

1

電力系統モデルの数値シミュレーション

CHAPTER 概要

1.1 電力系統モデルの時間応答を計算するには

1.1.1 時間応答を計算することの難しさ

第??章では、微分方程式で表される発電機モデルや代数方程式で表される負荷モデルが、代数方程式で表される送電網モデルで結合されることにより、電力系統全体の数理モデルが非線形微分代数方程式の形式で記述されることを説明した。したがって、電力系統モデルの時間応答は、適当に設定された初期値や外部入力のもとで、その微分代数方程式を数値積分することにより計算することができる。しかしながら、電力系統モデルの数値シミュレーションでは、

- 外部入力を正しく設定しない限り需要と供給が均衡しないため、周波数偏差の定常値が0にならず、発電機の回転子偏角が変化し続ける
- 周波数偏差の定常値が0となるような外部入力値の組み合わせは無数に存在するため、現実的に妥当な外部入力値を指定しなければならない
- バス群の電圧フェーザや電流フェーザの値は、発電機群の状態変数に対する従属変数として整合するように決定しなければならない

など、電力系統に特有の性質を十分に考慮する必要がある。このため、MATLABに標準実装されている微分代数方程式ソルバーを単純に使用するだけでは、電力系統の数値シミュレーションを正しく実行することはできない。

2 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

1.1.2 計算手順

電力系統の時間応答の標準的な計算手順は、つぎの3ステップに分けられる。

- (A) 解析する需要と供給が均衡した電力系統状態を指定するため、送電網から定まるアドミタンス行列を用いて、定常状態におけるすべてのバスの電流フェーズと電圧フェーズの値を計算する。
- (B) 決定されたバスの電流フェーズと電圧フェーズの定常値に整合するように、各発電機の内部電圧や回転子偏角の定常値、発電機への外部入力値、各負荷のインピーダンス値などを逆算する。
- (C) ステップ A とステップ B で計算された需給が均衡した電力系統状態を初期値として、発電機の内部状態に外乱を与える、バスの電圧を地絡させる、負荷のパラメータ値を変化させる、などの擾乱を生じさせた場合の時間応答を計算する。

システム制御工学の観点では、ステップ A は「無数に存在する平衡点の中から数値的な解析を行う平衡点を1つ定めること」と理解することができる。第1.3節で後述するように、すべてのバスにおける電流フェーズと電圧フェーズの定常値が与えられたときに、それらを実現する発電機の内部状態の定常値や外部入力値、負荷のパラメータ値は必ず存在する。このことから、すべてのバスにおける電流フェーズと電圧フェーズの定常値を計算することは、微分代数方程式で表される電力系統モデルの平衡点を計算することに等しい。電力系統工学では、このプロセスのことを**潮流計算**と呼ぶ。なお、各バスの電流フェーズと電圧フェーズの定常値を求めることは、各機器からバスに供給される有効電力と無効電力の定常値を求めることと数学的に等価である。

ステップ B では、バスの電流フェーズや電圧フェーズの定常値に整合するように発電機の内部状態の定常値や外部入力値、負荷のパラメータ値を逆算する。このステップで注意が必要なのは、負荷のパラメータ値、すなわち、負荷の数理モデルは、「ステップ A の潮流計算の結果から逆算されて定められる」という点である。例えば、あるバスに接続する負荷を定インピーダンスモデルに設定したい場合には、潮流計算で求められたバスの電流フェーズを電流フェーズ

1.2 定常状態を数値的に探索する潮流計算 3

で除した値として、負荷のインピーダンス値を逆算することとなる。負荷モデルのパラメータを所望の値に設定したい場合には、ステップ C において、負荷のパラメータ変動に対する時間応答を計算しながら、負荷のパラメータ値を所望の値に変化させるなどの方法を用いる。

さいごに、ステップ C では、目的に応じた様々な条件で電力系統モデルの時間応答を計算する。例えば、ステップ A と B で計算された各発電機への外部入力値や負荷のパラメータ値を定数としてモデルに設定し、発電機の内部状態に適当な初期値を与えて時間応答を計算すれば、時間の経過にしたがって、発電機の内部状態はステップ B で計算された定常状態に漸近的に収束する。ただし、漸近収束が成り立つような妥当な初期値を設定するためには、ステップ A と B のように、解析の基準となる平衡点をあらかじめ計算しておく必要がある。また、計算された平衡点は安定でなければならない。

定常状態、平衡状態、潮流状態、平衡点、定常値などの用語の使い分けが必要。周波数偏差が 0 にならない定常状態をどう呼ぶべきか、周波数偏差が 0 となる需給バランスが取れた定常状態をどう呼ぶべきか。

1.2 定常状態を数値的に探索する潮流計算

本節では、第 1.1.2 節のステップ A として説明された、電力系統の定常状態を数値的に探索する潮流計算の概要や MATLAB による実装方法を述べる。以下では、与えられたアドミタンス行列 \mathbf{Y} に対して、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \cdots & \mathbf{Y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N1} & \cdots & \mathbf{Y}_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N(t) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

を満たすバス群の電流フェーザと電圧フェーザの分布

$$(|\mathbf{I}_1(t)|, \angle \mathbf{I}_1(t), |\mathbf{V}_1(t)|, \angle \mathbf{V}_1(t), \dots, |\mathbf{I}_N(t)|, \angle \mathbf{I}_N(t), |\mathbf{V}_N(t)|, \angle \mathbf{V}_N(t))$$

4 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

を時刻 t での**潮流状態**と呼ぶ。なお、各フェーザが時変であることを示すため時刻 t に関する依存性を明示している。潮流計算は、定常的な潮流状態の1つを求める計算プロセスである。定常的な潮流状態とは、ある定数の電流フェーザ \mathbf{I}_i^* と電圧フェーザ \mathbf{V}_i^* に対して、

$$\mathbf{I}_i(t) = \mathbf{I}_i^*, \quad \mathbf{V}_i(t) = \mathbf{V}_i^*, \quad \forall t \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

が成り立つことを指す。また、バスに供給される有効電力と無効電力の定義

$$P_i(t) + jQ_i(t) = \mathbf{V}_i(t)\bar{\mathbf{I}}_i(t) \quad (1.2)$$

を用いて電流フェーザを消去することにより、式 (1.1) の連立方程式が

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(t) + jQ_1(t) = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{1j} |\mathbf{V}_1(t)| |\mathbf{V}_j(t)| e^{j(\angle \mathbf{V}_1(t) - \angle \mathbf{V}_j(t))} \\ \vdots \\ P_N(t) + jQ_N(t) = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{Nj} |\mathbf{V}_N(t)| |\mathbf{V}_j(t)| e^{j(\angle \mathbf{V}_N(t) - \angle \mathbf{V}_j(t))} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

とも等価であることがわかる。したがって、文脈に応じて、式 (1.3) を満たす有効電力、無効電力、電圧フェーザの分布

$$(P_1(t), Q_1(t), |\mathbf{V}_1(t)|, \angle \mathbf{V}_1(t), \dots, P_N(t), Q_N(t), |\mathbf{V}_N(t)|, \angle \mathbf{V}_N(t),) \quad (1.4)$$

も同じく時刻 t での潮流状態と呼ぶ。

1.2.1 潮流計算の概要

まずは、2つのバスで構成される簡単な例を用いて潮流計算の特徴を説明する。

例 1.1 (2つのバスで構成される電力系統モデルの潮流計算) 図 1.1 の2つのバスから構成される電力系統を考えよう。各バスには負荷または発電

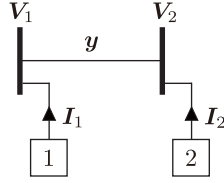


図 1.1 2つのバスからなる電力系統 (図不要?)

