

Giovanna Girotto - 11803416

Guilherme Domingues Yamashita - 11804571

Rafael Venancio Durand - 11805036

Vittor Braide Costa - 11806920

Grupo 14

**PME3481 - Controle e Aplicações**  
**Controle da trajetória no plano horizontal de um**  
**veículo submarino autônomo (AUV)**

São Paulo

2023

Giovanna Girotto - 11803416

Guilherme Domingues Yamashita - 11804571

Rafael Venancio Durand - 11805036

Vittor Braide Costa - 11806920

Grupo 14

## **PME3481 - Controle e Aplicações**

### **Controle da trajetória no plano horizontal de um veículo submarino autônomo (AUV)**

Relatório T2 do trabalho proposto pela disciplina *PME3481 - Controle e Aplicações*

Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

Departamento de Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Agenor Toledo Fleury

Prof. Dr. Décio Crisol Donha

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

São Paulo

2023

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Foto do <i>Cuttlefish</i> em fase de testes . . . . .	4
Figura 2 – Distribuição dos propulsores em X-shape . . . . .	5
Figura 3 – Definição dos referenciais do sistema . . . . .	6
Figura 4 – Diagrama de blocos em malha aberta . . . . .	11
Figura 5 – Simulação para $u_c^E = v_c^E = 1 \text{ m/s}$ e $\tau = 0$ . . . . .	13
Figura 6 – Simulação para $u_c^E = v_c^E = 0$ e $\tau_u = 50 \text{ N}$ . . . . .	14
Figura 7 – Resposta em frequência - malha aberta . . . . .	14
Figura 8 – Variação de $x$ , $y$ e $\psi$ com condições iniciais com alocação de polos . . . . .	17
Figura 9 – Esforços nos atuadores para simulação a partir de condições iniciais . . . . .	17
Figura 10 – Variação de $x$ , $y$ e $\psi$ com degrau de corrente com alocação de polos . . . . .	18
Figura 11 – Esforços nos atuadores para simulação com degrau de corrente . . . . .	18
Figura 12 – Variação de $x$ , $y$ e $\psi$ após condições iniciais com LQR . . . . .	19
Figura 13 – Esforços nos atuadores para simulação a partir de condições iniciais . . . . .	20
Figura 14 – Variação de $x$ , $y$ e $\psi$ com degrau de corrente com LQR . . . . .	20
Figura 15 – Variação de $\psi$ e esforços nos atuadores com degrau de corrente com LQR . . . . .	21
Figura 16 – Comparação entre o método de alocação de polos e o LQR . . . . .	21
Figura 17 – Mapa de polos do controlador e observador por alocação . . . . .	23
Figura 18 – Erros das variáveis de posição utilizando o observador por alocação . . . . .	23
Figura 19 – Polos do Observador sintetizado por LQR . . . . .	24
Figura 20 – Erros das variáveis de posição utilizando o observador por LQR . . . . .	25
Figura 21 – Comparação entre $\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ para observador e controlador por alocação . . . . .	26
Figura 22 – Comparação entre $\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ para observador e controlador por LQR . . . . .	26
Figura 23 – $x$ , $y$ e $\psi$ pelo tempo e trajetória realizada para referência constante . . . . .	27
Figura 24 – Trajetória do veículo para referência constante . . . . .	28
Figura 25 – Trajetória do veículo para referência variável com distúrbio . . . . .	29
Figura 26 – Resposta em Malha Aberta . . . . .	30
Figura 27 – Polos e zeros . . . . .	31
Figura 28 – Diagrama de blocos em malha fechada . . . . .	33
Figura 29 – Resposta harmônica para $K_{cr}$ . . . . .	33
Figura 30 – Resultados para controlador PID sintonizado por Ziegler-Nichols . . . . .	34
Figura 31 – Resultados para controlador PID sintonizado por alocação de polos . . . . .	35
Figura 32 – Resultados para controlador PID sintonizado por controle ótimo - ITAE	37
Figura 33 – Lugar das raízes para ganho proporcional . . . . .	38
Figura 34 – Lugar das raízes para ganho integral . . . . .	38
Figura 35 – Lugar das raízes para ganho derivativo . . . . .	38
Figura 36 – Resultados para controlador PID sintonizado por lugar das raízes . . . . .	39

Figura 37 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema não controlado . . . . .	40
Figura 38 – Resposta do sistema com compensador e gráfico de Bode . . . . .	41
Figura 39 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode para avaliação de estabilidade	41
Figura 40 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por alocação de polos . . . . .	42
Figura 41 – Mapa de zeros e polos efetivamente alocados em malha fechada . . . . .	42
Figura 42 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por controle ótimo . . . . .	43
Figura 43 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por Lugar das Raízes . . . . .	44
Figura 44 – Resposta com PID e compensador e Diagrama de Bode . . . . .	44
Figura 45 – Ação de controle para controlador PID com compensador . . . . .	45
Figura 46 – Comparação dos controladores PID . . . . .	45
Figura 47 – Comparação no domínio do tempo e frequência . . . . .	46
Figura 48 – Malha e resposta obtidas em <i>Simulink</i> para seguimento de sinal . . . . .	47
Figura 49 – Malha e resposta obtidas em <i>Simulink</i> para rejeição de distúrbios . . . . .	47
Figura 50 – Diagramas de Bode para as funções de transferência original e reduzida	48
Figura 51 – Ganhos do controlador PID pelo lugar das raízes para o sistema reduzido	49
Figura 52 – Resposta do sistema reduzido com controlador PID sintonizado pelo lugar das raízes . . . . .	49
Figura 53 – Valores de $A_{22}$ para seção transversal retangular . . . . .	53

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>2</b>
1.3.1	Hipóteses simplificadoras	2
1.3.2	Desenvolvimento do modelo	3
1.3.3	Síntese dos controladores e observadores	3
<b>2</b>	<b>MODELO FÍSICO</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Estrutura</b>	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>Sensores</b>	<b>4</b>
<b>2.3</b>	<b>Atuadores</b>	<b>5</b>
<b>2.4</b>	<b>Amortecimento hidrodinâmico</b>	<b>5</b>
<b>2.5</b>	<b>Massa adicional</b>	<b>5</b>
<b>2.6</b>	<b>Correnteza</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>6</b>
<b>3.1</b>	<b>Sistemas de coordenadas</b>	<b>6</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelo cinemático</b>	<b>7</b>
<b>3.3</b>	<b>Modelo dinâmico</b>	<b>7</b>
3.3.1	Equações de corpo rígido	8
3.3.2	Forças e momentos hidrodinâmicos	8
3.3.2.1	Massa adicional	8
3.3.2.2	Amortecimento hidrodinâmico	9
3.3.3	Propulsores	9
<b>3.4</b>	<b>Modelo matemático não linear</b>	<b>9</b>
<b>3.5</b>	<b>Modelo matemático linear</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EM MALHA ABERTA</b>	<b>11</b>
<b>4.1</b>	<b>Diagrama de blocos</b>	<b>11</b>
<b>4.2</b>	<b>Função de transferência</b>	<b>11</b>
<b>4.3</b>	<b>Matriz de transição</b>	<b>11</b>
<b>4.4</b>	<b>Análise de estabilidade</b>	<b>12</b>
<b>4.5</b>	<b>Simulações no domínio do tempo</b>	<b>13</b>
4.5.1	Simulação para distúrbios em malha aberta	13
4.5.2	Simulação para atuação em malha aberta	13

<b>4.6</b>	<b>Simulações no domínio da frequência . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>CONTROLE MODERNO . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>5.1</b>	<b>Controlabilidade e observabilidade . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>5.2</b>	<b>Reguladores . . . . .</b>	<b>15</b>
5.2.1	Regulador por alocação de polos . . . . .	16
5.2.1.1	Simulação para condições iniciais . . . . .	16
5.2.1.2	Simulação para distúrbio de corrente . . . . .	17
5.2.2	Regulador linear quadrático (LQR) . . . . .	19
5.2.2.1	Simulação para condições iniciais . . . . .	19
5.2.2.2	Simulação para distúrbio de corrente . . . . .	20
5.2.3	Comparação entre alocação de polos e LQR . . . . .	21
<b>5.3</b>	<b>Observadores de estado . . . . .</b>	<b>21</b>
5.3.1	Observador por alocação de polos . . . . .	22
5.3.2	Observador por LQR . . . . .	24
5.3.3	Princípio da separação . . . . .	25
<b>5.4</b>	<b>Seguidores . . . . .</b>	<b>26</b>
5.4.1	Seguidor de referência constante . . . . .	26
5.4.2	Seguidor de referência variável . . . . .	28
5.4.2.1	Dinâmica da referência . . . . .	28
5.4.2.2	Dinâmica do distúrbio . . . . .	29
5.4.2.3	Resultados . . . . .	29
<b>6</b>	<b>CONTROLE CLÁSSICO . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>6.1</b>	<b>Função de transferência em malha aberta escolhida . . . . .</b>	<b>30</b>
6.1.1	Resposta em malha aberta . . . . .	30
6.1.2	Análise de polos e zeros . . . . .	31
6.1.3	Análise do tipo e erro em RP . . . . .	31
<b>6.2</b>	<b>Sintonia PID . . . . .</b>	<b>32</b>
6.2.1	Método de Ziegler-Nichols . . . . .	33
6.2.2	Método de alocação de polos . . . . .	34
6.2.3	Controle ótimo . . . . .	36
6.2.4	Lugar das raízes . . . . .	37
<b>6.3</b>	<b>Análise da estabilidade relativa e síntese de compensadores . . . . .</b>	<b>39</b>
6.3.1	Sistema sem controle PID . . . . .	40
6.3.2	Sistema sintonizado por Ziegler-Nichols . . . . .	41
6.3.3	Sistema sintonizado por alocação de polos . . . . .	42
6.3.4	Sistema sintonizado por controle ótimo . . . . .	43
6.3.5	Sistema sintonizado por lugar das raízes . . . . .	43
<b>6.4</b>	<b>Comparação dos controladores . . . . .</b>	<b>45</b>

<b>6.5</b>	<b>Seguimento de sinal e rejeição de distúrbios . . . . .</b>	<b>46</b>
6.5.1	Seguimento de sinal . . . . .	47
6.5.2	Rejeição de distúrbios . . . . .	47
<b>6.6</b>	<b>Redução de ordem . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>PARÂMETROS ADOTADOS . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>A.1</b>	<b>Atuadores . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>A.2</b>	<b>Amortecimento hidrodinâmico . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>A.3</b>	<b>Massa adicional . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>CÁLCULO DA MASSA ADICIONAL E AMORTECIMENTO HIDRODINÂMICO . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>C</b>	<b>LINEARIZAÇÃO . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>C.1</b>	<b>Pontos de operação . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>C.2</b>	<b>Espaço de estados . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>C.3</b>	<b>Linearização . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>D</b>	<b>FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>E</b>	<b>INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES - CONTROLADORES NO ESPAÇO DE ESTADOS . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>E.1</b>	<b>Alocação de polos . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>E.2</b>	<b>Controle LQ . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>F</b>	<b>CÓDIGOS . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>F.1</b>	<b>Controle no Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>59</b>
F.1.1	Código para simulação em malha aberta . . . . .	59
F.1.2	Código para alocação de polos . . . . .	62
F.1.3	Código para LQR . . . . .	62
F.1.4	Código para construção dos observadores . . . . .	64
F.1.5	Código para construção dos seguidores . . . . .	67
<b>F.2</b>	<b>Controle no domínio da frequência . . . . .</b>	<b>71</b>
F.2.1	Ziegler-Nichols . . . . .	71
F.2.2	Alocação de Polos e Redução de Ordem . . . . .	73
F.2.3	Controle Ótimo . . . . .	75
F.2.4	Lugar das Raízes . . . . .	77

# 1 Introdução

Os submarinos autônomos (AUVs, da sigla em inglês) são veículos subaquáticos não tripulados e pré-programados, que operam autonomamente durante sua missão. Esse tipo de veículo é comumente utilizado na indústria marinha, em aplicações oceanográficas, operações militares, ou na indústria *offshore* como instrumentos de intervenção, realizando tanto as análises geofísicas quanto a inspeção e manutenção de estruturas submersas (CARRERAS et al., 2014). O uso de AUVs possibilita acesso à regiões antes inacessíveis com baixos custos de operação, melhor qualidade de dados adquiridos, entre outros benefícios (BELLINGHAM, 2009).

Nesse sentido, o AUV *Cuttlefish* do *German Research Center for Artificial Intelligence* é um veículo recém projetado para aplicações em estruturas *offshore*. Seu principal objetivo é a manipulação de estruturas submersas, operando em duas etapas: primeiramente, o veículo realiza uma inspeção da área movimentando-se horizontalmente na água e, em seguida, ele se posiciona verticalmente e realiza as manipulações programadas (CHRISTENSEN et al., 2022).

Para a realização dessas tarefas, a síntese e o estudo de controladores se faz necessária, para verificar se o sistema consegue atuar segundo seus objetivos. Portanto, o presente trabalho buscará estudar a dinâmica e implementar controladores no domínio do tempo e da frequência de maneira a verificar o desempenho do *Cuttlefish*.

## 1.1 Objetivos

O objetivo do trabalho é primeiramente realizar a modelagem do plano horizontal para o AUV Cuttlefish. Em seguida, visa-se realizar simulações em malha aberta no domínio do tempo e da frequência para analisar como o sistema responde dessa maneira.

Nisso, realiza-se a síntese de controladores pela abordagem do espaço de estados de maneira a modificar a resposta dinâmica por meio dos propulsores do veículo quando esse é submetido a um distúrbio de correnteza.

Por último, é possível aplicar as técnicas de controle clássico para sintonizar controladores por diferentes métodos. Para tanto, utiliza-se algumas das funções de transferência escolhidas do sistema.

## 1.2 Revisão bibliográfica

Os parâmetros geométricos e de inércia foram obtidos de Christensen et al. (2022). Além disso, como o estudo de corpos submersos apresenta uma série de coeficiente hidrodinâmicos, consultou-se Ávila (2008), que auxiliou a obter valores para massa adicional e amortecimento hidrodinâmico.

Quanto à modelagem matemática, o livro de Fossen (1994) fornece o modelo cinemático, que conecta o sistema de coordenadas do referencial fixo com o sistema de coordenadas ligado ao corpo; e o modelo dinâmico, que relaciona as grandezas cinemáticas com as grandezas dinâmicas. O livro também traz a modelagem matemática da massa adicionada, do amortecimento hidrodinâmico dos efeitos de correnteza. Outras fontes como Fossen (2021) e Fossen (1991) serviram para complementar o desenvolvimento do modelo.

Para obter o modelo matemático linear do sistema, Pérez (1990) e Rentschler (2003) serviram no desenvolvimento do algoritmo para a linearização das equações diferenciais.

Para a síntese, estudo e análise utilizou-se sobretudo as notas de aula da bibliografia de Donha (2023) e também o livro Friedland (1986).

## 1.3 Metodologia

### 1.3.1 Hipóteses simplificadoras

Para tornar o modelo prático, é necessário adotar algumas simplificações. Nesse sentido, esta seção apresenta todas as hipóteses simplificadoras utilizadas.

- **Restrição do estudo do movimento plano**

Limita-se o problema ao plano horizontal, mantendo somente três graus de liberdade, avanço, deriva e guinada, semelhantemente ao que foi feito por Yu et al. (2017).

- **Veículo completamente submerso**

O veículo está completamente submerso de maneira a não sofrer efeitos de superfície ou fundo, como apresentado por Orpen (2021).

- **Veículo modelado como corpo rígido, com geometria aproximada de um paralelepípedo**

Considerou-se o veículo como um corpo rígido e um paralelepípedo, com três planos de simetria e os eixos de inércia coincidindo com os eixos do referencial móvel.

- **Centro de massa coincide com o centro geométrico e centro de empuxo**

De maneira coerente com o apresentado em Fossen (1994), a hipótese simplifica a dinâmica e faz não ter de lidar com o efeito de forças restauradoras.

- A única fonte de perturbação do sistema é uma correnteza de velocidade constante

Veículos marítimos estão sujeitos a diversas influências do meio. Entretanto, como o AUV modelado encontra-se completamente submerso, desconsiderou-se qualquer outra perturbação além de uma correnteza com velocidade e ângulo de incidência constantes.

- Influência de segunda ordem ou superior, junto com termos cruzados do amortecimento hidrodinâmico são desconsiderados

Conforme Fossen (1994), em submarinos com 3 planos de simetria, o amortecimento é desacoplado, além de ser possível negligenciar termos de segunda ordem ou superiores.

- Termos fora da diagonal da matriz de massa adicionada são negligenciáveis

Devido aos dois planos de simetria pela geometria escolhida para o veículo, tem-se que a matriz de massa adicionada para o nosso modelo será diagonal, conforme mostra Kaasa (2021).

### 1.3.2 Desenvolvimento do modelo

A obtenção do modelo se deu pela aplicação do Teorema da Resultante para os movimentos de translação e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para o movimento de rotação, considerando a transformação entre os referenciais, a velocidade relativa de corrente e as forças devido aos atuadores.

Com isso, obteve-se um conjunto de equações diferenciais não lineares. Dessa forma, linearizou-se essas equações por meio de um algoritmo escrito no *Mathematica*.

### 1.3.3 Síntese dos controladores e observadores

Após uma análise de controlabilidade e observabilidade, foram sintetizados controladores usando o espaço de estados. Dessa maneira, foram implementados um regulador por alocação de polos e um linear quadrático. Além disso, foram criados seguidores, um para referência constante e outro para variável.

Ademais, foram feitos observadores para reconstruir todo o estado simulado. Nesse sentido, serão feitos e comparados observadores por alocação de polos e pelo método linear quadrático, além do controle com uso de variáveis reconstruídas pelo Princípio da Separação.

Por último, aplicou-se também as ferramentas de controle clássico. Para tanto, os controladores foram sintonizados por quatro diferentes métodos: Ziegler-Nichols, controle ótimo, alocação de polos e lugar das raízes. Ao final, foram feitas análises de estabilidade relativas, juntamente a uma comparação dos resultados.

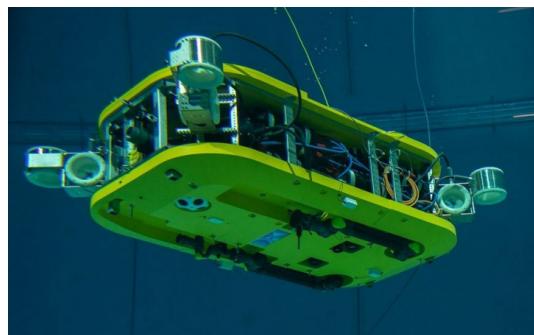
## 2 Modelo físico

Para descrever o movimento do AUV, é necessário apresentar alguns parâmetros do próprio veículo, do ambiente em que ele se encontra e dos atuadores. Após indicar todas as propriedades, tais elementos serão integrados para obter as equações diferenciais que modelam o movimento do submarino.

### 2.1 Estrutura

Conforme abordado na disciplina *PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos*, o objetivo primário era modelar o AUV *Cuttlefish*, apresentado na Figura 1. Entretanto, devido às complicações devido a falta de dados dos coeficientes hidrodinâmicos de tal AUV, arbitrou-se valores tendo como ordem de grandeza os encontrados por Ávila (2008)

Figura 1 – Foto do *Cuttlefish* em fase de testes



Fonte: (CHRISTENSEN et al., 2022)

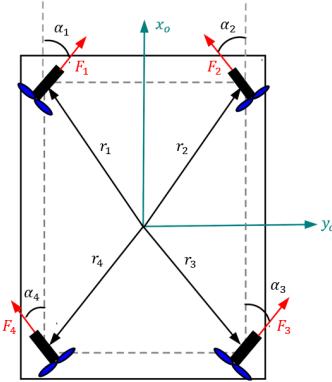
### 2.2 Sensores

Os sensores a serem utilizados são tais que serão medidas as posições  $x$  e  $y$  e o ângulo de rotação  $\psi$  do AUV em relação ao referencial inercial adotado. Para tanto, o ângulo de rotação pode ser medido com a utilização de uma bússola, que deve ser posicionada acima ou abaixo do baricentro, alinhado na direção Z e devidamente nivelado. Assim como citado por Ávila (2008), optou-se pelo modelo TCM2-5. Já para as posições, é usual utilizar sonares em um sistema com *Mobile Beacons*, conforme citado em CHANDRASEKHAR (2006).

## 2.3 Atuadores

Serão utilizados quatro propulsores distribuídos em formato X conforme apresentado na Figura 2, inspirados no *Cuttlefish*.

Figura 2 – Distribuição dos propulsores em X-shape



Fonte: Autoria própria

## 2.4 Amortecimento hidrodinâmico

O submarino encontra-se completamente submerso e essa condição influencia diretamente no movimento do veículo. Desse modo, é necessário considerar o amortecimento provocado pelo fluido. Tal influência pode ser modelada por meio de coeficientes, os quais podem ser calculados assim como apresentado no Apêndice B e cujos valores adotados estão apresentados no Apêndice A. Como desconhece-se esses valores para o *Cuttlefish*, os dados de Ávila (2008) auxiliaram a escolher valores com ordens de grandeza condizentes.

## 2.5 Massa adicional

A massa adicional também é uma das influências do meio no movimento do veículo e deve ser calculado conforme a geometria. Os valores adotados foram baseados nos encontrados em Ávila (2008) e estão apresentados no Apêndice A.

## 2.6 Correnteza

No modelo, será considerada uma fonte de perturbação do sistema, sendo ela uma correnteza de módulo constante. Assim como apresentado em Fossen (1994), uma correnteza induzida no caso bidimensional pode ser descrita por dois parâmetros: as componentes de velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente denotadas por  $u_c^E$  e  $v_c^E$ .

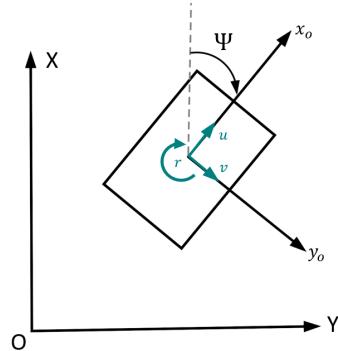
# 3 Modelo matemático

A descrição do movimento de um AUV é comumente dividida entre sua cinemática, isto é, a descrição puramente geométrica do movimento, e a dinâmica, o estudo das forças envolvidas. Assim, neste capítulo serão abordados os referenciais utilizados e os equacionamentos cinemáticos e dinâmicos envolvendo interações hidrodinâmicas.

## 3.1 Sistemas de coordenadas

Para a cinemática, é conveniente utilizar dois sistemas de coordenadas, o primeiro deles ligado ao corpo  $x_o y_o$ , cuja origem está no centro de massa e os eixos correspondem aos eixos principais de inércia. Conforme mostrado na Figura 3, para veículos marinhos,  $x_o$  é o eixo dirigido da popa à proa,  $y_o$  aquele dirigido a estibordo.

Figura 3 – Definição dos referenciais do sistema



Fonte: Autoria própria

O movimento do sistema de coordenadas fixos ocorre em relação a um referencial  $XY$  fixo na terra e também representado na Figura 3. Para o estudo em questão, os efeitos das acelerações na superfície da terra são desprezíveis e o referencial pode ser considerado inercial.

Esta configuração de referenciais faz com que posições e orientações sejam descritas em relação ao referencial inercial e velocidades lineares e angulares no referencial fixo ao corpo. Nesse sentido, o movimento plano do veículo pode ser descrito pelos seguintes vetores:

$$\boldsymbol{\eta} = [x \ y \ \psi]^T; \boldsymbol{\nu} = [u \ v \ r]^T; \boldsymbol{\tau} = [\tau_u \ \tau_v \ \tau_r]^T \quad (3.1)$$

Nessa notação  $\boldsymbol{\eta}$  denota a posição e orientação do veículo em relação ao referencial inercial,  $\boldsymbol{\nu}$  as componentes de velocidades lineares e angulares em relação ao eixo fixo ao corpo e  $\boldsymbol{\tau}$  as forças e momentos aplicados ao corpo descritas no referencial fixo ao corpo.

## 3.2 Modelo cinemático

Como ilustrado na Figura 3, a transformação do sistema de coordenadas inercial para o fixo ao corpo é composta de apenas uma rotação.

