

Численные методы: лабораторная работа №3

Выполнил Клименко В. М., М8О-403Б-22

Цель работы

Изучить метод конечно-разностных схем для решения дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа.

Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией.

Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

Вариант

Вариант 10:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y) \cos(y),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos(x),$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x - y) \cos(x) \cos(y)$

Решение

Решение представлено в виде библиотеки на Rust. Для запуска необходимо иметь Rust тулчейн: rustc, cargo, а также make. Для запуска лабораторной работы используйте команду:

```
make test-plot TEST_SUITE=lab_7
```

Сначала в stdout будут выведены сведения об ошибках и количестве итераций, выполненных определенным методом. Спустя какое-то время будет открыто GIF-изображение с эволюцией функции по времени.

Ниже приведен вывод программы при различных сетках

nx = 25, ny = 25, max_iter = 3000, eps = 1e-7

iter did 3000 iterations

seidel did 2646 iterations

relax did 1888 iterations

Iterative: l2 error = 0.0143527849768274, max error = 0.031540376923423236

Seidel's: l2 error = 0.006239068100776588, max error = 0.013730838877871493

Relaxed: l2 error = 0.037546941151046065, max error = 0.07693179963934332

$n_x = 100$, $n_y = 100$, $\text{max_iter} = 3000$, $\text{eps} = 1e-6$

iter did 676 iterations

seidel did 400 iterations

relax did 1772 iterations

Iterative: l2 error = 0.00071247207563206, max error = 0.0016153825478308903

Seidel's: l2 error = 0.000333070064091802, max error = 0.0007734262723164687

Relaxed: l2 error = 0.002952881551676721, max error = 0.006670855748406285

$n_x = 10$, $n_y = 10$, $\text{max_iter} = 5000$, $\text{eps} = 1e-5$

iter did 5000 iterations

seidel did 5000 iterations

relax did 5000 iterations

Iterative: l2 error = 0.01886362160466336, max error = 0.04132935474581367

Seidel's: l2 error = 0.008240170092694406, max error = 0.018062206227705324

Relaxed: l2 error = 0.03616400980997065, max error = 0.07499764741021875

Как можно заметить — чем мельче сетка, тем выше точность аппроксимации

Графики

Эволюция максимальной ошибки и ошибки между итерациями по номеру итерации

