TS226
-
Codes convolutifs et codes concaténés associés

Romain Tajan

8 octobre 2018

Plan

Plan

Exemple de QCM

Comment allez vous aujourd'hui ?

A Très bien

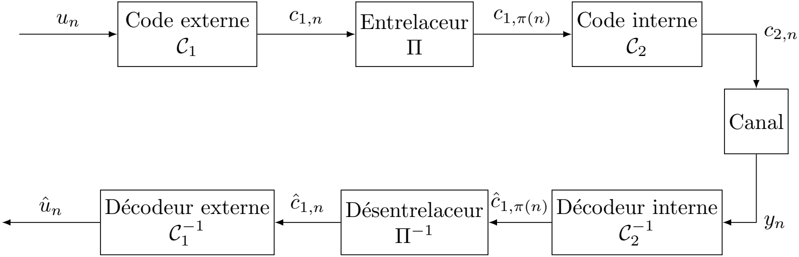
B Bien

C Mal

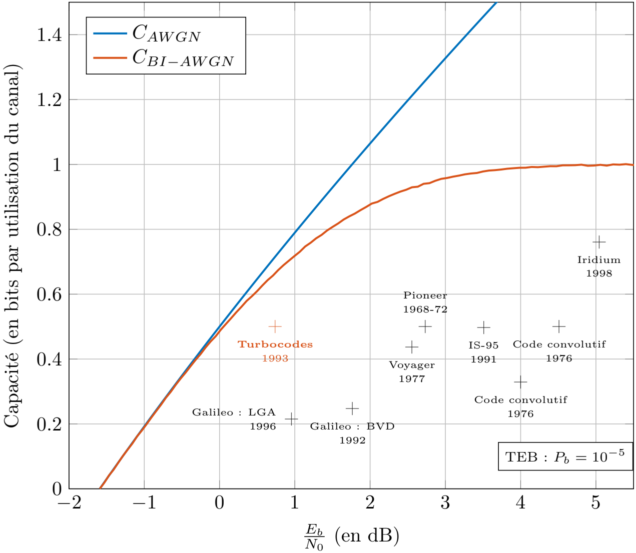
D Très mal

#QDLE#S#ABCD#30#

Introduction



Introduction

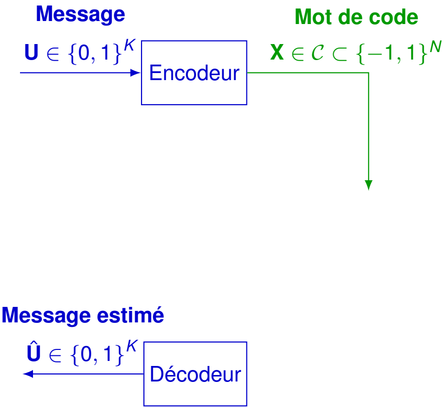


Hypothèses de travail

- **Code convolutif ▷ Code binaire**

$$\mathbf{U} \in \{0,1\}^K \ \& \ \mathbf{C} \in \{0,1\}^N$$

Hypothèses de travail



Message

$\mathbf{U} \in \{0,1\}^K$

Encodeur

Mot de code

$\mathbf{X} \in \mathcal{C} \subset \{-1,1\}^N$

Message estimé

$\hat{\mathbf{U}} \in \{0,1\}^K$

Décodeur

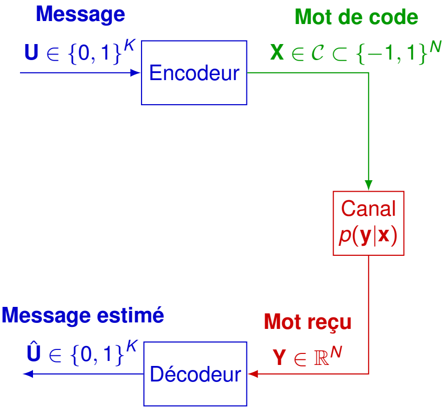
- **Code convolutif ▷ Code binaire**

$$\mathbf{U} \in \{0,1\}^K \ \& \ \mathbf{C} \in \{0,1\}^N$$

- **Modulation BPSK**

$$\mathcal{X} = \{-1,1\} \ \& \ \mathbf{X} \in \{-1,1\}^N$$
$$\mathbf{X} = 1 - 2\mathbf{C}$$

Hypothèses de travail



Message

$\mathbf{U} \in \{0,1\}^K$

Encodeur

Mot de code

$\mathbf{X} \in \mathcal{C} \subset \{-1,1\}^N$

Canal
$p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

Mot reçu

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$

Décodeur

Message estimé

$\hat{\mathbf{U}} \in \{0,1\}^K$

- **Code convolutif ▷ Code binaire**

$$\mathbf{U} \in \{0,1\}^K \text{ \& } \mathbf{C} \in \{0,1\}^N$$

- **Modulation BPSK**

$$\mathcal{X} = \{-1,1\} \text{ \& } \mathbf{X} \in \{-1,1\}^N$$
$$\mathbf{X} = 1 - 2\mathbf{C}$$