Assim, pode-se representar uma base de versores do sistema  $x_0y_0z_0$  no  $XYZ$  por meio da seguinte matriz de rotação, de forma que a trajetória do veículo no sistema de coordenadas iniciais será dada por:

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\eta}} = R(\psi)\boldsymbol{\nu} \quad (3.2)$$

Assim, pode-se tirar as relações:

$$\begin{cases} u = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi \\ v = -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi \\ r = \dot{\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi - \dot{x} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{y} \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{v} = -\ddot{x} \sin \psi + \ddot{y} \cos \psi - \dot{x} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{y} \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{r} = \ddot{\psi} \end{cases} \quad (3.3)$$

## 3.3 Modelo dinâmico

De antemão, vale ressaltar que a influência dos termos hidrodinâmicos no movimento do veículo está associada com a velocidade relativa entre o fluido e o submarino. Assim sendo, na presença de correntezas, é interessante definir a velocidade relativa  $\boldsymbol{\nu}_r$  dado por  $\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_c = [u_r, v_r, \dot{\psi}]^T$ .

O termo  $\boldsymbol{\nu}_c$  representa a correnteza expressa no referêncial fixo ( $u_c^E, v_c^E$ ) decomposta no referencial do veículo para facilitar a construção das equações do movimento. Tal procedimento encontra-se explicitado Equação 3.4.

$$\boldsymbol{\nu}_c = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^E \\ v_c^E \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Com a velocidade relativa definida, é possível escrever as equações que regem o sistema em função de  $\boldsymbol{\nu}_r$ .

### 3.3.1 Equações de corpo rígido

A dinâmica do veículo é obtida por meio da aplicação do Teorema de Resultante, em que a origem do sistema de coordenadas do corpo corresponde ao baricentro do veículo, e da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular em relação ao centro de massa:

$$\mathbf{F}_c = m(\dot{\mathbf{v}}_c^0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{I}_c]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{I}_c]\boldsymbol{\omega} \quad (3.6)$$

Dessa forma, como o centro do sistema de coordenadas fixos está no centro de massa do veículo e os eixos desse sistema são os eixos principais de inércia, obtém-se as equações que regem o movimento do AUV na forma matricial:

$$\mathbf{M}_{RB}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.7)$$

Onde  $\boldsymbol{\nu}$  é o vetor velocidade  $\boldsymbol{\tau}$  é o vetor de esforços denotado por 3.1. A matriz  $\mathbf{M}_{RB}$  é a matriz de inércia e  $\mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})$ , por sua vez, é a matriz de Coriolis, representadas abaixo:

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mv \\ 0 & 0 & mu \\ mv & -mu & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Forças e momentos hidrodinâmicos

Segundo (FOSSEN, 1994), as forças e momentos hidrodinâmicos em um veículo marinho são dados pela soma de três componentes principais: massa adicionada devido a inércia do fluido, amortecimento hidrodinâmico pela energia dissipada pelo movimento do fluido e forças restauradoras devido ao peso e empuxo.

#### 3.3.2.1 Massa adicional

A massa adicional pode ser entendida como a inércia do fluido deslocado quando o veículo se movimenta embaixo da água. Dessa maneira, é conveniente separar essa interação em uma matriz de inércia e uma matriz de Coriolis devido a massa adicional,  $\mathbf{M}_A$  e  $\mathbf{C}_A(\boldsymbol{\nu}_r)$ . Nesse sentido, Fossen (1994) diz que, para veículos submersos que se locomovem a baixas velocidades, essas matrizes podem ser simplificadas para as seguintes formas:

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_A(\boldsymbol{\nu}_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{\dot{v}} v_r \\ 0 & 0 & -X_{\dot{u}} u_r \\ -Y_{\dot{v}} v_r & X_{\dot{u}} u_r & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.3.2.2 Amortecimento hidrodinâmico

Assim como apresentado em Fossen (1994), o amortecimento hidrodinâmico pode ser representado por uma matriz  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$  e é caracterizado por um conjunto de 4 causas: oscilações externas, fricção das superfícies do veículo com o fluido, amortecimento de deriva das ondas e amortecimento em função do desprendimento de vórtices.

Para simplificar o modelo, retoma-se as hipóteses simplificadoras, as quais desprezam alguns itens da matriz de amortecimento. Com isso, desprezando os efeitos quadráticos da matriz de amortecimento, obtém-se:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) = -\text{diag}\{X_u, Y_v, N_r\} \quad (3.10)$$

### 3.3.3 Propulsores

Os esforços causados pelos propulsores no AUV são representados pelo vetor  $\boldsymbol{\tau}$ , descrito no referencial solidário ao corpo e dado por duas forças  $\boldsymbol{\tau}_u$ ,  $\boldsymbol{\tau}_v$  e um momento  $\boldsymbol{\tau}_r$ :

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_u \ \tau_v \ \tau_r]^T \quad (3.11)$$

## 3.4 Modelo matemático não linear

Finalmente, conforme descrito por Fossen (1994), o modelo matemático não-linear pode ser descrito em forma matricial:

$$\mathbf{M}_{RB} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}_A \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}_A(\boldsymbol{\nu}_r) \cdot \boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r) \boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\tau} \quad (3.12)$$

## 3.5 Modelo matemático linear

As expressão obtida em 3.12 é não linear e, assim, não é possível aplicar diversas ferramentas de controle, como o princípio da superposição. Nesse sentido, surge o interesse de linearizar o resultado obtido em torno de um ponto de operação. Para tanto, aplica-se uma linearização em série de Taylor que desconsidera termos de segunda ordem ou superiores. Ao final, obtém-se um modelo linear válido em uma determinada vizinhança (PÉREZ, 1990).

O procedimento de linearização foi feito com o software *Mathematica*, cujo código está presente em C juntamento com os pontos de operação definidos.

Com isso, obtém-se o sistema representado em **espaço de estados**:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (3.13)$$

Para o sistema analisado, tem-se:

- **Vetor de estados:**  $\mathbf{x}^T = [x \ y \ \psi \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\psi}]$
- **Vetor de saídas:**  $\mathbf{y}^T = [x \ y \ \psi]$
- **Vetor de entradas:** esforços dos propulsores  $\mathbf{u}^T = [\tau_u \ \tau_v \ \tau_r]$
- **Vetor de distúrbios:** velocidade de correnteza  $\mathbf{w}^T = [u_c^E \ v_c^E]$

Após a linearização, obteve-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,083664 & -0,182536 & 0,0239648 & -0,119824 \\ 0 & 0 & -0,0216484 & 0,0193319 & -0,0152079 & 0 \\ 0 & 0 & -0,112815 & 0,225631 & 0 & -0,0760525 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,00221793 & 0, & 0 \\ 0, & 0,00178916 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00417641 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,182536 & -0,0239648 \\ -0,0193319 & 0,0152079 \\ -0,225631 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

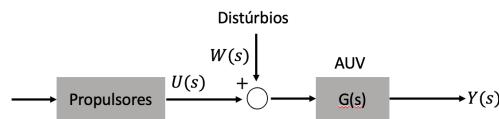
Destaca-se que a matriz **C** foi assim definida em função dos parâmetros que serão medidos e observados no sistema, isto é, as posições do submarino.

# 4 Resultados em malha aberta

## 4.1 Diagrama de blocos

O sistema em malha aberta pode ser representado na forma de diagrama de blocos, sendo  $G(s)$  a função de transferência do sistema,  $U(s)$  as entradas e  $W(s)$  os distúrbios, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Diagrama de blocos em malha aberta



Fonte: Autoria própria

## 4.2 Função de transferência

Com as equações linearizadas, obtém-se a relação entre as entradas e saídas do sistemas com condições iniciais nulas por meio de funções de transferência. Para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas ela é calculada conforme mostrado na Equação 4.1, com  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_1]$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.1)$$

Para o modelo apresentado, obtém-se uma matriz de transferência com 3 linhas e 6 colunas que relaciona cada variável de entrada e distúrbio a cada variável de estado, conforme mostrado na Equação 4.2.

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\tau_u}(s) & \mathbf{G}_{\tau_v}(s) & \mathbf{G}_{\tau_r}(s) & \mathbf{G}_{u_c^e}(s) & \mathbf{G}_{v_c^E}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Com o software *Mathematica*, obteve-se a função de transferência  $\mathbf{G}(s)$ , que está expressa no Apêndice D.

## 4.3 Matriz de transição

A matriz de transição é uma ferramenta que permite obter a solução numérica da resposta de um sistema dinâmico por meio da discretização da Equação 4.3.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

Utilizando a expansão até o quarto termo e  $\Delta t = 0,01$  s, as matrizes de transição e dos termos forçantes do sistema foram obtidas pelo *Matlab* e são dadas pelas Equações 4.4 e 4.5.

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0008 & 0,9982 & 0,0002 & -0,0012 \\ 0 & 0 & -0,0002 & 0,0002 & 0,9998 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0011 & 0,0023 & 0 & 0,9992 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\Gamma(\Delta t) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Assim, obtém-se a resposta discreta no domínio do tempo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\Delta t) \mathbf{x}_k + \Gamma(\Delta t) \mathbf{B} \mathbf{u}_k \quad (4.6)$$

## 4.4 Análise de estabilidade

Com a matriz  $\mathbf{A}$  expressa pela Equação 3.14, é possível avaliar a estabilidade do sistema. Tal processo foi feito pela análise de polos e pelo critério de Routh-Hurwitz. Assim sendo, primeiramente é necessário retomar o polinômio característico do sistema:

$$P(s) = s^6 + 0,273796s^5 + 0,157203s^4 + 0,00401842s^3 + 0,000090883s^2 \quad (4.7)$$

De imediato, pelo critério de Routh-Hurwitz, como dois coeficientes do polinômio são nulos, o sistema na melhor das hipóteses será marginalmente estável. Para a verificação da estabilidade, conclusões concretas devem ser tomadas pós análise das simulações.

Os polos do sistema são as raízes de  $P(s)$  e estão representados na Tabela 1. Destaca-se a presença de dois polos complexos conjugados com parte real negativa, configurando um sistema que apresentará resposta oscilatória.

Tabela 1 – Polos do sistema

Polo	Multiplicidade
0	2
-0,124 + 0,367j	1
-0,124 - 0,367j	1
-0,0129 + 0,021j	1
-0,0129 - 0,021j	1

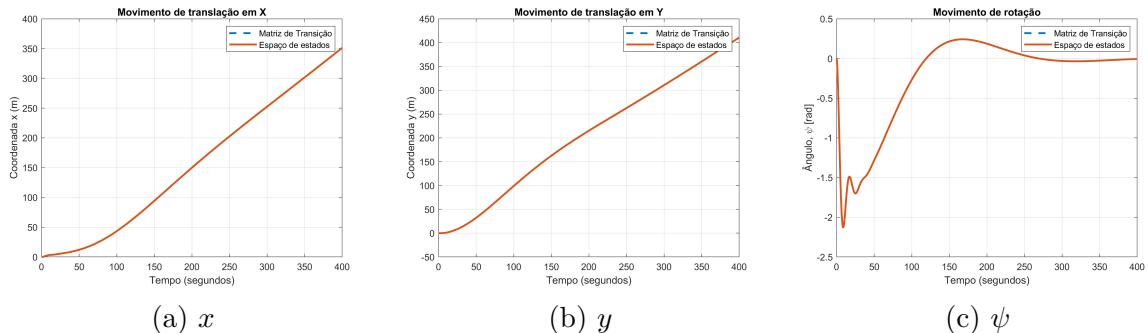
Fonte: Autoria própria

## 4.5 Simulações no domínio do tempo

Para avaliar a resposta transitória do sistema na ausência de controle, é necessário fazer uma simulação. Desse modo, na tentativa de abranger todas as situações possíveis, o sistema foi simulado na presença exclusiva de distúrbios e, posteriormente, na presença somente dos atuadores.

### 4.5.1 Simulação para distúrbios em malha aberta

Nesse caso, deseja-se excitar o sistema com um distúrbio, representado por uma corrente. Desse modo, definindo  $u_c^E = v_c^E = 1 \text{ m/s}$  e  $\tau = 0$  tem-se o resultado ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Simulação para  $u_c^E = v_c^E = 1 \text{ m/s}$  e  $\tau = 0$ 

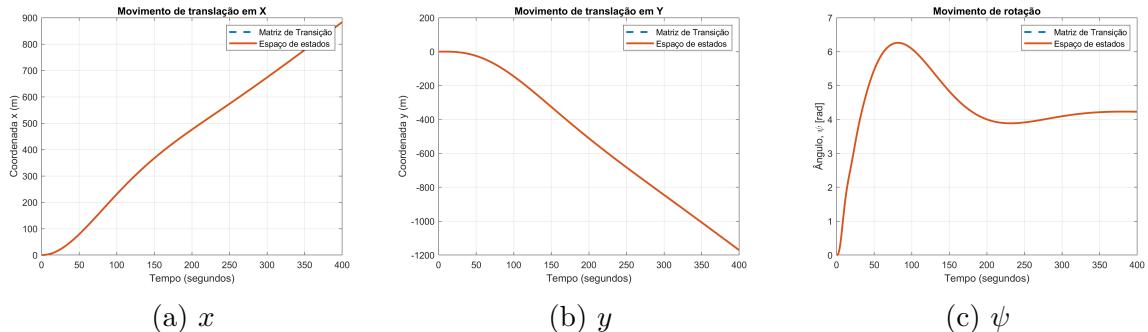
De imediato, é possível perceber uma certa coerência dos resultados com aquilo que é esperado. As posições  $x$  e  $y$  crescem indefinidamente, já que não existe atuação contrária à correnteza em ambas direções. Além disso, diferentemente do modelo apresentado na disciplina de Modelagem, os movimentos, agora são todos acoplados.

### 4.5.2 Simulação para atuação em malha aberta

Na mesma abordagem do caso anterior, define-se arbitrariamente  $u_c^E = v_c^E = 0 \text{ m/s}$  e  $\tau_u = 50 \text{ N}$  (atuação somente na direção x solidaria ao submarino). Nesse caso, obtém-se

os gráficos da Figura 6.

Figura 6 – Simulação para  $u_c^E = v_c^E = 0$  e  $\tau_u = 50 N$

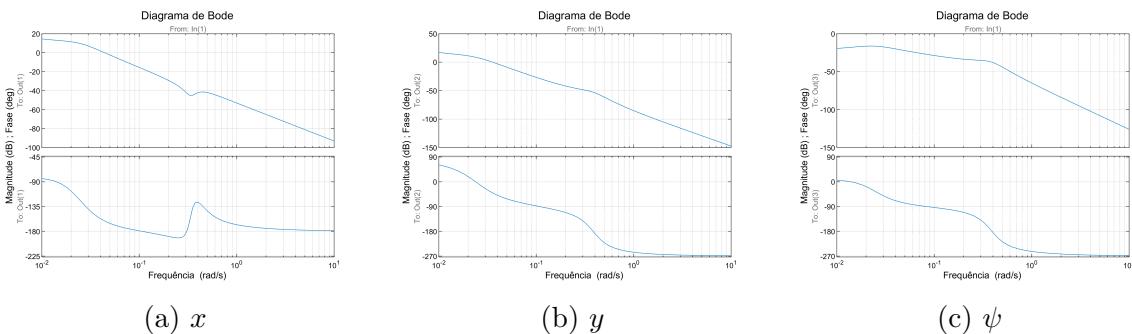


As considerações sobre os resultados são análogas aos comentários feitos anteriormente. Vale ressaltar, somente, o acoplamento dos movimentos. Na condição idealizada em que  $\tau = [50, 0, 0]$  para movimentos desacoplados e sem distúrbios, a variável  $y$  se manteria inalterada.

## 4.6 Simulações no domínio da frequência

Para avaliar a resposta em frequência do sistema, é necessário fazer uma simulação. Desse modo, o sistema foi simulado na presença de atuação senoidal do propulsor que realiza esforços em  $x$ .

Figura 7 – Resposta em frequência - malha aberta



Os gráficos da Figura 7 mostram que, no geral, para altas frequências, o sistema para de responder, isto é, o ganho na razão de amplitudes entre saída e entrada torna-se menor que 1.

# 5 Controle Moderno

O controle no espaço de estados está inserido num contexto mais amplo conhecido como controle moderno. As principais características desta teoria é o uso das matrizes do espaço de estados no domínio do tempo para sintetizar os controladores, a extensão para sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) e a possibilidade de otimização de acordo com critérios definidos do projeto. Dessa forma, serão apresentados conceitos e projetos de controladores associados a essa teoria.

## 5.1 Controlabilidade e observabilidade

No projeto de controladores no espaço de estados, deve se assegurar que para as entradas utilizadas, isto é, duas forças e um momento produzido pelos propulsores, o sistema consegue atingir qualquer outro estado em um tempo finito.

Essa avaliação é feita comparando a ordem do sistema, com o posto da matriz de controlabilidade, mostrada em 5.1.

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{AB}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}_2]$$

Nesse sentido, através do *Software Matlab*, calculou-se o  $\text{posto}(\mathcal{C}) = 6$ , que equivale a ordem do sistema, permitindo concluir que para as entradas escolhidas o sistema é totalmente controlável.

Além disso, deve ser possível determinar os estados em todo instante de tempo por meio de um número finito de medições. Tal verificação é feita comparando a ordem do sistema com o posto da matriz de observabilidade, mostrada em 5.1.

$$\mathcal{O}^T = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{(n-1)}\mathbf{C}^T]$$

De maneira análoga, obtém-se  $\text{posto}(\mathcal{O}) = 6$  que é igual a ordem do sistema, possibilitando afirmar que com as medições feitas o sistema é totalmente observável.

## 5.2 Reguladores

O primeiro tipo de controlador sintetizado foi um regulador. Reguladores têm como principal objetivo levar o estado a zero (FRIEDLAND, 1986). Na aplicação do AUV, isso acontece na situação em que, sujeito ao distúrbio de corrente, quer-se manter o veículo parado para que ele continue realizando suas tarefas.

A lei de controle de um regulador diz que o vetor de entradas é proporcional ao vetor de estados, isto é,  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ . Onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de ganhos de controle. Dessa forma, fecha-se a malha:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \quad (5.1)$$

Existem algumas formas de se obter esses ganhos. Aqui, serão apresentados dois procedimentos: o regulador por alocação de polos e o regulador linear quadrático. A resposta será simulada para condições iniciais sem distúrbio e com distúrbio, usando o espaço de estados e a matriz de transição.

### 5.2.1 Regulador por alocação de polos

Nesse método, impõe-se novos polos ao sistema a fim de que a resposta deste adquira algum comportamento desejado. Estes polos são conhecidos como polos em malha fechada. Dessa forma, os polos impostos para o sistema podem ser vistos na Tabela 2 e a matriz de ganhos respectiva na Equação E.1.

Tabela 2 – Polos do sistema em malha fechada

Polo	Multiplicidade
-0,2	2
-0,25 + 0,25j	1
-0,25 - 0,25j	1
-0,3	1
-0,4	1

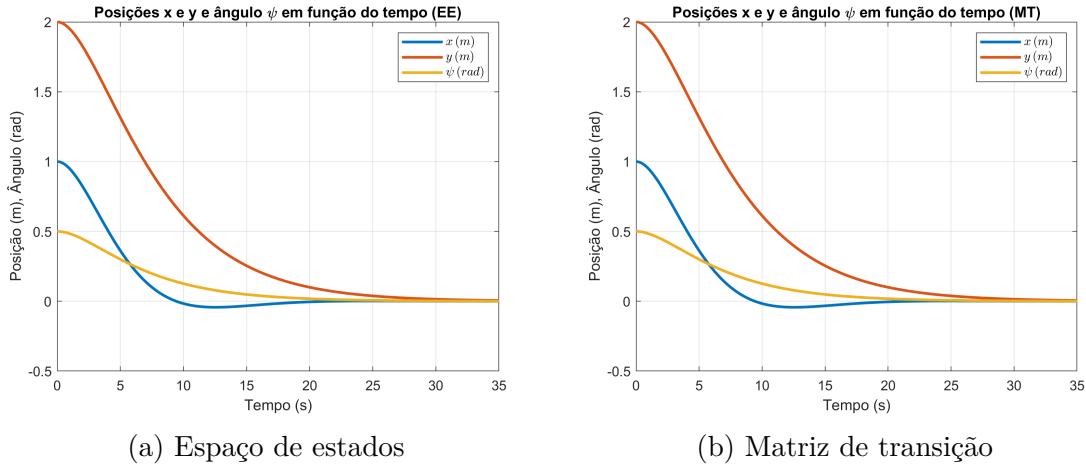
Fonte: Autoria própria

Com isso obtém-se a matriz de malha fechada mostrada na Equação E.2.

#### 5.2.1.1 Simulação para condições iniciais

Nesse sentido, simulou-se a capacidade do regulador para levar o veículo à origem quando este se encontra deslocado. Fez isso por meio da matriz de transição da matriz mostrada em E.2, descrita na Equação E.3.

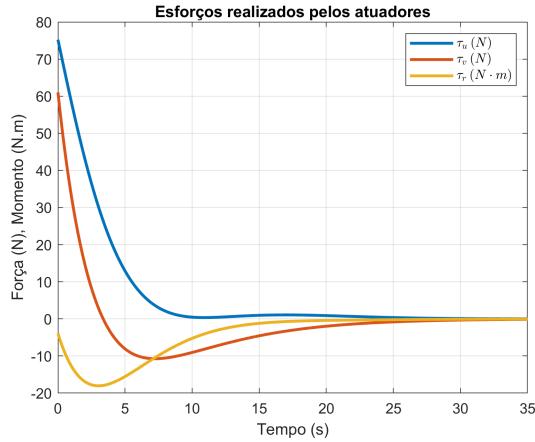
Usando o vetor de condições iniciais  $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , montou-se os gráficos mostrados na Figura 8.

Figura 8 – Variação de  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  com condições iniciais com alocação de polos

Observa-se assim que na Figura 8, os três estados foram a zero aproximadamente ao mesmo tempo - 25 segundos -, e nota-se que  $x$  apresenta um leve sobressinal.

Por fim, a Figura 9 mostra os esforços produzidos pelos propulsores. Assim, observa-se que as forças e o momento são maiores no instante inicial quando as distâncias são maiores e tendem a zero a medida que os estados são levados a zero, afinal eles são proporcionais.

