A. 【行列】 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$の時、$A^n$ を求めよ。

$|A - \lambda E| = 0$ を解いて、固有値 λ を求める。

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

これを展開すると、$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$ だから、固有値は$\lambda = 1, 2$ 。

もし$\lambda = 1$ ならば、$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

これを解くと$x = -y$ と求まるので、固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$とする。

もし$\lambda = 2$ ならば、$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

これを解くと$x = 1, y = 0$ と求まるので、固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$とする。

この2つの固有ベクトルを並べて作った行列$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$で、Aを挟むと、

$X^{-1}AX = A'$ は対角行列になる。A' の対角項は固有値に一致する。

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$X^{-1}AX = A'$ の両辺をn乗し、XとX^{-1}を両側から掛けると、

$A^n = XA'^nX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

採点基準: 固有値→対角化の流れができていれば2点、固有値行列が求まれば+1点、解が得られれば+2点。

補習問題: 上の手順を参考にして、$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

B. 【数値計算】2つのうち片方を解答せよ。

1. 関数電卓で、1を入力してから、30回以上cosボタンを連打すると、徐々にある値(約0.74)に収束する。この値を、同じく1からはじめてNewton-Raphson法で小数点以下6桁まで求めるには、何回繰り返す必要があるかを答えよ。

cosを連打するということは、$x_{i+1} = \cos x_i$ を次々に計算して、その収束する値を探すことにほかならない。収束した値をx_∞ と書けば、$x_\infty = \cos x_\infty$ が成りたつ。つまり、$x_\infty - \cos x_\infty = 0$ である。
ところで、Newton-Raphson法は、f(x)=0をみたす根xを求める計算手法なので、$f(x) = x - \cos x = 0$ の根を求めると、x_∞ が得られる。
f(x)をxで微分すると、f'(x)=1+\sin xとなり、Newton-Raphson法の漸化式は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$= x_i - \frac{x_i - \cos x_i}{1 + \sin x_i}$$

$x_0 = 1$ としてこの漸化式を次々に計算すると、

$x_1 = 0.75036386784$

$x_2 = 0.739112890911$

$x_3 = 0.739085133385$

$x_4 = 0.739085133215$

4回目で小数点以下6桁が変化しなくなったので、6桁の精度で計算したいなら、3回繰り返せば十分である。このように、Newton-Raphson法の収束は非常に早い。

採点基準: 解くべき方程式が導ければ3点、回数が求まれば+2点。

2. $\ln(1+x)$ をマクローリン展開し、その結果を使って、定積分$f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t$ をx で級数展開せよ。

$g(x) = \ln(1+x)$ とすると、$g'(x) = \frac{1}{1+x}$、$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$、

$g'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}\cdots$ となるので、

$$g(x) = g(0) + \frac{xg'(0)}{1!} + \frac{x^2g''(0)}{2!} + \frac{x^3g'''(0)}{3!} + \cdots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots - (-1)^n\frac{x^n}{n}\cdots$$

と展開できる。

【方法1】上で展開した多項式を、定積分すると、

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\cdots - (-1)^n\frac{t^n}{n}\cdots\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2\cdot 3} + \frac{t^4}{3\cdot 4} - \frac{t^5}{4\cdot 5}\cdots - (-1)^n\frac{t^n}{(n-1)n}\cdots\right]_0^x$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} - \frac{x^5}{4\cdot 5}\cdots - (-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}\cdots$$

【方法2】先に定積分を行う。

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t$$
$$= [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^x$$
$$= (1+x)\ln(1+x) - x = (1+x)g(x) - x$$
$$= (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots - (-1)^n\frac{x^n}{n}\cdots\right) - x$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots - (-1)^n\frac{x^n}{n}\cdots + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}\cdots - (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}\cdots - x$$
$$= x^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + x^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - x^5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\cdots$$

採点基準: $\ln(1+x)$ のマクローリン展開2点、$f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t$ の展開+3点。一般項まで書いていればさらに+。

補習問題: $\exp(1+x)$ をマクローリン展開して第4項まで求めよ。

C. 【偏微分】理想気体の状態方程式は$pV = NkT$ だが、もっと一般的に書けば$pV = f(T)$ と書ける。

$f(T)$ の導関数(T での微分)を$f'(T)$ とする時、次の3つの値の積$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ を求めよ。

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \frac{f(T)}{V}}{\partial T}\right)_V$$

$$= \frac{f'(T)}{V}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \frac{f(T)}{p}}{\partial T}\right)_p$$

$$= \frac{f'(T)}{p}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial \frac{f(T)}{p}}{\partial p}\right)_T$$

$$= -\frac{f(T)}{p^2}$$

これらを組みあわせると、

$$-\frac{f'(T)}{V}\frac{p}{f'(T)}\frac{f(T)}{p^2} = -\frac{f(T)}{pV} = -1$$

(実は、状態方程式に限らず、独立な3変数の間で$\left(\frac{x}{y}\right)_z \left(\frac{y}{z}\right)_x \left(\frac{z}{x}\right)_y = -1$が成りたつ)

採点基準: 理想気体の場合で解ければ2点、一般式で解ければ5点。

補習問題: ファンデルワールスの状態方程式

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

に関して、$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ を求めよ。

D. 【その他】多面体は、面、辺(面を囲む線)、頂点(辺をつなぐ点)でできている。多面体の面の総数をF、辺の総数をE、頂点の総数をVで表すことにする。 例えば、立方体はF=6, E=12, V=8である。また、立方体では、隣接する2つの面は1本の辺を共有し、隣接する3つの面は1つの頂点を共有している。(正八面体の場合は、4つの面が1つの頂点を共有している。)
さて、正12面体、メタンハイドレートのケージ構造、フラーレン、カーボンナノチューブ(両端がふさがっているもの)は、いずれも次のような性質を持っている。
1. 表面が5角形と6角形の面だけで覆われている。(5角形と6角形の個数をF_5 とF_6 とすると、$F_5 + F_6 = F$)
2. 隣接する2つの面は1本の辺を共有し、隣接する3つの面は1つの頂点を共有している。
3. オイラーの関係式$F - E + V = 2$ が成り立つ。
この時、多面体の形に関係なく、必ず$F_5 = 12$ となることを示せ。
(ヒント: まず、EとVをF_5 とF_6 で表す。)

まず、(1)より
$$F_5 + F_6 = F$$
(2)より、
$$5F_5 + 6F_6 = 3V = 2E$$
(3)より
$$F - E + V = 2$$

(3)を(1)に入れると、
$$F_5 + F_6 = 2 + E - V$$
6倍すると
$$6F_5 + 6F_6 = 12 + 6E - 6V$$
(2)を差し引くと
$$F_5 = 12 + 6E - 9V = 12$$

採点基準: 5点〜
発展問題(解けた人用): 上の3つの条件をみたす13面体は作れないことを示せ。