- **Canal sans mémoire**

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{N-1} p(y_i|x_i)$$

- **Canal BI-AWGN**, $\mathcal{X} = \{-1,1\}$ & $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} \text{ où } \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2 I_N)$$

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_z^2}(y-x)^2}$$

Plan

1. Introduction

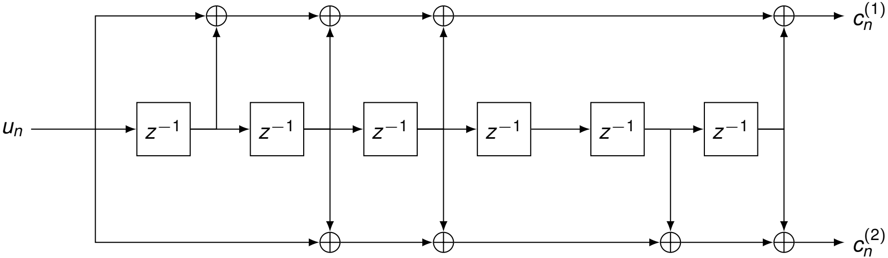
2. Code Convolutif
   - ▷ Un premier exemple de code convolutif
   - ▷ Définition des codes convolutifs
   - ▷ Représentation octale
   - ▷ Code convolutif comme machine à états

3. Décodage maximum de vraisemblance des codes convolutifs

4. Turbo-Codes

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



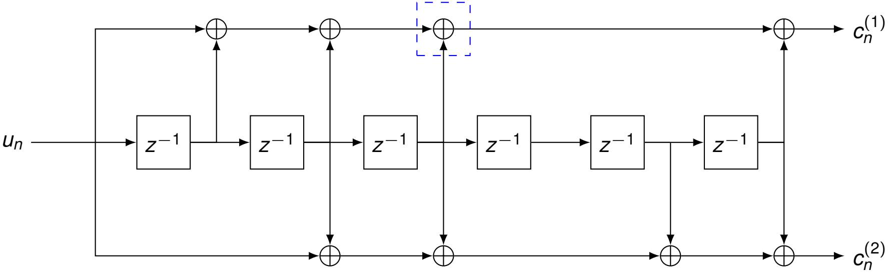
Message : $\mathbf{u} = [\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \ldots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad \ldots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

Addition modulo 2 (XOR)

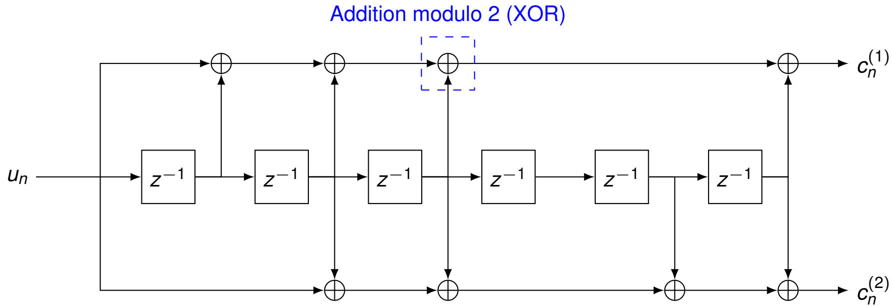


Message : $\mathbf{u} = [\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad \dots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

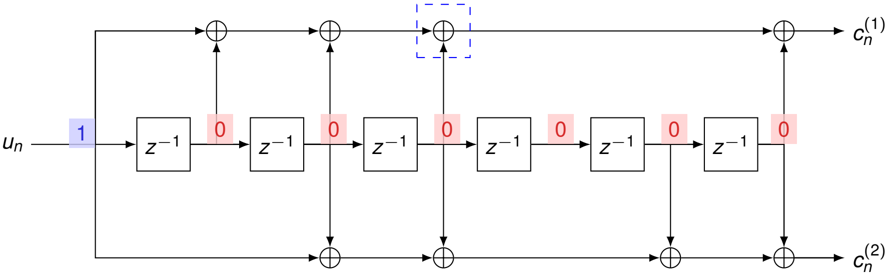


Message : $\mathbf{u} = [\quad \mathbf{1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \ldots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \ldots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