Figura 9 – Esforços nos atuadores para simulação a partir de condições iniciais

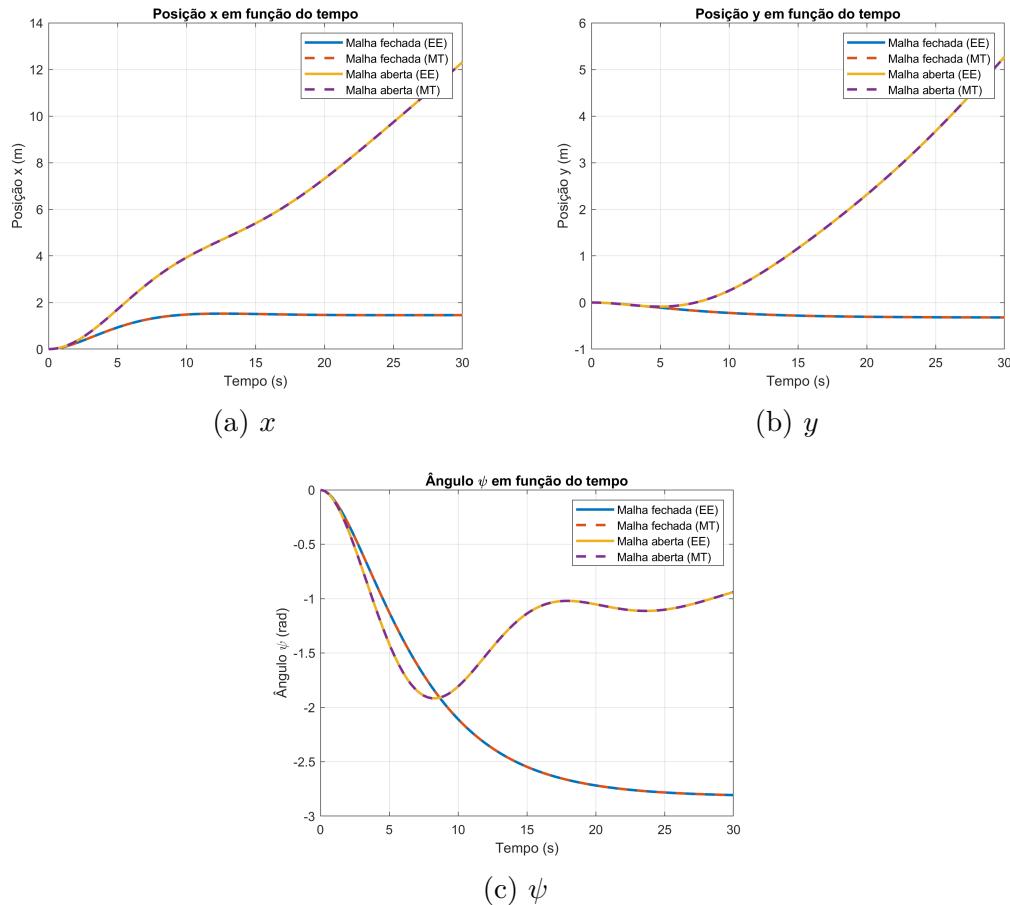


### 5.2.1.2 Simulação para distúrbio de corrente

Em seguida, foram feitas simulações para um distúrbio de corrente do tipo degrau utilizando o espaço de estados, junto com a matriz de transição e dos termos forçantes 23b. Os resultados, mostrados na Figura 14, mostram que para esse tipo de distúrbio, existe um erro em regime em que o veículo sai do equilíbrio até a força dos atuadores igualar a força produzida pela corrente. Assim, em regime  $x$  estabiliza em cerca de 1,5 m,  $y$  em -0,3 m, e  $\psi$  em cerca de -3 rad. Para esta última variável, a resposta em malha fechada

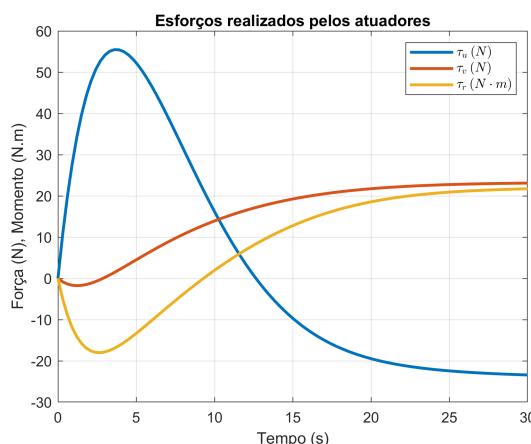
estabilizou em um valor maior que em malha aberta, porém sem oscilação. Além disso, com o sistema em malha aberta, nota-se evidentemente que as posições tendem a crescer.

Figura 10 – Variação de  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  com degrau de corrente com alocação de polos



Como as posições estabilizam em pontos diferentes de zero, os atuadores continuam produzindo esforços mantendo o equilíbrio de forças com a corrente, como mostrado na Figura 11b.

Figura 11 – Esforços nos atuadores para simulação com degrau de corrente



### 5.2.2 Regulador linear quadrático (LQR)

Nesse método, encontra-se a matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  tal que a lei de controle minimize o índice quadrático ilustrado na Equação 5.2.

$$J = \int_0^{T_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}) dt \quad (5.2)$$

Nesse sentido,  $\mathbf{Q}$  é a matriz de pesos dos estados e  $\mathbf{P}$ , a matriz de pesos das entradas controladas. Portanto, quanto maior a primeira, mais precisão se obtém, e quanto maior a segunda, menor gasto de energia.

Resolve-se se então a Equação Algébrica de Riccati para se obter os ganhos em malha fechada. As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$ , bem como a matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  obtida, são mostradas pelas Equações 5.3 e E.4.

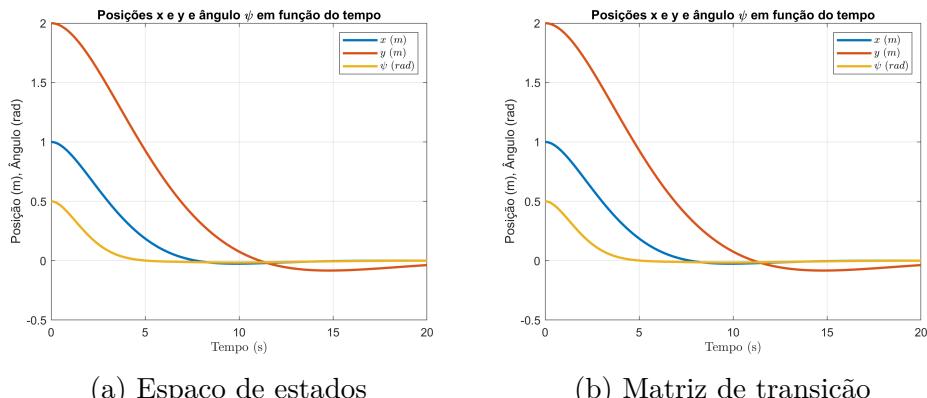
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Com isso obtém-se a matriz de malha fechada mostrada na Equação E.5 e cujos polos estão ilustrados na Tabela 10.

#### 5.2.2.1 Simulação para condições iniciais

Nesse sentido, simulou-se a capacidade do regulador para levar o veículo à origem quando este se encontra deslocado por meio do espaço de estados e da matriz de transição da matriz de E.5, mostrada na Equação E.6. Usando o mesmo vetor de condições iniciais mostrado na alocação de polos, monta-se os gráficos mostrados na Figura 12.

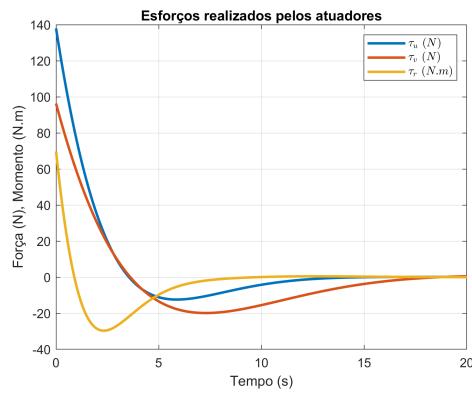
Figura 12 – Variação de  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  após condições iniciais com LQR



Observa-se assim que na Figura 12a os dois estados atingiram zeros em mais ou menos no mesmo tempo em 20 segundos, e nota-se que  $y$  apresenta um leve sobressinal. Já  $\psi$ , na Figura 12b, chega em zero mais rápido, em cerca de 18 segundos, também apresentando um sobressinal.

Por fim, mostra-se as forças nos atuadores pela Figura 13. Assim, observa-se que as forças e o momento são maiores no instante inicial quando as distâncias são maiores, pois são proporcionais.

Figura 13 – Esforços nos atuadores para simulação a partir de condições iniciais



#### 5.2.2.2 Simulação para distúrbio de corrente

Em seguida, foram feitas simulações para um distúrbio de corrente do tipo degrau. Os resultados, mostrados na Figura 14, mostram que para esse tipo de distúrbio, existe um erro em regime em que o veículo sai do equilíbrio até a força dos atuadores igualar a força produzida pela corrente. Assim, em regime  $x$  para em cerca de 0,7 m,  $y$  em 0,2 m e  $\psi$  em cerca de 11°. Além disso, com o sistema em malha aberta, nota-se evidentemente que as posições tendem a crescer.

Figura 14 – Variação de  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  com degrau de corrente com LQR

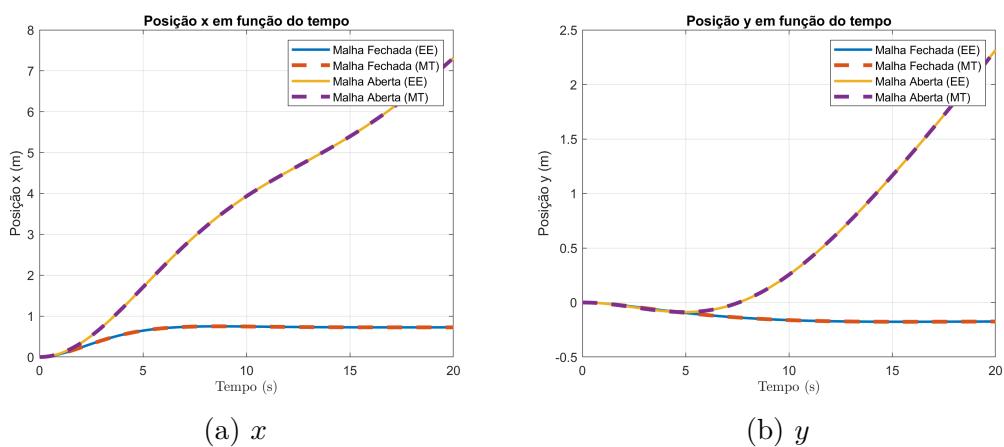
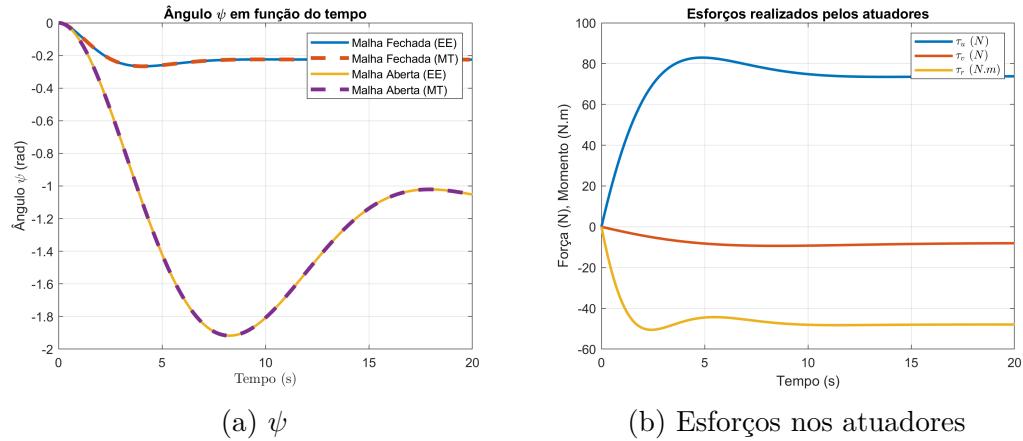


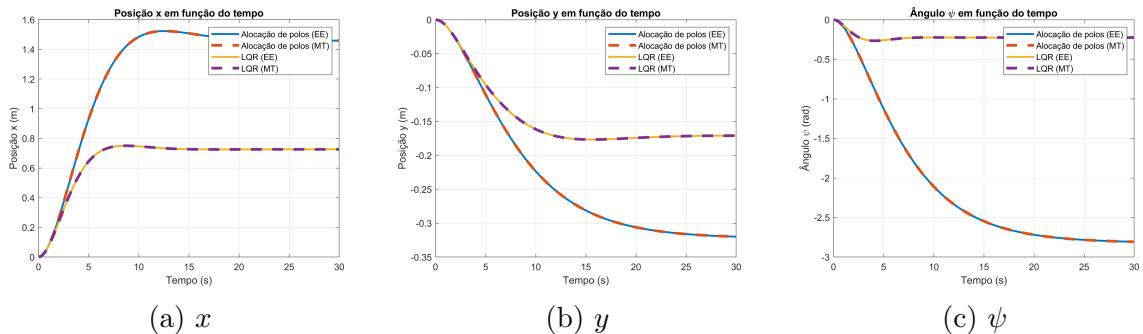
Figura 15 – Variação de  $\psi$  e esforços nos atuadores com degrau de corrente com LQR

Como as posições não chegam exatamente em zero, os atuadores continuam produzindo esforços mantendo o equilíbrio de forças com a corrente, como mostrado na Figura 15b.

### 5.2.3 Comparação entre alocação de polos e LQR

A fim de comparar as respostas do sistema pelo método de alocação de polos e pelo método LQR, foram levantados os gráficos desses dois conjuntamente. A análise da Figura 16 atesta a diferença dos dois métodos. No geral, a resposta obtida pelo LQR é substancialmente melhor do que a obtida pela alocação de polos, pois o sistema responde mais rapidamente e estabiliza em posições menores. Ou seja, a força gerada pelos propulsores se equilibra mais rapidamente com a força gerada pela corrente, reduzindo o deslocamento do AUV em relação à sua posição original.

Figura 16 – Comparação entre o método de alocação de polos e o LQR



## 5.3 Observadores de estado

Em sistemas dinâmicos, nem todas as variáveis do vetor de estados podem ser observadas, ou seja, o sistema não conta com sensoriamento de todas as variáveis. Mesmo

quando possível utilizar sensores que avaliam todo o vetor, tem-se um gasto elevado e desnecessário.

Desse modo, para realimentação em malha fechada, é necessário desenvolver um observador que reconstrói o vetor de estados. Para o submarino, apenas as variáveis de posição estão sendo observadas e, assim, as velocidades de saída precisam ser definidas pelo observador.

O ponto principal da construção de observadores é que agora tem-se um vetor de estados real e um estimado. Desse modo, vale apresentar a definição do vetor estimado, o qual encontra-se na Equação 5.4.

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \mathbf{K}_o\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5.4)$$

Definindo o erro como  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  e sabendo que para a diferença entre as variáveis tender assintoticamente a zero,  $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})$ , tem-se um novo sistema que aborda a dinâmica do submarino e o erro do observador:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Pelas equações apresentadas, percebe-se que o desenvolvimento de um observador recaí no mesmo problema do controlador, o qual consiste na definição da matriz de ganhos  $\mathbf{K}_o$ . Pelo Princípio da Separação, é possível projetar o controlador e observador separadamente, com o importante detalhe de estabelecer os polos do observador a esquerda dos polos do controlador. Desse modo, pode-se estimar a variável antes da dinâmica do sistema e permitir o funcionamento do controlador.

Para definir  $\mathbf{K}_o$ , será utilizada duas abordagens diferentes, a primeira usando uma sintonia por alocação de polos e a outra que sintetiza o observador pelo método LQR.

### 5.3.1 Observador por alocação de polos

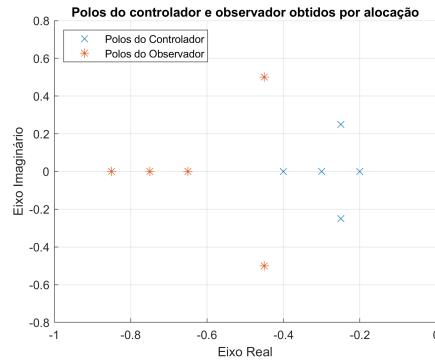
Sabendo que os polos do sistema em malha fechada com um controlador por alocação são aqueles dispostos na Tabela 2, define-se os polos do observador como:

$$\begin{cases} p_{o1} = -0,45 + 0,5j \\ p_{o2} = -0,45 - 0,5j \end{cases} \quad \begin{cases} p_{o3} = -0,65 \\ p_{o4} = -0,75 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{o5} = -0,85 \\ p_{o6} = -0,85 \end{cases}$$

A escolha de tais valores foi definida pela restrição de posicionamento dos polos do observador a esquerda dos polos do controlador. Além disso, os polos definidos não apresentam parte imaginária, já que oscilações na estimação são indesejadas. Com isso,

utilizando o comando *place* do *Matlab*, obteve-se a matriz de ganhos  $\mathbf{K}_o$ . A Figura 17 demonstra o mapa de polos para as condições definidas.

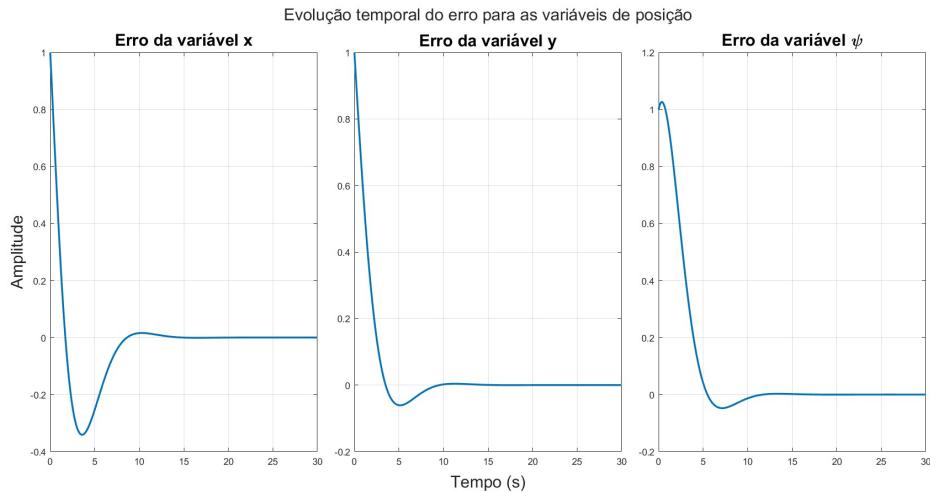
Figura 17 – Mapa de polos do controlador e observador por alocação



Fonte: Autoria própria

Para avaliar o funcionamento construiu-se os gráficos de erro em função do tempo. O comportamento dos erros de posição e velocidade foram bem semelhantes e, com isso, a Figura 18 apresenta somente o erro das posições. Como condição inicial utilizou-se  $e_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .

Figura 18 – Erros das variáveis de posição utilizando o observador por alocação



Fonte: Autoria própria

De imediato, é possível perceber que próximo dos 10 segundos, tem-se o erro praticamente anulado. Comparando com os tempos de atuação já apresentados nas seções anteriores, pode-se concluir que o observador atua de forma satisfatória.

### 5.3.2 Observador por LQR

Assim como apresentado anteriormente, os polos do controlador sintetizado por LQR são definidos pelas matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$ . Para o controlador, obteve-se os polos representados na Tabela 10. Desse modo para construir os polos do observador deve-se definir  $\mathbf{Q}_o$  e  $\mathbf{P}_o$  que entregam polos a esquerda do controlador e sem grandes oscilações.

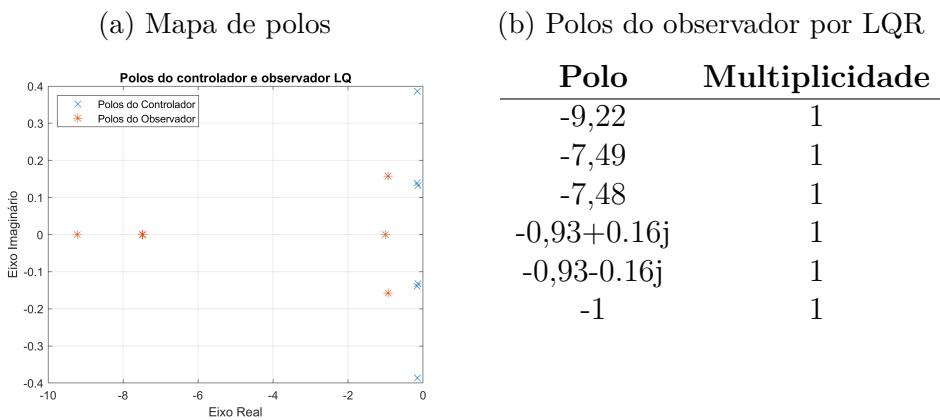
De maneira coerente com as limitações supracitadas, definiu-se  $\mathbf{Q}_o$  e  $\mathbf{P}_o$  como:

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5 & 0 \\ 0 & 0 & 3,5 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Com isso, os polos obtidos para o observador estão descritos na Tabela 19b.

Por conseguinte, vale construir o mapa de polos que compara os polos do controlador e do observador. Tal mapa encontra-se na Figura 19a.

Figura 19 – Polos do Observador sintetizado por LQR



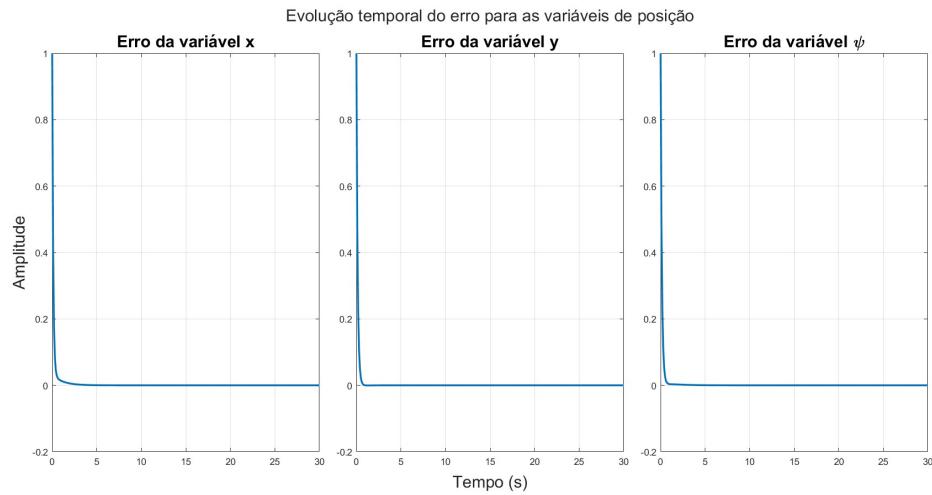
Fonte: Autoria própria

Os polos obtidos satisfazem a condição de estarem a esquerda dos polos do controlador. Entretanto, vale ressaltar que existem polos dominantes, ou seja, apesar de conter polos de módulo grande, o par de polos complexos com parte real próximo de  $-1$  determina o tempo de acomodação do observador.

Apesar disso, é possível observar que os polos obtidos são, em módulo, maiores que todos os polos do observador por alocação. Desse modo, o erro deve tender assintoticamente a zero de forma mais rápida.

Para comprovar tais hipóteses, construiu-se o gráfico da Figura 20 que ilustra a evolução do erro com o tempo. Novamente,  $e_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  foi utilizado como condição inicial.

Figura 20 – Erros das variáveis de posição utilizando o observador por LQR



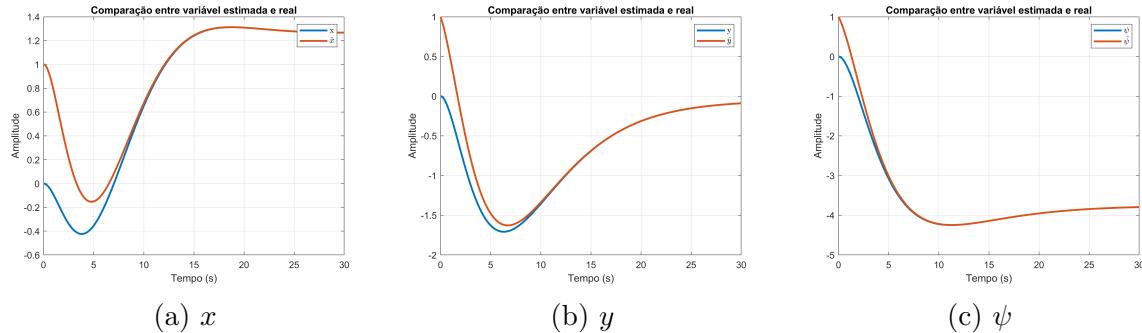
Fonte: Autoria própria

Observando os gráficos é possível validar as hipóteses anteriormente feitas. Vale comentar, somente, que agora o erro apresenta uma levea oscilação e, por isso, existe uma parte negativa no eixo y.

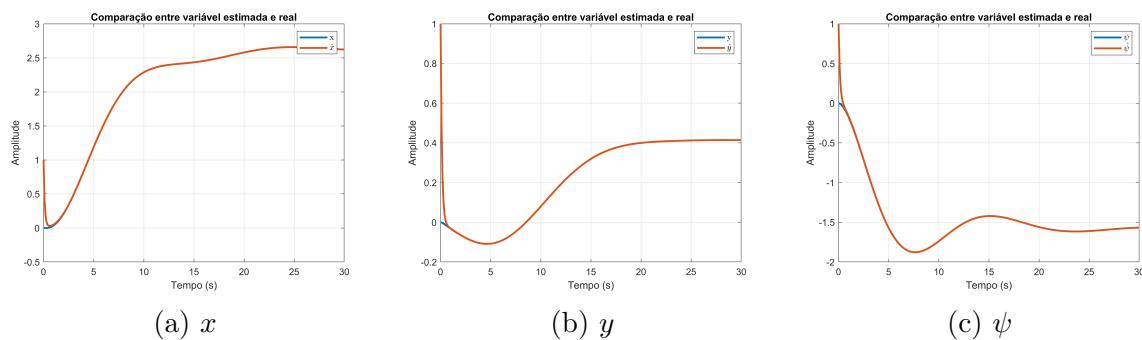
### 5.3.3 Princípio da separação

O Princípio da separação estabelece que a lei de controle é obtida pelo estado reconstruído ( $u = -K\hat{x}$ ). Dessa forma, assim como comentado anteriormente, é possível projetar o controlador e o observador separadamente. O objetivo desta seção é, portanto, avaliar a resposta do sistema utilizando os observadores projetados.

