

TS226

-

Codes convolutifs et codes concaténés associés

Romain Tajan

19 octobre 2018

Plan

- ① Previously on TS226 ...
 - ▷ Rappels sur l'encodeur
 - ▷ Rappels sur le diagramme d'état
 - ▷ Rappels sur le treillis
 - ▷ Rappels sur les décodeurs
- ② Décodage du Maximum de Vraisemblance des codes convolutifs
- ③ Turbo-Codes

Comment avez-vous trouvé le cours précédent ?

- ☐ A Très difficile
- ☐ B Difficile
- ☐ C Moyen
- ☐ D Simple
- ☐ E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

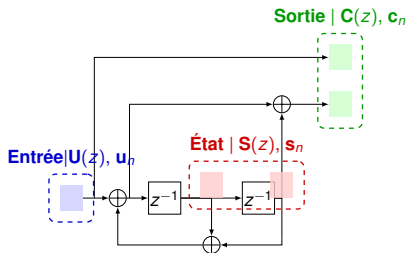
1 Previously on TS226 ...

- ▷ Rappels sur l'encodeur
- ▷ Rappels sur le diagramme d'état
- ▷ Rappels sur le treillis
- ▷ Rappels sur les décodeurs

2 Décodage du Maximum de Vraisemblance des codes convolutifs

3 Turbo-Codes

Rappels / définitions



• **Entrée** : $\mathbf{U}(z) = [U^{(0)}(z), U^{(1)}(z) \dots U^{(n_b-1)}(z)]$

→ dans ce cours $n_b = 1 \Rightarrow \mathbf{U}(z) \rightarrow U(z)$

• **État** : $\mathbf{S}(z) = [S^{(0)}(z), S^{(1)}(z) \dots S^{(m-1)}(z)]$

→ m est appelé "mémoire du code"

→ $\nu = m + 1$ est appelé "longueur de contrainte"

→ dans l'exemple $m = 2$

→ 2^m : nombre d'états

• **Sortie** : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z), C^{(1)}(z) \dots C^{(m-1)}(z)]$

→ n_s nombre de sorties

→ dans l'exemple $n_s = 2$

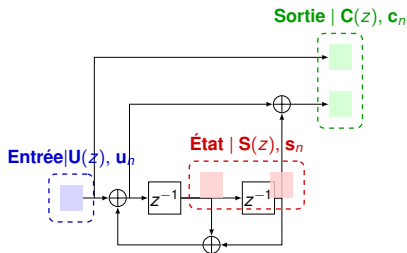
→ De façon générale : $\mathbf{C}(z) = U(z)\mathbf{G}(z)$

→ où $\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{A^{(1)}(z)}{B^{(1)}(z)} & \dots & \frac{A^{(n_s)}(z)}{B^{(n_s)}(z)} \end{bmatrix}$

• **Rendement du code** : $R = \frac{\text{\#bits d'info. en entrée}}{\text{\#bits codés en sortie}}$

→ Ici : $R = \frac{n_b}{n_s} = \frac{1}{2}$

Rappels / définitions



- **Code linéaire**

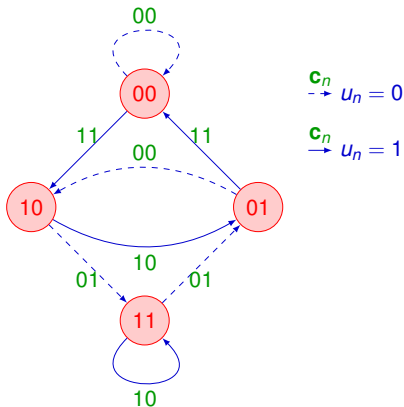
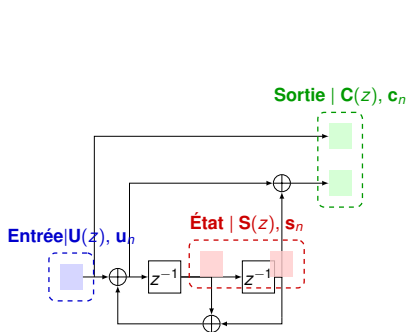
→ Si $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont deux mots de codes, alors $C_3(z) = C_2(z) + C_1(z)$ est aussi un mot de code.