機が接続されているものと考えが、以下の計算では接続される機器の種類を具体的に指定する必要はない。

2つのバスを結ぶ送電線のアドミタンスを $y \in \mathbb{C}$ とする。基本的な送電線モデルを採用するとき、バスの電圧フェーザと電流フェーザには

$$\begin{bmatrix} I_1^* \\ I_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

の関係が成り立つ。ただし、定常状態における値であることを明示するために「*」をつけて表記した。ここで、式 (1.2) の関係を用いて電流フェーザを消去すれば、式 (1.5) と等価な連立方程式が、定常状態における有効電力、無効電力、電圧フェーザを用いて

$$\begin{cases} P_1^* + jQ_1^* = \bar{y} \left(|V_1^*|^2 - |V_1^*||V_2^*|e^{j(\angle V_1^* - \angle V_2^*)} \right) \\ P_2^* + jQ_2^* = \bar{y} \left(|V_2^*|^2 - |V_1^*||V_2^*|e^{j(\angle V_2^* - \angle V_1^*)} \right) \end{cases} \quad (1.6a)$$

のように得られる。潮流計算の目的は、この連立方程式を満たす1組の

$$(P_1^*, Q_1^*, |V_1^*|, \angle V_1^*, P_2^*, Q_2^*, |V_2^*|, \angle V_2^*)$$

を定めることである。

送電線のコンダクタンスとサセプタンスを

$$g := \operatorname{Re}[y], \quad b := \operatorname{Im}[y]$$

と表す。このとき、式 (1.6a) の実部と虚部に関する方程式を考えると

6 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\begin{cases} P_1^* = g|\mathbf{V}_1^*|^2 - g|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \cos \angle \mathbf{V}_{12}^* - b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \sin \angle \mathbf{V}_{12}^* \\ P_2^* = g|\mathbf{V}_2^*|^2 - g|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \cos \angle \mathbf{V}_{21}^* - b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \sin \angle \mathbf{V}_{21}^* \\ Q_1^* = -b|\mathbf{V}_1^*|^2 + b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \cos \angle \mathbf{V}_{12}^* - g|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \sin \angle \mathbf{V}_{12}^* \\ Q_2^* = -b|\mathbf{V}_2^*|^2 + b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \cos \angle \mathbf{V}_{21}^* - g|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \sin \angle \mathbf{V}_{21}^* \end{cases} \quad (1.6b)$$

という4本の連立方程式が得られる。ただし、 $\angle \mathbf{V}_{ij}^* := \angle \mathbf{V}_i^* - \angle \mathbf{V}_j^*$ である。電圧フェーザの位相は差分値のみが意味をもつため、実質的に決定すべき変数は7個である。したがって、式(1.6b)の方程式には3変数分の自由度が存在する。

これらを決定する簡単な方法は、例えば、 $(|\mathbf{V}_1^*|, |\mathbf{V}_2^*|, \angle \mathbf{V}_{12}^*)$ の3変数を適当な値に指定することである。これにより、残りの $(P_1^*, P_2^*, Q_1^*, Q_2^*)$ は式(1.6b)の右辺を計算するだけで決定される。しかしながら、この方法では、各バスの電圧フェーザは任意の値に設定できる一方で、各バスに供給される電力や消費される電力を任意の値に設定することができない。現実的な設定で数値シミュレーションを実行するためには、指定した有効電力や無効電力の値を実現するように電圧フェーザの値を適切に定めることがしばしば必要となる。

例えば、 $P_1^* = 1$, $P_2^* = -1$ を実現する $(|\mathbf{V}_1^*|, |\mathbf{V}_2^*|, \angle \mathbf{V}_{12}^*)$ を求めることを考えてみよう。これは、バス1に接続された機器が供給する有効電力とバス2に接続された機器が消費する有効電力が、定常状態においてどちらも1である場合に、電圧フェーザの分布を求めることに相当する。式(1.6b)の P_1^* と P_2^* に関する方程式を足し上げれば、 $P_1^* + P_2^* = 0$ であることから

$$\begin{aligned} 0 &= g\{|\mathbf{V}_1^*|^2 + |\mathbf{V}_2^*|^2 - 2|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*| \cos \angle \mathbf{V}_{12}^*\} \\ &= g\{(|\mathbf{V}_1^*| - |\mathbf{V}_2^*|)^2 + 2|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*|(1 - \cos \angle \mathbf{V}_{12}^*)\} \end{aligned}$$

を得る。ここで、現実的な潮流状態では、バスの電圧フェーザの位相差で

1.2 定常状態を数値的に探索する潮流計算 7

ある $\angle \mathbf{V}_{12}^*$ は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の範囲内であること[†]に注意すると、 \mathbf{y} の実部である送電線のコンダクタンス成分が0でない場合には、この方程式を満たす電圧フェーザは、必ず

$$|\mathbf{V}_1^*| = |\mathbf{V}_2^*|, \quad \angle \mathbf{V}_{12}^* = 0 \quad (1.7)$$

を満たさなければならない。しかしながら、式 (1.7) は

$$P_1^* = P_2^* = 0$$

を意味することから、 g が0でない限りは、 $P_1^* = 1$, $P_2^* = -1$ は実現不可能であることが結論づけられる。これは、送電線のコンダクタンス成分により送電損失が生じるため、 $P_1^* = 1$, $P_2^* = -1$ の設定では電力の需給が系統全体でバランスしないことを表している。このように、「すべての有効電力やすべての無効電力を特定の値に指定してしまうと、式 (1.6) を満たす変数が存在しない場合があること」に注意が必要である。

以下では、簡単化のため、送電線のコンダクタンス成分が0であると仮定してみよう。また、対地静電容量は十分に小さく、サセプタンス b は非正であると仮定する。このとき、

$$P_1^* = -b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*|\sin \angle \mathbf{V}_{12}^*, \quad P_2^* = b|\mathbf{V}_1^*||\mathbf{V}_2^*|\sin \angle \mathbf{V}_{12}^*$$

であることから、電圧フェーザの分布は $P_1^* = -P_2^*$ を満たすものでなければならない。例えば、 $P_1^* = 1$, $P_2^* = -1$ と指定する場合には

$$|\mathbf{V}_1^*| = \sqrt{\frac{2}{|b|}}, \quad |\mathbf{V}_2^*| = \sqrt{\frac{2}{|b|}}$$

のように電圧フェーザの絶対値を指定することにより、電圧フェーザの位相差は

[†] 発電機の偏角差やバスの電圧フェーザの位相差が $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の範囲を超えてしまうと正弦関数の傾きが反転するため、非現実的な有効電力の送電特性となる。

8 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\angle \mathbf{V}_{12}^* = \frac{\pi}{6}$$

と定められる。既に 3 変数以上の値が定められているため、無効電力は

$$Q_1^* = 2 - \sqrt{3}, \quad Q_2^* = 2 - \sqrt{3}$$

のように自動的に値が定まる。

以上のように、与えられた送電網のアドミタンス行列 \mathbf{Y} に対して、

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1^* + jQ_1^* = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{1j} |\mathbf{V}_1^*| |\mathbf{V}_j^*| e^{j(\angle \mathbf{V}_1^* - \angle \mathbf{V}_j^*)} \\ \vdots \\ P_N^* + jQ_N^* = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{Y}}_{Nj} |\mathbf{V}_N^*| |\mathbf{V}_j^*| e^{j(\angle \mathbf{V}_N^* - \angle \mathbf{V}_j^*)} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

で与えられる定常状態における $2N$ 本の連立方程式を満たす、 $4N$ 個の定数の組

$$(P_1^*, Q_1^*, |\mathbf{V}_1^*|, \angle \mathbf{V}_1^*, \dots, P_N^*, Q_N^*, |\mathbf{V}_N^*|, \angle \mathbf{V}_N^*) \quad (1.9)$$

を 1 つ定める手続きが潮流計算である。ただし、電圧フェーザの位相は相対的な値のみが意味をもつため、実質的に定めるべき変数は $(4N - 1)$ 個である。第 1.1.2 節で上述したように、潮流計算は、系統全体で需要と供給をバランスすることが可能な電力系統モデルの平衡点を求める手続きであると解釈できる。なお、このプロセスにおいては、発電機や負荷などの各機器の特性は考慮されておらず、各バスに対する入出力の定常値だけを求めている。したがって、第 1.1.2 節におけるステップ B の計算を行ったのちに、微分代数方程式系の内部状態に関する平衡点が 1 つ定まることに注意されたい。ステップ B の計算は、第 1.3 節で後述する。

1.2.2 潮流状態の数値的な探索手法

一般に、???などの電力系統モデルには、各送電線のインピーダンス値に加

えて、各発電機バスに供給される電力や各負荷バスで消費される電力の標準的な値がデータシートとして与えられている。それらの標準的な値に基づき $2N$ 個の変数を指定することによって、残りの変数を数値的に求めることができる。

