  は  $P_{\text{mech}i}^*$  を並べた定数ベクトルである。この  $\mathbb{F}$  は、定数ベクトル  $P_{\text{mech}}^*$  の違いを除いて、??節の機械サブシステムに等しい。2つ目のサブシステムは、??節の電気サブシステムを非線形の微分代数方程式系で表現した

$$\mathbb{G}_i : \begin{cases} \dot{\delta}_i = u_{\mathbb{G}_i} \\ \tau_{\text{di}} \dot{E}_i = -\frac{X_{\text{di}}}{X_{\text{qi}}} E_i + \left( \frac{X_{\text{di}}}{X_{\text{qi}}} - 1 \right) |V_i| \cos(\delta_i - \angle V_i) + V_{\text{field}i}^* \\ y_{\mathbb{G}_i} = \frac{E_i |V_i|}{X_{\text{qi}}} \sin(\delta_i - \angle V_i) \end{cases} \quad (1.6a)$$

である。これは、発電機母線に関するサブシステムのように見えるが、式 (1.6a) における母線の電圧フェーズは、すべての発電機母線に関する連立方程式

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |V_i| |V_j| \sin(\angle V_i - \angle V_j) \\ Q_i = -B_{ii} |V_i|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |V_i| |V_j| \cos(\angle V_i - \angle V_j) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_{\text{G}} \quad (1.6b)$$

とすべての負荷母線に関する連立方程式

## 8 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\begin{cases} P_{\text{load}i}^* = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) \\ Q_{\text{load}i}^* = -B_{ii} |\mathbf{V}_i|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_L \quad (1.6c)$$

を同時に満たさなければならない。ただし、式 (1.6b) の有効電力  $P_i$  と無効電力  $Q_i$  は、式 (1.1b) で定義される。また、 $B_{ij}$  は、アドミタンス行列  $\mathbf{Y}$  の虚部であるサセプタンス行列の第  $(i, j)$  要素を表す。以下では、すべての  $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、式 (1.6a) から式 (1.6c) をまとめたものを 1 つのサブシステムとみなし、それを電気サブシステム  $\mathbf{G}$  と表す。

さらに、式 (1.4) のブロードキャスト型 PI コントローラの動特性を

$$\mathbf{K} : \begin{cases} \dot{\xi} = h^T u_K \\ y_K = h (k_P h^T u_K + k_I \xi) \end{cases} \quad (1.7)$$

と表す。ただし、 $h$  は  $\alpha_i$  を並べた列ベクトルである。このとき、上記のサブシステム  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$  とコントローラ  $\mathbf{K}$  の入出力を

$$u_F = -y_K + v_F, \quad u_K = \frac{1}{\omega_0} y_F \quad (1.8a)$$

$$u_G = y_F, \quad v_F = -y_G \quad (1.8b)$$

のように結合すれば、自動発電制御を組み込んだフィードバック制御系全体が表現できる。ただし、 $u_G$  と  $y_G$  は  $u_{G_i}$  と  $y_{G_i}$  を並べたベクトルである。フィードバック制御系全体のブロック線図を図 1.2 に示す。なお、「電力バランスの方程式」のブロックに、負荷の消費電力や送電線のアドミタンスなどの未知なモデルパラメータが含まれることに注意されたい。

## 1.2.2 電力系統モデルの平衡点に依らない受動性 \*

(1) 平衡点に依らない受動性 ??節の議論は、近似線形モデルによる解



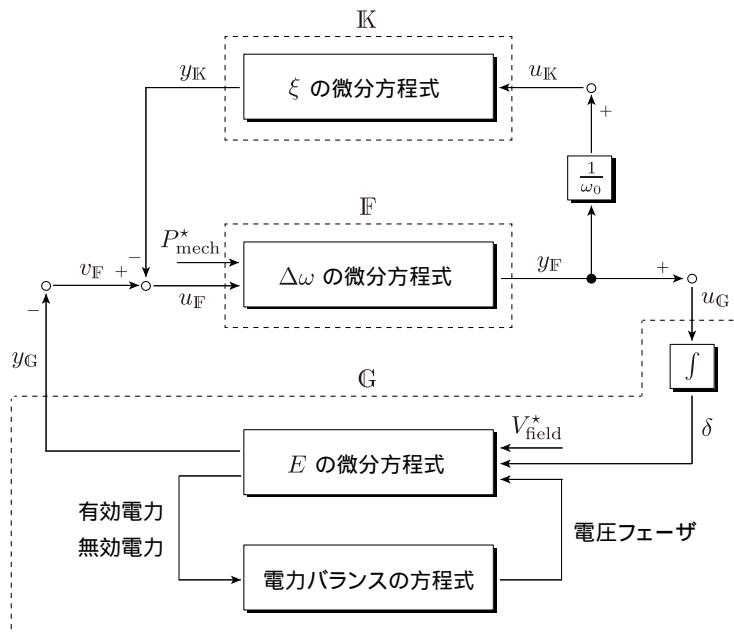


図 1.2 自動発電制御を組み込んだフィードバック制御系

析であったため、その内部状態が 0 に漸近収束することが、もとの非線形モデルにおける特定の定常潮流状態への漸近収束を表していた。一方で、非線形の微分代数方程式系として表現される電力系統モデルでは、電力の需要と供給がバランスする定常潮流状態においても内部状態は 0 とはならない。さらに、定常潮流状態そのものが機械的トルクなどの設定値に依存して変化する。したがって、個々の定常潮流状態（平衡点）の選択に依存しない安定性解析が望ましい。このような解析を行うためにシステム制御工学で提唱されている概念として、**平衡点に依存しない受動性**（equilibrium-independent passivity）と呼ばれるものがある [?, ?]。なお、文献によっては、**シフトされた受動性**（shifted passivity）とも呼ばれている [?]。その定義はつぎのように与えられる。

---

**定義 1.1** （平衡点に依らない受動性） 非線形システム

## 10 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\Sigma : \begin{cases} E\dot{x} = f(x) + Bu + Rd^* \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

を考える。ただし、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  と  $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$  は滑らかな関数であり、 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 、 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $R \in \mathbb{R}^{n \times p}$  は行列である<sup>†</sup>。また、 $d^* \in \mathbb{R}^p$  は定数ベクトルである。なお、 $\mathcal{X}$  は許容可能な状態の領域である。定常的な入力によって実現可能な平衡点の集合を

$$\mathcal{E}_\Sigma := \{x^* \in \mathcal{X} : 0 = f(x^*) + Bu^* + Rd^* \text{ を満たす } u^* \text{ が存在する} \}$$

と表す。各々すべての平衡点  $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$  に対して、 $W_{x^*}(x^*) = 0$  であり、かつ、任意の入力  $u$  に対して

$$\frac{d}{dt} W_{x^*}(x(t)) \leq (u - u^*)^\top (y - y^*), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.10)$$

を満たす微分可能な半正定値関数  $W_{x^*}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在するとき、 $\Sigma$  は**平衡点に依らず受動的**であると呼ぶ。ただし、平衡点  $x^*$  における定常的な入力と出力を

$$u^* := -(B^\top B)^{-1} B^\top \{f(x^*) + Rd^*\}, \quad y^* := h(x^*) \quad (1.11)$$

と表している。特に、上記の半正定値関数  $W_{x^*}(x)$  に加えて

<sup>†</sup> 行列  $E$  は、微分代数方程式系である式 (1.6) の電気サブシステム  $\mathbb{G}$  を表現するために導入した。具体的には、

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば、式 (1.9) の  $\Sigma$  は、微分代数方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + B_1 u + R_1 d^* \\ 0 = f_2(x_1, x_2) \\ y = h(x_1, x_2) \end{cases}$$

を表す。電気サブシステム  $\mathbb{G}$  に当てはめれば、 $x_1$  はすべての  $\delta_i$  と  $E_i$  を並べたベクトルであり、 $x_2$  はすべての  $|\mathbf{V}_i|$  と  $\angle \mathbf{V}_i$  を並べたベクトルである。一方で、 $E$  が正則であるとき、式 (1.5) の機械サブシステム  $\mathbb{F}$  のような常微分方程式系を表す。このようなシステム表現は、**ディスクリプタ形式** (descriptor representation) と呼ばれる。

$$\frac{d}{dt}W_{x^*}(x(t)) \leq (u - u^*)^\top(y - y^*) - \rho\|y - y^*\|^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.12)$$

を満たすある正定数  $\rho$  が存在するとき、 $\Sigma$  は**平衡点に依らず強受動的**であると呼ぶ。

定義 1.1 では、システムの平衡点  $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$  を基準としてその受動性が定義されていると解釈できる。線形システムの範疇では、システムが零固有値をもたない限り、??節の受動性の定義と等価であることが知られている [?]。なお、上記の関数  $W_{x^*}(x)$  は、通常受動性と同様に蓄積関数と呼ばれる。この蓄積関数  $W_{x^*}(x)$  は、平衡点  $x^*$  の陰関数となっていることに注意されたい。