- **Encodeur récursif / non récursif**

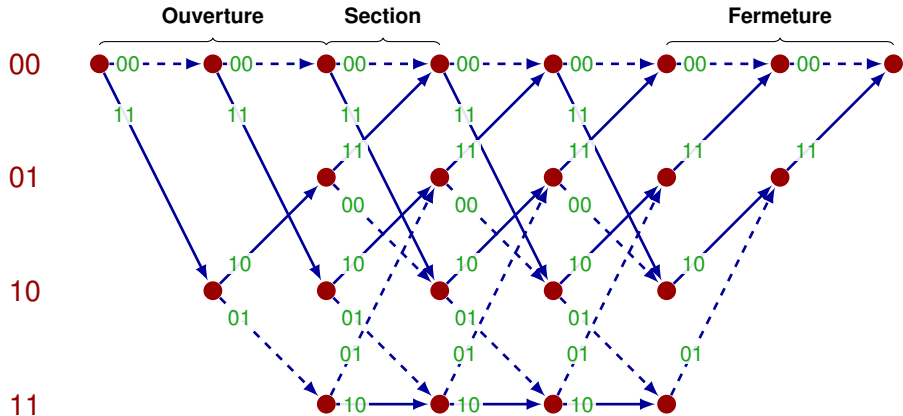
- **Encodeur systématique / non systématique**

- **Notation octale**

Rappels / définitions



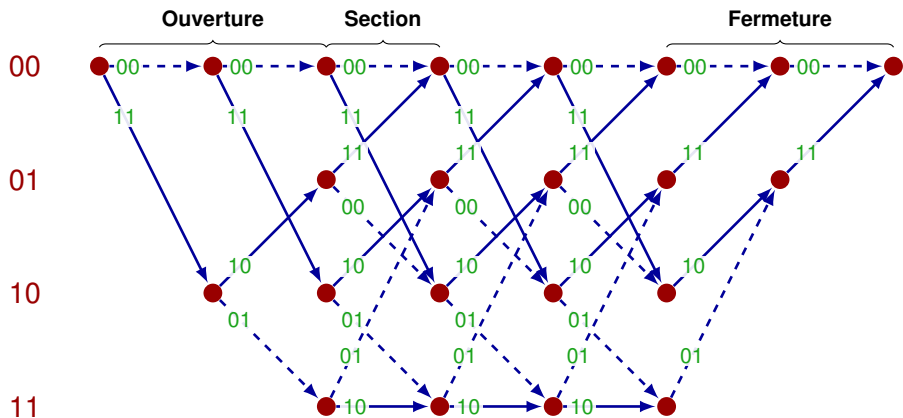
- Message \Leftrightarrow chemin dans le graphe
- Mot de code \Leftrightarrow étiquettes le long du chemin dans le graphe
- Nécessité de définir (au moins) un état initial



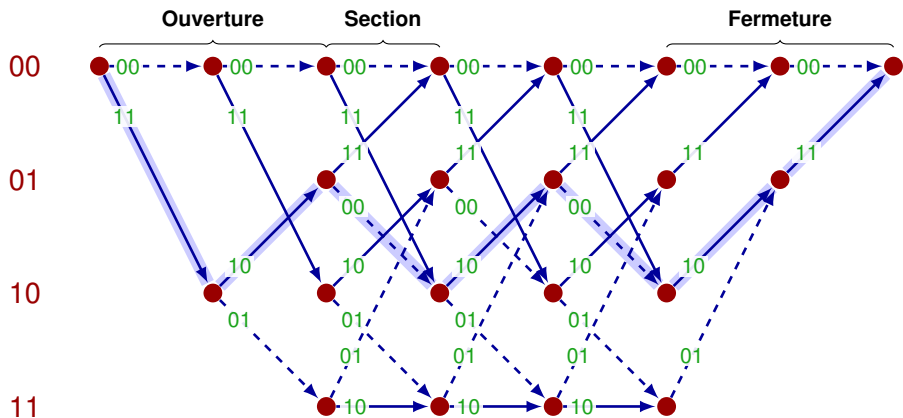
• Treillis \Leftrightarrow machine à états faisant apparaître le temps explicitement.