データシートには、各負荷バスで消費される有効電力と無効電力の値、および、各発電機バスに供給される有効電力の値とそのバスにおける電圧フェーザの絶対値が与えられているのが一般的である。したがって、それらの値を用いることにより、 $2N$ 個の変数をあらかじめ指定することができる。しかしながら、例 1.1 で示されているように、すべてのバスにおける有効電力の値を事前に指定してしまうと、送電損失の影響によって、残りの変数をいかなる値にしても式 (1.3) の連立方程式が満たされない場合がある。例えば、一部の負荷バスにおける有効電力や無効電力の値をデータシートとは異なる値に指定すると、発電機バスに供給されるべき有効電力や無効電力の値も変わると同時に、送電網を流れる電力やバス電圧フェーザの値も変化するため、系統全体での送電損失の合計値も変化する。したがって、すべての発電機バスにおける有効電力の値を事前に指定してしまうと、式 (1.3) の連立方程式が一般に可解とならない。

この問題を解決するための代表的な方策は、**スラックバス**と呼ばれる特別な発電機バスを 1 つ導入することである。スラックバスでは、有効電力を指定する代わりに、電圧フェーザの位相を指定する。このとき、各バスにおける電圧フェーザの位相は相対的な値のみが意味をもつため、スラックバスの位相を 0 に指定しても一般性を失わない。結果として、系統全体での送電損失の値に整合するように、スラックバスにおける有効電力が自動的に決定される。以上の手順は、つぎのようにまとめられる。

(a) データシートに基づき、スラックバスには $(|V_{i_0}|, \angle V_{i_0})$ の値、それ以外
の発電機バスには $(P_i, |V_i|)_{i \in \mathcal{I}_G \setminus \{i_0\}}$ の値、負荷バスには $(P_i, Q_i)_{i \in \mathcal{I}_L}$
の値を指定する。

(b) 式 (1.3) の連立方程式を満たすように、その他の変数を数値的に探索する。
ただし、 \mathcal{I}_G は発電機バスの添字集合、 \mathcal{I}_L は負荷バスの添字集合、 $i_0 \in \mathcal{I}_G$ は
スラックバスの添字を表す。

10 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

例 1.2 (データシートに基づく潮流計算) 2つのバスの例で送電ロスがある場合？

例 1.3 (経済性を考慮した潮流計算) 発電機 2 つ, 負荷 1 つとかで, スラックバスを変えると決定される発電量が送電ロスなどで変わることを見せる？

1.2.3 潮流計算の実装法

(MATLAB による実際のコーディング方法)

1.2.4 アドミタンス行列と送電損失の関係 *

以下では, N 個のバスで構成される一般的な送電網に対して, 潮流状態に関する送電損失の数学的表現を導出する。対称な実部と虚部をもつアドミタンス行列 \mathbf{Y} は, 適当な定数 $\phi_{ij} = \phi_{ji}$, $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ を用いて,

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathbf{Y}] &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \phi_{1j} & -\phi_{12} & \cdots & -\phi_{1N} \\ -\phi_{21} & \sum_{j=1}^N \phi_{2j} & \cdots & -\phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{N1} & -\phi_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^N \phi_{Nj} \end{bmatrix}, \\ \text{Im}[\mathbf{Y}] &= - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \psi_{1j} & -\psi_{12} & \cdots & -\psi_{1N} \\ -\psi_{21} & \sum_{j=1}^N \psi_{2j} & \cdots & -\psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\psi_{N1} & -\psi_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^N \psi_{Nj} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

の形式で書き表すことができる。この形式は、コンダクタンス行列 $\text{Re}[\mathbf{Y}]$ とサセプタンス行列 $\text{Im}[\mathbf{Y}]$ の第 (i, j) 要素をそれぞれ G_{ij} , B_{ij} と表したとき

$$\phi_{ij} := -G_{ij}, \quad \phi_{ii} := \sum_{j=1}^N G_{ij}, \quad \psi_{ij} := B_{ij}, \quad \psi_{ii} := -\sum_{j=1}^N B_{ij}$$

と定義していることに等しい。この表現を用いるとつぎの事実が示される。

定理 1.1 (送電損失のバス電圧フェーズによる表現)

式 (1.3) に対して、系統全体での有効電力と無効電力の送電損失として

$$L_P := P_1 + \cdots P_N, \quad L_Q := Q_1 + \cdots Q_N \quad (1.11)$$

を定義する。これらの送電損失は

12 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\begin{aligned}
L_P &= \sum_{i=1}^N \phi_{ii} |\mathbf{V}_i|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij} W(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) \\
L_Q &= \sum_{i=1}^N \psi_{ii} |\mathbf{V}_i|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_{ij} W(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

で与えられる。ただし、

$$W(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) := \frac{1}{2} (|\mathbf{V}_i| - |\mathbf{V}_j|)^2 + |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| \{1 - \cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_j)\}$$

とする。

定理 1.1 は、例 1.1 で示されている 2 バスの電力系統における電力損失の議論が、任意の個数のバスから構成される電力系統にも同様に一般化できることを示している。ここで、第??節のようにアドミタンス行列 \mathbf{Y} を

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + j \operatorname{diag}(\beta_i)$$

と表す場合には、 $\mathbf{Y}_0 \mathbf{1} = 0$ であることから、 $\phi_{ii} = 0$ 、 $\psi_{ii} = -\beta_i$ となる。また、各送電線のコンダクタンスは非負であり、サセプタンスは負であることから、すべての $i \neq j$ に対して、 ϕ_{ij} と ψ_{ij} は非負である。したがって、 ϕ_{ij} が 0 でない限りは、バス i とバス j の間で有効電力を送電する場合に必ず電力損失が生じることがわかる。これにより、系統全体での有効電力の送電損失 L_P は正であることがわかる。同様に、 β_i が十分に小さい場合、すなわち、送電線の対地静電容量が十分に小さい場合には、無効電力の送電損失 L_Q も正であることがわかる。

1.3 所与の潮流状態を実現する各機器のパラメータ設定

本節では、第 1.1.2 節のステップ B として説明された、潮流計算の結果に整合するように発電機の内部状態の定常値や外部入力値、負荷のパラメータ値を逆算する方法を説明する。

1.3.1 所望の電力供給を実現する発電機の定常状態

第??節における電圧フェーザを入力とする発電機モデルを考えよう。表記の簡単化のため、添字 i を省略して

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega_0 \Delta\omega \\ M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega - P + P_{\text{mech}} \\ \tau_d \dot{E} = -\frac{X_d}{X_q} E + \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) |V| \cos(\delta - \angle V) + V_{\text{field}} \end{cases} \quad (1.13)$$

とする。ここで、有効電力と無効電力を出力とする場合には

$$\begin{aligned} P &= \frac{|V|E}{X_q} \sin(\delta - \angle V), \\ Q &= \frac{|V|E}{X_q} \cos(\delta - \angle V) - \frac{|V|^2}{X_q} \end{aligned} \quad (1.14)$$

である。ここでの目的は、潮流計算の結果として、発電機が接続されるバスの有効電力、無効電力、電圧フェーザの絶対値と位相が定数で与えられた場合に、それらの値に整合する発電機の内部状態と外部入力値の定常値を求めることである。具体的には、与えられた有効電力、無効電力、電圧フェーザの絶対値と位相の値を P_0 , Q_0 , V_0 , ϕ_0 と表すとき、

$$\begin{cases} P_0 = \frac{V_0 E^*}{X_q} \sin(\delta^* - \phi_0), \\ Q_0 = \frac{V_0 E^*}{X_q} \cos(\delta^* - \phi_0) - \frac{V_0^2}{X_q}, \\ 0 = -P_0 + P_{\text{mech}}^*, \\ 0 = -\frac{X_d}{X_q} E^* + \left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right) V_0 \cos(\delta^* - \phi_0) + V_{\text{field}}^* \end{cases} \quad (1.15)$$

の連立方程式を満たす発電機の内部状態の定常値 δ^* , E^* , および、外部入力値の定常値 P_{mech}^* , V_{field}^* を求める。式 (1.15) の連立方程式は、式 (1.13) において周波数偏差 $\Delta\omega$ の定常値が 0 であるとした場合の平衡点に関する方程式である。また、与えられた P_0 , Q_0 , V_0 , ϕ_0 は、電力システムに対する発電機モデルの入力値と出力値に対応している。