文献 [?] において、システムが平衡点に依らず受動的である場合には、その蓄積関数はある関数  $U(x)$  を用いて

$$W_{x^*}(x) = U(x) - U(x^*) - \nabla U^\top(x^*)(x - x^*) \quad (1.13)$$

の形で表せることが示されている<sup>†1</sup>。また、定義 1.1 では、式 (1.13) の蓄積関数  $W_{x^*}(x)$  は半正定値関数であることが条件として課されている。具体的には、

$$U(x) \geq U(x^*) + \nabla U^\top(x^*)(x - x^*) \quad (1.14)$$

が成り立つことが条件となる。この不等式が任意の組  $(x, x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  に対して成り立つのであれば、各々すべての平衡点  $x^* \in \mathcal{E}_\Sigma$  に対して、 $W_{x^*}(x)$  は半正定値関数である。式 (1.14) の不等式は、 $U(x)$  が**凸関数** (convex function) であることを表す<sup>†2</sup>。後述するように、関数  $U(x)$  が凸であるような領域  $\mathcal{X}$  が、平衡点に依存しない受動性を用いた安定性解析に重要な役割を果たす。

<sup>†1</sup> 統計学などでは、凸関数である  $U(x)$  に対して、式 (1.13) の右辺の量は  $x$  と  $x^*$  の  $U(x)$  に関する**ブレグマン距離** (Bregman distance) と呼ばれている [?]。なお、 $U(x) = \|x\|^2$  とするとき、 $W_{x^*}(x) = \|x - x^*\|^2$  はユークリッド距離に一致する。

<sup>†2</sup> 関数  $f(x)$  に対して、定義域内から選ばれた任意の 2 点の組  $(x, y)$  について

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

が成り立つとき、 $f(x)$  は**凸関数**であると呼ぶ。特に、 $f(x)$  が微分可能であるとき、 $f(x)$  が凸関数であるための必要十分条件は、任意の 2 点の組  $(x, y)$  について

## 12 1. 電力系統モデルの安定化制御

(2) **機械サブシステムの解析** ??節で示されているように、機械サブシステム  $\mathbb{F}$  は強受動的である。同様に、式 (1.5) の  $\mathbb{F}$  が平衡点に依らず強受動的であることを確認する。まず、機械サブシステムを

$$\mathbb{F} : \begin{cases} \dot{x}_{\mathbb{F}} = A_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}} + B_{\mathbb{F}}u_{\mathbb{F}} + R_{\mathbb{F}}d_{\mathbb{F}}^* \\ y_{\mathbb{F}} = C_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}} \end{cases} \quad (1.15)$$

の形式で書き表す。ただし、状態  $x_{\mathbb{F}}$  は  $\Delta\omega_i$  を並べたベクトルであり、 $u_{\mathbb{F}}$  と  $y_{\mathbb{F}}$  は  $u_{\mathbb{F}_i}$  と  $y_{\mathbb{F}_i}$  を並べたベクトルである。また、 $d_{\mathbb{F}}^*$  は  $P_{\text{mech}}^*$  を表し、システム行列は

$$A_{\mathbb{F}} := -M^{-1}D, \quad B_{\mathbb{F}} := M^{-1}, \quad R_{\mathbb{F}} := M^{-1}, \quad C_{\mathbb{F}} := \omega_0 I$$

である。なお、行列  $M$  と  $D$  は、 $M_i$  と  $D_i$  を対角に並べた行列である。任意に選ばれた平衡点  $x_{\mathbb{F}}^* \in \mathcal{E}_{\mathbb{F}}$  に対して、蓄積関数を

$$W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = \frac{\omega_0}{2}(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)^{\top} M(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)$$

と選ぶ。ただし、平衡点に関する  $(x_{\mathbb{F}}^*, u_{\mathbb{F}}^*, y_{\mathbb{F}}^*)$  は

$$0 = A_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}}^* + B_{\mathbb{F}}u_{\mathbb{F}}^* + R_{\mathbb{F}}d_{\mathbb{F}}^*, \quad y_{\mathbb{F}}^* = C_{\mathbb{F}}x_{\mathbb{F}}^* \quad (1.16)$$

を満たす。なお、式 (1.13) の形式で表すならば、

$$U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}) := \frac{\omega_0}{2}x_{\mathbb{F}}^{\top} Mx_{\mathbb{F}}$$

とすることにより、蓄積関数は

$$W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}) - U_{\mathbb{F}}(x_{\mathbb{F}}^*) - \nabla U_{\mathbb{F}}^{\top}(x_{\mathbb{F}}^*)(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)$$

と表せる。この蓄積関数の勾配関数は

$$\nabla W_{x_{\mathbb{F}}^*}(x_{\mathbb{F}}) = \omega_0 M(x_{\mathbb{F}} - x_{\mathbb{F}}^*)$$

---


$$f(x) \geq f(y) + \nabla f^{\top}(y)(x - y)$$

が成り立つことである。

であることから、蓄積関数の時間微分は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} W_{x_F^*}(x_F(t)) &= \nabla W_{x_F^*}^\top(x_F(t)) \dot{x}_F(t) \\
 &= \nabla W_{x_F^*}^\top(x_F(t)) \{A_F(x_F(t) - x_F^*) + B_F(u_F(t) - u_F^*)\} \\
 &\leq (y_F(t) - y_F^*)^\top (u_F(t) - u_F^*) - \frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_F(t) - y_F^*\|^2
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

と評価できる。ただし、2つ目の等号の導出に式 (1.16) の関係を用いた。

(3) **機械サブシステムと自動発電制御器のフィードバック系の解析** 機械サブシステムと同様にして、式 (1.7) のブロードキャスト型 PI コントローラ の受動性も示すことができる。蓄積関数を

$$W_{\xi^*}(\xi) := \frac{1}{2} k_I (\xi - \xi^*)^2$$

と定義すれば、その時間微分は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} W_{\xi^*}(\xi(t)) &= (y_K - y_K^*)^\top (u_K - u_K^*) - k_I u_K^\top h h^\top u_K \\
 &\leq (y_K - y_K^*)^\top (u_K - u_K^*)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

と評価できる。ただし、平衡点における  $(\xi^*, u_K^*, y_K^*)$  について

$$\begin{cases} 0 = h^\top u_K^* \\ y_K^* = h(k_P h^\top u_K^* + k_I \xi^*) \end{cases} \tag{1.19}$$

が成り立つことを用いた。

システム制御工学では、2つの受動的なシステムのネガティブ・フィードバック系は、受動的になることが知られている。この事実に基づき、式 (1.5) の機械サブシステム F と式 (1.7) のブロードキャスト型 PI コントローラ K をフィードバック結合した

$$\mathbf{F}_+ : \begin{cases} M \Delta \dot{\omega} = -D \Delta \omega - h(k_P h^\top \Delta \omega + k_I \xi) + P_{\text{mech}}^* + v_F \\ \dot{\xi} = h^\top \Delta \omega \\ y_F = \omega_0 \Delta \omega \end{cases} \tag{1.20}$$

## 14 1. 電力系統モデルの安定化制御

も平衡点に依らず強受動的であることが示される。実際、式 (1.17) と式 (1.18) の不等式を足し合わせることで、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{W_{x_F^*}(x_F(t)) + \omega_0 W_{\xi^*}(\xi(t))\} \\ & \leq (y_F(t) - y_F^*)^\top (v_F(t) - v_F^*) - \frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_F(t) - y_F^*\|^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

が得られる。ただし、式 (1.8a) の入出力関係を用いた。

なお、式 (1.8b) の入出力関係により、式 (1.20) の  $F_+$  と式 (1.6) の  $G$  を結合すれば、自動発電制御を組み込んだフィードバック制御系全体が表される。この事実に基づき、以下では  $G$  の平衡点に依らない受動性を解析する。

(4) **電気サブシステムの解析** 式 (1.6) の電気サブシステム  $G$  の平衡点に依らない受動性を解析する。以下では、 $G$  の発電機母線と負荷母線に関する時間変数  $\delta_i$ ,  $E_i$ ,  $|V_i|$ ,  $\angle V_i$  をすべて並べた列ベクトルを  $x_G$  と表す。この表記のもと、ポテンシャルエネルギー関数を

$$\begin{aligned} U_G(x_G) := & \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \left\{ \frac{X_{di} E_i^2}{2X_{qi}(X_{di} - X_{qi})} - \frac{E_i |V_i|}{X_{qi}} \cos(\delta_i - \angle V_i) + \frac{|V_i|^2}{2X_{qi}} \right\} \\ & - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \{P_{loadi}^* \angle V_i + Q_{loadi}^* \ln |V_i|\} \\ & - \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{B_{ii}}{2} |V_i|^2 + \sum_{j \neq i}^N \frac{B_{ij}}{2} |V_i| |V_j| \cos(\angle V_i - \angle V_j) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

と定義する。このポテンシャルエネルギー関数は、例えば [?, ?, ?] において、1 軸の発電機モデルと定電力の負荷モデルで構成される電力系統の安定性解析に用いられている。ここで、式 (1.13) の表現に基づいて、蓄積関数の候補を

$$W_{x_G^*}(x_G) = U_G(x_G) - U_G(x_G^*) - \nabla U_G^\top(x_G^*)(x_G - x_G^*) \quad (1.23)$$