• Fermer $\Rightarrow N = n_s(m + K) \Rightarrow R = \frac{K}{n_s(m + K)} \leq \frac{1}{n_s}$

• Fermer \Rightarrow améliore la probabilité d'erreur

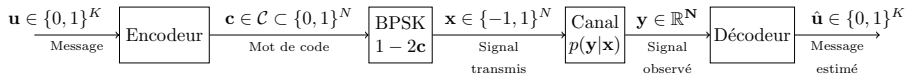


- On souhaite envoyer le message : $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$



- On souhaite envoyer le message : $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$
- On calcule le mot de code : $\mathbf{c} = [1\ 1, 1\ 0, 0\ 0, 1\ 0, 0\ 0, \underline{1\ 0}, \underline{1\ 1}]$
- On envoie le signal : $\mathbf{x} = [-1\ -1, -1\ 1, 1\ 1, -1\ 1, 1\ 1, \underline{-1\ 1}, \underline{-1\ -1}]$

Décodage du Maximum a Posteriori



Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de \mathbf{u} :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

- Un **décodeur** est une fonction de \mathbf{y} définie dans $\{0, 1\}^K$:

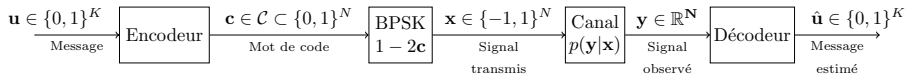
$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

- Le **décodeur du Maximum A Posteriori (MAP)** est la fonction de \mathbf{y} définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0, 1\}^K}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u} | \mathbf{y})$$

- Probabilité d'erreur trame** : $P_e = \mathbb{P}(\mathbf{U} \neq \hat{\mathbf{U}})$

Décodage du Maximum a Posteriori



Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de \mathbf{u} :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

- Un **décodeur** est une fonction de \mathbf{y} définie dans $\{0, 1\}^K$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

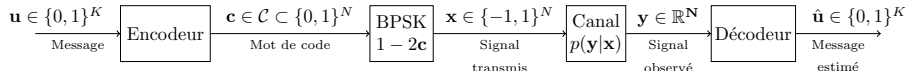
- Le **décodeur du Maximum A Posteriori (MAP)** est la fonction de \mathbf{y} définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u} | \mathbf{y})$$

- Probabilité d'erreur trame** : $P_e = \mathbb{P}(\mathbf{U} \neq \hat{\mathbf{U}})$

Le décodeur MAP minimise P_e !

Décodage du Maximum A Posteriori - Bit (MAP-Bit)



Définition

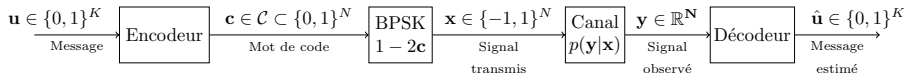
- Le **décodeur du Maximum A Posteriori - Bit (MAP-Bit)** est la fonction de \mathbf{y} définie par :

$$\hat{u}_i = (\Psi_{MAP-Bit}(\mathbf{y}))_i = \underset{u_i \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(U_i = u_i | \mathbf{y})$$

- Probabilité d'erreur binaire : $P_b = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(U_k \neq \hat{U}_k)$

Le décodeur MAP-Bit minimise la probabilité d'erreur binaire.

Décodage du Maximum de Vraisemblance (ML)



Définition

- Le **décodeur du Maximum de vraisemblance (ML)** est la fonction de \mathbf{y} définie par :

$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{u})|\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

- Le décodeur ML est équivalent au décodeur MAP si les messages sont équiprobables.
- Sur le canal AWGN sans mémoire, le décodeur ML est équivalent à la fonction suivante :

$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{u})|\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2 = \underset{\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{u})|\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{x}_\ell \mathbf{y}_\ell^T = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}|\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 **Décodage du Maximum de Vraisemblance des codes convolutifs**
- 3 Turbo-Codes

- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}]$
- **Décodeur ML** :
$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C} | \mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$

- **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes)

