РГР по дискретной математике
Пятая задача

Клименко В. М. – М8О-103Б-22 – 11 вариант

Апрель, 2023

Дано

Квадратные матрицы порядка 4: <М, +, ×> с элементами из $\mathbb{R}$

Задание

Определить, является ли полем или кольцом заданная алгебраическая структура. Проверить, существуют ли делители нуля.

Решение

Сложение

1. коммутативность, ассоциативность, замкнутость - очевидно по свойствам матриц
2. единичный элемент – $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. обратный элемент – $A_{+}^{-1} = -A = -1 \times A$: $A + (-A) = (0)$

Умножение

1. коммутативность – не выполняется
2. ассоциативность, замкнутость – очевидно по свойствам матриц
3. единичный элемент – $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. обратный элемент – $A_{\times}^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \times (A_{ij})^T$: $A \times A^{-1} = E$ существует только если детерминант матрицы не равен нулю

Дистрибутивность

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ – по дистрибутивности матриц

Делители нуля

делители нуля существуют, например:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ

Алгебраическая структура квадратные матрицы порядка 4: $<$M, $+$, $\times>$ с элементами из $\mathbb{R}$ является **кольцом**