と構成する。なお、その勾配関数は

$$\nabla W_{x_G^*}(x_G) = \nabla U_G(x_G) - \nabla U_G(x_G^*)$$

である。蓄積関数の時間微分を計算するため、ポテンシャルエネルギー関数の勾配関数を求める。まず、 $U_G(x_G)$  の  $\delta_i$  と  $E_i$  に関する偏微分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_G}{\partial \delta_i}(x_G) &= \frac{E_i |\mathbf{V}_i|}{X_{qi}} \sin(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i), \\ \frac{\partial U_G}{\partial E_i}(x_G) &= -\frac{1}{X_{di} - X_{qi}} \left\{ -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i + \left( \frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i| \cos(\delta_i - \angle \mathbf{V}_i) \right\}\end{aligned}$$

となる。したがって、各変数が式 (1.6) の微分代数方程式にしたがうならば、式 (1.6a) から、すべての  $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、

$$\frac{\partial U_G}{\partial \delta_i}(x_G) = y_{G_i}, \quad \frac{\partial U_G}{\partial E_i}(x_G) = \frac{V_{\text{field}i}^* - \tau_{di} \dot{E}_i}{X_{di} - X_{qi}}$$

が成り立つ。また、 $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、電圧フェーザ変数に関するポテンシャルエネルギー関数の偏微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) &= -B_{ii} |\mathbf{V}_i| - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - \frac{Q_i}{|\mathbf{V}_i|} \\ \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) &= \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - P_i\end{aligned}$$

となる。したがって、式 (1.6b) の方程式から、これらが 0 であることがわかる。

同様に、式 (1.6c) の方程式から、 $i \in \mathcal{I}_L$  に対して、

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) &= -B_{ii} |\mathbf{V}_i| - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_j| \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - \frac{Q_{\text{load}i}^*}{|\mathbf{V}_i|} \\ \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) &= B_{ij} |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j) - P_{\text{load}i}^*\end{aligned}$$

も 0 であることがわかる。したがって、すべての  $i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L$  に対して

$$\frac{\partial U_G}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_G) = 0, \quad \frac{\partial U_G}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_G) = 0$$

が成り立つことがわかる。

つぎに、 $\nabla U_G(x_G^*)$  について、 $G$  の平衡点に関する  $(x_G^*, u_G^*, y_G^*)$  を考える。平衡点の関係から、ある電圧フェーザ変数  $(|\mathbf{V}_i^*|, \angle \mathbf{V}_i^*)_{i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L}$  が存在して、

## 16 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\begin{cases} 0 = u_{\mathbf{G}_i}^* \\ 0 = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i^* + \left( \frac{X_{di}}{X_{qi}} - 1 \right) |\mathbf{V}_i^*| \cos(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*) + V_{\text{field}i}^* \end{cases} \quad (1.24a)$$

$$\begin{cases} P_i^* = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \sin(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \\ Q_i^* = -B_{ii} |\mathbf{V}_i^*|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \cos(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \end{cases} \quad (1.24b)$$

が成り立つ。ただし、 $i \in \mathcal{I}_G$  であり、有効電力と無効電力の定常値は

$$\begin{aligned} P_i^* &:= \frac{E_i^* |\mathbf{V}_i^*|}{X_{qi}} \sin(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*), \\ Q_i^* &:= \frac{|\mathbf{V}_i^*| E_i^*}{X_{qi}} \cos(\delta_i^* - \angle \mathbf{V}_i^*) - \frac{|\mathbf{V}_i^*|^2}{X_{qi}} \end{aligned}$$

である。また、 $y_{\mathbf{G}_i}^* = P_i^*$  である。したがって、 $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、

$$\frac{\partial U_{\mathbf{G}}}{\partial \delta_i}(x_{\mathbf{G}}^*) = y_{\mathbf{G}_i}^*, \quad \frac{\partial U_{\mathbf{G}}}{\partial E_i}(x_{\mathbf{G}}^*) = \frac{V_{\text{field}i}^*}{X_{di} - X_{qi}}$$

が成り立つ。同様に、すべての  $i \in \mathcal{I}_L$  に対して

$$\begin{cases} P_{\text{load}i}^* = \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \sin(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \\ Q_{\text{load}i}^* = -B_{ii} |\mathbf{V}_i^*|^2 - \sum_{j \neq i}^N B_{ij} |\mathbf{V}_i^*| |\mathbf{V}_j^*| \cos(\angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*) \end{cases} \quad (1.24c)$$

が成り立つことから、母線の電圧フェーザ変数に関する偏微分は、すべての  $i \in \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_L$  に対して、

$$\frac{\partial U_{\mathbf{G}}}{\partial |\mathbf{V}_i|}(x_{\mathbf{G}}^*) = 0, \quad \frac{\partial U_{\mathbf{G}}}{\partial \angle \mathbf{V}_i}(x_{\mathbf{G}}^*) = 0$$

となる。以上の計算結果より、蓄積関数の  $\mathbf{G}$  の解軌道に沿った時間微分は



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_{x_G^*}(x_G(t)) &= \nabla W_{x_G^*}^\top(x_G(t))\dot{x}_G(t) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}_G} \left( (u_{G_i} - u_{G_i}^*)(y_{G_i} - y_{G_i}^*) - \frac{\tau_{di}}{X_{di} - X_{qi}} \dot{E}_i^2 \right) \\
&\leq (y_G - y_G^*)^\top (u_G - u_G^*)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

と評価できる。ただし、式(1.24a)より、 $u_G^* = 0$ であることを用いた。このことから、式(1.23)の関数  $W_{x_G^*}(x_G)$  が、電気サブシステム  $G$  の平衡点に依らない受動性に対する蓄積関数となることがわかる。ただし、 $x_G$  や  $x_G^*$  の領域は、 $W_{x_G^*}(x_G)$  が半正定値関数となる領域、すなわち、式(1.22)のポテンシャルエネルギー関数  $U_G(x_G)$  が凸関数となる領域に限られることに注意されたい。

### 1.2.3 周波数安定化制御系の安定性解析 \*

(1) 受動性に基づく未知平衡点の安定性解析 以下では、平衡点に依らない受動性を用いて、??節における近似線形モデルの受動性に基づく安定性解析と同様の手順により、自動発電制御が組み込まれたフィードバック制御系の安定性を解析する。ただし、電気サブシステム  $G$  の解軌道  $x_G(t)$  に対して、式(1.23)の蓄積関数の値  $W_{x_G^*}(x_G(t))$  が、すべての時刻  $t$  で非負となることを仮定して議論を進める。この点は次項で議論する。

式(1.21)と式(1.25)の不等式の和に対して、式(1.8b)の結合の関係を用いると、フィードバック制御系全体に対して

$$\frac{d}{dt} \{W_{x_F^*}(x_F(t)) + \omega_0 W_{\xi^*}(\xi(t)) + W_{x_G^*}(x_G(t))\} \leq -\frac{\min\{D_i\}}{\omega_0} \|y_F(t) - y_F^*\|^2$$

が得られる。この不等式から蓄積関数の和は単調非増加であることがわかる。また、その下限値は0であることから、時間が十分に経過するとその和はある値に漸近収束する。すなわち、左辺の時間微分は0に漸近収束する。したがって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_F(t) = y_F^*$$

## 18 1. 電力系統モデルの安定化制御

が導かれる。また、式 (1.5) の出力方程式に注目すると、出力  $y_F$  は内部状態  $\Delta\omega$  の定数倍であることから、機械サブシステム  $F$  に対して、

$$y_F(t) = y_F^*, \quad \forall t \geq 0 \implies \Delta\omega(t) = \frac{1}{\omega_0} y_F^*, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.26)$$

が成り立つ。さらに、??節で解析したように、すべての発電機の周波数偏差は同じ値に収束する。この事実は、ある定数  $\gamma_0$  に対して

$$y_F^* = \gamma_0 \mathbf{1}$$

であることを意味する。一方で、式 (1.19) の第 1 式から、

$$0 = h^T u_K^* = \frac{1}{\omega_0} h^T y_F^* = \frac{\gamma_0}{\omega_0} h^T \mathbf{1}$$

となる。ここで、 $h^T \mathbf{1} \neq 0$  であることから、 $\gamma_0 = 0$  が得られる。以上より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\omega(t) = 0$$

が示される。また、すべての  $i \in \mathcal{I}_G$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{mechi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$$

が成り立つこともわかる。ただし、これらの収束値は、負荷の消費電力や送電線のインピーダンスなどが現実的には未知であるため、事前に計算することは一般に不可能な値である。同様に、式 (1.6) の電気サブシステム  $G$  の内部状態や母線の電圧フェーザ変数も未知の値に漸近収束する。

**(2) ポテンシャルエネルギー関数が凸となる領域** 以下では、式 (1.22) のポテンシャルエネルギー関数  $U_G(x_G)$  が凸関数となるための条件が、近似線形モデルの受動性解析で議論した定義??の受動送電条件 (i) と (iii) に対応することを示す。なお、本節の議論では、受動送電条件 (ii) は仮定されている。

??節における近似線形モデルの設定に合わせて、すべての母線に発電機が接続されている場合を考える<sup>†</sup>。すなわち、発電機母線と負荷母線の添字集合は