式 (1.15) を満たす発電機の内部状態の定常値を具体的に計算すると

14 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\delta^* = \phi_0 + \arctan \left(\frac{P_0}{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}} \right), \quad E^* = \frac{X_q}{V_0} \sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2} \quad (1.16a)$$

となる。また、機械的トルクと界磁電圧の定常値は

$$P_{\text{mech}}^* = P_0, \quad V_{\text{field}}^* = \frac{\frac{X_d}{V_0} \left\{ \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right) \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_d} \right) + P_0^2 \right\}}{\sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2}} \quad (1.16b)$$

となる。これらの導出過程は、第 1.3.3 節を参照されたい。

1.3.2 所望の電力消費を実現する負荷のパラメータ

式 (1.2) を用いて電流フェーザを消去すると、定インピーダンスモデルは、

$$P + jQ = -\frac{1}{\bar{z}_{\text{load}}} |\mathbf{V}|^2 \quad (1.17a)$$

と書き表される。ただし、バスの添字 i は表記の簡単化のため省略した。これは電流フェーザ \mathbf{V} を入力、有効電力 P と無効電力 Q を出力とした場合の負荷の定インピーダンスモデルと解釈できる。潮流計算により定められた有効電力と無効電力の値を P_0 と Q_0 、電圧フェーザの絶対値を V_0 と表せば、負荷のインピーダンス z_{load} の実部と虚部はそれぞれ

$$\text{Re}[z_{\text{load}}] = -\frac{P_0}{P_0^2 + Q_0^2} V_0^2, \quad \text{Im}[z_{\text{load}}] = -\frac{Q_0}{P_0^2 + Q_0^2} V_0^2$$

と求められる。同様に、定電流モデルは

$$P + jQ = \bar{\mathbf{I}}_{\text{load}} \mathbf{V} \quad (1.17b)$$

と書き表されることから、負荷の電流パラメータの実部と虚部はそれぞれ

1.3 所与の潮流状態を実現する各機器のパラメータ設定 15

$$\operatorname{Re}[\mathbf{I}_{\text{load}}] = \frac{P_0 \cos \phi_0 + Q_0 \sin \phi_0}{V_0}, \quad \operatorname{Im}[\mathbf{I}_{\text{load}}] = \frac{P_0 \sin \phi_0 - Q_0 \cos \phi_0}{V_0}$$

と求められる。ただし、 ϕ_0 は潮流計算で定められたバスの電圧フェーザの位相である。定電力モデルは

$$P + jQ = P_{\text{load}} + jQ_{\text{load}} \quad (1.17c)$$

であることから、明らかにそのパラメータは

$$P_{\text{load}} = P_0, \quad Q_{\text{load}} = Q_0$$

である。式 (1.17) のパラメータ値を負荷モデルに設定すれば、潮流計算によって求められた潮流状態が定常的に実現される。

1.3.3 発電機の内部状態と入出力の数学的関係 *

以下では、発電機の内部状態、バスに供給される有効電力と無効電力、バスの電圧フェーザの間に成り立つ関係を数学的に解析する。ここでは、第??節で扱った突極型の発電機モデルを用いる。ただし、表記の簡単化のため、添字 i を省略して

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega_0 \Delta\omega \\ M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega - P + P_{\text{mech}} \\ \tau_d \dot{E} = -\frac{X_d}{X'_d} E + \left(\frac{X_d}{X'_d} - 1 \right) |\mathbf{V}| \cos(\delta - \angle \mathbf{V}) + V_{\text{field}} \end{cases} \quad (1.18)$$

とする。ここで、有効電力と無効電力を出力とする場合には

$$\begin{aligned} P &= \frac{|\mathbf{V}|E}{X'_d} \sin(\delta - \angle \mathbf{V}) - \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) |\mathbf{V}|^2 \sin(\delta - \angle \mathbf{V}) \cos(\delta - \angle \mathbf{V}), \\ Q &= \frac{|\mathbf{V}|E}{X'_d} \cos(\delta - \angle \mathbf{V}) - |\mathbf{V}|^2 \left(\frac{\cos^2(\delta - \angle \mathbf{V})}{X'_d} + \frac{\sin^2(\delta - \angle \mathbf{V})}{X_q} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

である。明らかに、過渡リアクタンスを $X'_d = X_q$ とすれば、第 1.3.1 節で扱った発電機モデルに一致する。また、電流フェーザを出力とする場合には

16 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\begin{aligned}
|I| \cos(\delta - \angle I) &= \frac{|V|}{X_q} \sin(\delta - \angle V), \\
|I| \sin(\delta - \angle I) &= \frac{E - |V| \cos(\delta - \angle V)}{X'_d}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

である。なお、式 (1.19) と式 (1.20) は等価な出力であること、すなわち、与えられた任意の $(\delta, E, |V|, \angle V)$ に対して、 (P, Q) と $(|I|, \angle I)$ には一対一の関係が存在することに注意されたい。

この発電機モデルに対して、つぎの事実が示される。

補題 1.1 (発電機の内部状態と入出力の関係)

式 (1.19) を $\delta - \angle V$ と E に関する連立方程式と考えるとき、その解は

$$\begin{aligned}
\delta - \angle V &= \arctan \left(\frac{P}{Q + \frac{|V|^2}{X_q}} \right), \\
E &= \frac{\frac{X'_d}{|V|} \left\{ \left(Q + \frac{|V|^2}{X_q} \right) \left(Q + \frac{|V|^2}{X'_d} \right) + P^2 \right\}}{\sqrt{\left(Q + \frac{|V|^2}{X_q} \right)^2 + P^2}}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

で与えられる。ただし、 $|V| \neq 0$ とする。逆に、式 (1.21) を P と Q に関する連立方程式と考えるとき、その解は式 (1.19) で与えられる。

証明 まず、式 (1.19) から式 (1.21) を導く。式 (1.19) の P に $\cos(\delta - \angle V)$ を乗じ、 Q に $\sin(\delta - \angle V)$ を乗じて差をとれば

$$P \cos(\delta - \angle V) - Q \sin(\delta - \angle V) = \frac{|V|^2}{X_q} \sin(\delta - \angle V)$$

が得られる。これにより、式 (1.21) 左の関係が得られる。つぎに、式 (1.21) 右の関係を示す。式 (1.2) を用いて P と Q を I で書き直すと、式 (1.19) は式 (1.20) に等価変形される。また、これは

$$|V| e^{j(\delta - \angle V)} = E - X'_d |I| \sin(\delta - \angle I) + j X_q |I| \cos(\delta - \angle I) \tag{1.22}$$

と等価である。式 (1.21) 左の関係を複素数で表現すると

$$\frac{e^{j(\delta-\angle V)} - e^{-j(\delta-\angle V)}}{e^{j(\delta-\angle V)} + e^{-j(\delta-\angle V)}} = \frac{P}{\underbrace{Q + \frac{|V|^2}{X_q}}_{\alpha}} j$$

であることから

$$e^{-j(\delta-\angle V)} = \frac{1 - \alpha j}{1 + \alpha j} e^{j(\delta-\angle V)}$$

がわかる。したがって、式 (1.2) を等価変形した

$$|I| e^{j(\delta-\angle I)} = \frac{P + jQ}{|V|} e^{j(\delta-\angle V)} \quad (1.23)$$

について、その複素共役を考えることにより

$$|I| e^{-j(\delta-\angle I)} = \frac{P - jQ}{|V|} \cdot \frac{1 - \alpha j}{1 + \alpha j} e^{j(\delta-\angle V)} \quad (1.24)$$

を得る。式 (1.23) と式 (1.24) から

$$\begin{aligned} |I| \sin(\delta - \angle I) &= \frac{1}{|V|} \cdot \frac{\alpha P + Q}{1 + \alpha j} e^{j(\delta-\angle V)}, \\ |I| \cos(\delta - \angle I) &= \frac{1}{|V|} \cdot \frac{P - \alpha Q}{1 + \alpha j} e^{j(\delta-\angle V)} \end{aligned}$$