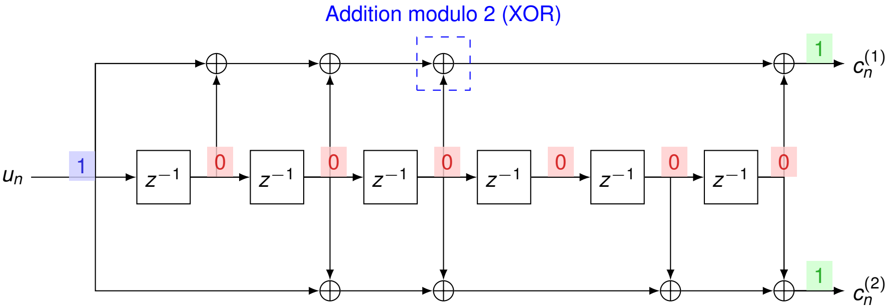
Addition modulo 2 (XOR)

Message : $\mathbf{u} = [\quad \mathbf{1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \dots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

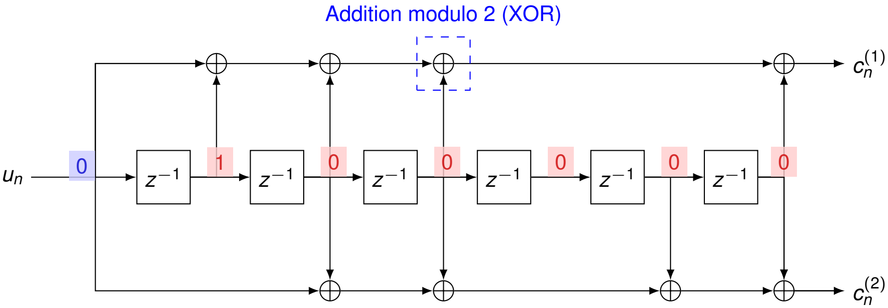


Message : $\mathbf{u} = [\ \mathbf{1}\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad \ldots\ ]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\ \mathbf{1}\quad \mathbf{1}\quad \ldots\ ]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

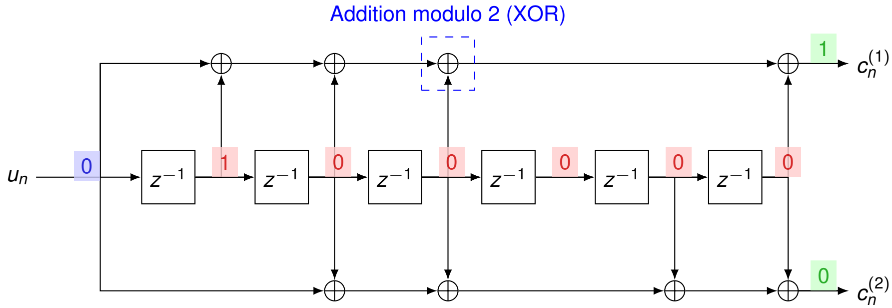


Message : $\mathbf{u} = [\quad 1 \quad \mathbf{0} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \ldots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad 1 \quad 1 \quad c_1^{(1)} \quad c_1^{(2)} \quad \ldots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

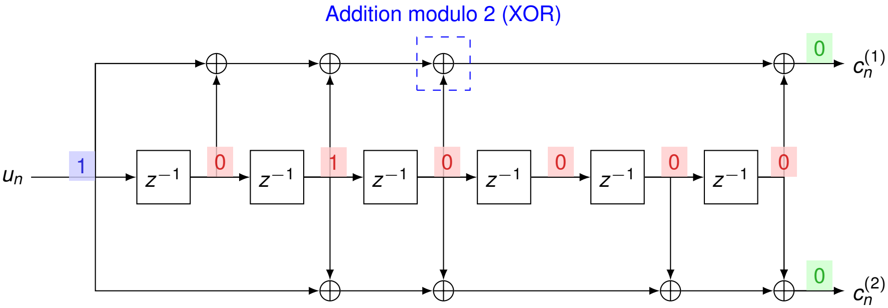


Message : $\mathbf{u} = [\quad 1 \quad \mathbf{0} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \ldots \quad]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\quad 1 \quad 1 \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \ldots \quad]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

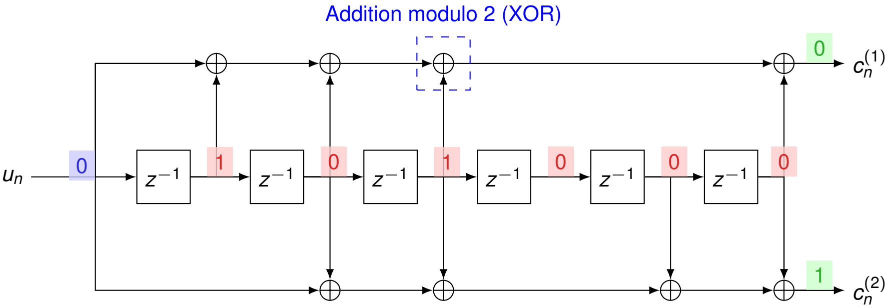

Addition modulo 2 (XOR)