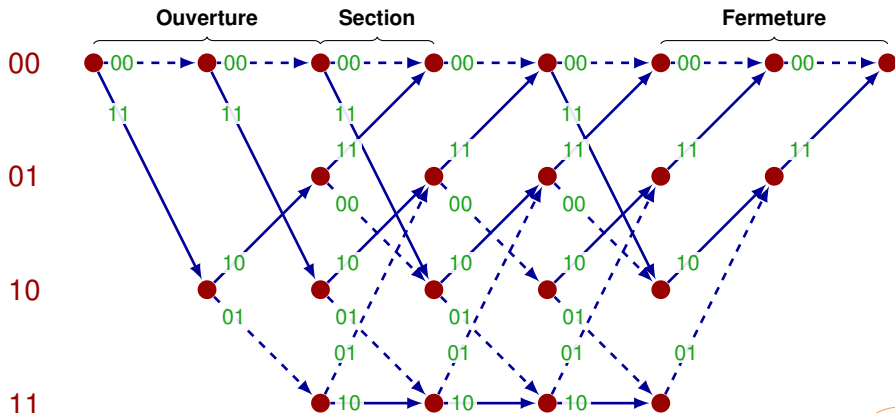
- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}]$
- **Décodeur ML** :
$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C} | \mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$

- **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes) \rightarrow **il y en a 2^K ...**

- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}]$
- **Décodeur ML** :
$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C} | \mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$

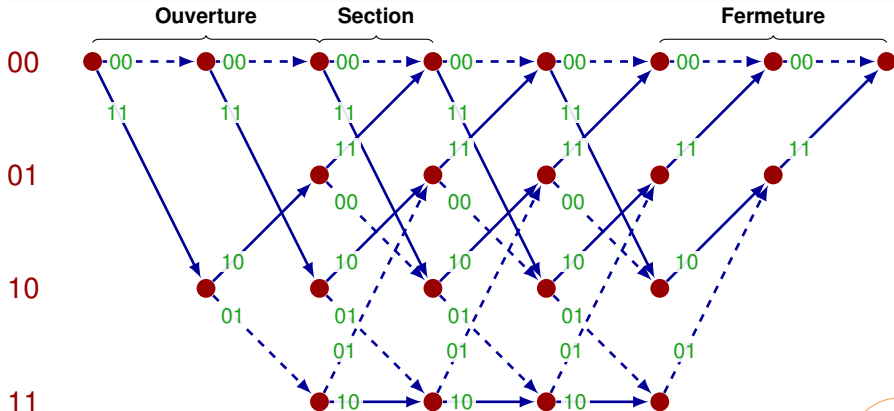
- **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes) \rightarrow **il y en a 2^K ...**
- **Solution 2** : utiliser le treillis + la forme de la fonction de coût \rightarrow **algorithme de Viterbi**

- Soit S_n l'ensemble des états possible du treillis à l'étage n
- Soit $\mathcal{C}(s_0 \rightarrow s_n)$ l'ensemble des chemins partant de s_0 arrivant à s_n dans le treillis
- Introduisons la fonction suivante $J_n(s_n) = \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}(s_0 \rightarrow s_n)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$
- Le décodage ML est équivalent à trouver l'antécédent de $J_L(s_L)$ où $s_0 = s_L = 00$



• **Remarque** : quelque soit $n \geq 0$ il existe au plus **deux transitions menant à s_n** , l'une correspond à $u_{n-1} = 0$ et l'autre $u_{n-1} = 1$. On notera $s_{n-1}^{(0)}$ et $s_{n-1}^{(1)}$ les états de départ de ces transitions et $\mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n)$ la **sortie de l'encodeur** correspondante.

• **Montrons que** : $J_n(s_n) = \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$