がわかる。これらを式 (1.22) に代入することによって、 I を P と Q で改めて書き直せば、式 (1.21) 左の関係が成り立つとき、式 (1.19) が

$$E = \frac{X'_d}{|V|} \left\{ \left(Q + \frac{|V|^2}{X_q} \right) \left(Q + \frac{|V|^2}{X'_d} \right) + P^2 \right\} \frac{Q + \frac{|V|^2}{X_q} - jP}{\left(Q + \frac{|V|^2}{X_q} \right)^2 + P^2} e^{j(\delta-\angle V)} \quad (1.25)$$

と等価であることがわかる。ここで、式 (1.21) 左の関係から

$$Q + \frac{|V|^2}{X_q} - jP = \left| Q + \frac{|V|^2}{X_q} - jP \right| e^{-j(\delta-\angle V)}$$

がわかる。以上より、式 (1.21) 右の関係が得られる。

18 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

逆の手順をたどって、式 (1.21) から式 (1.19) を導く。式 (1.21) 左の関係を用いると、式 (1.21) 右の E は式 (1.25) の E で書き換えられる。前述のように、式 (1.21) 左の関係が成り立つとき、式 (1.25) は式 (1.19) と等価である。♠

補題 1.1 は、変数の組 $(\delta - \angle \mathbf{V}, E)$ と組 (P, Q) の間に一対一の関係があることを示している。特に、発電機の入出力である $(|\mathbf{V}|, \angle \mathbf{V})$ や (P, Q) から、発電機の内部状態である (δ, E) を一意的に逆算できることを示している。なお、式 (1.21) の関係は定常状態、過渡状態に関わらず任意の時刻で成り立つことに注意されたい。

つぎの定理は、発電機の定常状態において、入力、出力、および、内部状態の間に成り立つ関係を与える。

定理 1.2 (定常状態における発電機の内部状態と入出力の関係)

式 (1.18) および式 (1.19) の発電機モデルを考える。ある実定数 $V_0, \Delta\omega_0, \phi_0, P_0, Q_0$ に対して、機械的トルクと界磁電圧による入力を

$$\begin{aligned} P_{\text{mech}}(t) &= D\Delta\omega_0 + P_0, \\ V_{\text{field}}(t) &= \frac{\frac{X_d}{V_0} \left\{ \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right) \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_d} \right) + P_0^2 \right\}}{\sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2}} \end{aligned} \quad (1.26a)$$

で与えられる定数とし、バスの電圧フェーズによる入力が

$$|\mathbf{V}(t)| = V_0, \quad \angle \mathbf{V}(t) = \omega_0 \Delta\omega_0 t + \phi_0 \quad (1.26b)$$

と定められているものとする。このとき、回転子偏角、周波数偏差、内部電圧の初期値が

1.3 所与の潮流状態を実現する各機器のパラメータ設定 19

$$\begin{aligned}\delta(0) &= \phi_0 + \arctan \left(\frac{P_0}{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}} \right), \\ \Delta\omega(0) &= \Delta\omega_0, \\ E(0) &= \frac{\frac{X'_d}{V_0} \left\{ \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right) \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X'_d} \right) + P_0^2 \right\}}{\sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2}}\end{aligned}\tag{1.27}$$

であるならば、発電機からバスに供給される有効電力と無効電力の出力は

$$P(t) = P_0, \quad Q(t) = Q_0 \tag{1.28}$$

で与えられる定数となる。また、回転子偏角と内部電圧は

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \angle \mathbf{V}(t) + \arctan \left(\frac{P_0}{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}} \right), \\ E(t) &= \frac{\frac{X'_d}{V_0} \left\{ \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right) \left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X'_d} \right) + P_0^2 \right\}}{\sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2}}\end{aligned}\tag{1.29}$$

となる。

証明 まず、式 (1.26) の入力のもとで、式 (1.29) が式 (1.18) の微分方程式の解であることを仮定した場合に、出力に関して式 (1.28) が成り立つことを示す。補題 1.1 で示されているように、式 (1.29) を P_0 と Q_0 に関する方程式と考えれば、それらの解は

20 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{V_0 E(t)}{X'_d} \sin(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t)) \\
&\quad - \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) V_0^2 \sin(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t)) \cos(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t)), \\
Q_0 &= \frac{V_0 E(t)}{X'_d} \cos(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t)) \\
&\quad - V_0^2 \left(\frac{\cos^2(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t))}{X'_d} + \frac{\sin^2(\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t))}{X_q} \right)
\end{aligned}$$

で与えられる。これは式 (1.28) を意味している。

つぎに、式 (1.26) の入力のもと、初期値が式 (1.27) であるときに、式 (1.29) が式 (1.18) の微分方程式の解であることを確かめる。式 (1.18) の δ と $\Delta\omega$ に関する微分方程式は

$$\frac{M}{\omega_0} \ddot{\delta}(t) + \frac{D}{\omega_0} \dot{\delta}(t) + P(t) - P_{\text{mech}}(t) = 0$$

と等価である。式 (1.26a) の $P_{\text{mech}}(t)$ 、式 (1.28) の $P(t)$ 、式 (1.29) の $\delta(t)$ を代入すれば、それらがこの微分方程式を満たすことが確かめられる。同様に、式 (1.26a) の $V_{\text{field}}(t)$ 、式 (1.29) の $\delta(t) - \angle \mathbf{V}(t)$ と $E(t)$ を代入することにより、式 (1.18) の E に関する微分方程式が満たされることがわかる。ただし

$$\cos \left(\arctan \left(\frac{P_0}{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}} \right) \right) = \frac{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}}{\sqrt{\left(Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q} \right)^2 + P_0^2}}$$

である。以上より、求める結果がしたがう。 ♠

定理 1.2 から、潮流計算によって定められたバスの電圧フェーズ、有効電力、無効電力を実現するために必要な機械的トルク P_{mech} と界磁電圧 V_{field} の値、および、そのときの内部状態 δ と E の定常的な挙動を知ることができる。なお、式 (1.26b) では電圧フェーズの位相が定数となっていないが、周波数偏差の定常値を表す $\Delta\omega_0$ は、通常は 0 に設定すべき定数であるため、実用上の意味をもつのは潮流計算で定められる ϕ_0 の値のみである。明らかに、 $\Delta\omega_0$ が 0 のとき

$$P_{\text{mech}}(t) = P_0, \quad \delta(t) = \phi_0 + \arctan \left(\frac{P_0}{Q_0 + \frac{V_0^2}{X_q}} \right)$$

である。

以上の議論から、潮流計算において発電機の動特性を考慮せず (P_0, Q_0, V_0, ϕ_0) を定めたとしても、それらに整合するような P_{mech} や V_{field} の値を一意的に逆算できることがわかる。この結果から、式 (1.16) を導くことができる。

さらに、つぎの定理は、発電機の定常状態において成り立つ、入出力と内部状態に関する等価関係を与える。

定理 1.3 (発電機の入出力と内部状態に関する等価関係)

式 (1.18) および式 (1.19) の発電機モデルに対して

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{dP_{\text{mech}}}{dt} = 0, \quad \frac{dV_{\text{field}}}{dt} = 0 \quad (1.30)$$

であるための必要十分条件は

$$\frac{dP}{dt} = 0, \quad \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \frac{d|\mathbf{V}|}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 \angle \mathbf{V}}{dt^2} = 0 \quad (1.31)$$

である。また、式 (1.30) または式 (1.31) が成り立つとき

$$\Delta\omega(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\angle \mathbf{V}}{dt} \quad (1.32)$$

であり、これは定数である。

証明 まず、式 (1.30) が成り立つならば、式 (1.31) が成り立つことを示す。式 (1.18) において、 $\Delta\omega$ 、 E 、 P_{mech} 、 V_{field} はすべて定数であることから、 P と $|\mathbf{V}| \cos(\delta - \angle \mathbf{V})$ が定数であることがわかる。したがって、式 (1.19) の 2 つの方程式から、 Q と $|\mathbf{V}| \sin(\delta - \angle \mathbf{V})$ も定数であることがわかる。また

$$|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\delta - \angle \mathbf{V}) + |\mathbf{V}|^2 \sin^2(\delta - \angle \mathbf{V}) = |\mathbf{V}|^2$$