Message : $\mathbf{u} = [\ 1\quad 0\quad \mathbf{1}\quad 0\quad 1\quad \ldots\ ]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\ 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad \ldots\ ]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

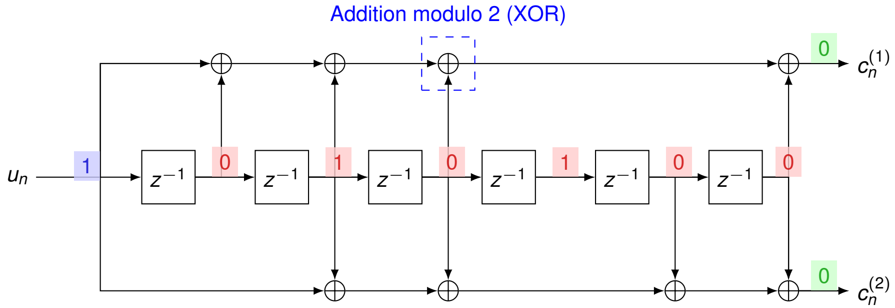


Message : $\mathbf{u} = [$ 1 0 1 **0** 1 . . . $]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [$ 1 1 1 0 0 0 **0** **1** $]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

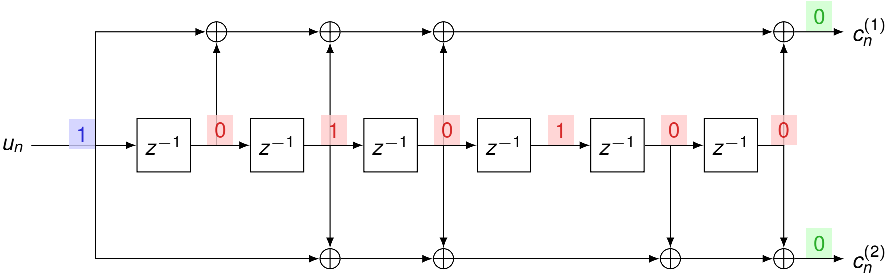


Message : $\mathbf{u} = [\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{1} \quad \ldots\ ]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \ldots\ ]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



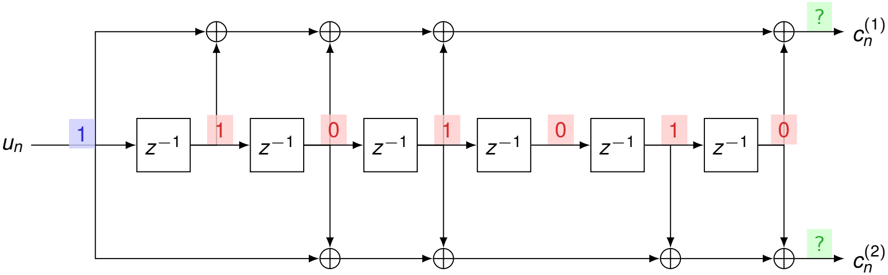
Quel est le prochain état ?

- A [0, 1, 0, 1, 0, 1]
- B [1, 0, 1, 0, 1, 0]
- C [1, 0, 1, 1, 0, 0]
- D Aucune des réponses A, B ou C.

#QDLE#Q#AB*CD#30#

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



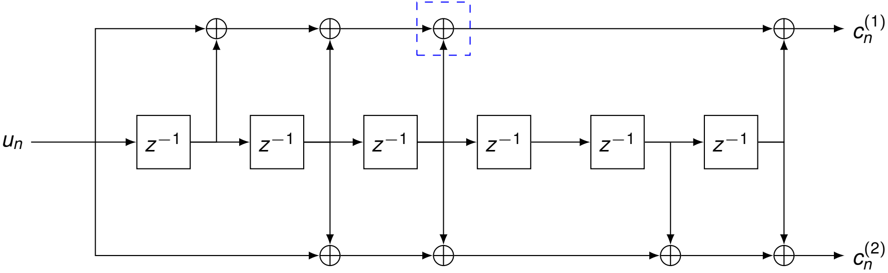
Quel est la sortie ?