<sup>†</sup> 需要と供給がバランスする定常潮流状態においては、一部の発電機は電力を消費するモータとなる。これは回転機の動特性をもつ負荷が接続されているものと解釈できる。

$$\mathcal{I}_G = \{1, \dots, N\}, \quad \mathcal{I}_L = \emptyset$$

である。このとき、発電機母線のクロン縮約を適用することにより、式 (1.6) の電気サブシステム  $\mathbf{G}$  と等価な常微分方程式系が、 $i \in \mathcal{I}_G$  に関する

$$\mathbf{G}_i : \begin{cases} \dot{\delta}_i = u_{G_i} \\ \tau_{di} \dot{E}_i = -\frac{X_{di}}{X_{qi}} E_i - (X_{di} - X_{qi}) \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos \delta_{ij} + V_{\text{field}i}^* \\ y_{G_i} = -E_i \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \sin \delta_{ij} \end{cases}$$

と得られる。ただし、 $\delta_{ij} := \delta_i - \delta_j$  である。また、縮約サセプタンス  $B_{ij}^{\text{red}}$  は、式 (1.6) の  $B_{ij}$  をまとめた送電網のサセプタンス行列を  $B$  と表すとき、

$$B^{\text{red}} := -\{\text{diag}(X_{qi}) - \text{diag}(X_{qi}) B \text{diag}(X_{qi})\}^{-1}$$

の第  $(i, j)$  要素として定義される<sup>†</sup>。この常微分方程式系表現に対応する式 (1.22) のポテンシャルエネルギー関数は

$$U_G^{\text{red}}(z_G) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{X_{di} E_i^2}{X_{qi}(X_{di} - X_{qi})} + E_i \sum_{j=1}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos \delta_{ij} \right\} \quad (1.27)$$

となる。ただし、すべての  $\delta_i$  と  $E_i$  を並べたベクトルを  $z_G$  と表している。内部状態に関する偏微分を計算すると

$$\frac{\partial U_G^{\text{red}}}{\partial \delta_i}(z_G) = y_{G_i}, \quad \frac{\partial U_G^{\text{red}}}{\partial E_i}(z_G) = \frac{V_{\text{field}i}^* - \tau_{di} \dot{E}_i}{X_{di} - X_{qi}}$$

が得られる。同様に、定常状態に対して

<sup>†</sup> この縮約サセプタンス行列  $B^{\text{red}}$  のすべての要素は非正である。この事実は、以下のよう示される。??節の議論から、サセプタンス行列  $B$  は非対角要素が非負の負定行列である。したがって、

$$B_- := \text{diag}(X_{qi}) - \text{diag}(X_{qi}) B \text{diag}(X_{qi})$$

は非対角要素が非正の正定行列である。このような行列は、**M 行列** (M-matrix) と呼ばれる。また、その逆行列の要素はすべて非負であることが知られている [?]。したがって、 $B^{\text{red}} = -B_-^{-1}$  のすべての要素は非正となる。

## 20 1. 電力系統モデルの安定化制御

$$\frac{\partial U_G^{\text{red}}}{\partial \delta_i}(z_G^*) = y_{G_i}^*, \quad \frac{\partial U_G^{\text{red}}}{\partial E_i}(z_G^*) = \frac{V_{\text{field}i}^*}{X_{di} - X_{qi}}$$

となる。したがって、対応する蓄積関数を

$$W_{z_G^*}^{\text{red}}(z_G) = U_G^{\text{red}}(z_G) - U_G^{\text{red}}(z_G^*) - \{\nabla U_G^{\text{red}}(z_G^*)\}^T (z_G - z_G^*)$$

と定義すれば、式 (1.25) と同様に、その時間微分は

$$\frac{d}{dt} W_{z_G^*}^{\text{red}}(z_G(t)) \leq (y_G - y_G^*)^T (u_G - u_G^*)$$

と評価できる。

式 (1.27) のポテンシャルエネルギー関数  $U_G^{\text{red}}(z_G)$  が凸関数であることは、ヘッセ行列  $\nabla^2 U_G^{\text{red}}(z_G)$  が半正定行列であることにより特徴づけられる<sup>†</sup>。そのヘッセ行列を計算すると

$$\nabla^2 U_G^{\text{red}}(z_G) = \begin{bmatrix} L(z_G) & -\hat{B}^T(z_G) \\ -\hat{B}(z_G) & -\hat{A}(z_G) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

となる。ただし、各ブロックを構成する行列は、第  $(i, j)$  要素に

<sup>†</sup> 2 階微分可能な関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が、ある領域  $\mathcal{X}$  において凸関数であるための必要十分条件は、すべての  $x \in \mathcal{X}$  に対して

$$\nabla^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

が半正定となることである。この行列は、関数  $f$  の**ヘッセ行列** (Hessian matrix) と呼ばれる [?]。

$$\begin{aligned}
L_{ij}(z_G) &:= \frac{\partial^2 U_G^{\text{red}}}{\partial \delta_i \partial \delta_j}(z_G) = \begin{cases} -E_i \sum_{j=1, j \neq i}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos(\delta_{ij}), & i = j \\ E_i E_j B_{ij}^{\text{red}} \cos(\delta_{ij}), & i \neq j \end{cases} \\
\hat{A}_{ij}(z_G) &:= -\frac{\partial^2 U_G^{\text{red}}}{\partial E_i \partial E_j}(z_G) = \begin{cases} B_{ii}^{\text{red}} + \frac{X_{di}}{X_{qi}(X_{di} - X_{qi})}, & i = j \\ B_{ij}^{\text{red}} \cos(\delta_{ij}), & i \neq j \end{cases} \\
\hat{B}_{ij}(z_G) &:= -\frac{\partial^2 U_G^{\text{red}}}{\partial E_i \partial \delta_j}(z_G) = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^N E_j B_{ij}^{\text{red}} \sin(\delta_{ij}), & i = j \\ -E_j B_{ij}^{\text{red}} \sin(\delta_{ij}), & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

をもつ行列である。式 (1.28) のヘッセ行列を平衡点で評価した  $\nabla^2 U_G^{\text{red}}(z_G^*)$  は、??節の近似線形化された電気サブシステムの受動性解析において現れた、式??の行列  $P_G$  と同一である。なお、この  $P_G$  の半正定性は、 $G$  の近似線形モデルの受動性を示すための蓄積関数が半正定値関数となることを保証するものであった。以上より、 $U_G^{\text{red}}(z_G^*)$  が凸関数となるための必要十分条件は、 $P_G$  が半正定となるための必要十分条件に等しく、それは受動送電条件 (i) と (iii) が成り立つことに等しいことがわかる。

??節の結果と組み合わせて考えると、式 (1.27) のポテンシャルエネルギー関数  $U_G^{\text{red}}(z_G)$  が凸関数となる領域として定義される

$$\mathcal{E}_G := \{z_G^* : \nabla^2 U_G^{\text{red}}(z_G^*) \succeq 0\}$$

が、受動性に基づいて周波数安定性を示すことが可能な「最大」の平衡点集合であることもわかる。その理由は、??節で示されているように、受動送電条件は、特定の平衡点の近傍で近似線形化された電気サブシステムが受動的となる必要条件でもあるためである。すなわち、 $\nabla^2 U_G^{\text{red}}(z_G^*)$  が半正定ではない平衡点  $z_G^*$  に関して、電気サブシステム  $G$  は受動的とはならない。

逆に、集合  $\mathcal{E}_G$  に属するある平衡点  $z_G^*$  の近傍に電気サブシステム初期値  $z_G(0)$  を設定するならば<sup>†</sup>、すべての物理パラメータ  $(M_i, D_i, \tau_i)_{i \in \mathcal{I}_G}$  の組み合わせ

<sup>†</sup> 例えば、需給がバランスした定常潮流状態から、ある負荷の消費電力がステップ状に微

## 22 1. 電力系統モデルの安定化制御

に対して、フィードバック制御系全体は、需要と供給がバランスする定常潮流状態に漸近収束する。以上の解析結果から、負荷などのモデルパラメータやコントローラパラメータの時間変化が十分に緩やかであり、ポテンシャルエネルギー関数が凸関数となる領域に電力系統の状態が留まる限りは、自動発電制御により周波数安定性が維持されることが結論づけられる。

### 1.3 過渡安定化制御

#### 1.3.1 励磁系による発電機の分散制御

本節では、電力系統の安定度を高める目的で実装される**励磁系** (excitation system) の数理モデルや特性を概説する。励磁系は一般に、各発電機に個別に実装されるコントローラであり、発電機が接続されている母線の電圧フェーズや電流フェーズ、発電機の内部状態などを局所的に計測することにより、界磁電圧を自動調整する制御動作を行う。励磁系の主要な要素は、母線電圧を所望の値に維持するための**自動電圧調整器** (AVR: Automatic Voltage Regulator) と呼ばれる制御機器である。さらに、自動電圧調整器に起因して励起される動揺を抑制するために、**系統安定化装置** (PSS: Power System Stabilizer) と呼ばれる追加的な制御アルゴリズムが組み込まれる場合もある。1.3.2 節と 1.3.4 節では、自動電圧調整器と系統安定化装置の標準的なモデルや制御効果について説明する。

#### 1.3.2 標準的な自動電圧調整器モデル

標準化された自動電圧調整器のモデルは数多く存在する。例えば、IEEE の標準化に関する報告 [?] には、40 種類以上の標準モデルが挙げられている。自動電圧調整器モデルは、直流型 (DC)、交流型 (AC)、静的型 (Static) に大