22 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

であり、左辺が定数であることから $|\mathbf{V}|$ も定数である。さらに、式 (1.21) 左の関係において、右辺は定数であることから、 $\angle \mathbf{V}$ と δ の導関数は任意の次数で等しい。したがって

$$\frac{d^2 \angle \mathbf{V}}{dt^2} = \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \omega_0 \frac{d\Delta\omega}{dt} = 0$$

が得られる。つぎに、式 (1.31) が成り立つならば、式 (1.30) が成り立つことを示す。式 (1.21) から、 E が定数であること、および、 δ の 2 次導関数が 0 であること、すなわち、 $\Delta\omega$ が定数であることがわかる。したがって、式 (1.18) において、 P と $|\mathbf{V}| \cos(\delta - \angle \mathbf{V})$ が定数であることから、 P_{mech} と V_{field} が定数であることがわかる。式 (1.32) は $\angle \mathbf{V}$ と δ の導関数が等しいことから明らかである。 ♠

定理 1.3 は、発電機への外部入力 P_{mech} , V_{field} が定数であり、内部状態 $\Delta\omega$, E が定常状態にあることと、電力系統に対する入出力 P , Q , $|\mathbf{V}|$, $\angle \mathbf{V}$ が定常状態にあることが等価であることを示している。したがって、各バスの有効電力や無効電力、電圧フェーズを決定する潮流計算の手続きは、すべての発電機の内部状態と外部入力が定常状態にあると仮定して、電力系統全体の定常状態、すなわち、電力系統モデルの平衡点の 1 つを探索するものとみなせる。

1.4 電力系統モデルの時間応答計算

1.4.1 数値シミュレータの実装法

....

1.4.2 初期値応答

...

1.4.3 負荷モデルのパラメータ変動に関する応答

第 1.2 節と第 1.3 節で示された手順によって、すべての発電機の周波数偏差が 0 となるような定常状態として、電力系統モデルの平衡点が 1 つ求められる。具体的には、潮流計算で定められたバス変数を用いて、各発電機モデルには定

理 1.2 で示される内部状態の初期値と外部入力 of 定常値を設定し、各負荷モデルには第 1.3.2 節で逆算されたパラメータを設定すれば、微分代数方程式式で表される電力系統モデルは所与の潮流状態で平衡する。

この定常状態にある電力系統モデルに対して、式 1.17 における負荷モデルのパラメータを 1 つでも変化させると、一般にすべてのバスにおける電圧フェーズと電流フェーズの値が変化する。このとき、一般に系統全体での電力の需給がバランスしなくなるため、機械的トルクや界磁電圧の値を適切に修正しない限りは、各発電機の周波数偏差は 0 に収束しない。このことをつぎの数値例で確認してみよう。

例 1.4 (負荷モデルのパラメータを変化させたときの電力系統モデルの時間応答) 例 4 と同様の簡単なモデルでシミュレーション？

1.4.4 地絡による応答

例 1.5 (バス地絡が発生したときの電力系統モデルの時間応答) 例 4 と同様の簡単なモデルでシミュレーション？

1.5 定常的な潮流状態におけるバス電圧の同期 *

例 1.4 と例 1.5 では、電力系統モデルの内部状態が発散することなくある定常状態に落ち着いた場合には、すべての発電機の周波数偏差が同じ値に収束することが観察された。本節では、この事実について、送電網のグラフ構造の観点から数学的に考察する。

まず、定理 1.3 の結果に基づき、つぎの定義を導入する。

24 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

定義 1.1 (定常潮流状態とバス電圧の同期)

式 (1.3) の連立方程式によって機器群が結合された電力系統モデルを考える。すべてのバス i に対して

$$\frac{dP_i}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_i}{dt} = 0, \quad \frac{d|V_i|}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\angle V_i}{dt^2} = 0 \quad (1.33)$$

が成り立つとき、電力系統は**定常潮流状態**にあると呼ぶ。また、電力系統が定常潮流状態にあり、かつ

$$\frac{d\angle V_i}{dt} = \frac{d\angle V_j}{dt} \quad (1.34)$$

が成り立つとき、定常潮流状態でバス i とバス j は**同期する**と呼ぶ。

定理 1.3 に示されているように、発電機バスに対しては、式 (1.33) が成り立つことと、発電機の内部状態と外部入力が定常状態にあることは等価である。また、任意に選ばれたバスの組 (i, j) が定義 1.1 の意味で同期しているのであれば、すべての発電機の周波数偏差が同じ値に収束することが結論づけられる。なお、いずれのバスに対しても、式 (1.33) が成り立つことは、電流フェーズ I_i に対して

$$\frac{d|I_i|}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\angle I_i}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\angle I_i}{dt} = \frac{d\angle V_i}{dt}$$

が成り立つことを意味する。このことは

$$|P_i + jQ_i| = |V_i||I_i|, \quad \angle(P_i + jQ_i) = \angle V_i - \angle I_i$$

であることから簡単に確認することができる。

バス i と送電線で結ばれている隣接バスの集合を \mathcal{N}_i と表す。すなわち

$$Y_{ij} = 0, \quad \forall j \notin \mathcal{N}_i$$

であるものとする。バス i と送電線で結ばれている隣接バスの数は $|\mathcal{N}_i|$ であり、このことを「バス i の**次数**は $|\mathcal{N}_i|$ である」と呼ぶ。また、電力系統モデルは定常潮流状態にあることを仮定して

$$\angle \mathbf{V}_i(t) = \Omega_i t + \phi_i$$

と表す。ただし、 Ω_i と ϕ_i は定数である。このとき、式 (1.3) のバス i に関する電力バランス方程式は

$$\underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} r_{ij} e^{j\{(\Omega_i - \Omega_j)t + \Phi_{ij}\}}}_{\mathbf{C}_i(t)} = \mathbf{c}_i \quad (1.35)$$

と変形できる。ただし、電力系統モデルが定常潮流状態にあるならば

$$r_{ij} := |\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_j| |\mathbf{Y}_{ij}|,$$

$$\Phi_{ij} := \phi_i - \phi_j - \angle \mathbf{Y}_{ij},$$

$$\mathbf{c}_i := \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \{P_i - \text{Re}[\mathbf{Y}_{ii}] |\mathbf{V}_i|^2 + j (Q_i + \text{Im}[\mathbf{Y}_{ii}] |\mathbf{V}_i|^2)\}$$

はすべて定数である。以下では、式 (1.35) の方程式から、隣接するバスとの同期を表す等式として

$$\Omega_i = \Omega_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}_i \quad (1.36)$$

を導くことを考える。ここで、式 (1.35) は「原点を中心とする半径 r_i の円周上を、初期位相 Φ_{ij} 、角速度 $\Omega_i - \Omega_j$ で等速運動する $|\mathcal{N}_i|$ 個の点の重心 $\mathbf{C}_i(t)$ が、複素平面上のある点 \mathbf{c}_i で不変であること」を表している。この事実に着目するとつぎの結果が導ける。

補題 1.2 (電力バランス方程式から導かれるバスの同期)

実定数 r_{ij} , Ω_i , Ω_j , Φ_{ij} に対して、式 (1.35) の $\mathbf{C}_i(t)$ を考える。ただし、 $r_{ij} > 0$ とする。このとき、 $|\mathcal{N}_i| = 1$ であるならば、 $\mathbf{C}_i(t)$ が t に依らない定数であることは、式 (1.36) と等価である。また、 $|\mathcal{N}_i| = 2$ であるならば、 $\mathbf{C}_i(t)$ が t に依らない定数であることは、式 (1.36) が成り立つこと、または

26 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

$$\Omega_{j_1} = \Omega_{j_2}, \quad r_{ij_1} = r_{ij_2}, \quad |\Phi_{ij_1} - \Phi_{ij_2}| = \pi \quad (1.37)$$

と等価である。ただし、 $\mathcal{N}_i = \{j_1, j_2\}$ である。さらに、 $|\mathcal{N}_i| = 3$ であるならば、 $\mathbf{C}_i(t)$ が t に依らない定数であることは、式 (1.36) が成り立つこと、または、 $\Omega_i = \Omega_{j_3}$ を満たす $j_3 \in \mathcal{N}_i$ に対して、式 (1.37) が成り立つことと等価である。ただし、 $\mathcal{N}_i \setminus \{j_3\} = \{j_1, j_2\}$ である。