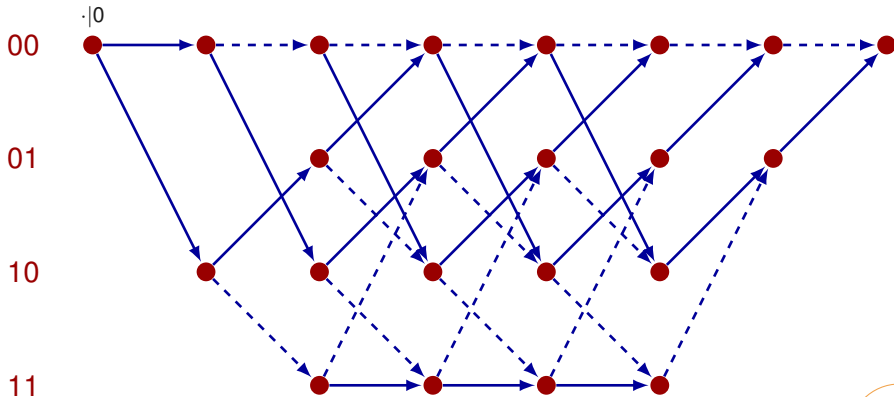


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

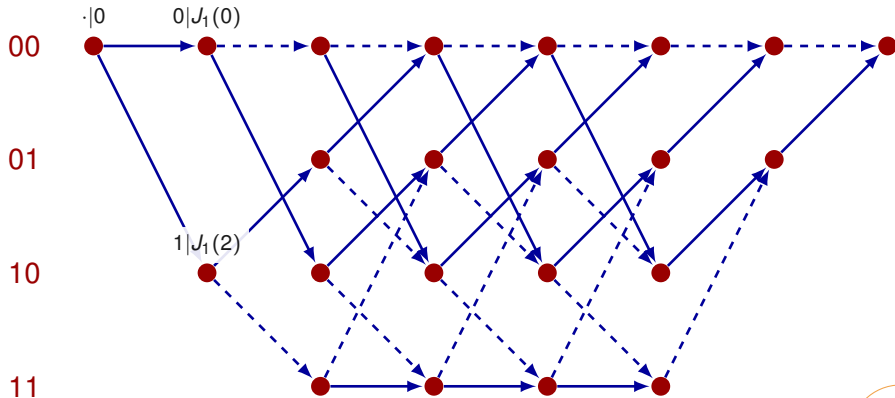


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

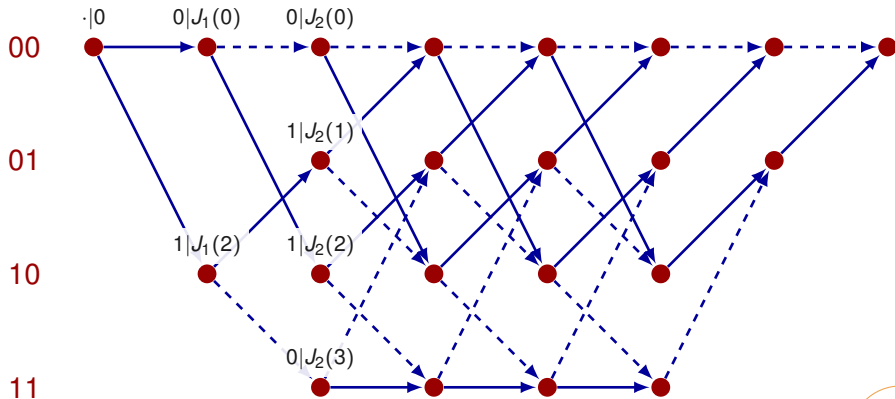


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

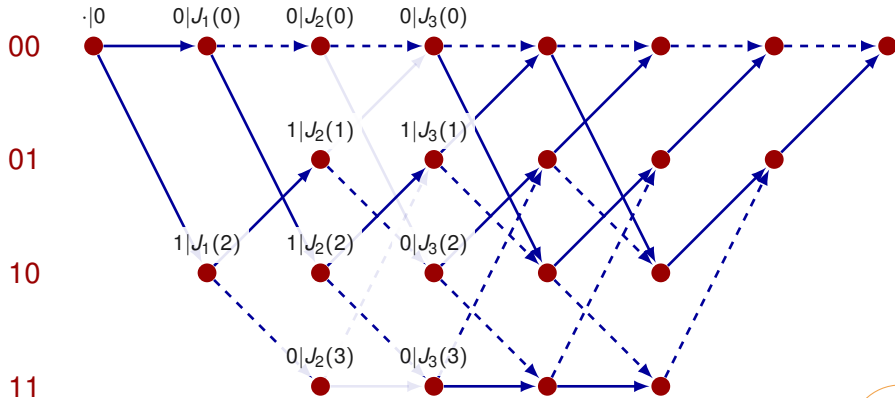


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

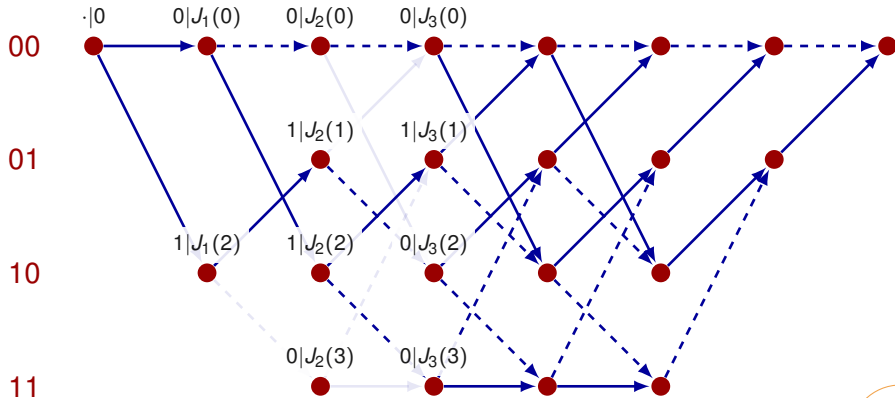


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