Para avaliar o sistema com observador, compara-se os resultados obtidos para as variáveis de estado reais e estimadas. Desse modo, realiza-se uma simulação da resposta do sistema para um degrau de corrente. Primeiramente, foi simulado o sistema controlado por alocação de polos e os gráficos obtidos encontram-se na Figura 21. Como condição inicial, foi estabelecido  $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $\hat{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Além disso, os gráficos de velocidade foram suprimidos, já que basta as posições para comparar  $x$  e  $\hat{x}$ .

Figura 21 – Comparação entre  $\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{x}}$  para observador e controlador por alocação

Observa-se que os valores estimados convertem rapidamente para  $x$  e, portanto, conclui-se que o observador funciona adequadamente. Em sequência, realiza-se o mesmo processo para avaliar a operação do observador sintetizado pelo LQR. Os gráficos da Figura 22 demonstram as saídas obtidas.

Figura 22 – Comparação entre  $\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{x}}$  para observador e controlador por LQR

De imediato, é possível perceber que rapidamente as duas curvas se encontram. Isso acontece pelo fato, já destacado anteriormente, do observador sintetizado pelo LQR ser mais rápido do que o observador por alocação.

## 5.4 Seguidores

O segundo tipo de controlador sintetizado foi um seguidor. Seguidores têm como principal objetivo seguir uma referência  $\mathbf{x}_r$ . Para tal, é necessário levar o erro que aparece entre a referência e os estados observados a zero (FRIEDLAND, 1986).

### 5.4.1 Seguidor de referência constante

Nesse caso, para a lei de controle, além dos ganhos  $\mathbf{K}$ , há uma pré-alimentação, como mostra a Equação 5.7.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (\mathbf{K}\mathbf{N}_x + \mathbf{N}_u)\mathbf{x}_r \quad (5.7)$$

Nesse sentido, encontra-se  $\mathbf{N}_x$  e  $\mathbf{N}_u$  a partir de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Com os dados do problema, tem-se  $\mathbf{N}_x$  e  $\mathbf{N}_u$  dados por 5.9.

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} -37,7217 & 0 & 0 \\ 0 & 12,0998 & 0 \\ 0 & 0 & 27,0124 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Nesse sentido, podemos simular o comportamento do veículo caso, por exemplo, queira-se leva-lo ao ponto  $\mathbf{x}_r = [1 \ 2 \ \pi/4]^T$ , onde ele deve operar. Os resultados das posições em função do tempo e a trajetória são mostrados nas Figuras 23 e 24. Nota-se então que o veículo chegou ao estado de referência em cerca de 25 segundos, o que pode ser considerado satisfatório tendo em vista a inércia do veículo e as forças de arrasto do meio. Além disso, nota-se o efeito da pré-alimentação em eliminar o erro em regime, pois observa-se que os estados chegam exatamente na referência.

Figura 23 –  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  pelo tempo e trajetória realizada para referência constante

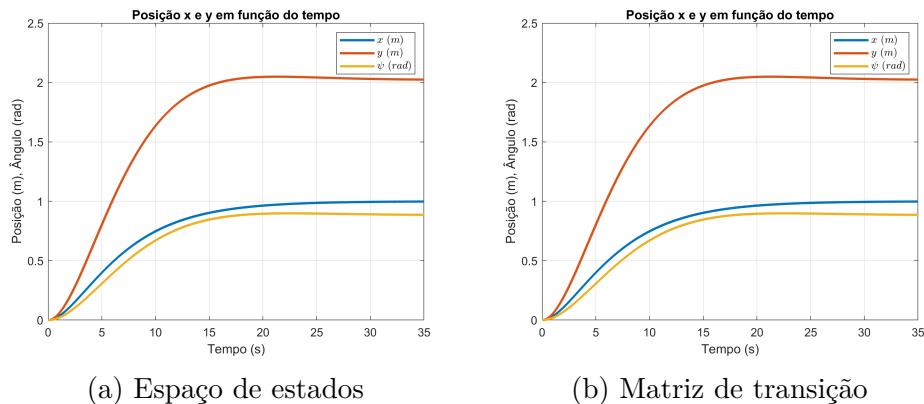
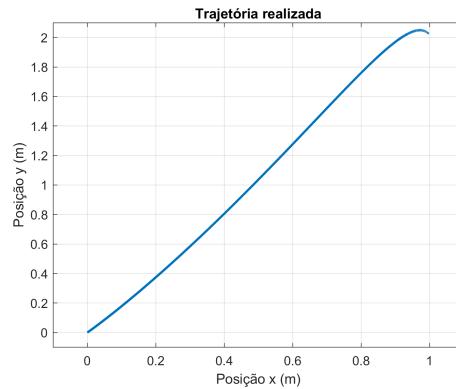


Figura 24 – Trajetória do veículo para referência constante



Fonte: Autoria própria

### 5.4.2 Seguidor de referência variável

Sendo  $\mathbf{x}_r$  os estados de referência  $\mathbf{x}_w$  os distúrbios, cria-se uma dinâmica para cada um deles, como mostrado em 5.10.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r \\ \dot{\mathbf{x}}_w = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w \end{cases} \quad (5.10)$$

Pode-se equacionar o problema do seguidor de referência variável no espaço de estados por meio da Equação 5.11, em que  $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}_r \ \mathbf{x}_w]$  são as variáveis ditas exógenas.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K} & \mathbf{F} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_e \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Assim,  $\mathbf{F} = [\mathbf{A} - \mathbf{A}_r \ \mathbf{B}_1]$ ,  $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}$ , e  $\mathbf{K}_e$  são os ganhos das variáveis externas dado pela Equação 5.12, em que  $\bar{\mathbf{C}}$  é uma matriz singular.

$$\mathbf{K}_e = [\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_2]^{-1} \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \quad (5.12)$$

#### 5.4.2.1 Dinâmica da referência

Nesse sentido, modela-se a referência como uma trajetória circular em que, por exemplo, o veículo, partindo de uma posição, inspecciona a área dessa região. Assim, tem-se os estados de referência dados por 5.13.

$$\begin{cases} x_{r_1} = \sin(\omega t) \\ x_{r_2} = \cos(\omega t) \\ x_{r_3} = \omega t \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_r \quad (5.13)$$

#### 5.4.2.2 Dinâmica do distúrbio

Como discutido no modelo físico, correntes marítimas são consideradas constantes no tempo assim tem-se a dinâmica desse distúrbio dado por 5.14.

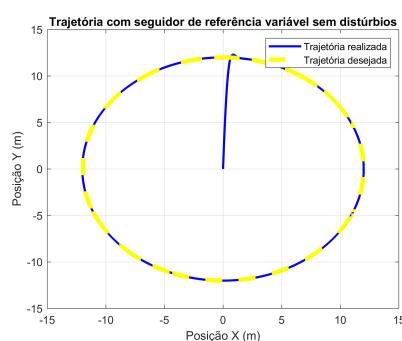
$$\begin{cases} x_{w_1} = u_E t \\ x_{w_2} = v_E t \\ x_{w_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_w \quad (5.14)$$

#### 5.4.2.3 Resultados

Sendo a matriz singular  $\bar{\mathbf{C}}$  igual a matriz  $\mathbf{C}$  do sistema e utilizando a dinâmica dos distúrbios não nula, conforme as condições iniciais de 5.15, obtém-se o resultado mostrado na Figura 25. Conclui-se então que as respostas são muito similares, o que evidencia a eficiência do controlador em se rejeitar os distúrbios.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = 0 \\ \mathbf{x}_w(0) = [0 \ 0 \ 0 \ u_E \ v_E \ 0] \\ \mathbf{x}_r(0) = [0 \ 12 \ 0 \ \frac{24\pi}{1000} \ 0 \ \frac{2\pi}{1000}] \end{cases} \quad (5.15)$$

Figura 25 – Trajetória do veículo para referência variável com distúrbio



# 6 Controle Clássico

No controle no domínio da frequência, destacam-se os controladores do tipo proporcional integral derivativo (PID), amplamente utilizados na indústria pela sua simplicidade de sintonia. Essa estratégia de controle, porém, é restrita a sistemas do tipo SISO (*Single Input Single Output*). Dessa forma, serão apresentados conceitos e projetos de controladores associados a essa teoria.

## 6.1 Função de transferência em malha aberta escolhida

Como indicado na Seção 4.2, a partir do espaço de estados, obtém-se as funções de transferência por meio da expressão  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ . Nesse sentido, existe uma função indicando a relação entre cada entrada, isto é as forças e momento dos propulsores, e cada saída, isto é, as posições e as velocidades.

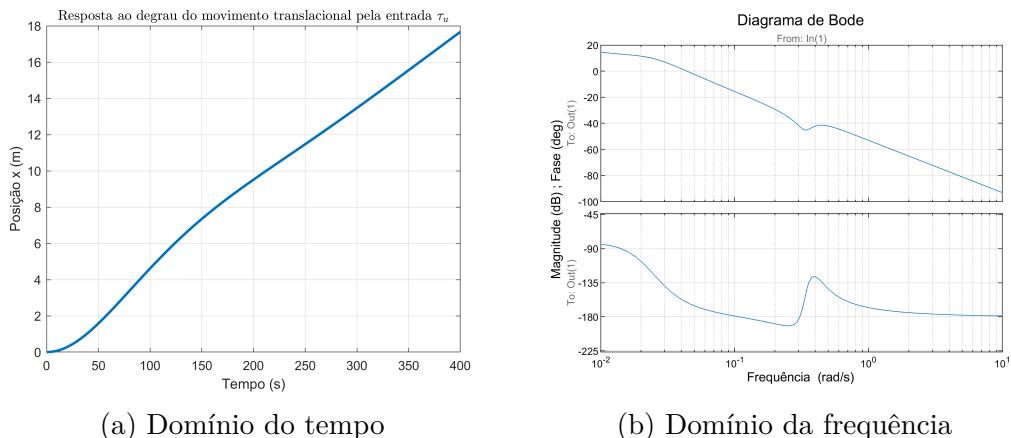
Nesse sentido, escolhe-se a função que relaciona a força dos propulsores em  $x$  com o deslocamento do veículo em  $x$  de maneira a controlar o posicionamento nessa direção. A função é mostrada pela equação 6.1.

$$G(s) = \frac{10^{-3}(2,218s^4 + 0,2024s^3 + 0,2528s^2 + 0,003805s)}{s^6 + 0,273796s^5 + 0,157203s^4 + 0,00401842s^3 + 0,000090883s^2} \quad (6.1)$$

### 6.1.1 Resposta em malha aberta

Assim sendo, realiza-se a resposta em malha aberta, no domínio do tempo e da frequência para a referida função de transferência. Os resultados são mostrados na Figura 26.

Figura 26 – Resposta em Malha Aberta

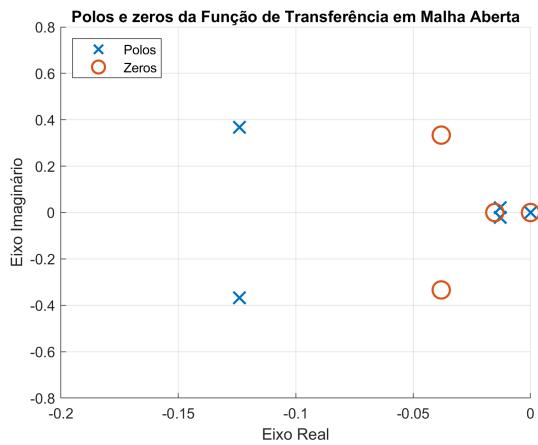


Coerentemente com o que já foi observado anteriormente, um degrau de força no atuador faz com que o veículo se movimente indefinidamente com velocidade praticamente constante a medida que a força do propulsor iguala as forças de arrasto do meio. Já na resposta em frequência nota-se que para frequências acima de cerca de  $0,1 \text{ rad/s}$  existe atenuação do movimento.

### 6.1.2 Análise de polos e zeros

Com a função de transferência, calcula-se os polos e os zeros e os dispõe no plano complexo conforme a Figura 27.

Figura 27 – Polos e zeros



Nisso, de forma semelhante ao que foi realizado na análise de estabilidade, percebe-se que não há polos positivos então o sistema não é instável. Contudo, possui dois polos em zeros, condição que será avaliada em melhor detalhes nas seções seguintes.

### 6.1.3 Análise do tipo e erro em RP

Sendo um sistema descrito pela função de transferência da Equação 6.2, tem-se  $q$  como o tipo do sistema.

$$G(s) = \frac{K \prod_j^k (s + z_j)}{s^q \prod_i^r (s + p_i)} \quad (6.2)$$

Assim sendo, o sistema em questão é do tipo 2. Com tal definição, é possível avaliar o erro em regime permanente. Para tanto utiliza-se o Teorema do Valor Final, dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (6.3)$$

Em um sistema de malha fechada, o erro é dado por:

$$E(s) = \frac{1}{(1+G)} R \quad (6.4)$$

Desse modo, para tipo 2, observa-se que o erro deixa de ser nulo somente quando  $R$  tem ordem igual ou superior a uma entrada do tipo parábola. Em suma, a Tabela 3 descreve o erro conforme a entrada.

Tabela 3 – Erro em regime permanente para sistema do tipo 2

Tipo	Degrau: $1/s$	Rampa: $1/s^2$	Parábola $1/s^3$	$1/s^4$
2	0	0	$cte$	$\infty$

## 6.2 Sintonia PID

O controlador proporcional integral derivativo (PID), conhecido também como controlador de três tipos, será o foco da abordagem de controle clássico a ser desenvolvida. Tal sintonia é realizada utilizando o erro observado entre o estado do sistema e a referência para dar comandos de controle à planta do sistema. Ele é composto por três partes distintas, cada uma com seus próprios ganhos e características, que quando combinadas, oferecem resultados satisfatórios de controle.

A ação de controle PID pode ser representada pela Equação 6.5.

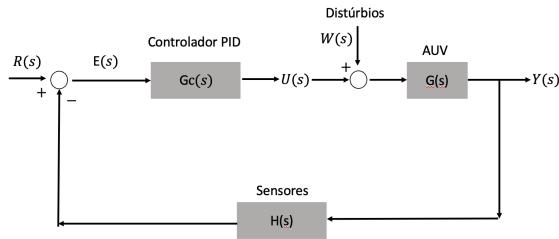
$$U(s) = \left( K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) E(s) \quad (6.5)$$

Em que  $K_p$  representa o ganho proporcional, derivado da parcela responsável por oferecer uma atuação de controle proporcional ao erro. Da mesma forma,  $K_d$  é o ganho derivativo advindo da componente proporcional à derivada temporal do erro. Finalmente,  $K_i$  trata-se do ganho integral, do controle proporcional à integral do erro.

De maneira geral, a síntese por PID aumenta a ordem e o tipo do sistema, introduzindo um polo e dois zeros. Além disso, ele é amplamente utilizado em sistemas industriais até os dias atuais. Existem quatro principais métodos para determinar os ganhos  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$  mais adequados ao sistema e que serão analisados a seguir, são eles: o método de Ziegler-Nichols, o método por alocação de polos, controle ótimo e usando lugar das raízes (*Root Locus*).

A lógica de controle da sintonia PID pode ser representada pelo diagrama de blocos do sistema exposto na Figura 28.

Figura 28 – Diagrama de blocos em malha fechada

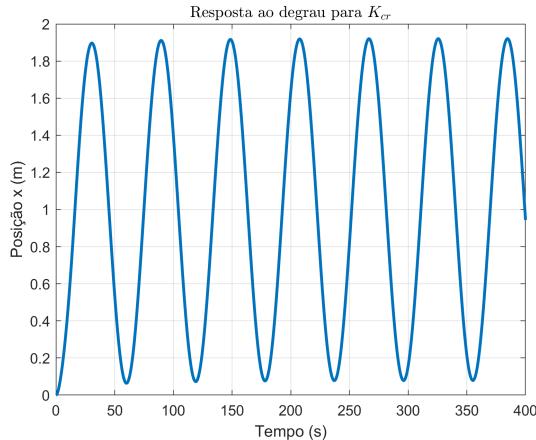


### 6.2.1 Método de Ziegler-Nichols

O Método de Ziegler-Nichols é utilizado para determinação dos ganhos dos controladores P, PI e PID. Para tanto, podem-ser utilizados duas abordagens: método da curva de reação e método do ganho limite.

Assim como apontando na seção de sistema em malha aberta, a resposta em degrau não é em formato de S. Desse modo, opta-se por utilizar o método do ganho limite. Tal procedimento é feito encontrando um valor de ganho  $K_{cr}$ , que coloca o sistema em oscilação harmônica. Para obter tal valor, utilizou-se o comando *margin* do *Matlab* e o resultado foi  $K_{cr} = 6,8635$ .

Construindo a resposta para o ganho limite, tem-se o resultado da Figura 29. Por ela, é possível encontrar o período crítico:  $P_{cr} = 59,4$ .

Figura 29 – Resposta harmônica para  $K_{cr}$ 

Fonte: Autoria própria

Aplicando a tabela de ganhos definida pelo método e ilustrada abaixo, encontra-se os ganhos para construção de um controlador PID.

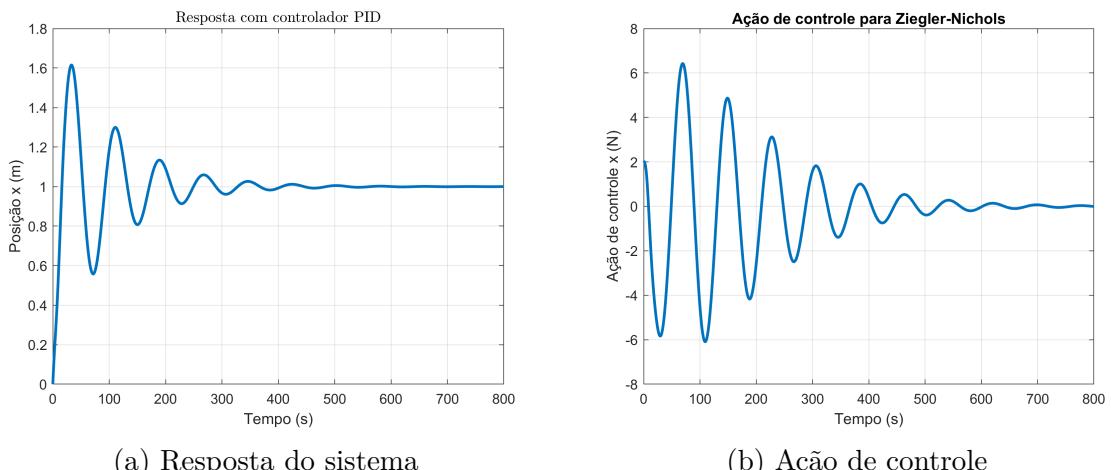
Tabela 4 – Tabela de ganhos para ganho crítico

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,50 K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45 K_{cr}$	$P_{cr}/1,2$	0
PID	$0,60 K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

$$\begin{cases} K_p = 0,6 \cdot 6,864 = 4,118 \\ K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{4,118}{0,5 \cdot 59,4} = 0,139 \\ K_d = T_d \cdot K_p = 0,125 \cdot 59,4 \cdot 4,118 = 30,577 \end{cases}$$

A Figura 31a representa a resposta obtida para os ganhos supracitados. O tempo de acomodação é próximo de 400 s, o que representa uma certa demora de reação. Além disso, obteve-se um *overshoot* de 61%. Ao final, obteve-se em paralelo os esforços para a ação de controle, os quais encontram-se na Figura 32b. Identifica-se uma propulsão bem pequena comparada aos limites dos propulsores utilizados.

Figura 30 – Resultados para controlador PID sintonizado por Ziegler-Nichols



### 6.2.2 Método de alocação de polos

Assim como no controle no espaço de estados, é possível alocar polos desejados ao sistema utilizando um controlador PID. Para tal, pode-se incluir uma lei de controle tal que a equação característica em malha fechada se torne:

$$1 + G_c(s) \cdot G(s) = 0 \quad (6.6)$$

Onde  $G_c$  é a função de transferência referente a um controlador PID. Substituindo  $G = N/D$ , é possível reescrever a Equação 6.6 como:

$$s \cdot D(s) + (K_i + K_p s + K_d s^2) \cdot N(s) = 0 \quad (6.7)$$

A Equação 6.7 é de sétima ordem, logo é necessário alocar sete polos. A equação característica com os polos desejados (Tabela 5) é dada por:

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)(s - p_5)(s - p_6)(s - p_7) = 0 \quad (6.8)$$

Tabela 5 – Polos do sistema em malha fechada

Polo	Multiplicidade
-0,2 + 0,2j	1
-0,2 - 0,2j	1
-0,25 + 0,25j	1
-0,25 - 0,25j	1
-0,3	3

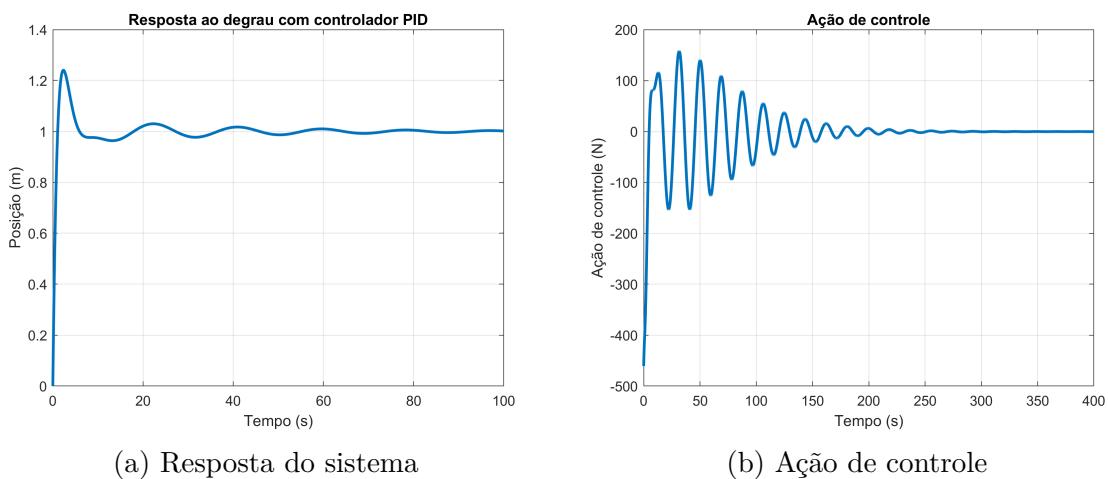
Fonte: Autoria própria

Dessa forma, igualando 6.7 com 6.8, obtém-se um sistema de sete equações e três incógnitas. Para resolvê-lo, foi utilizado o método dos mínimos quadrados, gerando os seguintes resultados:

$$\begin{cases} K_p = 538,1043 \\ K_i = 198,8165 \\ K_d = 687,7873 \end{cases} \quad (6.9)$$

A resposta do sistema em malha fechada pode ser vista na Figura 31.

Figura 31 – Resultados para controlador PID sintonizado por alocação de polos



A Figura 31 mostra um comportamento oscilatório devido aos dois pares de polos complexos conjugados alocados. Ainda, o tempo de acomodação do sistema é próximo de 40 s e que existe um *overshoot* de 0,24 m. Foi simulada também a ação de controle em função do tempo (Figura 31b). O gráfico mostra que a força aplicada pelo atuador é relativamente alta, condizente com os altos ganhos de controle obtidos, porém menor que a máxima força máxima que o atuador pode exercer. Além disso, essa força se reduz a zero a medida que o estado se acomoda na referência.

### 6.2.3 Controle ótimo

Assim como o método LQR visa a otimização em Controle Moderno, há também técnicas de controle ótimo para o Controle Clássico. Para isso, são utilizados índices de desempenho que avaliam os erros em simulação. Destaca-se o índice *ITAE - Integral Time Absolute Error*, sintetizado pela Equação 6.10.