---

小変動した場合を考える。このとき、もとの定常潮流状態から新しい定常潮流状態に電気サブシステム  $G$  の平衡点が微小変動するため、消費電力が変化した時刻を初期時刻と考えれば、 $G$  の初期値が平衡点の近傍に設定された状況として解釈できる。

別される。以下では、直流型と静的型の代表的なモデルを導入する。

まず、自動電圧調整器の直流型モデルである **IEEE DC1 型モデル** (IEEE Type DC1 excitation system model) を説明する。モデル化の詳細は [?, 7.9.2 節] や [?, 8.6.3 節]などを参照されたい。ここでは、母線  $i$  に接続された発電機に対する自動電圧調整器を議論するが、表記の簡単化のため添字  $i$  は省略する。具体的には、??節で扱った発電機モデル

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega_0 \Delta\omega \\ M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega - P + P_{\text{mech}} \\ \tau_d \dot{E} = -E_{\text{field}} + V_{\text{field}} \end{cases} \quad (1.29)$$

を用いて説明する。ただし、以降の議論のため、

$$E_{\text{field}} := \frac{X_d}{X_q} E - \left( \frac{X_d}{X_q} - 1 \right) |\mathbf{V}| \cos(\delta - \angle \mathbf{V}) \quad (1.30)$$

を定義した<sup>†</sup>。なお、発電機が出力する有効電力と無効電力は

$$\begin{aligned} P &= \frac{E|\mathbf{V}|}{X_q} \sin(\delta - \angle \mathbf{V}), \\ Q &= \frac{E|\mathbf{V}|}{X_q} \cos(\delta - \angle \mathbf{V}) - \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_q} \end{aligned}$$

である。図 1.3 に示されているように、IEEE DC1 型モデルは、母線電圧フェーザの絶対値  $|\mathbf{V}|$  を入力として、発電機の界磁電圧  $V_{\text{field}}$  を出力とする制御器である。ただし、補足的な入力信号として、母線電圧フェーザの絶対値を所望の値に調整するための参照信号  $V_{\text{ref}}^*$  と系統安定化装置が出力する制御信号  $V_{\text{pss}}$  が印加されている。自動電圧調整器の IEEE DC1 型モデルは、**計器用変圧器** (voltage transformer), **コンパレータ** (comparator), **増幅器** (amplifier), **励磁器** (exciter) の 4 つの基本機器に加えて、補助的な**安定化回路** (stabilizing circuit) で構成されている。以下では、それぞれの動特性を説明する。

<sup>†</sup> ??節で扱った発電機モデルの場合には、式 (1.30) の  $X_q$  を  $X_{d'}$  に置き換えて  $E_{\text{field}}$  を定義する。

## 24 1. 電力系統モデルの安定化制御

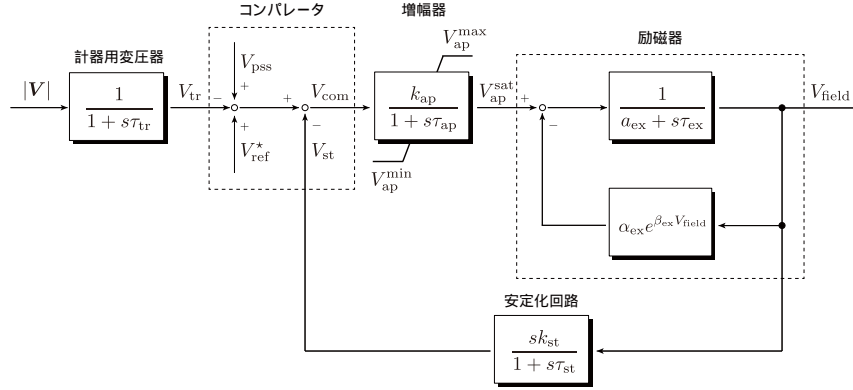


図 1.3 自動電圧調整器の IEEE DC1 型モデル

(1) **計器用変圧器** 母線電圧を制御回路に使用可能な電圧に降圧させるための機器であり、その動特性は 1 次遅れフィルタとして

$$\tau_{tr} \dot{V}_{tr} = -V_{tr} + |V| \quad (1.31a)$$

でモデル化される。一般に、時定数  $\tau_{tr}$  は十分に小さいため、計器用変圧器の出力  $V_{tr}$  は母線電圧フェーザの絶対値  $|V|$  とほぼ等しい。

(2) **コンパレータ** 計器用変圧器の出力  $V_{tr}$  と参照信号  $V_{ref}^*$  の差分を出力する機器である。系統安定化装置の出力  $V_{pss}$  は、定数である  $V_{ref}^*$  を調整する信号として印加される。また、励磁系の安定化回路を組み込む場合には、その出力  $V_{st}$  もフィードバックされる。すなわち、コンパレータは

$$V_{com} = V_{ref}^* + V_{pss} - V_{tr} - V_{st} \quad (1.31b)$$

のようにモデル化される。上述のように、 $V_{tr}$  は  $|V|$  とほぼ等しいことから、系統安定化装置の出力  $V_{pss}$  や安定化回路の出力  $V_{tr}$  が 0 であるならば、コンパレータの出力  $V_{com}$  は、参照信号と母線電圧フェーザの絶対値の差  $V_{ref}^* - V_{tr}$  とほぼ等しい。

(3) **増幅器** コンパレータの出力  $V_{com}$  を増幅して励磁器を駆動させるための機器である。回転型や電磁気型などの種類があるが、どの場合にも



$$\begin{cases} \tau_{\text{ap}} \dot{V}_{\text{ap}} = -V_{\text{ap}} + k_{\text{ap}} V_{\text{com}} \\ V_{\text{ap}}^{\text{sat}} = \text{sat}(V_{\text{ap}}; V_{\text{ap}}^{\min}, V_{\text{ap}}^{\max}) \end{cases} \quad (1.31\text{c})$$

でモデル化される。ただし、時定数  $\tau_{\text{ap}}$  とゲイン  $k_{\text{ap}}$  は非負定数であり、 $\text{sat}$  は

$$\text{sat}(x; \underline{\alpha}, \bar{\alpha}) := \begin{cases} \underline{\alpha}, & x \leq \underline{\alpha} \\ x, & \underline{\alpha} < x \leq \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}, & x > \bar{\alpha} \end{cases}$$

で定義される飽和関数である。

(4) **励磁器** 増幅器の出力  $V_{\text{ap}}^{\text{sat}}$  から界磁電圧  $V_{\text{field}}$  を生成する機器であり、非線形の 1 次系として

$$\tau_{\text{ex}} \dot{V}_{\text{field}} = -\left(a_{\text{ex}} V_{\text{field}} + \underbrace{\alpha_{\text{ex}} e^{\beta_{\text{ex}} V_{\text{field}}}}_{*}\right) + V_{\text{ap}}^{\text{sat}} \quad (1.31\text{d})$$

でモデル化される。ただし、 $\tau_{\text{ex}}$  は正の定数であるが、 $a_{\text{ex}}$  は一般に負の定数であることに注意されたい。また、「\*」で表される項は励磁器内の磁気飽和などの影響による非線形性を表しており、 $\alpha_{\text{ex}}$  と  $\beta_{\text{ex}}$  はともに非負定数である。通常の動作点の近傍では、式 (1.31d) の括弧内の和が正となるように各定数が設定されるため、励磁器の動特性は一般に安定である。

(5) **安定化回路** 励磁系の安定度を高めるために補助的に実装される回路である。IEEE DC1 型モデルでは、界磁電圧の微分値をフィードバックする機構として表現される。すなわち、その動特性は

$$\tau_{\text{st}} \dot{V}_{\text{st}} = -V_{\text{st}} + k_{\text{st}} \dot{V}_{\text{field}} \quad (1.31\text{e})$$

で表される。ただし、時定数  $\tau_{\text{st}}$  とゲイン  $k_{\text{st}}$  は非負定数である。この安定化回路の出力  $V_{\text{st}}$  は、式 (1.31b) のコンパレータにフィードバックされる。

以上の式 (1.31a)–(1.31e) を統合したものが、自動電圧調整器の IEEE DC1 型モデルである。表 1.1 と表 1.2 に各パラメータの参考値をまとめる。時定数の単位は [s]、それ以外の単位は [pu] である。

## 26 1. 電力系統モデルの安定化制御

表 1.1 IEEE DC1 型モデルのパラメータ例

	$\tau_{tr}$	$\tau_{ap}$	$k_{ap}$	$V_{ap}^{\max}$	$V_{ap}^{\min}$
例 1 [?, Table D.3. Unit F2]	0.00	0.05	57.1	1.00	-1.00
例 2 [?, 8.6.3 節]	0.05	0.89	187	1.70	-1.70

表 1.2 IEEE DC1 型モデルのパラメータ例 (つづき)

	$\tau_{ex}$	$a_{ex}$	$\alpha_{ex}$	$\beta_{ex}$	$\tau_{st}$	$k_{st}$
例 1 [?, Table D.3. Unit F2]	0.50	-0.045	0.0012	1.21	1.00	0.08
例 2 [?, 8.6.3 節]	1.15	-0.30	0.014	1.55	0.62	0.058