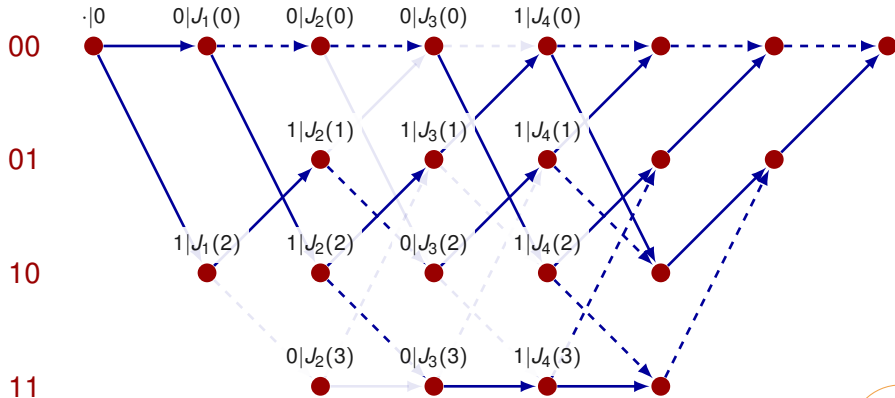


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

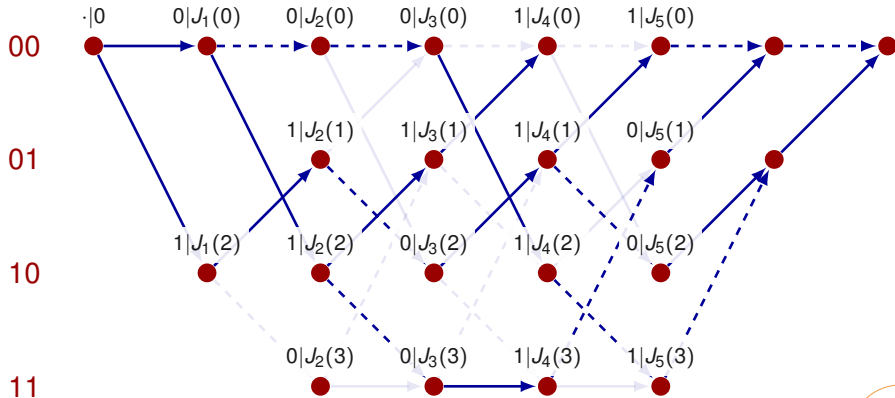


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

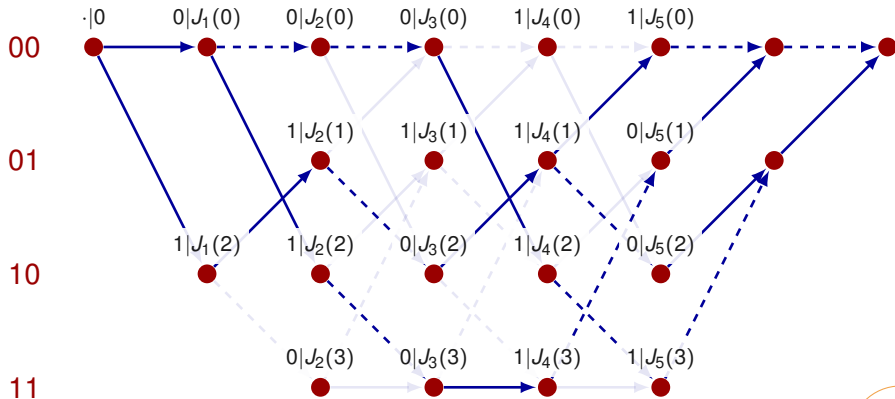


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

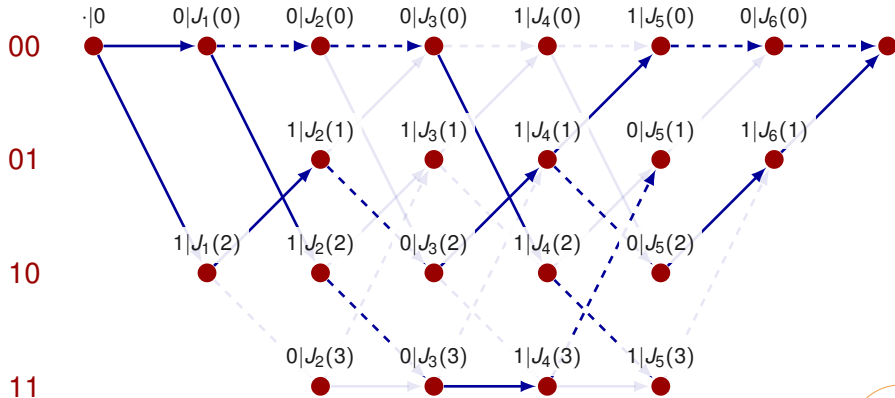


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

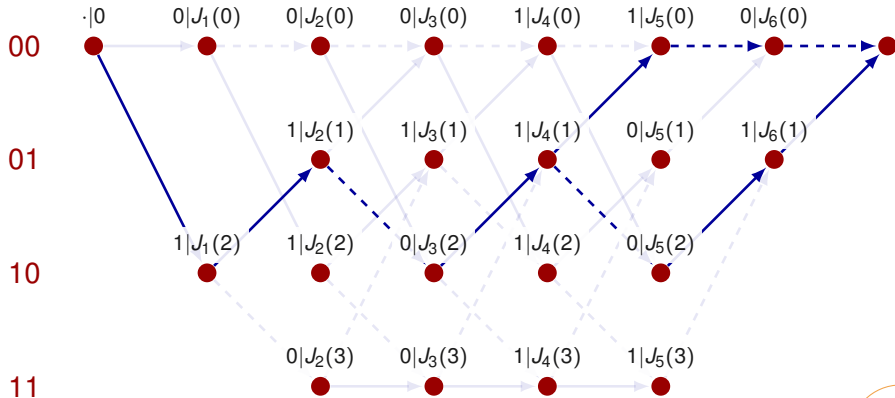


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

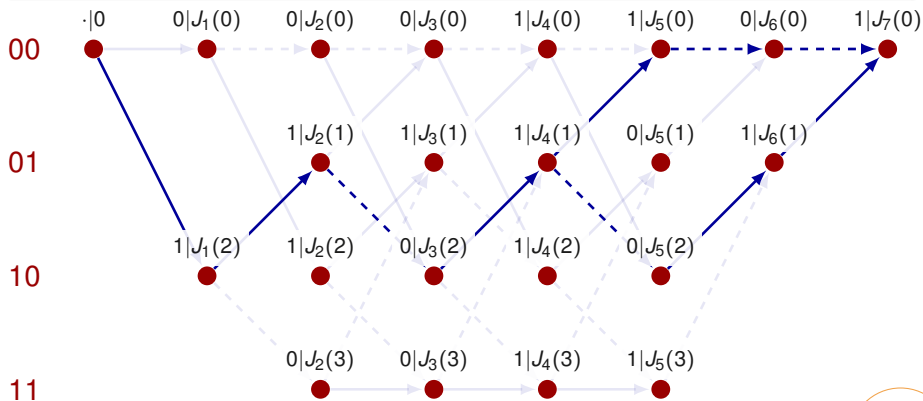