- A [0, 1]
- B [1, 0]
- C [0, 0]
- D [1, 1]

#QDLE#Q#ABCD*#30#

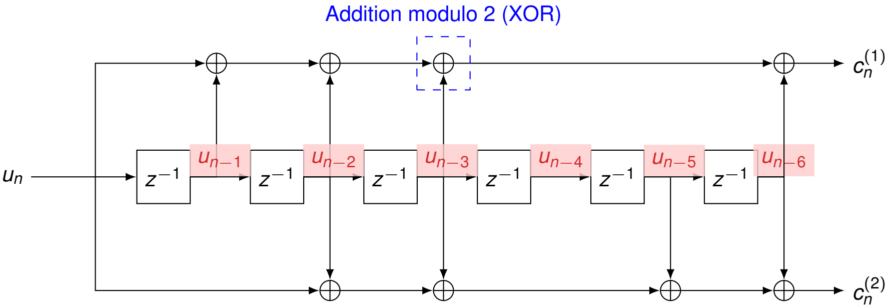
Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

Addition modulo 2 (XOR)



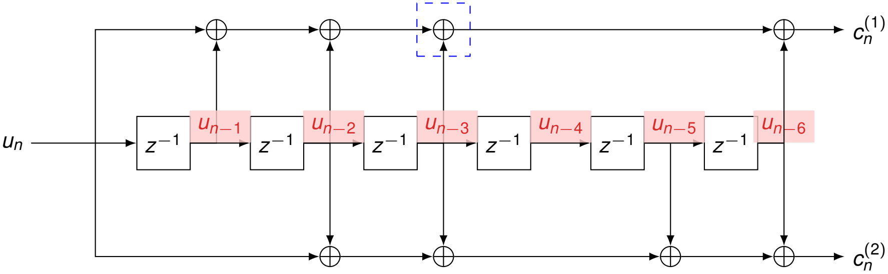
$c_n^{(2)} =$

Codes Convolutifs : retour sur l'exemple



$c_n^{(2)} =$

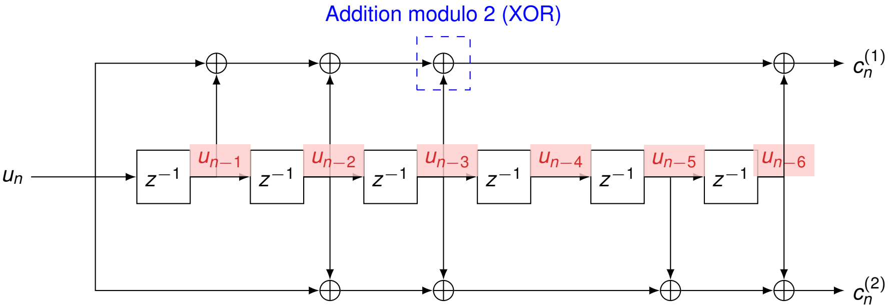
Codes Convolutifs : retour sur l'exemple



Addition modulo 2 (XOR)

$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

Codes Convolutifs : retour sur l'exemple



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n \quad {\color{red} + 0 \cdot u_{n-1}} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} {\color{red} + 0 \cdot u_{n-4}} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

On remarque : $c_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{m} g_k^{(i)} u_{n-k}$

En utilisant la TZ : $C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)$

Ici : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$
$\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

Code Convolutif : définition

Code convolutif

Code Convolutif (CC) : code tel que ses **mots de codes** sont obtenu par **filtrages numériques linéaires** à valeurs dans $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ des messages binaires.

Message : $U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_i z^{-i}$ [transformée en Z de la séquence message $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$]

Mot de code : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z), C^{(1)}(z), \cdots, C^{(n_s-1)}(z)]$ [$C^{(i)}(z)$ sortie du filtre i]

$$\boxed{C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)}$$

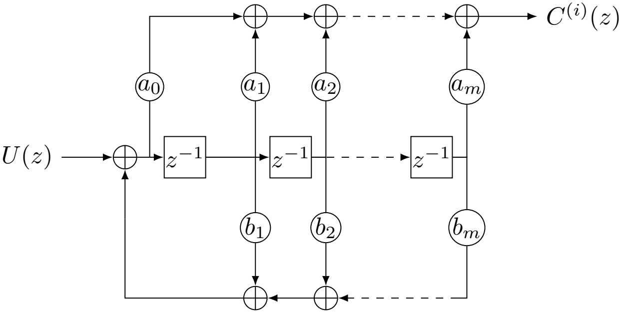
Attention : de façon générale $G^{(i)}(z)$ est défini comme suit :

$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z^{-1} + \cdots + a_m^{(i)} z^{-m}}{1 + b_1^{(i)} z^{-1} + \cdots + b_m^{(i)} z^{-m}}$$

Encodeur récursif / Non récursif

Un encodeur est dit **récursif** s'il existe une boucle de rétroaction de sa sortie sur son entrée (s'il existe i tel que $B^{(i)}(z) \neq 1$).

