для (6.1), так как, если (6.1) записать в виде $y' = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$, то, очевидно, в этом случае будет выполняться равенство

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y) \tag{6.2}$$

2) Если в (6.2) принять $t = \dfrac{1}{x}(x \neq 0)$, то (6.2) преобразуется к следующему эквивалентному виду:

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}x\frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной, является *однородным уравнением*, если его можно в *следующем виде*: $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Однородное дифференциальное уравнение решается приведением к уравнению с разделяющимися переменными с помощью *подстановки* (замены переменных):

$$\begin{cases} y = ux, \\ x = x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = uy, \\ y = y \end{cases} \tag{6.3}$$

Действительно, применяя первую из (6.3) подстановку в уравнении (6.1), полагая, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями относительно аргументов одинаковой степени однородности m, получаем $M(x,ux)dx + N(x,ux)(xdu + udx) = 0$ или $x^m M(1,u)dx + x^m N(1,u)(xdx + udx) = 0$ и, сократив на множитель x^m, получаем следующее уравнение с разделяющимися переменными, к которому сводится данное уравнеие:

$$[M(1,u) + N(1,u)u]dx + [xN(1,u)]du = 0$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(x+y)dx = xdy$.

Решение. Так как функция $x+y$ и x являются однородными функциями первой степени однородности, данное уравнение – однородное. Применяем для его решения подстановку $\begin{cases} y = ux, \\ x = x \end{cases}$ и в результате получаем $(x+ux)dx = x(xdu+udx)$. Отметив, что $x=0$ является, очевидно, решением данного уравнения, полагая, что $x \neq 0$ и сокращая на $x \neq 0$, имеем $dx+udx = xdu+udx, dx = xdu, du = \dfrac{dx}{x}, u = \ln x + \ln C, e^u = Cx$. Проведя обратную замену и учитывая решение $x=0$, получаем окончательный ответ: $e^{\frac{y}{x}} = Cx, x = 0$.

Рассмотрим теперь виды дифференциальных уравнений, приводящихся к однородным уравнениям. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{6.4}$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (при этих условиях данное уравнение не относится к уже рассмотренным типам), решается с помощью *подстановки*:

$$\begin{cases} x = u + \alpha; \\ y = v + \beta. \end{cases} \tag{6.5}$$

Здесь числа α и β – решения системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$