証明 付録の補題??を適用することで、 $|\mathcal{N}_i| = 1$ と $|\mathcal{N}_i| = 2$ の場合の事実を示すことができる。したがって、以下では $|\mathcal{N}_i| = 3$ の場合について考える。表記の簡単化のため、 $j \in \{1, 2, 3\}$ とし、 r_{ij} 、 Φ_{ij} 、 Ω_i 、 \mathbf{C}_i をそれぞれ r_j 、 Φ_j 、 Ω_0 、 \mathbf{C}_0 と表す。まず

$$\Omega_j \neq \Omega_0, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (1.38)$$

であるとき、式 (1.35) を満たす Ω_j は存在しないことを示す。補題??を適用すると、式 (1.38) が成り立つとき、式 (1.35) は

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3, \quad \sum_{j=1}^3 r_j e^{j\Phi_j} = 0$$

と等価であることがわかる。しかしながら、 $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$ である場合には、 $|\mathcal{N}_i| = 1$ のときと同様にして、 $\mathbf{C}_i(t)$ が t に依らない定数であることと式 (1.36) が等価であることが導かれる。これは式 (1.38) に矛盾する。

以上から、(1.38) の否定として、ある $j \in \{1, 2, 3\}$ に対して $\Omega_0 = \Omega_j$ である場合のみを考えれば良い。特に、 j に関する対称性から、一般性を失うことなく、 $\Omega_0 = \Omega_3$ である場合を考える。このとき、

$$\mathbf{C}_0(t) = \frac{1}{3} \left\{ r_3 e^{j\Phi_3} + \sum_{j=1}^2 r_j e^{j\{(\Omega_0 - \Omega_j)t + \Phi_j\}} \right\}$$

であることから、 t に関する不変性は、 $|\mathcal{N}_i| = 2$ の場合と同様に議論できる。したがって、 $\mathbf{C}_0(t)$ が t に依らない定数であることは、式 (1.36) または

$$\Omega_1 = \Omega_2, \quad r_1 = r_2, \quad |\Phi_1 - \Phi_2| = \pi$$

と等価である。以上より題意が示される。♠

補題 1.2 は、注目するバスの次数が 1 のとき、すなわち、図 1.2(a) のような端点のバスについては、そのバスと隣のバスが同期することを示している。ま

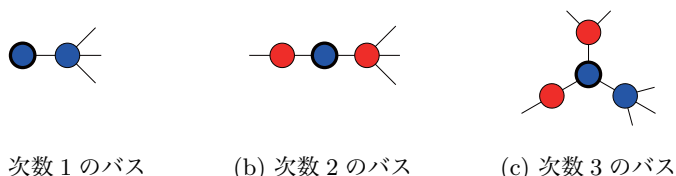


図 1.2 バスの次数に応じた隣接バスとの同期（注目するバスを太線で示す）

た、注目するバスの次数が 2 のとき、すなわち、図 1.2(b) のような鎖状経路にあるバスについては、少なくともその両隣のバスが同期する。さらに、注目するバスの次数が 3 のとき、すなわち、図 1.2(c) のような 3 本の送電線で結ばれている節のバスについては、隣接するバスのうち少なくとも 1 つが注目するバスと同期する。これは、任意に選ばれた 3 つのバスのみが同期し、残りの 1 つのバスは同期しないような状況や、どのバスの組も同期しないような状況は生じないことも意味している。

注目するバスの次数が 4 以上である場合にも同様の解析を行うことは可能である。しかしながら、得られる条件が Ω_i や Ω_j に関する高次の方程式になることや、任意に選ばれた一部の隣接バスのみが同期する場合などの複数の組み合わせが存在するため、同期に関する等価条件を書き下すことは一般に煩雑となる。ただし、注目するバス i とそれに隣接する $|N_i|$ 個のバスに対して、いずれかの $|N_i| - 1$ 個の隣接バスがバス i と同期するのであれば、残り 1 個の隣接バスも同期することは一般に示される。

補題 1.2 で示されている次数が 3 以下の条件を組み合わせることで、次数が 4 以上のバスが送電網に含まれている場合にも、すべてのバスの同期が示される場合は存在する。例えば、つぎの事実を示すことができる。

定理 1.4 (木構造の送電網におけるバスの同期)

式 (1.3) の連立方程式によって機器群が結合された電力系統モデルを考える。送電網のグラフが木構造をもつとき、すなわち、送電網が連結であ

28 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション



図 1.3 木構造をもつ送電網におけるバスの同期

りバスの閉路が存在しないとき、定常潮流状態においてすべてのバスは同期する。

証明 図 1.3(a) の太線で示された端点のバスに注目する。バスの次数は 1 であるから、その隣のバスは端点のバスと同期する。つぎに、端点の隣のバスが鎖状経路にある場合には、そのバスの次数は 2 であるため、少なくともその両隣のバスは同期する。これを繰り返していくことで、図 1.3(a) のように、端点と次数が 3 以上の節のバスを結ぶ鎖状経路において、すべてのバスの同期が示される。

同様に、別の端点から次数が 3 以上の節に存在するすべてのバスは同期するため、図 1.3 のように、太線で示される節のバスに連結するすべての鎖状経路のバスはすべて同期することがわかる。この議論を繰り返せば、木を構成するすべてのバスが同期することが示される。 ♠

定理 1.4 に示されている木構造をもつ送電網のバスには次数の制限はない。このように、仮に次数が 4 以上のバスが送電網に含まれていたとしても、グラフ構造の情報だけを用いて、すべてのバスの同期を演繹できる場合がある。同様に、つぎの事実を示すことができる。

定理 1.5 (円環構造の送電網におけるバスの同期)

式 (1.3) の連立方程式によって機器群が結合された電力系統モデルを考える。送電網のグラフが円環構造をもち、かつ、バスの総数が奇数であるとき、定常潮流状態においてすべてのバスは同期する。

証明 あるバスに注目するとその両端のバスの同期が示される。これを繰り返

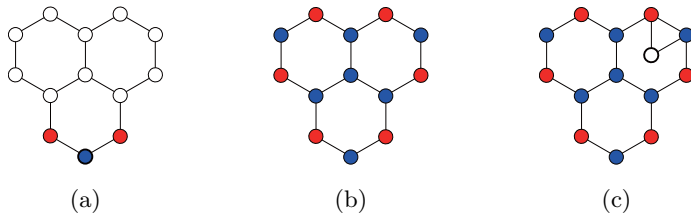


図 1.4 ハニカム構造をもつ送電網におけるバスの同期

すことにより、バスの総数が奇数である場合にすべてのバスの同期が示される。♠

定理 1.5 は、円環構造の送電網に対して、バスの総数が奇数である場合は、各送電網のアドミタンスの値などに依らず、すべてのバスが同期することを示している。一方で、バスの総数が偶数である場合には、送電線のアドミタンス値などの追加の情報を用いない限りは、円環構造の送電網に対してもすべてのバスの同期を結論づけることはできない。後述する例 1.7 では、バスの総数が偶数である場合にも、アドミタンスの値などの一部の情報が与えられるだけで、すべてのバスの同期が示され得ることを示す。次数 3 のバスを含む送電網に補題 1.2 を適用した例としてつぎを示す。

例 1.6 (ハニカム構造の送電網におけるバスの同期) 図 1.4(a) に示されるハニカム構造をもつ送電網に対して、定常潮流状態におけるバスの同期を考えよう。最下部のバスに注目すると、その両隣のバスの同期がわかる。これらの同期するバスを赤で示し、最下部のバスと同期するものを青で示す。このとき、補題 1.2 を各バスに適用していくことによって、同期するすべてのバス群を図 1.4(b) のように色分けすることができる。しかしながら、この場合には、グラフ構造の情報だけで赤のバス群と青のバス群の同期を結論づけることはできない。一方で、図 1.4(c) のようにバスが 1 つ追加された送電網の場合には、その追加されたバスに注目することで、両隣の赤と青のバスの同期が導かれる。したがって、図 1.4(c) のグラフ構造の場合には、すべてのバスの同期が示される。

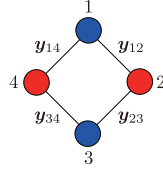


図 1.5 円環構造をもつ送電網における 4 バスの同期

例 1.6 において、一部のグラフ構造の差異により同期するバスの対称性が崩れることで、電力系統全体でのバスの同期が演繹されている点は興味深い。つぎの例では、アドミタンスの値まで考慮した「定量的な送電網の対称性」の観点からバスの同期を考察する。