つぎに、IEEE DC1 型と同様の構成であるが、より応答が速い静的型モデルである **IEEE ST1 型モデル** (IEEE Type ST1 excitation system model) を説明する。この自動電圧調整器モデルでは、励磁器の時定数が十分に小さく、式 (1.31d) の励磁器モデルが静的な関係として

$$V_{\text{field}} = V_{\text{ap}}^{\text{sat}}$$

で表現される。ただし、式 (1.31c) の増幅器における出力飽和の上下限は、主に母線電圧フェーザの絶対値に依存するようにモデル化される [?, 8.63 節]。具体的には、 $|\mathbf{V}|$  に加えて式 (1.29) の  $E_{\text{field}}$  を用いて、

$$V_{\text{ap}}^{\min} = \gamma_- |\mathbf{V}|, \quad V_{\text{ap}}^{\max} = \gamma_+ |\mathbf{V}| - k_0 E_{\text{field}}$$

とする。ただし、 $\gamma_-$ ,  $\gamma_+$ ,  $k_0$  は非負の定数であり、 $E_{\text{field}}$  は pu の単位系では発電機の界磁電流の値と等しい。このモデルのブロック線図を図 1.4 に示す。

IEEE ST1 型モデルは励磁器の応答速度が十分に早いため、安定化回路がしばしば取り除かれる。また、増幅器の時定数  $\tau_{\text{ap}}$  が十分に小さく、その動特性が無視できるとき、簡略化された 1 次系モデルで表される

$$\begin{cases} \tau_{tr} \dot{V}_{tr} = -V_{tr} + |\mathbf{V}| \\ V_{ap} = k_{ap}(V_{\text{ref}}^* + V_{\text{pss}} - V_{tr}) \\ V_{\text{field}} = \text{sat}(V_{ap}; V_{\text{ap}}^{\min}, V_{\text{ap}}^{\max}) \end{cases} \quad (1.32)$$

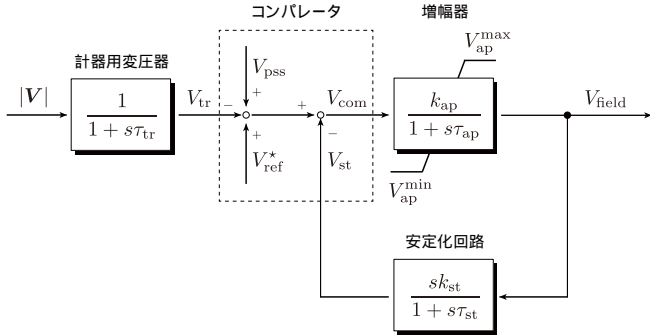


図 1.4 自動電圧調整器の IEEE ST1 型モデル

が用いられる。例えば、このモデルは [?, 12.4 節] や [?, 4.2.2 節] など で用いられている。パラメータ例を表 1.3 に示す。

表 1.3 IEEE ST1 型モデルのパラメータ例

	$\tau_{tr}$	$k_{ap}$	$\gamma_+$	$\gamma_-$	$k_0$
例 1 [?, 8.6.3 節]	0.015	200	7.00	-6.40	0.04
例 2 [?, Table H.23]	0.02	210	6.43	-6.00	0.038

1.3.3 自動電圧調整器の制御効果

例 1.3 (xxx) AVR の効果をシステム理論的に説明したい。3 バスの例？

1.3.4 系統安定化装置

系統安定化装置は図 1.3 や図 1.4 に示される追加的な制御信号  $V_{pss}$  を出力する機器である。一般に、発電機の周波数偏差や有効電力、母線電圧フェーズなどを計測して系統安定化装置にフィードバックすることが多い。以下では、**IEEE PSS1 型モデル** (IEEE Type PSS1 power system stabilizer model) と呼ばれる標準的な系統安定化装置のモデルを説明する [?, 9.2 節]。このモデルは主

## 28 1. 電力系統モデルの安定化制御

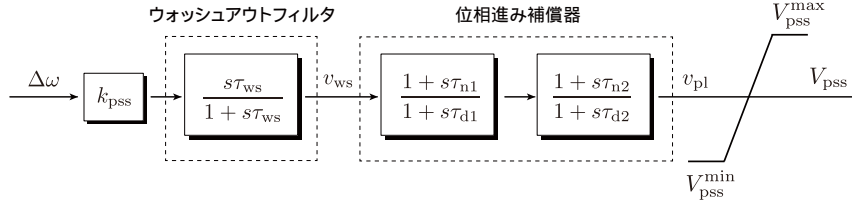


図 1.5 系統安定化装置の IEEE PSS1 型モデル

に、ウォッシュアウトフィルタ (washout filter) と位相進み補償器 (phase-lead compensator) の2つで構成される。ブロック線図を図 1.5 に示す。

(1) **ウォッシュアウトフィルタ** 系統安定化装置の定常ゲインを 0 とするためのハイパスフィルタであり、ゲイン  $k_{\text{pss}}$  で定数倍された発電機の周波数偏差  $\Delta\omega$  を入力として、その動特性は

$$\begin{cases} \tau_{\text{ws}} \dot{\xi}_{\text{ws}} = -\xi_{\text{ws}} + k_{\text{pss}} \Delta\omega \\ v_{\text{ws}} = k_{\text{pss}} \Delta\omega - \xi_{\text{ws}} \end{cases} \quad (1.33a)$$

で表される。明らかに、 $\Delta\omega$  が定数であるならば、ウォッシュアウトフィルタの出力  $v_{\text{ws}}$  は 0 となる。このフィルタの役割は、過渡状態にある電力系統の周波数偏差に対してのみ、自動電圧調整器の参照信号を調整するように系統安定化装置を駆動することである。したがって、時定数  $\tau_{\text{ws}}$  は、周波数偏差の整定時間を考慮して、1 から 20 [s] 程度の範囲で設定されることが多い [?, 12.5 節]。

(2) **位相進み補償器** 母線電圧フェーザの変化に対する発電機の有効電力の変化における位相遅れを緩和するために組み込まれる補償器である。所望の位相進みを実現するために、1 から 2 個程度の位相進み補償器が直列結合されることが多い。具体的には、ウォッシュアウトフィルタの出力  $v_{\text{ws}}$  を入力として、その動特性は

$$\begin{cases} \tau_{\text{d1}} \dot{\xi}_1 = -\xi_1 + \left(1 - \frac{\tau_{\text{d1}}}{\tau_{\text{n1}}}\right) v_{\text{ws}} \\ v_1 = \frac{\tau_{\text{n1}}}{\tau_{\text{d1}}} (v_{\text{ws}} - \xi_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{\text{d2}} \dot{\xi}_2 = -\xi_2 + \left(1 - \frac{\tau_{\text{d2}}}{\tau_{\text{n2}}}\right) v_1 \\ v_{\text{pl}} = \frac{\tau_{\text{n2}}}{\tau_{\text{d2}}} (v_1 - \xi_2) \end{cases} \quad (1.33b)$$

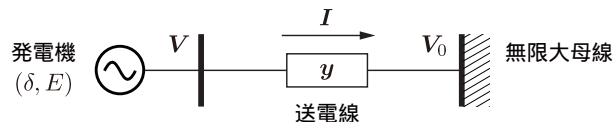


図 1.6 1 機無限大母線系統モデル

で表される。さいごに、位相進み補償器の出力  $v_{pl}$  を飽和関数に作用させて、

$$V_{pss} = \text{sat} (v_{pl}; V_{pss}^{\min}, V_{pss}^{\max}) \quad (1.33c)$$

のように系統安定化装置の出力が得られる。このモデルのパラメータ例を表 1.4 に示す。ただし、系統安定化装置のパラメータは、各発電機の動特性、自動電圧調整器の動特性、負荷の分布、送電網の特性など様々な要素に依存して決定する必要があるため、例示されたパラメータ設定によって、必ずしも所望の系統安定度が実現されるとは限らないことに注意されたい。また、標準的な系統安定化装置のパラメータ設計指針は **1 機無限大母線系統モデル** (single machine infinite bus system) に基づくものが多く、複数の発電機を結合した場合の結果は明らかでないことにも注意が必要である<sup>†</sup>。例えば、文献 [?, 12.5 節] では、古典制御理論に基づくパラメータの設計指針が示されている。文献 [?] では、現代制御理論に基づく設計指針も解説されている。

表 1.4 IEEE PSS1 型モデルのパラメータ例

	$k_{pss}$	$\tau_{ws}$	$\tau_{d1}$	$\tau_{n1}$	$\tau_{d2}$	$\tau_{n2}$	$V_{pss}^{\min}$	$V_{pss}^{\min}$
例 1 [?, 12.5 節]	9.50	1.4	0.033	0.154	0.00	0.00	$-\infty$	$\infty$
例 2 [?, 12.8 節]	20.0	10.0	0.02	0.05	5.40	3.00	$-\infty$	$\infty$
例 3 [?, Table H.3]	3.15	10.0	0.01	0.76	0.01	0.76	-0.09	0.09