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

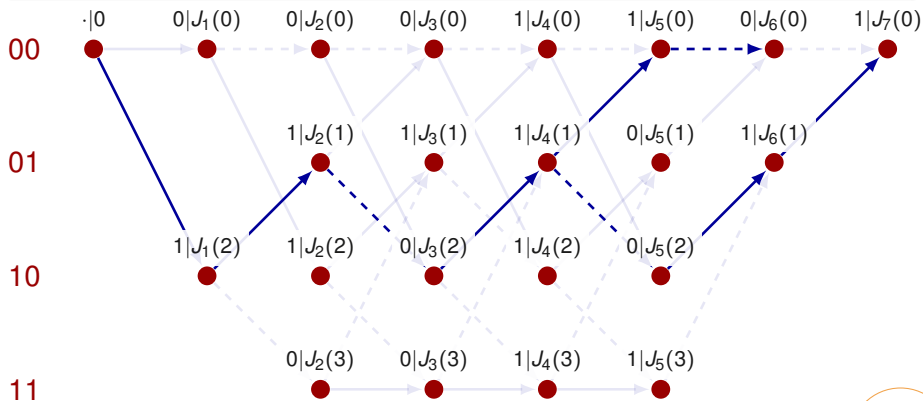


Algorithme de Viterbi

- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$

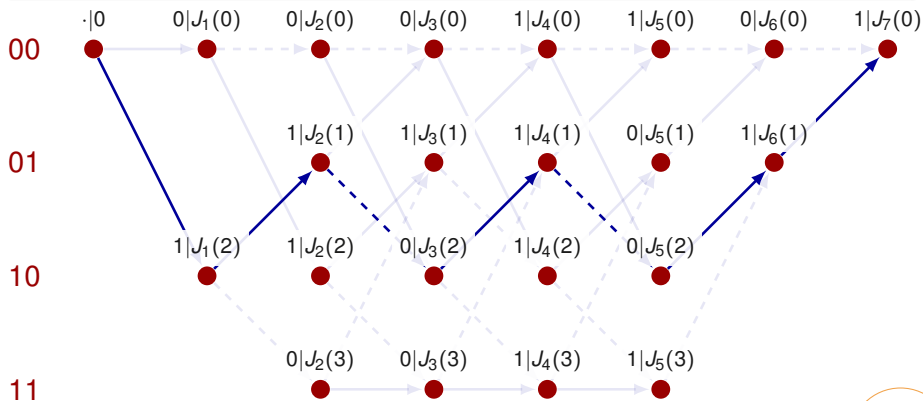


Algorithme de Viterbi

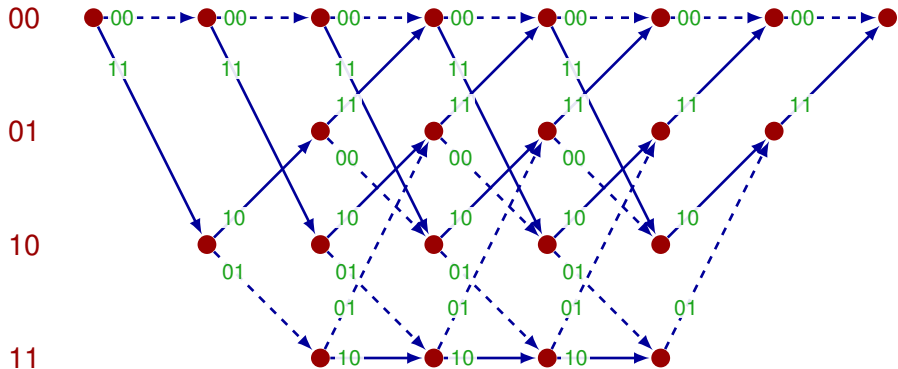
- 1 Pour chaque s_n , calculer :

$$\hat{u}_{n-1}(s_n) | J_n(s_n) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmin}} \mid \min_{u \in \{0,1\}} \left[J_{n-1}(s_{n-1}^{(u)}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1}^{(u)} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$

- 2 Lorsque $n = L$, calculer $\hat{u}_{L-1} = \hat{u}_{L-1}(s_L)$, puis $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-1}(s_n^{\hat{u}_n})$



Avec des valeurs



Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- ☐ A Très difficile
- ☐ B Difficile
- ☐ C Moyen
- ☐ D Simple
- ☐ E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 Décodage du Maximum de Vraisemblance des codes convolutifs
- 3 Turbo-Codes**