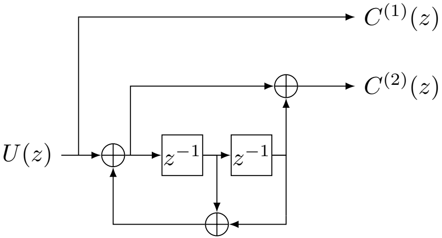
$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z^{-1} + \cdots + a_m^{(i)} z^{-m}}{1 + b_1^{(i)} z^{-1} + \cdots + b_m^{(i)} z^{-m}}$$



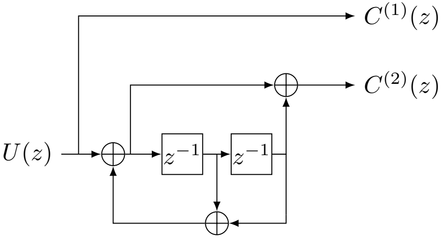
Encodeur systématique / Non systématique

Un encodeur est dit **systématique** s'il existe une sortie i telle que $C^{(i)}(z) = U(z)$.

$\Leftrightarrow$ S'il existe une sortie i telle que $G^{(i)}(z) = 1$.



Quizz Encodeur Récursif, Encodeur Systématique



Cet encodeur est :

A Récursif et systématique,

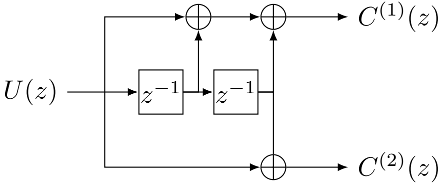
B Récursif et non systématique,

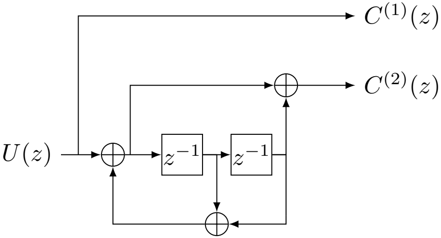
C Non Récursif et systématique,

D Non Récursif et non systématique,

#QDLE#Q#A*BCD#30#

Quizz Encodeur Récursif, Encodeur Systématique





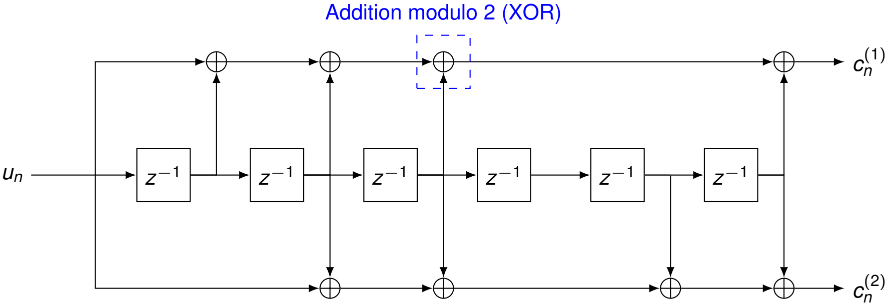
Ces deux encodeurs produisent le même code ?