<sup>†</sup> 1 機無限大母線系統モデルは、図 1.6 のように、1 つの発電機と送電線、無限大母線で構成される。このモデルでは、無限大母線の電圧フェーザ  $V_0$  は定数であることが仮定される。このとき、発電機母線の電圧フェーザ  $V$  と電流フェーザ  $I$  には

$$I = y(V - V_0)$$

の関係が得られる。これが発電機と電力系統の入出力関係を定める代数方程式となる。

## 30 1. 電力系統モデルの安定化制御

## 1.3.5 系統安定化装置の制御効果

---

例 1.4 (xxx) PSS の効果をシステム理論的に説明したい。3 バスの例？

---

## 1.4 レトロフィット制御理論に基づく系統安定化装置 \*

## 1.4.1 系統安定化装置の設計に用いる電力系統モデル \*

(1) レトロフィット制御理論に基づく系統安定化装置の特長 本節では、レトロフィット制御理論に基づく系統安定化装置の設計手法を説明する [?, ?, ?, ?, ?]。本手法により設計された系統安定化装置は、複数の発電機の各々に同時に組み込む場合にも電力系統全体を安定に維持することが可能となる。特に、各々の系統安定化装置は、

- それらを組み込む発電機や自動電圧調整器の数値モデルのみを用いて分散設計が可能である
- 発電機母線の電圧フェーザや電流フェーザなどの局所的な計測信号のみを用いて分散実装が可能である

という特長をもつ。以下では、式 (1.29) の発電機モデルに対して、式 (1.32) の静的な自動電圧調整器モデルが組み込まれている場合を考える。ただし、説明の簡単化のため、自動電圧調整器の出力飽和は無視する。なお、出力飽和がある場合だけでなく、他の形式の自動電圧調整器を組み込む場合や、より詳細な発電機モデルを用いる場合などにおいても同様の議論が可能である。

(2) 局所線形サブシステム 相互作用入力の設定を工夫することにより、注目する発電機に自動電圧調整器を結合したサブシステムを線形系の形式として

$$G : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Lv \\ w = \Gamma x \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.34)$$

で表すことを考える。ここで、状態  $x$  は発電機モデルの状態  $\delta$ ,  $\Delta\omega$ ,  $E$  と自動

電圧調整器モデルの状態  $V_{tr}$  を順に並べたベクトルである。また、入力  $u$  は系統安定化装置の出力  $V_{pss}$  を表し、相互作用の入出力である  $v$  と  $w$  は

$$v := \begin{bmatrix} P_{\text{mech}} - \frac{E|V|}{X_q} \sin(\delta - \angle V) \\ k_{\text{ap}} V_{\text{ref}}^* + \left( \frac{X_d}{X_q} - 1 \right) |V| \cos(\delta - \angle V) \\ |V| \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} \delta \\ \Delta\omega \\ E \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

と定義する。式 (1.35) の相互作用入力  $v$  に発電機の実非線形項や母線電圧フェーザの変数が含まれていることに注意されたい。これらの信号の定義に合わせて、式 (1.34) のシステム行列は

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X_d}{\tau_d X_q} & -\frac{k_{\text{ap}}}{\tau_d} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{tr}} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{\text{ap}}}{\tau_d} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = I \quad (1.36)$$

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{tr}} \end{bmatrix}, \quad \Gamma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と定義される。式 (1.34) の  $G$  を**局所線形サブシステム** (local linear subsystem) と呼ぶ。なお、式 (1.36) のシステム行列のパラメータ、すなわち、局所線形サブシステムのモデルパラメータは既知であり、系統安定化装置の設計や実装に利用可能であるものと仮定する。

(3) **環境と近似線形環境モデル** 出力  $y$  と相互作用の入出力  $v, w$  が計測可能であるという前提のもとで、系統安定化装置となる局所コントローラ

$$K : (y, v, w) \mapsto u$$

を設計することを考えよう。以下では、このコントローラ  $K$  を**レトロフィット**

## 32 1. 電力系統モデルの安定化制御

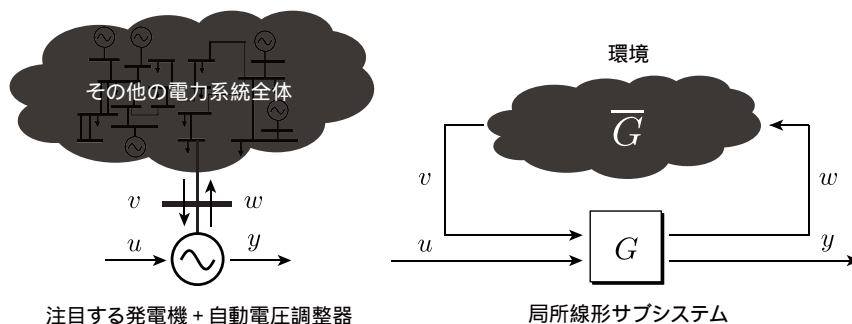


図 1.7 局所サブシステムと環境のフィードバック結合系

**コントローラ** (retrofit controller) と呼ぶ<sup>†</sup>。レトロフィットコントローラの実装と設計には、局所線形サブシステム  $G$  のモデルだけでなく、相互作用出力  $w$  の情報から相互作用入力  $v$  を内部的に推定する役割をもつ線形モデルも用いる。以下では、この推定用モデルを**近似線形環境モデル** (approximate linear environment model) と呼ぶ。

近似線形環境モデルを説明する準備として、**環境** (environment) と呼ばれる非線形サブシステムを導入する。環境は「局所線形サブシステムを除いた電力系統全体」を表すサブシステムであり、局所線形サブシステムの相互作用出力  $w$  を入力とし、相互作用入力  $v$  を出力とする非線形系である。形式的に、環境の動的な入出力関係を

$$\bar{G} : w \mapsto v$$

と表そう。このとき、局所線形サブシステム  $G$  と環境  $\bar{G}$  のフィードバック結合系は、図 1.7 のように注目する発電機の視点からみた電力系統全体を表す。

環境  $\bar{G}$  には、送電網、負荷、他の発電機などの多数の要素を含むため、注目する発電機に対する系統安定化装置の設計や実装に、環境の完全な非線形モデルが利用可能であると仮定することは現実的ではない。この事実を考慮して、「環境の近似的な線形モデルのみ」が利用可能である状況を想定しよう。説明の

<sup>†</sup> レトロフィット (retrofit) は retroactive と refit に由来する単語であり、既存のシステムなどに対して部分的な増築や改築を行うことを意味する。



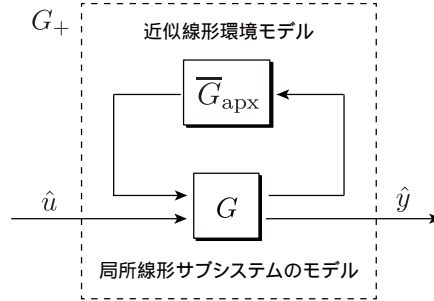


図 1.8 レトロフィットコントローラ設計に用いるモデル

簡単化のため、近似線形環境モデルを静的な入出力関係として

$$\bar{G}_{\text{apx}} : v_{\text{apx}} = \bar{\Theta} w \quad (1.37)$$

と表す<sup>†</sup>。ここで、 $\bar{\Theta}$  は定数の行列である。式 (1.37) の  $\bar{G}_{\text{apx}}$  は、相互作用出力  $w$  が相互作用入力  $v$  に及ぼす影響を線形予測の形式で推定した値  $v_{\text{apx}}$  を生成する近似線形環境モデルである。この近似線形環境モデルを局所線形サブシステムのモデルと図 1.8 のようにフィードバック結合する。これにより、レトロフィットコントローラの設計に用いる電力系統モデルが

$$G_+ : \begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = (A + L\bar{\Theta}\Gamma)\hat{\xi} + B\hat{u} \\ \hat{y} = C\hat{\xi} \end{cases} \quad (1.38)$$

と得られる。ただし、 $\hat{u}$ 、 $\hat{y}$  は制御系設計用の仮想的な入出力信号であるため、ハット記号をつけて  $u$ 、 $y$  と区別した。なお、式 (1.36) において  $C$  は単位行列であることから、出力  $\hat{y}$  は  $G_+$  の内部状態  $\hat{\xi}$  に等しい。

#### 1.4.2 レトロフィット制御理論に基づく系統安定化装置の設計 \*

(1) レトロフィットコントローラの設計法 本項では、式 (1.37) の近似線形環境モデル  $\bar{G}_{\text{apx}}$  が適当な方法で同定されているものと仮定して、レトロ

<sup>†</sup> 動的な近似線形環境モデルを用いることも可能である。詳細は、[?] を参照されたい。

## 34 1. 電力系統モデルの安定化制御

フィットコントローラの設計方法を説明する。近似線形環境モデルの具体的な構成方法は次項で説明する。

系統安定化装置に対応するレトロフィットコントローラの設計には、システム制御工学における標準的な制御系設計手法を利用することができる。具体例として、**線形 2 次レギュレータ** (LQR: linear-quadratic regulator) の設計手法を式 (1.38) の電力系統モデル  $G_+$  に適用してみよう [?, 5.3 節]。線形 2 次レギュレータでは、状態と入力に関するコスト関数

$$J(\hat{\xi}, \hat{u}) := \int_0^\infty \left( \hat{\xi}^\top(t) Q \hat{\xi}(t) + \hat{u}^\top(t) R \hat{u}(t) \right) dt$$