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (6.10)$$

O método consiste em obter, *a priori*, a função de transferência em malha fechada para então, compará-la com aos coeficientes para um ITAE com entrada degrau. Através da tabela ITAE, obtém-se o polinômio de sétimo grau mostrado na Equação 6.11.

$$s^7 + 2.217*\omega_n*s^6 + 6.745*\omega_n^2*s^5 + 9.349*\omega_n^3*s^4 + 11.58*\omega_n^4*s^3 + 8.68*\omega_n^5*s^2 + 4.323*\omega_n^6*s + \omega_n^7 = 0 \quad (6.11)$$

A frequência natural do sistema pode ser estimada observando a resposta com entrada do tipo degrau com função de transferência ITAE em função do tempo normalizado. Para  $n = 6$ , observa-se  $\omega_n t = 8$ , e arbitrou-se um tempo de acomodação de 15 s, de forma que  $\omega_n = 0,55 rad/s$ .

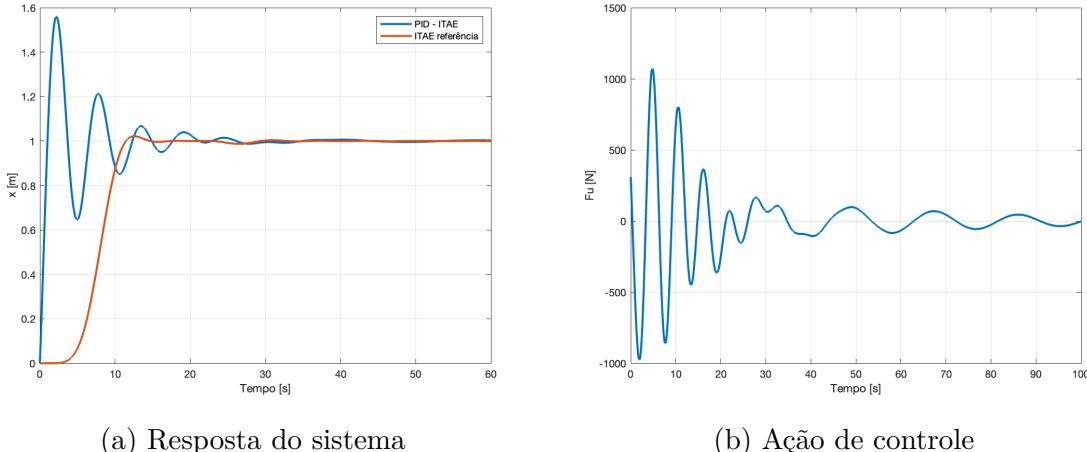
De forma semelhante ao método de alocação de polos, a equação característica de malha fechada do sistema pode ser reescrita como 6.7. Assim, com o auxílio do *Software Mathematica* e com a utilização do método de mínimos quadrados, comparou-se as Equações 6.11 e 6.7 a fim de se obter os ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  que oferecessem o menor erro possível.

$$\begin{cases} K_p = 676,87 \\ K_d = 406,72 \\ K_i = 427,96 \end{cases} \quad (6.12)$$

Dessa forma, é possível simular o sistema. Para isso, aplicou-se uma entrada do tipo degrau ao PID, e acrescentou-se uma curva denominada "ITAE Referência", que indica a

função e transferência com coeficientes ótimos ITAE para MF e entrada do tipo degrau. Além disso, também plotou-se os esforços nos atuadores.

Figura 32 – Resultados para controlador PID sintonizado por controle ótimo - ITAE



No gráfico obtido, nota-se um *overshoot* bastante significativo de cerca 50% e, embora o tempo de subida seja pequeno de aproximadamente 5 s, o tempo de acomodação é de 30 s. Ressalta-se, ainda, que a resposta apresenta oscilações antes de acomodar e seguir a referência ITAE, com um comportamento bastante inferior à referência ótima no regime transitório, mas satisfatória em regime permanente. Contudo, é notório que os esforços do atuador estão altos, superando a capacidade física estipulada, fato este que indica ser este método de controle inadequado para o sistema estudado.

#### 6.2.4 Lugar das raízes

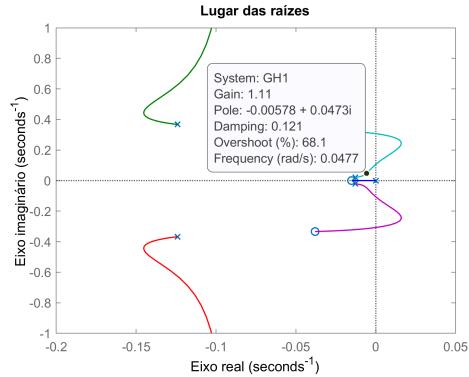
A função de transferência em malha fechada é dada pela forma geral mostrada na Equação 6.13.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} \quad (6.13)$$

A equação característica  $GH(s) + 1 = 0$  pode ser reescrita como  $GH(s) = -1$ ,  $GH(s) = 1/\pm 180^\circ$ . Essa última forma deixa explícito que as raízes devem respeitar uma condição de módulo igual a 1, e uma condição de fase de  $-180^\circ$ . Com isso, variando-se o ganho  $K$  de zero ao infinito pode se obter graficamente os locais nos quais as raízes de malha fechada se situam.

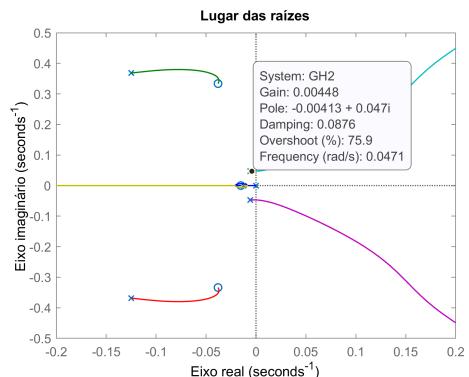
Nesse sentido, contrói-se o lugar das raízes para a obtenção do ganho proporcional, mostrada na Figura 33. Nesse sentido, opta-se pelo ganho 0,366 que corresponde aos polos  $-0,0082 \pm 0,0315j$ .

Figura 33 – Lugar das raízes para ganho proporcional



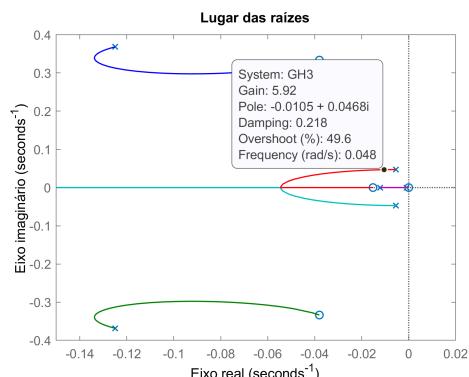
Em seguida, o lugar das raízes para a obtenção do ganho integral é ilustrado na Figura 34. Nisso, escolhe-se o ganho de 0,00448 correspondente aos polos  $-0,00413 \pm 0,047j$ .

Figura 34 – Lugar das raízes para ganho integral



Por fim, o mesmo procedimento é realizado para a obtenção do ganho derivativo que foi escolhido como igual a 5,92. O lugar das raízes utilizado é mostrado na Figura 35.

Figura 35 – Lugar das raízes para ganho derivativo

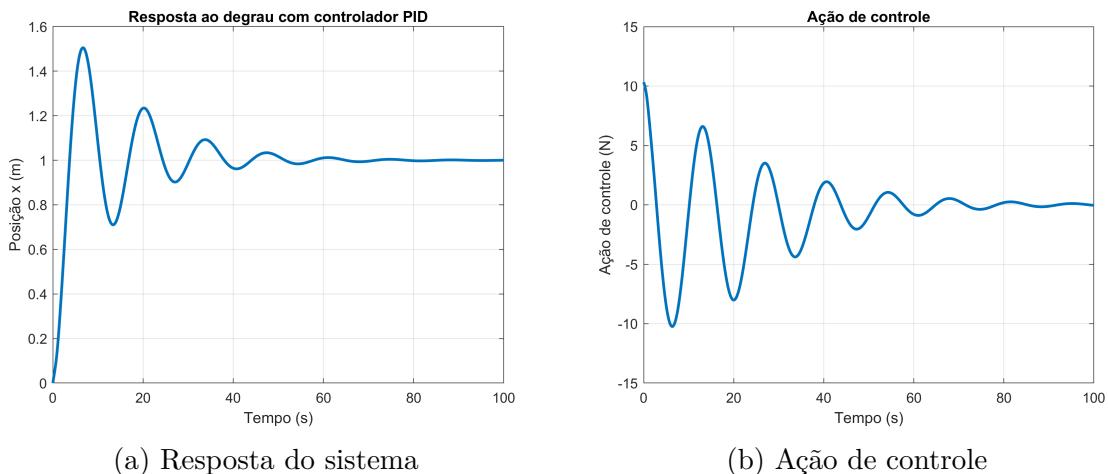


Dessa forma, obtém-se o controlador PID, cuja resposta a um degrau unitário é mostrado na Figura 36. Nisso, observa-se que o tempo de subida é cerca de 10 s, contudo, o sistema só atinge a acomodação em aproximadamente 100 s. Além do mais, observa-se um sobressinal de cerca de 0,4 m seguido de um comportamento oscilatório até a estabilização.

Com isso, pode-se dizer que o controlador funciona, contudo não é muito eficaz pois a resposta é muito lenta para o problema. Indo mais além, calcula-se a ação de controle  $u(t)$  por meio da Equação 6.5, mostrada na Figura 36b. Nisso, nota-se que as forças aplicadas são bem baixas, da ordem de 10 N, que é bem inferior à força máxima capaz de ser exercida pelo atuador. Além disso, percebe-se que a força se reduz a zero a medida que o estado atinge a referência.

Ressalta-se que a iteração de ganhos não se mostrou eficiente, pois por vezes instabilizava-se o sistema.

Figura 36 – Resultados para controlador PID sintonizado por lugar das raízes



### 6.3 Análise da estabilidade relativa e síntese de compensadores

A análise de estabilidade de um sistema pode ser feita verificando os contornos do ponto  $-1$  no diagrama de Nyquist com o Teorema de Cauchy, isto é, o sistema só será estável se o número de voltas no sentido anti-horário ao redor de  $-1$  for igual ou menor que o número de polos instáveis em malha fechada.

Além disso, nesse mesmo gráfico pode ser analisada a estabilidade relativa em relação a fase e ao ganho, sendo que a estabilidade está relacionada a valores positivos dessas margens. Quanto ao ganho verifica-se a distância até o ponto  $-1$  quando a fase é  $180^\circ$ . Já em relação à fase verifica-se a distância até  $180^\circ$  quando o módulo é 1.

A mesma análise pode ser feita com o diagrama de Bode, só que neste caso, verifica-se a distância entre o gráfico e o 0 dB quando a fase é  $-180^\circ$  e a distância entre o gráfico

e o  $-180^\circ$  quando o ganho é 0 dB.

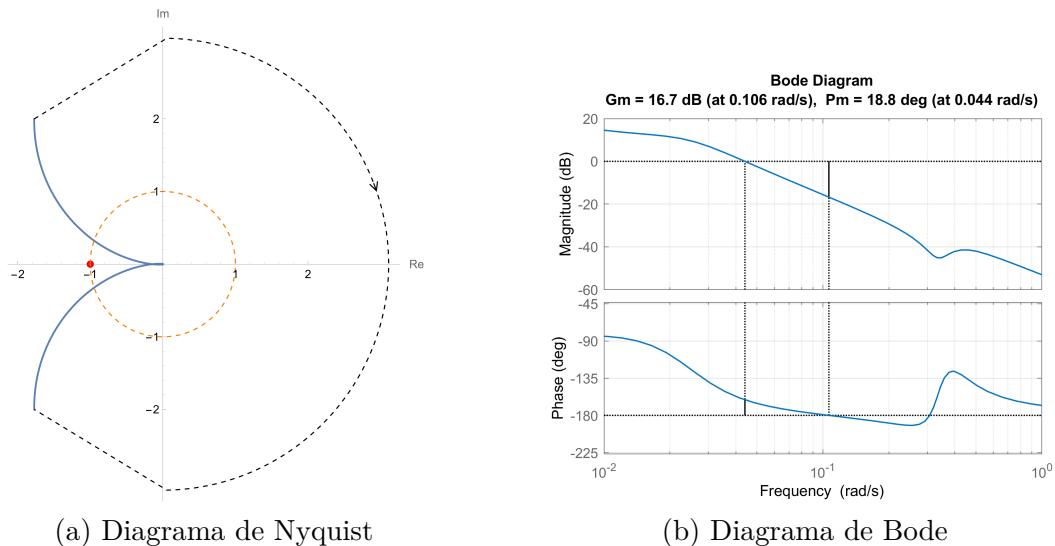
A seguir a análise de estabilidade será feita para o sistema não controlado e os controlados pelos quatro métodos.

### 6.3.1 Sistema sem controle PID

Assim, inicia-se a análise com o sistema sem qualquer tipo de controlador, nisso o diagrama de Nyquist e o de Bode são mostrados na Figura 51. Percebe-se pelo diagrama de Nyquist que não há contorno ao redor do ponto  $-1$ , mostrando que o sistema sem controle é estável em malha fechada. Observando o diagrama de Bode, observa-se que tanto a margem de ganho, de  $16,7 \text{ dB}$  quanto de fase, de  $18,8^\circ$ , são positivas, o que confirma a estabilidade.

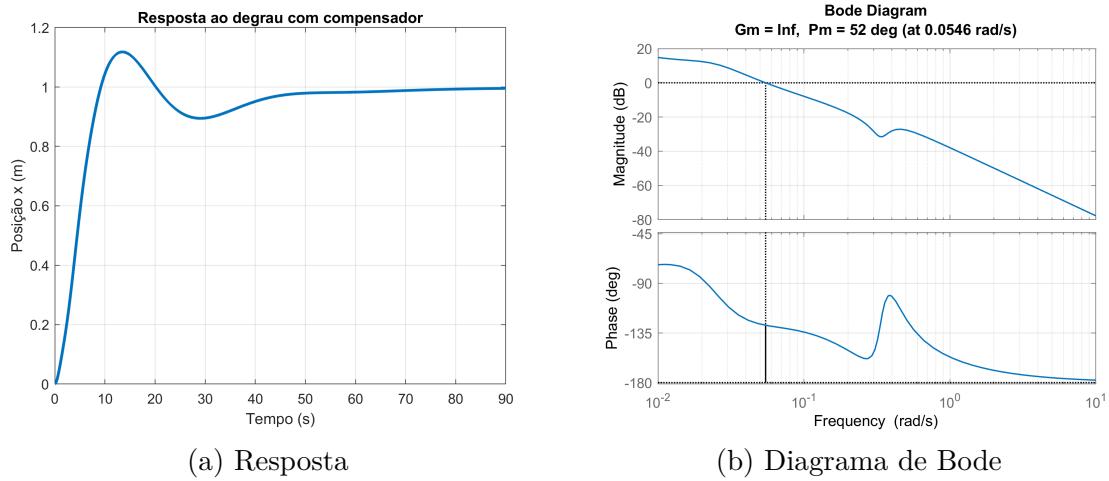
Contudo, o valor da margem de fase ainda está inferior à faixa recomendada e assim pode-se adicionar um compensador.

Figura 37 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema não controlado



Nesse sentido, adiciona-se um compensador usando o gráfico de Bode para avançar o sistema  $50^\circ$ , com isso a resposta obtida e o diagrama de Bode com o compensador são mostrados na Figura 38. Assim, nota-se que a adição de um compensador faz com que o sistema acomode em cerca de  $90 \text{ s}$ , com um sobressinal de mais ou menos  $0,1 \text{ m}$ . Percebe-se também que a margem de fase agora está dentro dos limites e próximo do especificado. Contudo, o sistema continua lento para responder.

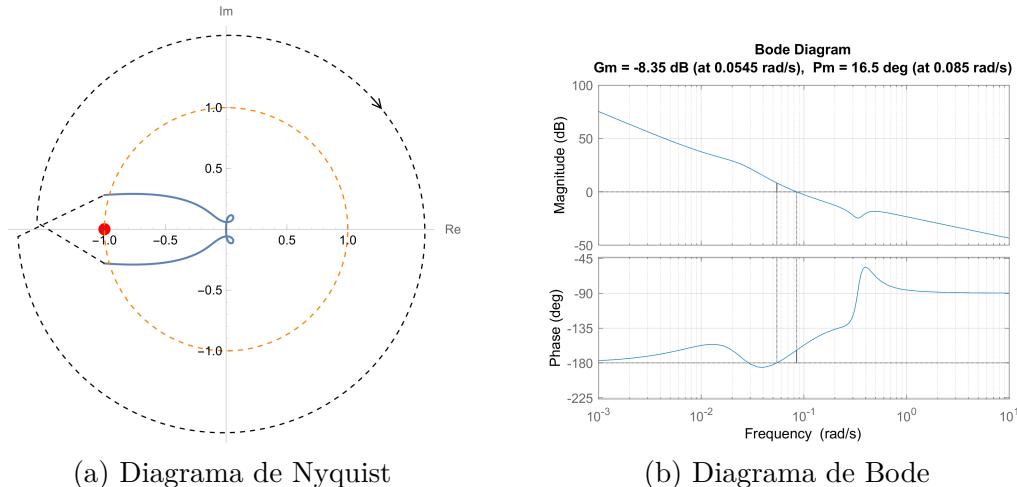
Figura 38 – Resposta do sistema com compensador e gráfico de Bode



### 6.3.2 Sistema sintonizado por Ziegler-Nichols

Para avaliar a estabilidade do controlador sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols, é interessante construir o Diagrama de Nyquist da função de transferência em malha aberta e verificar a estabilidade relativa. Além disso, o mesmo pode ser feito pelo Diagrama de Bode. A Figura 39 ilustra o mapa e o diagrama em questão.

Figura 39 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode para avaliação de estabilidade



É possível perceber a presença de duas voltas positivas em torno de  $-1$ . Assim sendo, nas condições de polos instáveis de  $GH$  e zeros, tais voltas conferem instabilidade ao sistema em malha fechada. Tal conclusão pode ser tomada também, pelo Diagramas de Bode. Avaliando o ganho para a frequência que provoca uma fase de  $-180^\circ$ , ou seja,  $\omega_\pi$ , tem-se  $\delta < 0$ , característica de sistema instável.

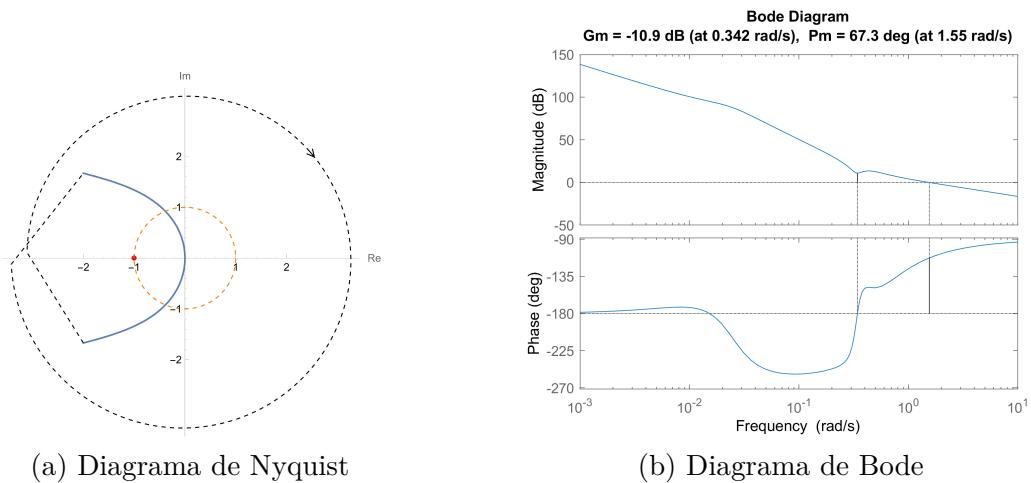
Tal resultado pode ter acontecido por se tratar de um sistema de ordem elevada, diferentemente dos sistemas utilizados para elaboração do método. Desse modo, conclui-se

que, para o sistema em questão, o método de Ziegler-Nichols não se mostra adequado. Por último, ressalta-se que a utilização de compensadores antes e depois da adição do controlador não foi efetiva.

### 6.3.3 Sistema sintonizado por alocação de polos

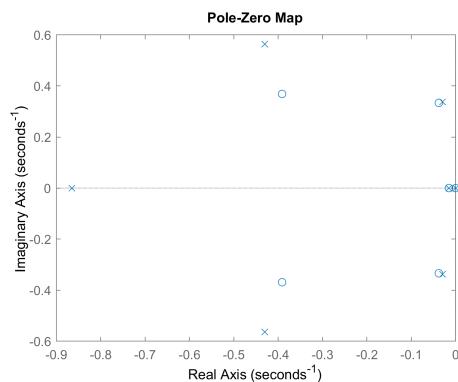
Para analisar a estabilidade do sistema com controlador obtido pelo método de alocação de polos, gerou-se os diagramas de Nyquist e de Bode para este caso.

Figura 40 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por alocação de polos



Na Figura 40a, o ponto  $-1$  é contornado duas vezes positivamente, indicando instabilidade. A Figura 40b confirma essa condição, indicando que a margem de ganho é negativa ( $-10.3 \text{ dB}$ ), e, portanto, confirmando a instabilidade do sistema. Isso acontece, pois os ganhos obtidos não alocam os polos desejados. O método dos mínimos quadrados introduz um erro nos valores dos ganhos, levando a alocação de polos muito próximos da origem, como mostra a Figura 41. Vale ressaltar que a adição de compensadores não melhorou a estabilidade do sistema, logo foram apresentados.

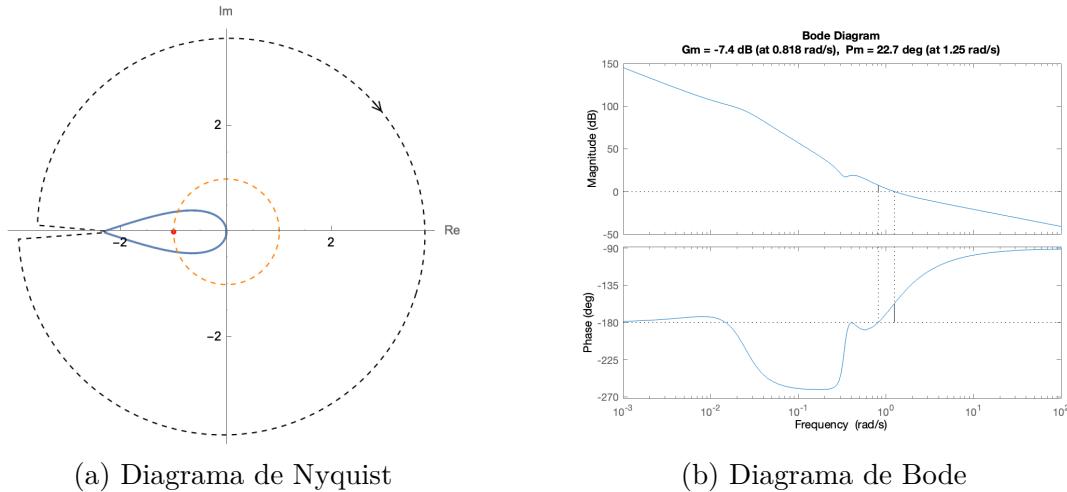
Figura 41 – Mapa de zeros e polos efetivamente alocados em malha fechada



### 6.3.4 Sistema sintonizado por controle ótimo

De maneira análoga à feita para os outros controladores, avaliou-se a estabilidade do sistema sintonizado por controle ótimo a partir do diagrama de Nyquist e pelas margens de ganho e fase no diagrama de Bode.

Figura 42 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por controle ótimo



(a) Diagrama de Nyquist

(b) Diagrama de Bode

Também analisou-se os polos e zeros em malha aberta, e verificou-se a presença de polos com parte real negativa e de um polo nulo. Dessa forma, deve-se considerar o número de polos instáveis iguais à zero para avaliar o critério de estabilidade de Nyquist.