A Vrai

B Faux

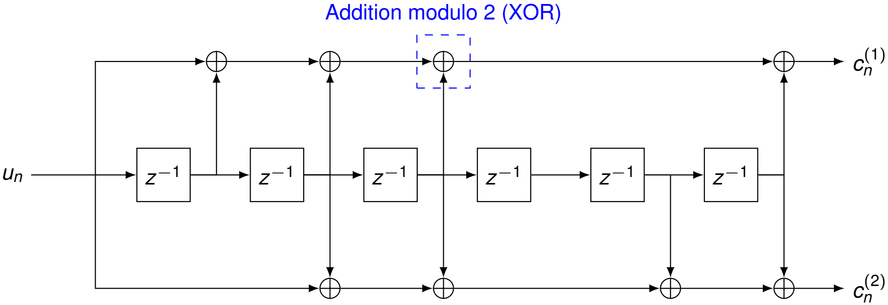
#QDLE#Q#A*B#30#

Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

Notation octale des codes convolutifs

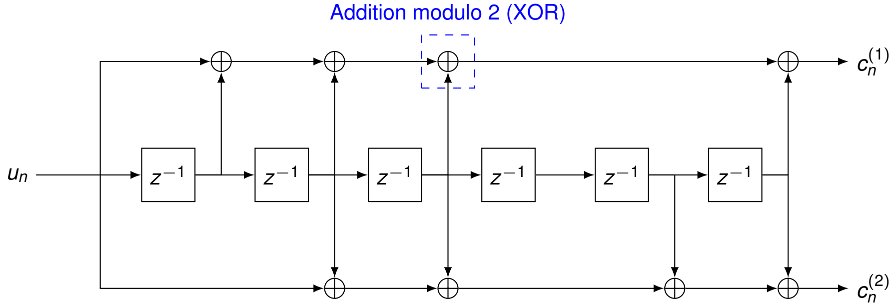


Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

$$\downarrow$$

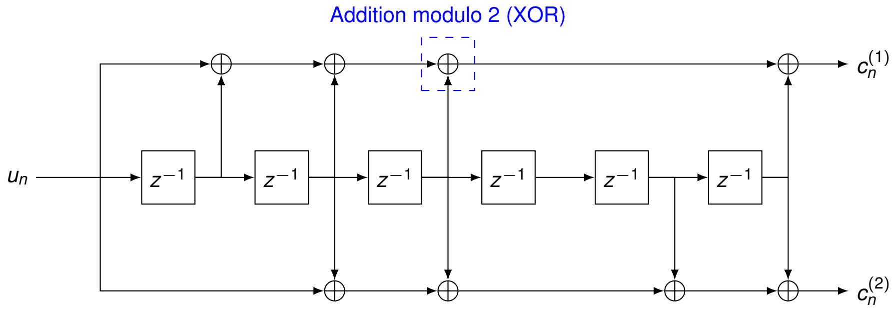
1

Notation octale des codes convolutifs


Addition modulo 2 (XOR)

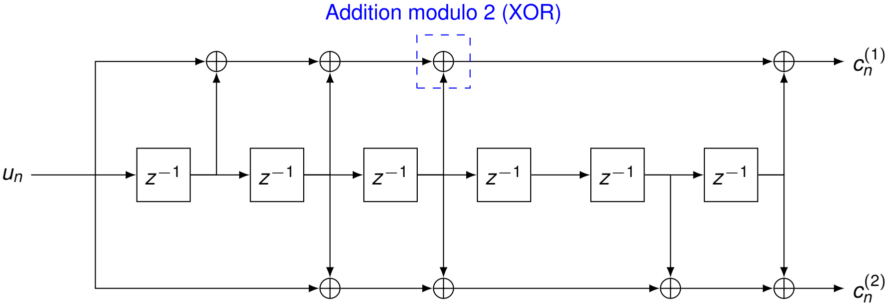
Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ \underset{\substack{\downarrow\\ \mathbf{7}}}{\mathbf{1\ 1\ 1}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \mathbf{1}}}{\mathbf{0\ 0\ 1}}]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1}\ \underset{\substack{\downarrow\\ 7}}{1\ 1\ 1}\ \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{0\ 0\ 1}]$ $\quad \mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

Notation octale des codes convolutifs

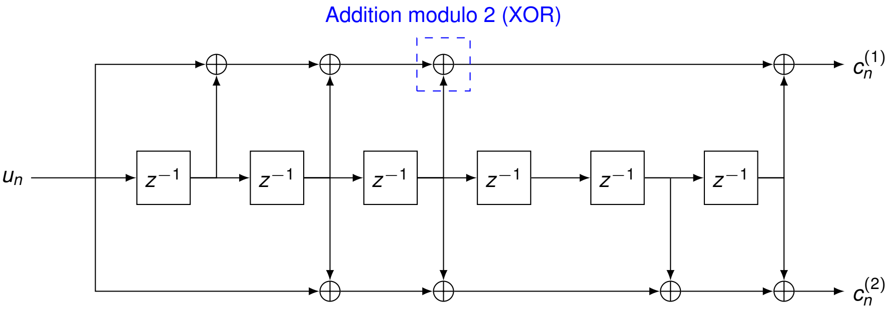


Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 7 \quad 1 \qquad\qquad 1 \quad 3 \quad 3$$

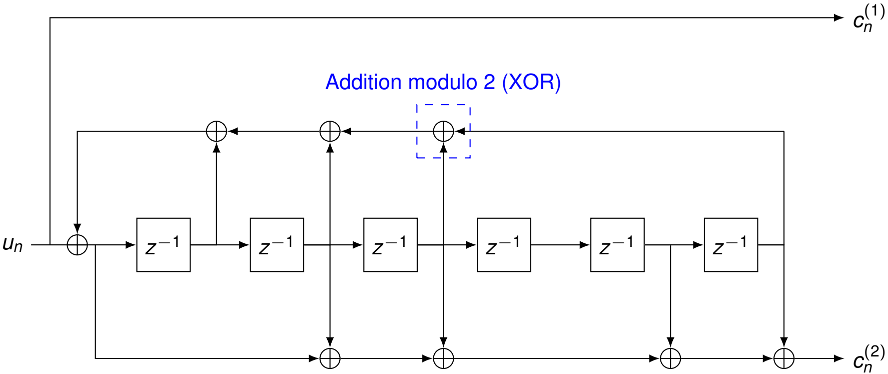
Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{7}\ \underbrace{0\ 0\ 1}_{1}]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}]$

Ce code est noté $(171,\ 133)_8$

Notation octale des codes convolutifs récursifs



Ce code est noté $(1, \frac{133}{171})_8$ **ou** $(100, \frac{133}{171})_8$.