例 1.7 (円環構造の送電網における 4 つのバスの同期) 図 1.5 に示される円環構造をもつ送電網に対して、定常潮流状態におけるバスの同期を考えよう。バスの数は偶数であるため、定理 1.5 のようにグラフ構造の情報だけではすべてのバスの同期を示すことはできない。ただし、図 1.5 の赤と青で示されているように、少なくとも互い違いのバスがそれぞれ同期することは補題 1.2 からわかる。したがって、すべてのバスの同期を示すためには、少なくとも 1 つのバスに対して式 (1.37) のいずれかの条件が満たされないことを示せば良い。

バス i とバス j を結ぶ送電線のアドミタンスを y_{ij} と表す。このとき、各バスに対する式 (1.37) 中央の条件は

$$\begin{aligned} |V_2||y_{12}| &= |V_4||y_{14}|, & |V_1||y_{12}| &= |V_3||y_{23}|, \\ |V_2||y_{23}| &= |V_4||y_{34}|, & |V_3||y_{34}| &= |V_1||y_{14}| \end{aligned}$$

と書き下すことができる。これを行列形式で表現すれば

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & |\mathbf{y}_{12}| & 0 & -|\mathbf{y}_{14}| \\ -|\mathbf{y}_{12}| & 0 & |\mathbf{y}_{23}| & 0 \\ 0 & -|\mathbf{y}_{23}| & 0 & |\mathbf{y}_{34}| \\ |\mathbf{y}_{14}| & 0 & -|\mathbf{y}_{34}| & 0 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} |\mathbf{V}_1| \\ |\mathbf{V}_2| \\ |\mathbf{V}_3| \\ |\mathbf{V}_4| \end{bmatrix} = 0$$

となる。この方程式を満たす正のベクトル $(|\mathbf{V}_1|, \dots, |\mathbf{V}_4|)$ が存在するための必要条件は、左辺の S が正則でないことである。ここで、列ベクトルの疎構造から、 S が非正則であるためには

$$|\mathbf{y}_{12}||\mathbf{y}_{34}| = |\mathbf{y}_{14}||\mathbf{y}_{23}| \quad (1.39)$$

でなければならない。したがって、アドミタンス行列がこの条件を満たさない限り、すべてのバスは同期する。なお、式 (1.39) が満たされる場合には、所望の電圧フェーザの絶対値を定めることができるため、式 (1.37) 中央の条件を満たす $(|\mathbf{V}_1|, \dots, |\mathbf{V}_4|)$ が存在するための必要十分条件が、式 (1.39) であることも示される。

つぎに、式 (1.37) 右の条件は、バス 1 とバス 3 に注目すれば

$$|\phi_2 - \phi_4 + \angle \mathbf{y}_{12} - \angle \mathbf{y}_{14}| = \pi, \quad |\phi_2 - \phi_4 + \angle \mathbf{y}_{23} - \angle \mathbf{y}_{34}| = \pi$$

と書き下すことができる。同様に、バス 2 とバス 4 に注目すれば

$$|\phi_1 - \phi_3 + \angle \mathbf{y}_{12} - \angle \mathbf{y}_{23}| = \pi, \quad |\phi_1 - \phi_3 + \angle \mathbf{y}_{14} - \angle \mathbf{y}_{34}| = \pi$$

が得られる。一般に、アドミタンスの実部であるコンダクタンス成分は非負であり、虚部であるサセプタンス成分は非正であること、すなわち、 $\angle \mathbf{y}_{ij} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ であることに注意すると、以上の条件を満たす (ϕ_1, \dots, ϕ_4) が存在するための必要十分条件が

$$\angle \mathbf{y}_{12} - \angle \mathbf{y}_{14} = \angle \mathbf{y}_{23} - \angle \mathbf{y}_{34} \quad (1.40)$$

32 1. 電力系統モデルの数値シミュレーション

であることが導ける。したがって、アドミタンス行列がこの条件を満たさない限り、すべてのバスは同期する。

以上の議論から、定常潮流状態において同期しないバスの組が1つ以上存在するための必要十分条件は、式 (1.39) かつ式 (1.40) であることがわかる。この2つの条件は、図 1.5 の送電網がアドミタンスの値に関する特異的な対称性をもつときにのみ、互い違いのバスのみが同期するような状況が起こることを示唆している。

例 1.7 から、式 (1.37) の条件は送電網のアドミタンスの値に関する特異的な対称性を表すことがわかる。実応用においては、各バスの次数が高くない疎な送電網に対してすべてのバスが定常潮流状態で同期することは、そのグラフ構造に特異的な対称性が存在しない限りは普遍的な事実であるといえる。実際、著者らが知る限りにおいて、現実的な値に設定されたいかなる電力系統モデルのパラメータに対しても、すべてのバスの定常潮流状態における同期が数値的に確かめられている。

(以下、不要かも)

さいごに、以上の議論から導かれるつぎの事実を示す。

定理 1.6 (バス変数の計測によるバス同期の判定)

式 (1.3) の連立方程式によって機器群が結合された電力系統モデルを考える。電力系統は定常潮流状態にあるものと仮定する。このとき、次数2のバス i に対して

$$P_i \neq \operatorname{Re}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2 \quad \text{または} \quad Q_i \neq -\operatorname{Im}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2 \quad (1.41)$$

が成り立つ、もしくは、その隣接バスに対して

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}_{j_1}||\mathbf{Y}_{ij_1}| \neq |\mathbf{V}_{j_2}||\mathbf{Y}_{ij_2}| \quad \text{または} \\ |\angle \mathbf{V}_{j_1} - \angle \mathbf{V}_{j_2} - \angle \mathbf{Y}_{ij_1} + \angle \mathbf{Y}_{ij_2}| \neq \pi \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.5 定常的な潮流状態におけるバス電圧の同期^{*} 33

が成り立つならば、式 (1.36) が成り立つ。ただし、 $\mathcal{N}_i = \{j_1, j_2\}$ である。また、次数 3 のバス i に対して、 $\Omega_i = \Omega_{j_3}$ を満たす $j_3 \in \mathcal{N}_i$ が存在するものとする。このとき、バス i に対して

$$P_i \neq \operatorname{Re}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2 + |\mathbf{Y}_{ij_3}||\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_{j_3}|\cos(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_{j_3} - \angle \mathbf{Y}_{ij_3})$$

または

$$Q_i \neq -\operatorname{Im}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2 + |\mathbf{Y}_{ij_3}||\mathbf{V}_i||\mathbf{V}_{j_3}|\sin(\angle \mathbf{V}_i - \angle \mathbf{V}_{j_3} - \angle \mathbf{Y}_{ij_3}) \quad (1.43)$$

が成り立つ、もしくは、その隣接バスに対して式 (1.42) が成り立つならば、式 (1.36) が成り立つ。ただし、 $\mathcal{N}_i \setminus \{j_3\} = \{j_1, j_2\}$ である。

証明 次数 2 のバスに関する題意を対偶により示す。すなわち、式 (1.36) の否定、すなわち、式 (1.37) が成り立つならば、式 (1.41) や式 (1.42) の否定が成り立つことを示す。まず、式 (1.42) の否定は、式 (1.37) の中央と右そのものであることから、後者の含意は明らかである。つぎに、式 (1.37) が成り立つとき、式 (1.35) の \mathbf{c}_i は 0 であることが導かれる。これは、式 (1.41) の否定、すなわち

$$P_i = \operatorname{Re}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2, \quad Q_i = -\operatorname{Im}[\mathbf{Y}_{ii}]|\mathbf{V}_i|^2$$

を意味する。以上より、次数 2 のバスに関する題意が示される。次数 3 のバスに関する題意も同様に示される。 ♠

定理 1.6 により、有効電力や無効電力、電圧フェーズを実際に計測することによって、グラフ構造だけでは判断できなかったバスの同期を示すことが可能となる。例えば、図 1.4(b) のハニカム構造をもつ送電網に対して、定常潮流状態において適当なバスの有効電力や無効電力、電圧フェーズを計測し、いずれかの赤と青のバスの同期を示すことができれば、送電網全体でのバスの同期が結論できる。