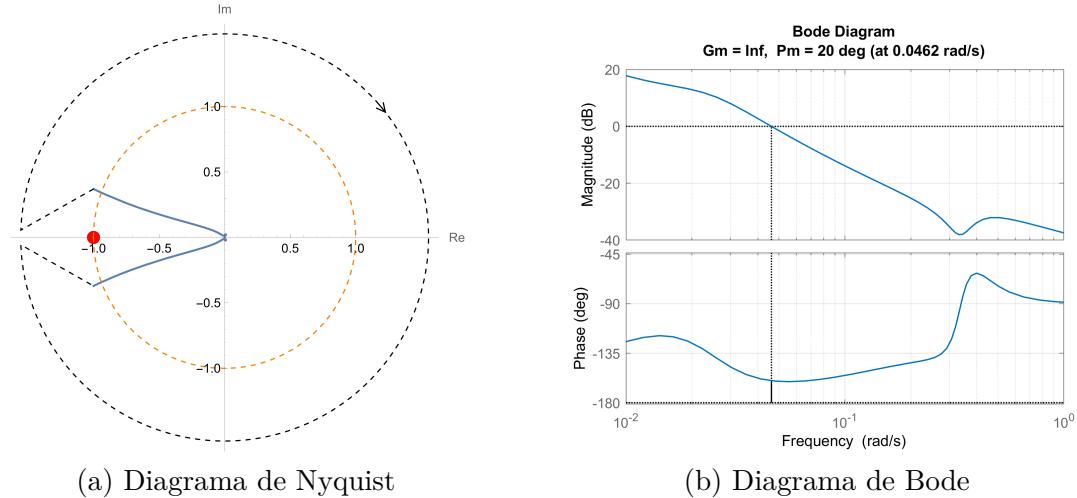
Analizando o diagrama de Nyquist, nota-se que o ponto  $-1$  é contornado duas vezes no sentido horário. Nesse sentido, como não há a presença de um polo instável em malha aberta,  $P_{GH} = 0$ , o sistema não satisfaz o critério de estabilidade de Nyquist. Da mesma forma, pelos gráficos de Bode, obtém-se uma margem de ganho negativa, fato que indica que o sistema é instável em malha fechada.

É relevante ressaltar que o uso de compensadores de avanço e atraso não se mostrou eficaz para corrigir o problema de instabilidade, e por essa razão não foram apresentados.

### 6.3.5 Sistema sintonizado por lugar das raízes

Realiza-se então a análise de estabilidade relativa com o sistema com controlador obtido pelo Lugar das Raízes. Nesse sentido, mostra-se diagrama de Nyquist o diagrama de Bode com as respectivas margens de ganho e fase nas Figuras 43a e 43b

Figura 43 – Diagrama de Nyquist e Diagrama de Bode do sistema sintonizado por Lugar das Raízes



(a) Diagrama de Nyquist

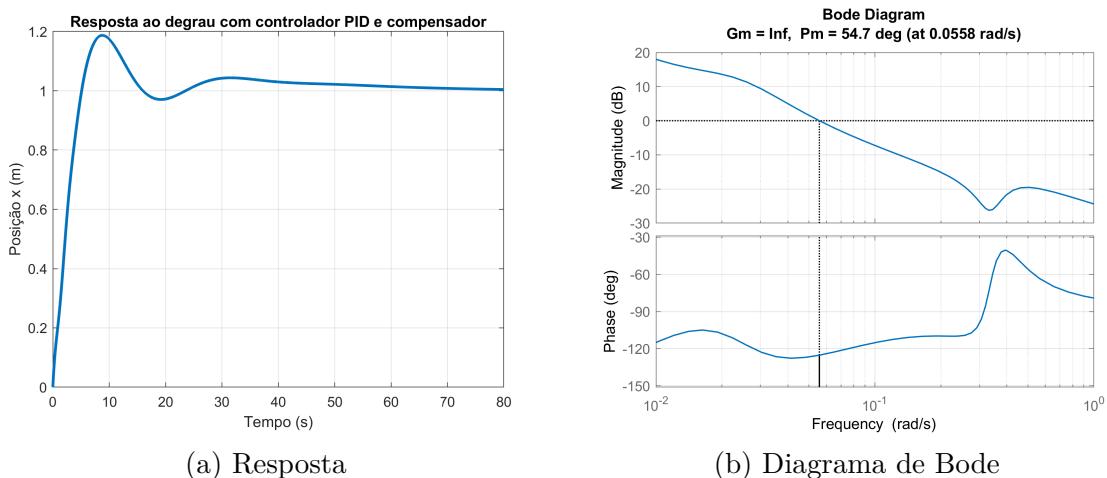
(b) Diagrama de Bode

Inicialmente, olhando o diagrama de Nyquist, tem-se a curva em si em azul e preto tracejada, o ponto  $-1$  em vermelho e o círculo de raio  $1$  em laranja tracejado. Assim, primeiramente observa-se que o sistema é estável pois o ponto  $-1$  não é contornado, que não há um valor definido de margem de ganho e que a margem de fase é positiva. Quantitativamente, no diagrama de Bode, a margem de ganho é infinita e a de fase é positiva e igual a  $20^\circ$ .

No entanto, apesar da margem de fase de  $20^\circ$  indicar estabilidade, o valor não está na faixa recomendada entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$ . Dessa maneira, adiciona-se um compensador de avanço que atua melhorando o regime transitório.

Dessa maneira, foi-se sintetizado um compensador cuja de função de transferência é  $G_c(s) = 3,69 \frac{s+0,0521}{s+0,1921}$ , utilizando os gráficos de Bode, para avanço de  $50^\circ$ . Nisso, a resposta ao degrau e o gráfico de Bode para esse novo controlador está ilustrado na Figura 44.

Figura 44 – Resposta com PID e compensador e Diagrama de Bode



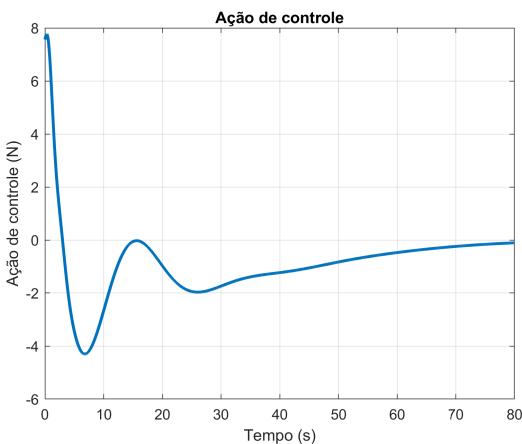
(a) Resposta

(b) Diagrama de Bode

Pelo gráfico, percebe-se uma melhora na resposta que passa apresentar menor tempo de acomodação, de cerca de 80 s, além de ter menor sobressinal, de mais ou menos 0,2 m e oscilar menos. No novo diagrama de Bode, nota-se assim que a margem de fase agora está dentro das condições recomendadas, com 54,7°.

Ainda, constrói-se o gráfico com o esforço dos atuadores, mostrado na Figura 45. Nisso, tem-se uma ação de controle menor que o caso do controlador PID sozinho, e possui o mesmo comportamento de tender a zero a medida que o sistema atinge a referência.

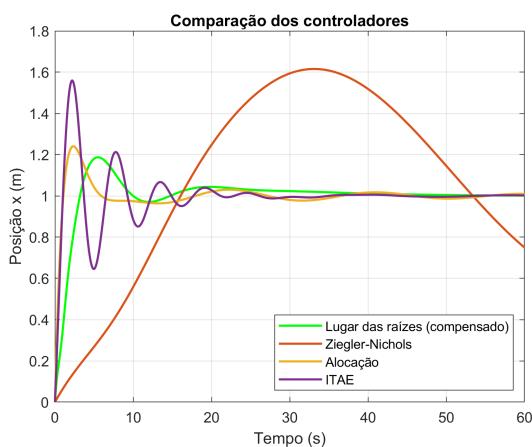
Figura 45 – Ação de controle para controlador PID com compensador



## 6.4 Comparação dos controladores

Por mais que a análise de estabilidade classificou três controladores como instáveis, pode-se compará-los quanto a resposta fornecida, assim, um gráfico com a resposta de todos os controladores sintetizados está na Figura 46.

Figura 46 – Comparação dos controladores PID



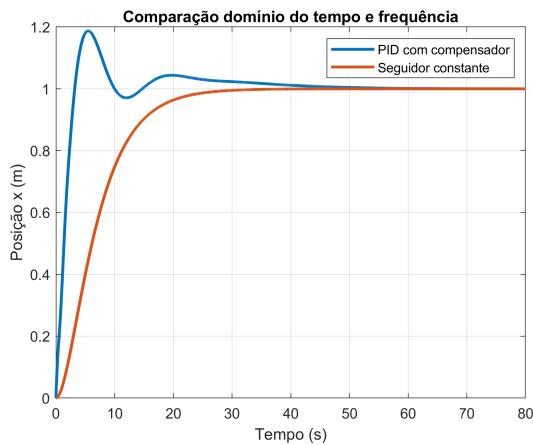
Inicialmente percebe-se que a resposta por Ziegler-Nichols é bem mais lenta que as demais, e como já visto, estabilizará em cerca de 400 s, o que é bem lento para a

aplicação. Em seguida o controle por alocação é relativamente rápido, porém tem um regime permanente ruim, e alterar o  $K_i$  para corrigir isso torna a resposta pior. O ITAE não ficou semelhante a referência mesmo com a adição do pré-filtro e portanto ficou pouco amortecido no transitório, novamente a alteração dos ganhos não produziu respostas satisfatórias. O controlador por Lugar das Raízes com compensador apresentou as melhores características em regime permanente e transitório, tendo um tempo de acomodação parecido com a alocação e o ITAE, fora isso, foi o único classificado como instável.

Vale acrescentar que a adição de um compensador sem o PID também apresentou bons resultados, se comportando de maneira semelhante ao PID sintonizado por Lugar das Raízes, apenas com um tempo de acomodação ligeiramente maior.

Além disso, pode-se realizar um comparação entre os métodos no domínio do tempo e da frequência. Para isso, foi comparado o seguidor de referência constante para o melhor controlador PID, que foi o sintonizado por lugar das raízes e com compensador. A comparação está na figura 47. Nisso, percebe-se claramente que o desempenho do seguidor no domínio do tempo é bem superior comparado ao do domínio da frequência, não apenas pelo tempo de acomodação menor, de cerca de 35 s, comparado com 80 s do PID, quanto em relação ao transitório não apresentando sobressinal ou comportamento oscilatório.

Figura 47 – Comparaçāo no domínio do tempo e frequência



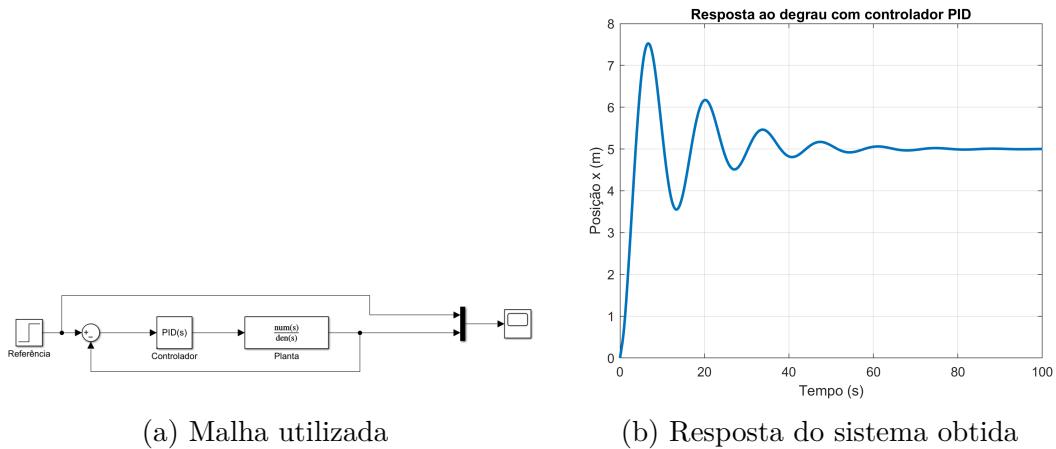
## 6.5 Seguimento de sinal e rejeição de distúrbios

Assim como comentado nos objetivos do projeto, a intenção é manipular o veículo, por meio dos atuadores e com a presença de distúrbios. Desse modo, deseja-se avaliar a capacidade do controlador sintonizado por lugar das raízes em realizar as tarefas desejadas.

### 6.5.1 Seguimento de sinal

A primeira tarefa condiz a posicionar o submarino em uma referência desejada. Definindo arbitrariamente uma posição  $x = 5 \text{ m}$ , obteve-se a resposta ilustrada na Figura 48b. Tal resultado foi obtido pela malhada construída em *Simulink* da Figura 48a.

Figura 48 – Malha e resposta obtidas em *Simulink* para seguimento de sinal

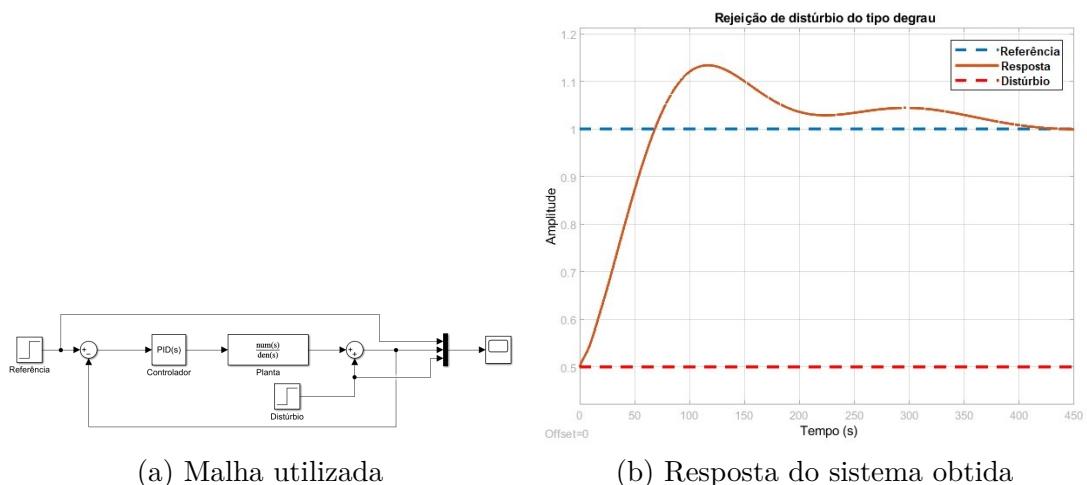


Assim como esperado, tem-se uma resposta semelhante ao degrau unitário. Utilizando a malha construída, é possível avaliar a resposta para outras referências variáveis.

### 6.5.2 Rejeição de distúrbios

Para avaliar a capacidade do controlador em rejeitar distúrbios, utilizou-se a malha de controle da Figura 49a implementada no *Simulink*. Para tanto, foi considerado um degrau unitário como sinal de referência e um degrau de 0,5 como distúrbio. Tal degrau não tem representação física do problema e foi construído nessa maneira para avaliar a rejeição. Os resultados obtidos encontram-se na Figura 49b.

Figura 49 – Malha e resposta obtidas em *Simulink* para rejeição de distúrbios



Comparando o resultado obtido com aquele sem o distúrbio, identifica-se de imediato um tempo maior de acomodação. Apesar disso, caminhando para o regime permanente, percebe-se que o sistema rejeita completamente o distúrbio, já que converge para referência.

## 6.6 Redução de ordem

A redução de ordem em um sistema está associada a sua simplificação algébrica. Para tanto, foi utilizado o método da norma de Hankel. Os valores singulares de Hankel do sistema  $\sigma_i$  indicam a energia destes na direção associada. Eles podem ser calculados com auxílio da função *balreal* do *Matlab*. A Tabela 6 mostra os valores singulares de Hankel associados a função de transferência dada pela Equação 6.1.

Tabela 6 – Valores singulares de Hankel

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$
Inf	Inf	1,3946	0,9326	0,0065	0,0033

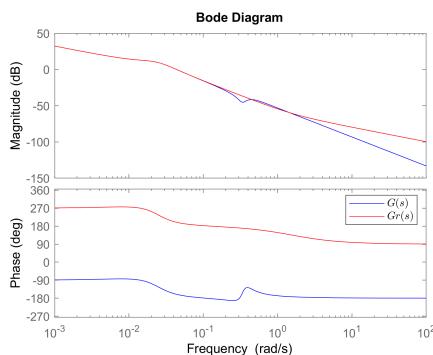
Fonte: Autoria própria

A Tabela 6 mostra que os dois menores valores singulares de Hankel são significativamente menores que os outros (o valor Inf indica que o ganho é muito maior que os outros). Dessa forma, é possível reduzir a ordem do sistema com auxílio da função *modred* do *Matlab*. A função de ordem reduzida é mostrada na Equação 6.14.

$$G_r(s) = \frac{-0,001045s^3 + 0,001621s^2 + 2,522 \cdot 10^{-5}s - 1,396 \cdot 10^{-21}}{s^4 + 0,02543s^3 + 0,0006023s^2 + 1,619 \cdot 10^{-22}s - 8,755 \cdot 10^{-39}} \quad (6.14)$$

Para validar o uso dessa redução, pode-se comparar os diagramas de Bode das duas funções de transferência (Figura 50). Percebe-se que, para baixas frequências, banda na qual o sistema opera, as duas funções de transferência são bem próximas; para altas frequências, elas se distanciam.

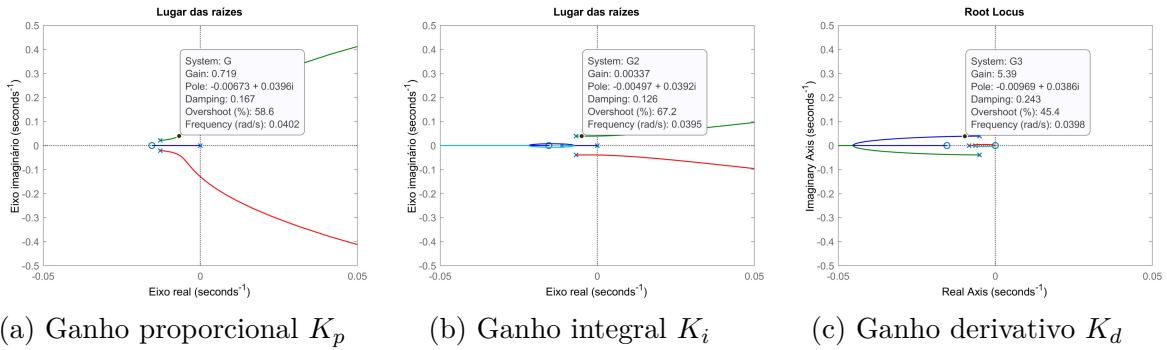
Figura 50 – Diagramas de Bode para as funções de transferência original e reduzida



Fonte: Autoria própria

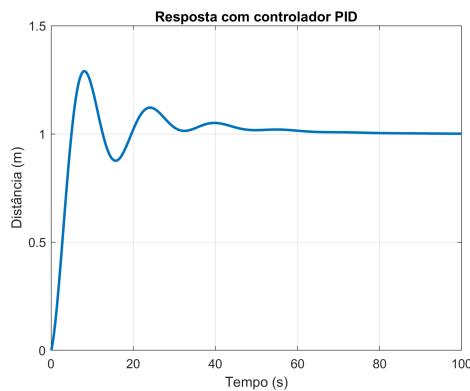
Utilizando a função de transferência reduzida, foi feita a sintonia de um controlador PID pelo lugar das raízes - vale destacar que as outras sintonias não geraram bons resultados, com funções de transferência em malha fechada instáveis. Assim, seguindo procedimento idêntico ao descrito na Seção 6.2.4, foram levantados os ganhos do controlador PID (Figuras 51a, 51b e 51c).

Figura 51 – Ganhos do controlador PID pelo lugar das raízes para o sistema reduzido



A resposta em malha fechada para uma entrada degrau pode ser vista na Figura 52. Percebe-se que a resposta apresenta um *overshoot* de 0,29 m e o tempo de acomodação foi próximo de 55 s.

Figura 52 – Resposta do sistema reduzido com controlador PID sintonizado pelo lugar das raízes



Fonte: Autoria própria

## 7 Conclusão

No presente trabalho apresentou-se brevemente a modelagem física e matemática de um veículo submarino autônomo inspirado no *Cuttlefish*.

Em seguida partiu-se para a síntese de controladores no domínio do tempo, por alocação de polos e pelo controle linear-quadrático. Nisso obteve-se bons resultados para reguladores da posição do submarino. Após isso, fez-se a síntese se seguidores e foi possível simular trajetórias tanto de referência constante como variável do submarino.

Após isso realizou-se os controladores no domínio da frequência por quatro métodos principais: Ziegler-Nichols, Alocação de Polos, ITAE e Lugar das Raízes. Desses apenas o por Lugar das Raízes apresentou resultados de resposta e estabilidade satisfatórios. Além disso, foi possível implementar um compensador para melhorar a resposta desse controle.

Os resultados obtidos pelo controle clássico demonstram uma certa limitação do uso de tais ferramentas para sistemas de ordem elevada. Apesar disso, como obteve-se um resultado estável para malha fechada do sistema com controle sintonizado por lugar das raízes, foi possível avaliar os resultados e comparar a abordagem no tempo e na frequência.

Com tal comparação, percebe-se de imediato que, para o sistema em questão, o controle moderno demonstrou resultados bem mais satisfatórios. De qualquer modo, ambos apresentam projetar um controle para o submarino que permite a realização das tarefas desejadas.

# Referências

- BELLINGHAM, J. Platforms: Autonomous underwater vehicles. p. 1–2, 2009.
- CARRERAS, M.; OLIVER, G.; RIBAS, D.; RIDAO, P.; SANZ, P. J. Intervention auvs: The next challenge. p. 1–2, 2014.
- CHANDRASEKHAR, V. Localization in underwater sensor networks — survey and challenges. 2006.
- CHRISTENSEN, L.; HILLJEGERDES, J.; ZIPPER, M.; KOLESNIKOV, A.; HULSEN, B.; KOCH, C. E. S.; HILDEBRANDT, M.; DANTER, L. C. The hydrobatic dual-arm intervention auv cuttlefish. German Research Center for Artificial Intelligence, 2022.
- DONHA, D. C. Notas de aula de pme3481 - controle e aplicações. 2023.
- FOSSEN, T. I. Nonlinear modelling and control of underwater vehicles. p. 39, 1991.
- FOSSEN, T. I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. [S.l.]: John Wiley Sons, 1994. ISBN 0471941131.
- FOSSEN, T. I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. [S.l.: s.n.], 2021. 43 p.
- FRIEDLAND, B. *Control System Design, An Introduction to State-Space Methods*. [S.l.]: Dover Publication Inc., 1986.
- KAASA, S. Hydrodynamics – calculation of added mass on complex objects. p. 16, 2021.
- LEWIS, E. V. *Principles of Naval Architecture: Motions in waves and controllability*. [S.l.]: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1989. III. ISBN 0939773023.
- ORPEN, K. Dynamic modelling and simulation of an autonomous underwater vehicle (auv). p. 5, 2021.
- PÉREZ, F. N. Técnicas de linearização para controle de sistemas não-lineares. p. 4–6, 1990.
- RENTSCHLER, M. E. Dynamic simulation modeling and control of the odyssey iii autonomous underwater vehicle. p. 137, 2003.
- VERVOORT, J. Modeling and control of an unmanned underwater vehicle. p. 119, 2008.
- YU, R.; SHI, Z.; CHAOXING, H.; LI, T.; MA, Q. Deep reinforcement learning based optimal trajectory tracking control of autonomous underwater vehicle. In: . [S.l.: s.n.], 2017. p. 4958–4965.
- ÁVILA, J. P. J. Modelagem e identificação de parâmetros hidrodinâmicos de um veículo submarino robótico. p. 32, 2008.

# A Parâmetros adotados

## A.1 Atuadores

Tabela 7 – Parâmetros dos propulsores utilizados na modelagem

Parâmetro	Valor	Unidade
$\alpha$	$\pi/4$	rad
r	1.72	m

Fonte: Autoria própria

## A.2 Amortecimento hidrodinâmico

Os valores foram arbitrados, contudo esses foram comparados com os obtidos experimentalmente por Ávila (2008), de maneira a terem ordem de grandeza correta.

Tabela 8 – Coeficientes de amortecimento

Parâmetro	Valor	Unidade
$X_u$	-92	$Ns/m$
$Y_v$	-10	$Ns/m$
$N_r$	-23	$Ns/m$
$X_{u u }$	-380	$Ns^2/m^2$
$Y_{v v }$	-530	$Ns^2/m^2$
$N_{r r }$	-110	$Ns^2/m^2$

## A.3 Massa adicional

Os valores foram arbitrados, contudo esses foram comparados com os obtidos experimentalmente por Ávila (2008), de maneira a terem ordem de grandeza correta.