を最小化する状態フィードバック形式の制御アルゴリズムとして

$$\hat{u} = \underbrace{-R^{-1}B^\top P(\bar{\Theta})}_{\hat{K}(\bar{\Theta})} \hat{\xi} \quad (1.39)$$

を用いる。ただし、 $Q$  は半正定、 $R$  は正定な行列であり、行列  $P(\bar{\Theta})$  は**代数リッカチ方程式** (algebraic Riccati equation)

$$(A + L\bar{\Theta}\Gamma)^\top P + P(A + L\bar{\Theta}\Gamma) - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0$$

を満たす正定解である。このとき、式 (1.39) のゲイン行列  $\hat{K}(\bar{\Theta})$  を用いて、レトロフィットコントローラは

$$K: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L\{v - \bar{\Theta}(w - \Gamma\hat{x})\} \\ u = \hat{K}(\bar{\Theta})(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (1.40)$$

と構成される。このレトロフィット制御理論に基づく系統安定化装置は、いかなる行列  $\bar{\Theta}$  を用いた場合にも

- 電力系統が定常潮流状態にある場合に入力  $u$  は 0 となる
- 実装の前後で定常潮流状態（平衡点）の安定性は変化しない

という特長をもつ<sup>†</sup>。一般に、近似線形環境モデルによる相互作用信号の予測精度が高くなるほど、系統安定度がより大きく向上されることも示されている。

<sup>†</sup> 2 つ目の項目は、局所コントローラの実装前に漸近安定であった平衡点が、局所コント

なお、式 (1.39) の制御アルゴリズムは、式 (1.38) の  $G_+$  を安定化するものであれば、他の制御系設計手法で設計されたものでも構わない。また、 $\hat{K}(\bar{\Theta})$  は静的でなくとも構わず、動的な制御アルゴリズムとすることもできる [?].

(2) **近似線形環境モデルの構成法** 式 (1.37) の近似線形環境モデル  $\bar{G}_{\text{apx}}$  の最も単純な構成方法は、式 (1.35) の信号  $w$  と  $v$  の関係を近似線形化により見積もることである。具体的には、 $w$  の要素に関する  $v$  の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \delta} &= \begin{bmatrix} -\frac{E|\mathbf{V}|}{X_q} \cos(\delta - \angle \mathbf{V}) \\ -\left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) |\mathbf{V}| \sin(\delta - \angle \mathbf{V}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial \Delta \omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial v}{\partial E} &= \begin{bmatrix} -\frac{|\mathbf{V}|}{X_q} \sin(\delta - \angle \mathbf{V}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.41)$$

と計算される。したがって、注目する発電機の内部状態と発電機母線の電圧フェーズが、適当な定常潮流状態の近傍にあることを仮定すると

$$\bar{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{E^*|\mathbf{V}^*|}{X_q} \cos(\delta^* - \angle \mathbf{V}^*) & 0 & -\frac{|\mathbf{V}^*|}{X_q} \sin(\delta^* - \angle \mathbf{V}^*) \\ -\left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) |\mathbf{V}^*| \sin(\delta^* - \angle \mathbf{V}^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

が得られる。ただし、 $(\delta^*, E^*)$  は発電機の内部状態の定常値、 $(|\mathbf{V}^*|, \angle \mathbf{V}^*)$  は母線電圧フェーズの定常値である。行列  $\bar{\Theta}_0$  により、発電機の内部状態がそれ自身に与える局所的なフィードバック構造をモデル化することができる。なお、通常の電力系統は定常潮流状態の近傍で運転されているため、モデルの構築に必要な定常値は計測データに基づいて同定することができる。

---

ローラの実装によって不安定な平衡点に変化しないことを意味している。レトロフィット制御理論では、平衡点の漸近安定性を維持しながら、外乱に対するロバスト性や安定領域の大きさなどを指標とする「安定度の向上」を目的としている。なお、本手法は、不安定な平衡点を安定化させる目的で用いることはできない。

## 36 1. 電力系統モデルの安定化制御

つぎに、自動発電制御を介して信号  $w$  が信号  $v$  に与える間接的な影響を見積もることを考えよう。自動発電制御の入力  $P_{\text{mech}}$  に関する  $v$  の偏微分は

$$\frac{\partial v}{\partial P_{\text{mech}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。式 (1.4) のブロードキャスト型 PI コントローラが自動発電制御として動作している場合には、 $\Delta\omega$  の積分が  $\delta$  に相当することに注意すると、

$$\frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial \delta} = -\alpha\beta k_I, \quad \frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial \Delta\omega} = -\alpha\beta k_P, \quad \frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial E} = 0$$

がわかる。したがって、微分の連鎖律により、ブロードキャスト型 PI コントローラを介して信号  $w$  が信号  $v$  に与える影響は

$$\bar{\theta}_{\text{agc}} := -\alpha\beta \begin{bmatrix} k_I & k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

によりモデル化できる。ただし、このモデルを構築するためには、自動発電制御のコントローラゲインの値を適当な方法で取得する必要がある。

同様に、母線電圧フェーザ  $\mathbf{V}$  を介して信号  $w$  が信号  $v$  に与える間接的な影響を見積もることを考える。電圧フェーザ変数 ( $|\mathbf{V}|, \angle\mathbf{V}$ ) に関する  $v$  の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial |\mathbf{V}|} &= \begin{bmatrix} -\frac{E}{X_q} \sin(\delta - \angle\mathbf{V}) \\ \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) \cos(\delta - \angle\mathbf{V}) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial v}{\partial \angle\mathbf{V}} &= \begin{bmatrix} \frac{E|\mathbf{V}|}{X_q} \cos(\delta - \angle\mathbf{V}) \\ \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) |\mathbf{V}| \sin(\delta - \angle\mathbf{V}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.44)$$

と計算できる。一方で、母線電圧フェーザは、??節で解析されているように、接続されている発電機の内部状態だけでなく、他のすべての発電機の内部状態

にも依存して変化する。具体的には、注目する発電機を除くすべての発電機の内部状態を並べたベクトルを  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{E}$  と表すとき,  $\frac{\partial|\mathbf{V}|}{\partial\delta}$ ,  $\frac{\partial\angle\mathbf{V}}{\partial\delta}$ ,  $\frac{\partial|\mathbf{V}|}{\partial E}$ ,  $\frac{\partial\angle\mathbf{V}}{\partial E}$  の4つの偏微分は, すべての発電機の内部状態をまとめた

$$z_G := (\delta, \bar{\delta}, E, \bar{E})$$

に依存する関数となる。これらの偏導関数を解析的に求めることは容易ではないが, 定常潮流状態の近傍において

$$\theta_V := \begin{bmatrix} \frac{\partial|\mathbf{V}|}{\partial\delta}(z_G^*) & 0 & \frac{\partial|\mathbf{V}|}{\partial E}(z_G^*) \\ \frac{\partial\angle\mathbf{V}}{\partial\delta}(z_G^*) & 0 & \frac{\partial\angle\mathbf{V}}{\partial E}(z_G^*) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

の数値を計測データなどを用いて同定することができれば, 母線電圧フェーザ  $\mathbf{V}$  を介して信号  $w$  が信号  $v$  に与える影響を

$$\bar{\theta}_V := \begin{bmatrix} -\frac{E^*}{X_q} \sin(\delta^* - \angle\mathbf{V}^*) & \frac{E^*|\mathbf{V}^*|}{X_q} \cos(\delta^* - \angle\mathbf{V}^*) \\ \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) \cos(\delta^* - \angle\mathbf{V}^*) & \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) |\mathbf{V}^*| \sin(\delta^* - \angle\mathbf{V}^*) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\theta}_V \quad (1.46)$$

によりモデル化できる<sup>†</sup>。ただし, 式 (1.45) の  $z_G^*$  は  $z_G$  の定常値を表しており, 第2列の0要素は  $\frac{\partial|\mathbf{V}|}{\partial\Delta\omega}$ ,  $\frac{\partial\angle\mathbf{V}}{\partial\Delta\omega}$  に対応している。また, 式 (1.46) の  $\hat{\theta}_V$  は  $\theta_V$  の同定された値を表している。以上の線形予測モデルを同時に用いる場合には, 式 (1.37) の近似線形環境モデル  $\bar{G}_{\text{apx}}$  は,

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_{\text{agc}} + \bar{\theta}_V$$

と構成する。なお, 前項で説明されたように, 式 (1.40) の系統安定化装置は, いかなる行列  $\bar{\theta}$  に対しても定常潮流状態の安定性を変化させないが<sup>‡</sup>, 近似線形

<sup>†</sup> 電力系統は常に安定に運用されている必要があるため, 式 (1.46) の  $\theta_V$  は運用しながら計測されたデータを用いて同定する必要がある。システム制御工学では, 動作しているフィードバック系内のサブシステムを同定することは, **閉ループ同定** (closed-loop identification) と呼ばれる [?]。閉ループ同定は, 一般に同定対象の入力を自由に励振することができないため, 入力の変動が可能な場合の同定よりも難しいことが多い。

38     1. 電力系統モデルの安定化制御

環境モデルによる相互作用信号の予測精度を維持するためには、 $\overline{\theta}$  を潮流状態の定常値に応じて適当な頻度で更新することが望ましい。