Diagramme d'état d'un code convolutif

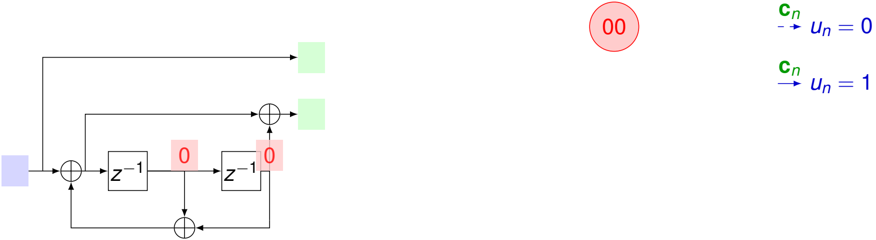
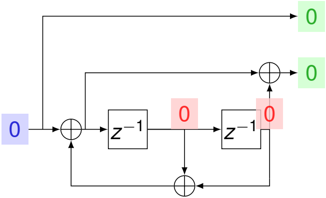
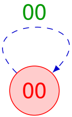


Diagramme d'état d'un code convolutif

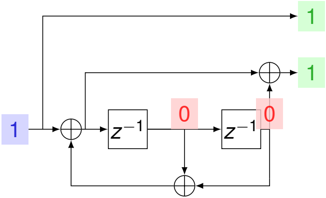


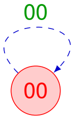


$\overset{\mathbf{c}_n}{\dashrightarrow}$ $u_n = 0$

$\xrightarrow{\mathbf{c}_n}$ $u_n = 1$

Diagramme d'état d'un code convolutif

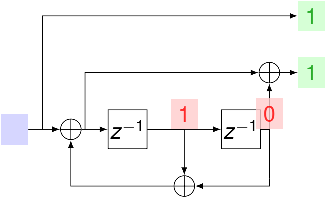




$\overset{\mathbf{c}_n}{\dashrightarrow}$ $u_n = 0$

$\xrightarrow{\mathbf{c}_n}$ $u_n = 1$

Diagramme d'état d'un code convolutif



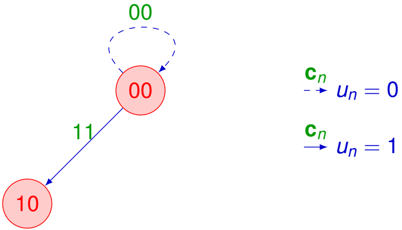
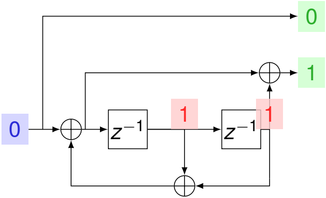


Diagramme d'état d'un code convolutif



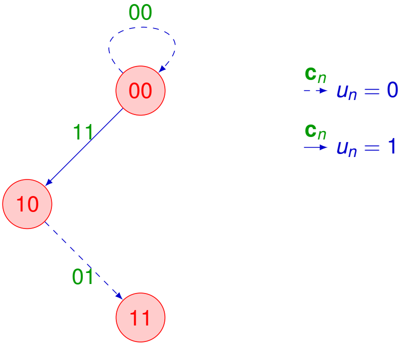
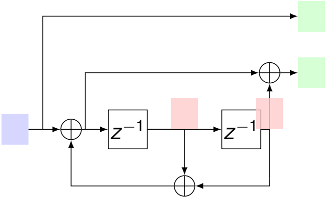
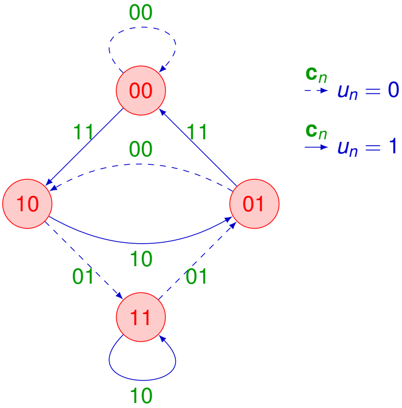


Diagramme d'état d'un code convolutif





Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- A Très difficile
- B Difficile
- C Moyen
- D Simple
- E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

1. Introduction
2. Code Convolutif
3. Décodage maximum de vraisemblance des codes convolutifs
4. Turbo-Codes

Plan