Tabela 9 – Massa adicionada

Parâmetro	Valor	Unidade
$X_{\dot{u}}$	280	kg
$Y_{\dot{v}}$	400	kg
$N_{\dot{r}}$	210	$kg \cdot m^2$

## B Cálculo da massa adicional e amortecimento hidrodinâmico

Primeiramente, com relação aos coeficientes de massa adicionada, Lewis (1989) apresenta as seguintes fórmulas, baseados na aproximação de um veículo delgado:

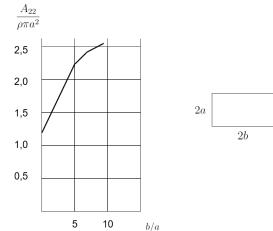
$$-X_u = \int_{-L/2}^{L/2} A_{11}(y, z)dx \approx 0.1m \quad (\text{B.1})$$

$$-Y_v = \int_{-L/2}^{L/2} A_{22}(y, z)dx \quad (\text{B.2})$$

$$-N_r = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 A_{22}(y, z)dx \quad (\text{B.3})$$

Onde o coeficiente  $A_{22}$  para uma seção transversal retangular é fornecido pelo gráfico na Figura 53.

Figura 53 – Valores de  $A_{22}$  para seção transversal retangular



(FOSSEN, 1994), Adaptado

Com relação ao amortecimento hidrodinâmico, de maneira semelhante ao apresentado também em (FOSSEN, 1994), é possível modelá-lo da seguinte forma:

$$f(U) = -\frac{1}{2}\rho C_D(Re)A|U|U \quad (\text{B.4})$$

Sendo  $A$  a da seção transversal,  $C_D(Re)$  o coeficiente de amortecimento em função do número de Reynolds,  $\rho$  a densidade e  $U$  a velocidade. Tomando o amortecimento na direção  $x$  como exemplo, chega-se no mesmo resultado apresentado em (VERVOORT, 2008):

$$X_{u|u|} = -\frac{1}{2}\rho C_d A_f \quad (\text{B.5})$$

Os elementos nas outras direções são calculados de maneira análoga.

# C Linearização

## C.1 Pontos de operação

Assim como comentado anteriormente, para linearizar em série de Taylor, é necessário definir pontos de operação, em torno dos quais o modelo linear será válido. Como resultado, tem-se os pontos que representam um estado de regime permanente no AUV representado na equação C.1.

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{\psi} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = 1 \\ \dot{\bar{y}} = 0.5 \\ \dot{\bar{\psi}} = 0.1 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Em continuidade, determina-se que a força dos propulsores é nula e a velocidade de correnteza na condição de equilíbrio são nulas é constante:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_u = 0 \\ \bar{\tau}_v = 0 \\ \bar{\tau}_r = 0 \\ \bar{u}_c^E = 1 \\ \bar{v}_c^E = 1 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Espaço de estados

Com os pontos de equilíbrio definidos, aplica-se o Espaço de Estados, em que a equação diferencial de ordem elevada é transformada num sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Assim sendo, o sistema pode ser escrito na forma da Equação C.3.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Na Equação C.3,  $\mathbf{x}$  representa o vetor de estados do sistema,  $\mathbf{y}$  o vetor de saídas e  $\mathbf{u}$  o vetor de entradas. Dessa forma, para o sistema analisado, tem-se:

### C.3 Linearização

De maneira coerente ao que foi apresentado, a linearização é feita por expansão em série de Taylor ao redor das posições de equilíbrio e desprezando-se os termos de segunda ordem ou superior. Tal processo pode ser observado na Equação C.4.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \Big|_{eq} (x_j - \bar{x}_j) + \sum_{j=1}^5 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_j} \Big|_{eq} (u_j - \bar{u}_j) \quad (\text{C.4})$$

Para realização desse processo, utilizou-se o *software* Mathematica. Em sequência, com o sistema linearizado é possível escrevê-lo na forma de Espaço de Estados, assim como representado na Equação C.3. Com esse intuito, obteve-se as matrizes mostradas pelas equações do espaço de estados em malha aberta.

## D Função de transferência

Dada a função de transferência  $\mathbf{G}(s)$ :

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\tau_u}(s) & \mathbf{G}_{\tau_v}(s) & \mathbf{G}_{\tau_r}(s) & \mathbf{G}_{u_c^E}(s) & \mathbf{G}_{v_c^E}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

É relevante ressaltar que o denominador de todas as funções de transferência é o próprio polinômio característico, dado por pela Equação D.2.

$$P(s) = s^6 + 0.273796s^5 + 0.157203s^4 + 0.00401842s^3 + 0.000090883s^2 \quad (\text{D.2})$$

Com o software *Mathematica*, obteve-se a função de transferência:

$$\mathbf{G}_{\tau_u}(s) = \frac{10^{-3}}{P(s)} \begin{bmatrix} 2.218s^4 + 0.2024s^3 + 0.2528s^2 + 0.003805s \\ 0.04288s^3 + 0.003261s^2 - 0.005996s \\ 0.5004s^3 + 0.00761s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{G}_{\tau_v}(s) = \frac{10^{-3}}{P(s)} \begin{bmatrix} 0.04288s^3 + 0.003261s^2 + 0.004837s \\ 1.789s^4 + 0.4627s^3 + 0.2751s^2 + 0.00307s \\ 0.009674s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{G}_{\tau_r}(s) = \frac{10^{-3}}{P(s)} \begin{bmatrix} 2.218s^4 + 0.2024s^3 + 0.2528s^2 + 0.003805s \\ 0.04288s^3 + 0.003261s^2 - 0.005996s \\ 0.5004s^3 + 0.00761s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{G}_{u_c^E}(s) = \frac{10^{-2}}{P(s)} \begin{bmatrix} 18.25s^4 + 4.323s^3 + 0.2303s^2 + 0.009088s \\ -1.933s^4 - 0.147s^3 + 0.2704s^2 \\ -22.56s^4 - 0.3431s^3 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{G}_{v_c^E}(s) = \frac{10^{-2}}{P(s)} \begin{bmatrix} -2.396s^4 - 0.1823s^3 - 0.2704s^2 \\ 1.521s^4 + 0.3469s^3 + 0.2303s^2 + 0.009088s \\ -0.5407s^3 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

# E Informações complementares - Controladores no Espaço de Estados

## E.1 Alocação de polos

- Matriz de ganhos para alocação de polos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 56,3589 & 0 & 37,7217 & 143,1353 & 10,8050 & -54,0251 \\ 0 & 44,7137 & -12,0998 & 10,8050 & 326,8529 & 0 \\ 0 & 0 & -12,6460 & 54,0251 & 0 & 101,5100 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

- Matriz de malha fechada para alocação de polos

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,125 & 0 & 0 & -0,5 & -3,4694 \cdot 10^{-18} & 0 \\ 0 & -0,08 & -3,4694 \cdot 10^{-18} & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

- Matriz de transição para alocação de polos

$$\Phi_{\mathbf{F}}(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \cdot 10^{-26} & 2 \cdot 10^{-42} & 0,01 & -2 \cdot 10^{-22} & 5 \cdot 10^{-45} \\ 0 & 1 & -2 \cdot 10^{-22} & 0 & 0,01 & -6 \cdot 10^{-25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,01 \\ -0,0012 & 1 \cdot 10^{-23} & 6 \cdot 10^{-40} & 0,995 & -3 \cdot 10^{-20} & 2 \cdot 10^{-42} \\ 0 & -8 \cdot 10^{-4} & -3 \cdot 10^{-20} & 0 & 0,994 & -2 \cdot 10^{-22} \\ 0 & 0 & -6 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0,995 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

## E.2 Controle LQ

- Matriz de ganhos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 15,9451 & -0,1289 & 18,4925 & 73,3154 & 7,1852 & 30,5496 \\ 1,5968 & 19,7857 & -3,0013 & 11,5923 & 140,8382 & -10,4054 \\ 6,6692 & -2,0606 & 17,8724 & 57,5256 & -12,1445 & 50,3613 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

- Polos

Tabela 10 – Polos do sistema em malha fechada

Polo	Multiplicidade
-0,6126 + 0,6938j	1
-0,6126 - 0,6938j	1
-0,3863 + 0,3397j	1
-0,3863 - 0,3397j	1
-0,2149 + 0,2096j	1
-0,2149 - 0,2096j	1

Fonte: Autoria própria

- Matriz de malha fechada para LQR

$$\mathbf{F}_{lq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -0,0366 & 0,0002 & 0,0388 & -0,3646 & 0,0057 & -0,2047 \\ -0,0018 & -0,0249 & -0,0163 & 0,0074 & -0,2227 & 0,0207 \\ -0,0154 & 0,0072 & -0,1574 & 0,0751 & 0,0564 & -0,2139 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

- Matriz de transição para LQR

$$\Phi_{\mathbf{F}_{lq}}(\Delta t) = \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,0000 & 0,0002 & 0,0982 & 0,0000 & -0,0010 \\ -0,0000 & 0,9999 & -0,0001 & 0,0000 & 0,0989 & 0,0001 \\ -0,0001 & 0,0000 & 0,9992 & 0,0004 & 0,0003 & 0,0989 \\ -0,0036 & 0,0000 & 0,0040 & 0,9639 & 0,0005 & -0,0197 \\ -0,0002 & -0,0025 & -0,0016 & 0,0007 & 0,9779 & 0,0019 \\ -0,0015 & 0,0007 & -0,0156 & 0,0072 & 0,0056 & 0,9780 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

# F Códigos

## F.1 Controle no Espaço de Estados

### F.1.1 Código para simulação em malha aberta

```

1 clear;
2 plot_veloc=0;
3 tau=[50 ,0 ,0];
4 uc=0;
5 vc=0;
6 t = 0:0.01:400;
7 x0=[0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0];
8 %Espaco de estados
9 A = readmatrix ("A.txt");
10 B2 = readmatrix ("B2.txt");
11 B1 = readmatrix ("B1.txt");
12 B= [B2,B1];
13 C =
    [1 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0;0 ,1 ,0 ,0 ,0 ,0;0 ,0 ,1 ,0 ,0 ,0;0 ,0 ,0 ,1 ,0 ,0;0 ,0 ,0 ,0 ,1 ,0 ;0 ,0 ,0 ,0 ,1];
14 D = zeros( size(C,1) , size(B,2));
15 sys=ss(A,B,C,D);
16 u=zeros(5 , length(t));
17 u(1,:) = tau(1).*ones( size(t));
18 u(2,:) =tau(2).*ones( size(t));
19 u(3,:) = tau(3).*ones( size(t));
20 u(4,:) = uc.*ones( size(t));
21 u(5,:) = vc.*ones( size(t));
22 [y ,t]=lsim(sys ,u ,t);
23
24 %Matriz de transição
25 X = MatTrans(A,B,u,0.01 ,400 ,x0);
26 %POSI O
27 %Plot de x
28 f1 = figure;
29 plot(t,X(1,:),'LineWidth',2,'LineStyle','—')
30 hold on
31 plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
32 hold off
33 title('Movimento de translação em X')
34 xlabel('Tempo (segundos)')
35 ylabel('Coordenada x (m)')
36 grid on

```

```
37 legend('Matriz de Transição','Espaço de estados')
38 print(f1, 'ACPderiva.png', '-dpng', '-r300');
39 %Plot de y
40 f2=figure;
41 plot(t,X(2,:),'LineWidth',2,'LineStyle','—')
42 hold on
43 plot(t,y(:,2),'LineWidth',2)
44 hold off
45 title('Movimento de translação em Y')
46 xlabel('Tempo (segundos)')
47 ylabel('Coordenada y (m)')
48 grid on
49 legend('Matriz de Transição','Espaço de estados')
50 print(f2, 'DCPderiva.png', '-dpng', '-r300');
51 %Plot de r
52 f3=figure;
53 plot(t,X(3,:),'LineWidth',2,'LineStyle','—')
54 hold on
55 plot(t,y(:,3),'LineWidth',2)
56 hold off
57 title('Movimento de rotação')
58 xlabel('Tempo (segundos)')
59 ylabel('Ângulo, \psi [rad]', 'interpreter', 'tex')
60 grid on
61 legend('Matriz de Transição','Espaço de estados')
62 print(f3, 'GCPderiva.png', '-dpng', '-r300');
63
64 if plot_veloc==1
65 %VELOCIDADE
66 %Plot de xdot
67 f1 = figure;
68 plot(t,X(4,:),'LineWidth',2,'LineStyle','—')
69 hold on
70 plot(t,y(:,4),'LineWidth',2)
71 hold off
72 title('Velocidade de translação em X')
73 xlabel('Tempo (segundos)')
74 ylabel('Velocidade $\dot{x}$ (m/s)', 'interpreter', 'latex')
75 grid on
76 legend('Matriz de Transição','Espaço de estados')
77 print(f1, 'veloc_ACPderiva.png', '-dpng', '-r300');
78 %Plot de y
79 f2=figure;
80 plot(t,X(5,:),'LineWidth',2,'LineStyle','—')
81 hold on
82 plot(t,y(:,5),'LineWidth',2)
83 hold off
```

```

84 title( 'Velocidade de translação em Y')
85 xlabel( 'Tempo ( segundos )')
86 ylabel( 'Velocidade  $\dot{y}$  (m/s)', 'interpreter', 'latex' )
87 grid on
88 legend( 'Matriz de Transição', 'Espaço de estados' )
89 print(f2 , 'veloc_DCPderiva.png', '-dpng', '-r300');
90 %Plot de r
91 f3=figure;
92 plot(t,X(6,:),'LineWidth',2,'LineStyle','--')
93 hold on
94 plot(t,y(:,6),'LineWidth',2)
95 hold off
96 title( 'Velocidade de rotação')
97 xlabel( 'Tempo ( segundos )')
98 ylabel( 'Velocidade  $\dot{\psi}$  (rad/s)', 'interpreter', 'latex' )
99 grid on
100 legend( 'Matriz de Transição', 'Espaço de estados' )
101 print(f3 , 'veloc_GCPderiva.png', '-dpng', '-r300');
102 end
103
104
105
106 function x = MatTrans(A,B,u,dt,Tf,x0)
107 % A: Matriz do sistema
108 % B: Matriz de entradas
109 % u: vetor de entradas
110 % dt: intervalo de tempo para cálculo das matrizes
111 % Tf: tempo total de simulação
112 % x0: Condições iniciais
113
114 % Matriz de transição (dt)
115 Phi = eye(size(A,1)) + A*dt + A^2*dt^2/2 + A^3*dt^3/6;
116
117 % Matriz dos termos forçantes
118 Gama = eye(size(A,1))*dt + A*dt^2/2 + A^2*dt^3/6 + A^3*dt^4/24;
119
120 nt = round(Tf/dt);
121 t = 0:dt:(nt*dt);
122 x = zeros(6,nt);
123 x(:,1) = x0;
124
125 % Cálculo de x
126 for i = 1:(nt)
127     x(:,i+1) = Phi*x(:,i) + Gama*B*u(:,i);
128 end
129 end

```

### F.1.2 Código para alocação de polos

```

1 %Matrizes no espaço de estados
2 A=readmatrix ("A.txt");
3 B1=readmatrix ("B1.txt");
4 B2=readmatrix ("B2.txt");
5 C=readmatrix ("C.txt");
6 D=zeros( size(C,1) , size(B1,2));
7 %Vetor de polos
8 p=[-0.2;-0.2;-0.25+0.25*1i;-0.25-0.25*1i;-0.3;-0.4];
9 %Alocacao de polos
10 K=place(A,B2,p);
11 %Malha aberta
12 sysma=ss(A,B1,C,D);
13 %Malha fechada
14 F=A-B2*K;
15 sysmf=ss(F,B1,C,D);
16 %Matriz de transicao
17 dt=0.01;
18 tfmt=35;
19 t=0:dt:tfmt;
20 x0=[1;2;0.5;0;0;0];
21 x=zeros(6,length(t));
22 x(:,1)=x0;
23 Phi=expm(F*dt);
24 for i=1:length(t)-1
25     x(:,i+1)=Phi*x(:,i);
26 end
27 %Degrau
28 tfd=30;
29 [yma,tma,xma]=step(sysma, tfd);
30 [ymf,tmf,xmf]=step(sysmf, tfd);
31 %Esforços dos atuadores
32 for i = 1:(length(t)) % Cálculo das forças do regulador para condições
    iniciais
    taumt(:,i) = K*x(:,i);
33 end
34 for j = 1:(length(tmf)) % Cálculo das forças do regulador para corrente
35     taumf(:,j) = K*xmf(j,: ,1)';
36 end
37

```

Trabalho/T1/codigos/polos.m

### F.1.3 Código para LQR

```

1 %% Regulador LQ
2
3 % Espaço de Estados

```

```

4 A = readmatrix( 'A.txt' );
5 B1 = readmatrix( 'B1.txt' );
6 B2 = readmatrix( 'B2.txt' );
7 C = readmatrix( 'C.txt' );
8 D = zeros( size(C,1) , size(B1,2) );
9
10 % Implementação do LQR
11 Q = [8000 0 0 0 0 0;
12     0 2000 0 0 0 0;
13     0 0 8000 0 0 0;
14     0 0 0 1000 0 0;
15     0 0 0 0 1000 0;
16     0 0 0 0 0 1000]; % Matriz de pesos para estados
17 R = [.6 0 0;
18     0 .8 0;
19     0 0 .2]; % Matriz de pesos para as entradas
20 [Klq, S, P] = lqr(A,B2,Q,R); % obtenção de Ganho (K)
21
22 Flq = A - B2*Klq; % Matriz de malha fechada para LQR
23 plq = eig(Flq); % Polos da matriz de malha fechada para LQR
24
25 %% Dados para matriz de transição
26 dt = 0.1; % Intervalo de tempo (s)
27 Tf = 20; % Tempo final de simulação (s)
28 t = 0:dt:Tf; % Vetor de tempo
29
30 Phi_Flq = expm(Flq*dt); % Matriz de transição do LQR
31 Gama_Flq= eye(size(Flq,1))*dt + Flq*dt^2/2 + Flq^2*dt^3/6 + Flq^3*dt^4/24;
32
33 x0 = [1; 2; 0.5; 0; 0; 0]; % Condições iniciais
34 xlq = zeros(6,length(t)); % pré-alocação do vetor x
35 xlq(:,1) = x0; % Inserindo condições iniciais no vetor x
36 for i = 1:(length(t)-1) % loop para simulação
37     xlq(:,i+1) = Phi_Flq*xlq(:,i);
38 end
39
40 for i = 1:(length(t)) % Cálculo das forças do regulador de cond inic
41     tau(:,i) = Klq*xlq(:,i);
42 end
43
44 %% Entrada de distúrbio
45 sysc = ss(Flq, B1, C, D); % Sistema controlado pelo LQR
46 sysnc = ss(A, B1, C, D); % Sistema em malha aberta
47 [ysc, tsc, xsc] = step(sysc, t); % Entrada degrau de corrente
48 [ysnc, tsnc, xsnc] = step(sysnc, t); % Entrada degrau de corrente
49
50 for i = 1:(length(t)) % Cálculo das forças do regulador para corrente

```

```

51 tau2(:, i) = Klq*xsc(i, :, 1)';
52 end

```

Trabalho/T1/codigos/LQ.m

#### F.1.4 Código para construção dos observadores

```

1 %% 1. Sistema
2
3 A=readmatrix("A.txt");
4 B2=readmatrix("B2.txt");
5 B1=readmatrix("B1.txt");
6 C=readmatrix("C.txt");
7 D=0;
8
9 %Polos dos sistema
10 p=eig(A);
11
12 %% 2. Controladores
13
14 %Alocação
15 p_ctr=[-0.2;-0.2;-0.25+0.25*1i;-0.25-0.25*1i;-0.3;-0.4];
16 K_ctr=place(A,B2,p_ctr); %Vetor de ganhos para alocação
17 F_ctr=A-B2*K_ctr; % Matriz de malha fechada para LQR
18
19 %Controlador LQ
20 Q = [300 0 0 0 0 0;
21      0 200 0 0 0 0;
22      0 0 200 0 0 0;
23      0 0 0 100 0 0;
24      0 0 0 0 100 0;
25      0 0 0 0 0 100]; % Matriz de pesos para estados
26 P = [1 0 0;
27      0 0.5 0;
28      0 0 1]; % Matriz de pesos para as entradas
29 K_ctr_lq=lqr(A,B2,Q,P); % obtenção de Ganho (K)
30
31 F_ctr_lq=A-B2*K_ctr_lq; % Matriz de malha fechada para LQR
32 p_ctr_lq= eig(F_ctr_lq); % Polos da matriz de malha fechada para LQR
33
34 %% 3. Observadores
35 %Observador por alocação
36 p_obs=[-0.45;-0.55;-0.65;-0.75;-0.85;-0.95]; %todos os polos a esquerda dos
37 % polos de MF e sem oscilações
38 K_obs=place(A',C',p_obs);
39 %Observador por LQR

```

```

40 Qo = [300 0 0 0 0 0;
41      0 200 0 0 0 0;
42      0 0 200 0 0 0;
43      0 0 0 200 0 0;
44      0 0 0 0 200 0;
45      0 0 0 0 0 200]; % Matriz de pesos para estados
46 Po = [3.5 0 0;
47      0 3.5 0;
48      0 0 3.5]; % Matriz de pesos para as entradas
49 K_obs_lq=lqr(A',C',Qo,Po);
50 F_obs_lq=A'-C'*K_obs_lq;
51 p_obs_lq=eig(F_obs_lq);
52
53 %Plot plano imaginário
54
55 imag_ctr=imag(p_ctr);
56 real_ctr=real(p_ctr);
57 imag_obs=imag(p_obs);
58 real_obs=real(p_obs);
59 mapa=figure(10);
60 AxesH = axes('Xlim', [-1, 0], 'XTick', -1:0.2:0, 'Ylim', [-0.3, 0.3], 'YTick',
61 , -0.3:0.1:0.3, 'NextPlot', 'add');
62 plot(real_ctr,imag_ctr,"x",real_obs,imag_obs,"o", 'MarkerSize', 8)
63 legend('Polos do Controlador','Polos do Observador','Location','northwest')
64 title('Polos do controlador e observador obtidos por alocação')
65 xlabel('Eixo Real')
66 ylabel('Eixo Imaginário')
67 grid on
68 print(mapa, 'mapa_alocacao', '-dpng', '-r300')
69
70 imag_ctr=imag(p_ctr_lq);
71 real_ctr=real(p_ctr_lq);
72 imag_obs=imag(p_obs_lq);
73 real_obs=real(p_obs_lq);
74 mapa=figure(20);
75 plot(real_ctr,imag_ctr,"x",real_obs,imag_obs,"o", 'MarkerSize', 8)
76 legend('Polos do Controlador','Polos do Observador','Location','northwest')
77 title('Polos do controlador e observador LQ')
78 xlabel('Eixo Real')
79 ylabel('Eixo Imaginário')
80 grid on
81 print(mapa, 'mapa_lqr', '-dpng', '-r300')
82 %% 4. Simulação
83
84 %Vetor de tempos
85 t=0:0.1:30;

```

```

86 %Observador por alocação
87 Lambda=[A,-B2*K_ctr;K_obs'*C,A-B2*K_ctr-K_obs'*C];
88
89 %Distúbios
90 Uce=1*ones( size(t));
91 Vce=1*ones( size(t));
92 w=[Uce;Vce];
93
94 %Condições iniciais
95 x0=[0;0;0;0;0;0];
96 x0_hat=[1;1;1;1;1;1.1];
97 z0=[x0;x0_hat];
98 sys_obs=ss(Lambda,[B1;B1],eye(length(Lambda)),0);
99 y=lsim(sys_obs,w,t,z0);
100 plot_observer(t,y,'alocacao');
101
102 %Observador por LQ
103 Lambda_lqr=[A,-B2*K_ctr_lq;K_obs_lq'*C,A-B2*K_ctr_lq-K_obs_lq'*C];
104 sys_obs_lqr=ss(Lambda_lqr,[B1;B1],eye(length(Lambda)),0);
105 y_lqr=lsim(sys_obs_lqr,w,t,z0);
106 plot_observer(t,y_lqr,'lqr');
107
108
109 figure(30)
110 L=tiledlayout(1,3);
111 ax1=nexttile;
112 plot(ax1,t,y(:,1)-y(:,7),'LineWidth',2)
113 grid on
114 ax2=nexttile;
115 plot(ax2,t,y(:,2)-y(:,8),'LineWidth',2)
116 grid on
117 ax3=nexttile;
118 plot(ax3,t,y(:,3)-y(:,9),'LineWidth',2)
119 grid on
120 linkaxes([ax1,ax2,ax3],'x');
121 xlabel(L,'Tempo (s)', 'FontSize',18)
122 ylabel(L,'Amplitude', 'FontSize',18)
123 title(L,'Evolução temporal do erro para as variáveis de posição', 'FontSize',
124 ,18)
124 ylim(ax3,[0 1])
125 title(ax1,'Erro da variável x', 'FontSize',18)
126 title(ax2,'Erro da variável y', 'FontSize',18)
127 title(ax3,'Erro da variável \psi', 'FontSize',18)
128 L.TileSpacing = 'compact';

```

- Função para construir os gráficos da simulação do sistema com observador.

```

1 function plot_observer(t,y,str)
2 ysize=size(y);
3 for i=1:ysize(2)/4
4 fig=figure(i);
5 plot(t,y(:,i),t,y(:,i+6),'LineWidth',2);
6 grid on
7 xlabel('Tempo (s)')
8 ylabel('Amplitude')
9 if i==1
10 legend('x','$\hat{x}$','interpreter','latex')
11 title('Comparação entre variável estimada e real')
12 print(fig,['Xobservador',str],'-dpng','-r300')
13 elseif i==2
14 legend('y','$\hat{y}$','interpreter','latex')
15 title('Comparação entre variável estimada e real')
16 print(fig,['Yobservador',str],'-dpng','-r300')
17 else
18 legend('$\psi$','$\hat{\psi}$','interpreter','latex')
19 title('Comparação entre variável estimada e real')
20 print(fig,['Phiobservador',str],'-dpng','-r300')
21 end
22
23 end

```

Trabalho/T1/codigos/plot\_observer.m

### F.1.5 Código para construção dos seguidores

- Seguidor de referência constante.

```

1 %% Código seguidor
2
3 % Espaço de Estados
4 A = readmatrix('A.txt');
5 B11 = readmatrix('B1.txt');
6 B1 = [zeros(6,3) B11 zeros(6,1)];
7 B2 = readmatrix('B2.txt');
8 % entradas controladas
9 C = [1 0 0 0 0 0;
10      0 1 0 0 0 0;
11      0 0 1 0 0 0]; % Matriz de observações
12 D = zeros(size(C,1),size(B2,2));
13
14 %% Seguidor de referência constante

```

```

15 Lambda = [A B2; C D]; % Matriz para cálculo de Nx e Nu
16 No = [ zeros(1, length(A)) ones(1, length(C(:,1))) ]';
17 NxNu = inv(Lambda)*No; % Vetores Nu e Nx
18 Nx = NxNu(1:length(A)); % Vetor Nx
19 Nu = NxNu((length(A)+1):length(NxNu)); % Vetor Nu
20
21 p = 0.2*[-1 + 0.8i; -1 - 0.8i; -1; -2; -1 + 0.7i; -1 - 0.7i]; % polos
22 K = place(A, B2, p); % Matriz de ganhos
23 F = A - B2*K; % Matriz de malha fechada
24
25 urp = Nu + K*Nx; % Lei de controle em RP
26 xr = [0; 0; 0; 1; 2; pi/4]; % Referência
27 Bn = xr.*B2*urp; % Vetor de entradas com Lei de controle
28 Cn1 = [1 0 0 0 0 0];
29 Dn = zeros(size(Cn1,1), size(Bn,2));
30
31 Tf = 35; % Tempo final (s)
32 dt = 0.01; % Intervalo de tempo (s)
33 t = 0:dt:Tf; % Vetor de tempos
34 sysrc1 = ss(F, Bn, Cn1, Dn);
35 [ysc1, tsc1, xsc1] = step(sysrc1, t); % Step a ser seguido
36
37 % Cálculo das forças do seguidor
38 Nxm = [1 0 0;
39             0 1 0;
40             0 0 1;
41             0 0 0;
42             0 0 0;
43             0 0 0]; % Matriz Nx
44 Num = [Nu(1) 0 0;
45             0 Nu(2) 0;
46             0 0 Nu(3)]; % Matrix Nu
47 xrc = xr(4:6);
48 for i = 1:(length(t)) % Forças atuadores
49     tau(:, i) = K*xsc1(i, :) -(K*Nxm+Num)*xrc;
50 end

```

Trabalho/T1/codigos/SeguidorConstante.m

- Seguidor de referência variável

```

1 %% Seguir de referência variável
2
3 %% 1. Sistema
4 A = readmatrix('A.txt');
5 B1 = readmatrix('B1.txt');
6 B2 = readmatrix('B2.txt');

```

```

7 C = readmatrix('C.txt');
8 D = 0;
9 %% 2. Referência e distúrbios
10 om=2*pi/1000;
11 Ar = [0 1 0 0 0 0;
12     -om^2 0 0 0 0 0;
13     0 0 0 1 0 0;
14     0 0 -om^2 0 0 0;
15     0 0 0 0 0 0;
16     0 0 0 0 0 0];
17 Aw = [0 0 0 1 0 0;
18     0 0 0 0 1 0;
19     0 0 0 0 0 0;
20     0 0 0 0 0 0;
21     0 0 0 0 0 0;
22     0 0 0 0 0 0];
23
24 %% 3. Controlador
25 p=0.3*[-1+1i; -1-1i; -1+.8i;-1-.8i;-1.5;-1];
26 K=place(A,B2,p); % Ganhos de realimentação
27 F=A-B2*K; % Fechando a malha
28
29 %% 4. Matrizes do seguidor
30 F2=[(A-Ar) F];
31 Ao=[Ar zeros(6); zeros(6) Aw];
32 Kex=inv(C*inv(F)*B2)*C*inv(F)*F2;
33 Ab=[F F2-B2*Kex; zeros(12,6) Ao];
34
35 %% 5. Simulação por matriz de transferência
36 %Vetor de tempos
37 dt = 0.01;
38 t = 0:dt:2000;
39 %Condições iniciais
40 x0=[0;0;0;0;0;0];
41 xr=12*[sin(om*t);om*cos(om*t);cos(om*t);-om*sin(om*t);om*t;om*ones(1,length(t))];
42 xex=[xr;zeros(size(xr))];
43 e=zeros(6,length(t));
44 e(:,1)=x0-xr(:,1);
45 X=[e;xex];
46 Phi=expm(Ab*dt);
47 for i=2:length(t)
48 X(:,i) = Phi*X(:,i-1);
49 end
50 x = X(1:6,:)+X(7:12,:);
51
52 %% 6. Construção dos gráficos

```

```

53 fig=figure(1);
54 plot(x(1,:),x(3,:),'-','LineWidth',2);
55 hold on
56 plot(xr(1,:),xr(3,:),'—','LineWidth',2);
57 xlim([-15 15])
58 ylim([-15 15])
59 title('Trajetória com seguidor de referência variável sem distúrbios')
60 xlabel('Posição X (m)')
61 ylabel('Posição Y (m)')
62 legend('Trajetória realizada','Trajetória desejada')
63 grid on
64 print(fig,'seguidor_variavel','-dpng','-r300')

```

Trabalho/T1/codigos/seguidor\_teste.m

- Função para animação do movimento

```

1 function animacao(y,xr)
2 L=2.8; %m
3 b=2; %m
4 y=y';
5 for i=1:length(y(:,1))
6     xg=y(i,1);
7     yg=y(i,3);
8     phi=y(i,5);
9     f=figure(i);
10    alpha=pi/2-phi;
11    x1=xg+(L/2)*sin(phi);
12    x6=xg-(L/2)*sin(phi);
13    x2=x1-(b/2)*sin(alpha);
14    x3=x1+(b/2)*sin(alpha);
15    x4=x6+(b/2)*sin(alpha);
16    x5=x6-(b/2)*sin(alpha);
17
18    y1=yg+(L/2)*cos(phi);
19    y6=yg-(L/2)*cos(phi);
20    y2=y1+(b/2)*cos(alpha);
21    y3=y1-(b/2)*cos(alpha);
22    y4=y6-(b/2)*cos(alpha);
23    y5=y6+(b/2)*cos(alpha);
24
25    plot([x2,x3],[y2,y3],'b','LineWidth',2)
26    hold on
27    plot([x3,x4],[y3,y4],'b','LineWidth',2)
28    plot([x4,x5],[y4,y5],'b','LineWidth',2)
29    plot([x5,x2],[y5,y2],'b','LineWidth',2)
30    plot(xr(1,:),xr(3,:),'—','LineWidth',2);

```

```

31    xlim([-20,20])
32    ylim([-20,20])
33    grid on
34    p0=[0,0];
35    py=[0,1];
36    px=[1,0];
37    dpx=px-p0;
38    dpy=py-p0;
39    quiver(p0(1),p0(2),dpx(1),dpx(2),0,'Linewidth',2,'color',[1 0 0])
40    quiver(p0(1),p0(2),dpy(1),dpy(2),0,'Linewidth',2,'color',[1 0 0])
41    png_name=sprintf('foto%1f.png',i);
42    print(f,png_name, '-dpng', '-r300');
43    hold off
44 end
45 end

```

Trabalho/T1/codigos/animacao.m

## F.2 Controle no domínio da frequência

### F.2.1 Ziegler-Nichols

```

1 %% SINTESE PID POR ZN
2 %Sistema
3 A = readmatrix("A.txt");
4 B1 = readmatrix("B1.txt");
5 B2 = readmatrix("B2.txt");
6 B=[B2,B1];
7 C = readmatrix("C.txt");
8 D_sys = zeros(size(C,1),size(B,2));
9
10 %Definindo a FT
11 [n,D]=ss2tf(A,B,C,D_sys,1); %[numerador, denominador] da FT
12 N=n(1,:);
13 G=tf(N,D);
14
15 % %Mapa de zeros e polos para FTMA
16 % [z,p,k]=tf2zp(N,D);
17 % imag_ctr=imag(p);
18 % real_ctr=real(p);
19 % imag_obs=imag(z);
20 % real_obs=real(z);
21 % mapa=figure(10);
22 % AxesH = axes('Xlim', [-0.2, 0], 'XTick', -0.2:0.05:0, 'Ylim', [-0.8, 0.8],
23 %               'YTick', -0.8:0.2:0.8, 'NextPlot', 'add');
24 % plot(real_ctr,imag_ctr,"x",real_obs,imag_obs,"o",'MarkerSize', 12)

```

```

24 % legend( 'Polos' , 'Zeros' , 'Location' , 'northwest' )
25 % title( 'Polos e zeros da Função de Transferência em Malha Aberta' )
26 % xlabel( 'Eixo Real' )
27 % ylabel( 'Eixo Imaginário' )
28 % set( findall(gcf , 'type' , 'line' ) , 'linewidth' ,1.5)
29 % grid on
30 % print( mapa , 'mapa_ftma' , '-dpng' , '-r300' )
31
32 %Definindo Kcr
33 Kcr=margin(G);
34
35 %Definindo Pcr
36 Gcr = pid(Kcr);
37 Tcr = feedback(Gcr*G,1);
38 t = 0:0.01:400;
39 [y, t] = step(Tcr, t);
40 f1 = figure;
41 plot(t,y,'LineWidth',2)
42 ylabel('Posição x (m)')
43 xlabel('Tempo (s)')
44 title('Resposta ao degrau para $K_{cr}$', 'Interpreter', 'Latex')
45 grid on
46 print(f1 , 'respDegKcr.png' , '-dpng' , '-r300' )
47 Pcr=59.4;
48
49 %Ganhos
50 Kp=0.6*Kcr;
51 Ki=Kp/(0.5*Pcr);
52 Kd=0.125*Pcr*Kp;
53
54 %Controlador
55 Gc = tf([Kd Kp Ki],[1 0]);
56
57 T = feedback(Gc*G,1); % FTMF
58
59 t = 0:0.01:800;
60 [ypid, tpid] = step(T, t);
61 f2 = figure;
62 plot(tpid, ypid, 'LineWidth',2)
63 ylabel('Posição x (m)')
64 xlabel('Tempo (s)')
65 title('Resposta com controlador PID', 'Interpreter', 'Latex')
66 grid on
67 print(f2 , 'respDegPID_ZN.png' , '-dpng' , '-r300' )
68
69 %Esforços de Atuação
70 u=acao(ypid, tpid, 1, Kp, Ki, Kd);

```

```

71 f10=figure;
72 plot(tpid, u, 'LineWidth', 2)
73 ylabel('Ação de controle x (N)')
74 xlabel('Tempo (s)')
75 title('Ação de controle para Ziegler–Nichols')
76 grid on
77 print(f10, 'acao_ZN.png', '-dpng', '-r300')
78
79 %Diagrama de Bode
80 f4 = figure;
81 margin(Gc*G)
82 grid on
83 print(f4, 'bode_ZN.png', '-dpng', '-r300')

```

Trabalho/T2/codigos/pid\_zn.m

## F.2.2 Alocação de Polos e Redução de Ordem

```

1 %Matrizes no espaço de estados
2 A=readmatrix("A.txt");
3 B1=readmatrix("B1.txt");
4 B2=readmatrix("B2.txt");
5 B=[B2,B1];
6 C=readmatrix("C.txt");
7 D_sys=zeros(size(C,1),size(B,2));
8 %Função de transferência de malha aberta
9 [n,D]=ss2tf(A,B,C,D_sys,1);
10 N=n(1,:);
11 G=tf(N,D);
12 %Alocacao de polos
13 p=[-0.2+0.2*i;-0.2-0.2*i;-0.25+0.25*i;-0.25-0.25*i;-0.3;-0.3;-0.3];
14 s=tf('s');
15 eqc=(s-p(1))*(s-p(2))*(s-p(3))*(s-p(4))*(s-p(5))*(s-p(6))*(s-p(7));
16 [N_eqc,D_eqc]=tfdata(eqc,'v');
17 %MQ
18 Nf=flip(N);
19 Df=flip(D);
20 N_eqcf=flip(N_eqc);
21 a=[Nf(1) 0 0;
22     Nf(2) Nf(1) 0;
23     Nf(3) Nf(2) Nf(1);
24     Nf(4) Nf(3) Nf(2);
25     Nf(5) Nf(4) Nf(3);
26     0 Nf(5) Nf(4);
27     0 0 Nf(5)];
28 b=[N_eqcf(1);N_eqcf(2)-Df(1);N_eqcf(3)-Df(2);N_eqcf(4)-Df(3);N_eqcf(5)-Df
(4);N_eqcf(6)-Df(5);N_eqcf(7)-Df(6)];

```

```

29 K=lsqr(a,b);
30 %Controlador
31 Ki=K(1);
32 Kp=K(2);
33 Kd=K(3);
34 Gc=pid(Kp,Ki,Kd);
35 %Funcao de transferencia de malha fechada
36 U=series(Gc,G);
37 T=feedback(U,1);
38 %Reducao de ordem
39 [Gb,normahankel]=balreal(G);
40 Gr=modred(Gb,[5 6], 'del');
41 Grg=tf(Gr);
42 %Simulação
43 tfd=100;
44 [y,t]=step(T,tfd);
45 %Ação de controle
46 e = 1 - y;
47 up = Kp*e;
48 de = diff(e);
49 dt = diff(t);
50 dde = de./dt;
51 dde = [dde; dde(end)];
52 ud = Kd*dde;
53 inte = cumtrapz(e,t);
54 ui = Ki*inte;
55 u=up+ud+ui;
56 %Plots
57 fig1=figure;
58 plot(t,y,'LineWidth',2);
59 title('Resposta ao degrau com controlador PID')
60 xlabel('Tempo (s)')
61 ylabel('Posição (m)')
62 grid on
63 print(fig1,'PIDallocacao.png','-dpng','-r300');
64 fig2=figure;
65 pzmap(T)
66 print(fig2,'poloszerosallocacao.png','-dpng','-r300');
67 fig3=figure;
68 margin(U)
69 print(fig3,'bodeallocacao.png','-dpng','-r300');
70 fig4=figure;
71 bode(G,'b',Gr,'r')
72 legend('$G(s)$','$Gr(s)$','interpreter',' latex')
73 print(fig4,'bodecomparacao.png','-dpng','-r300');
74 fig5=figure;
75 plot(t,u,'LineWidth',2);

```

```

76 title('Ação de controle')
77 xlabel('Tempo (s)')
78 ylabel('Ação de controle (N)')
79 grid on
80 print(fig5, 'esforcosPIDalocacao.png', '-dpng', '-r300');

```

Trabalho/T2/codigos/pidalocacao.m

### F.2.3 Controle Ótimo

```

1 clear all;
2
3 A = readmatrix("A.txt");
4 B1 = readmatrix("B1.txt");
5 B2 = readmatrix("B2.txt");
6 B=[B2,B1];
7 C = readmatrix("C.txt");
8 D_sys = zeros(size(C,1),size(B,2));
9
10 %Definindo a FT
11 [n,D]=ss2tf(A,B,C,D_sys,1); %[numerador, denominador] da FT
12 N=n(1,:);
13 sys=tf(N,D);
14
15
16 %Dados
17 wn=0.55;
18 Kp=676.87;
19 Kd=406.72;
20 Ki=427.96;
21 t=0:0.01:100
22
23 %Ganho do controlador PID
24 Gc=pid(Kp,Ki,Kd);
25
26 %FTMA
27 GH=series(Gc,sys)
28
29
30 %Sistema PID
31 sys_itae = feedback(series(Gc,sys),1);
32 y_sys=step(sys_itae,t);
33 [num,den]=tfdata(sys_itae);
34
35
36 %ITAE de referencia

```

```

37 itae_ref=tf([wn^7],[1 2.217*wn 6.745*wn^2 9.349*wn^3 11.58*wn^4 8.68*wn^5
38   4.323*wn^6 wn^7]);
39 y_itae=step(itae_ref,t);
40 %esforco atuadores
41 u = acao(y_sys,t',1,Kp,Ki,Kd);
42
43 %Plots
44 figure(1)
45 plot(t,y_sys,LineWidth=2)
46 hold on
47 plot(t,y_itae,LineWidth=2)
48 grid on
49 xlabel("Tempo [ s ]")
50 ylabel("x [m]")
51 legend("PID - ITAE","ITAE referência")
52
53 figure(2)
54 pzmap(GH,'r')
55
56 figure(3)
57 margin(GH)
58
59 figure(4)
60 nyquist(GH)
61
62 figure(5)
63 plot(t,u,LineWidth=2)
64 grid on
65 xlabel("Tempo [ s ]")
66 ylabel("Fu [N]")

```

Trabalho/T2/codigos/itae.m

```

1 (* :: Package :: *)
2
3 (* :: Input :: *)
4 (* ClearAll["Global`*"]*)
5 (*(*TF malha aberta*)*)
6 (*Num=(2.218*s^4 +0.2024*s^3+0.2528*s^2+0.003805*s)*10^(-3);*)
7 (*Den=s^6+0.273796*s^5+0.157203*s^4+0.00401842*s^3+0.000090883*s^2;*)
8 (*(*Eq. caracter \[IAcute] stica de MF*)*)
9 (*eq1:=Den*s+(Ki+Kp*s+Kd*s^2)*Num*)
10 (*(*eq1:=Den+(Kd*s+Kp)*Num*)*)
11 (* Collect [eq1,s]*)
12 (**)
13 (**)
14

```

```

15 (* ::Input:: *)
16 (**)
17
18
19
20 (* ::Input:: *)
21 (* eq2:=s^7+2.217*\[Omega]*s^6+6.745*\[Omega]^2*s^5+9.349*\[Omega]^3*s
   ^4+11.58*\[Omega]^4*s^3+8.68*\[Omega]^5*s^2+4.323*\[Omega]^6*s+\[Omega]
   ]^7*)
22 (*\[Omega]=0.4;*)
23 (* Collect [eq2,s];*)
24 (**)
25
26
27 (* ::Input:: *)
28 (*(* Calculo dos ganhos*)*)
29 (*a=CoefficientList [Collect [eq1,s],s]*)
30 (*b=CoefficientList [Collect [eq2,s],s]*)
31 (*Solve [{a[[7]]==b[[7]],a[[6]]==b[[6]],a[[5]]==b[[5]]},{Kp,Kd,Ki}]*)

```

Trabalho/T2/codigos/itae\_mathematica.m

#### F.2.4 Lugar das Raízes

```

1 clear;clc;close all
2
3 %% Atividade - Controlador PID - Lugar das raízes
4
5 %% Função de transferência utilizada
6 N = 10^(-3)*[2.218 .2024 .2528 .003805 0]; % Numerador
7 D = [1 0.273796 .157203 .00401842 .000090883 0 0]; % Denominador
8 GH1 = tf(N,D); % Função de transferência
9
10 %f11 = figure;
11 %margin(GH1)
12 %grid on
13 %axis([10^(-2) 1 10 10])
14
15 %% Simulação para degrau
16 %[y, t] = step(GH1, 400); % Degrau unitário
17 %{
18 f1 = figure;
19 plot(t,y,'LineWidth',2)
20 ylabel('Posição x (m)')
21 xlabel('Tempo (s)')
22 title('Resposta ao degrau do movimento translacional pela entrada $\tau_u$',
       ,...

```

```

23 'Interpreter', 'Latex')
24 grid on
25 print(f1, 'respDeg.png', '-dpng', '-r300')
26 %}
27 %% Lugar das raízes GH_1
28 %}
29 f2 = figure;
30 rlocus(GH1) % Criando o lugar das raízes
31 %set(findall(gcf,'type','line'), 'linewidth',2);
32 axis([-0.2 0.05 -1 1])
33 title('Lugar das raízes')
34 xlabel('Eixo real')
35 ylabel('Eixo imaginário')
36 %print(f2, 'lugRaizMA.png', '-dpng', '-r300')
37 %}
38 %% Controlador P
39 Kp = 1.11; % Constante de ganho Proporcional P
40 Gc_P = Kp; % Função de transferência do controlador P
41 T_P = feedback(GH1, Gc_P); % FT em malha fechada do controlador P
42 [y_cp, t_cp] = step(T_P, 800); % Degrau unitário para sistema controlado (P)
43 %
44 %}
45 f3 = figure;
46 plot(t_cp,y_cp,'LineWidth',2)
47 ylabel('Posição x (m)')
48 xlabel('Tempo (s)')
49 title('Resposta ao degrau com controlador P')
50 grid on
51 print(f3, 'respDegP.png', '-dpng', '-r300')
52 %}
53
54 %% Lugar das raízes GH_2
55 Ns = 10^(-3)*[0 0 2.218 .2024 .2528 .003805 0 0]; % Numerador
56 Ds = [1 0.273796 .157203 .00401842 .000090883 0 0 0]; % Denominador
57 GH2 = tf(N,Ds+Kp*Ns); % Função de transferência para Lugar das Raízes
58 %}
59 f4 = figure;
60 rlocus(GH2) % Criando o lugar das raízes
61 %set(findall(gcf,'type','line'), 'linewidth',2);
62 axis([-0.2 0.2 -0.5 0.5])
63 title('Lugar das raízes')
64 xlabel('Eixo real')
65 ylabel('Eixo imaginário')
66 %print(f2, 'lugRaizMA2.png', '-dpng', '-r300')
67 %}
68 %% Controlador PI

```

```

69 %Ki = 0.00115; % Ganho integral
70 %Ki = 0.00448;
71 Ki = 0.01;
72 Gc_PI = tf ([Kp Ki] ,[1 0]); % FT do controlador
73 T_2 = feedback (Gc_PI*GH1,1);
74 [y_cpi , t_cpi] = step (T_2, 1500); % Degrau unitário para sistema controlado
    (P)
75 %
76 f5 = figure;
77 plot (t_cpi,y_cpi , 'LineWidth' ,2)
78 ylabel ('Posição x (m)')
79 xlabel ('Tempo (s)')
80 title ('Resposta ao degrau com controlador PI')
81 grid on
82 print (f5 , 'respDegPI.png' , '-dpng' , '-r300')
83 %
84 %% Lugar das raízes GH_3
85 Ns2 = 10^(-3)*[0 2.218 .2024 .2528 .003805 0 0 0]; % Numerador
86 Nden = 10^(-3)*[0 0 0 2.218 .2024 .2528 .003805 0]; % Numerador
87 Ds = [1 0.273796 .157203 .00401842 .000090883 0 0 0]; % Denominador
88 GH3 = tf (Ns2,Ds+Kp*Ns+Ki*Nden); % Função de transferência para Lugar das Raízes
89 %
90 f6 = figure;
91 rlocus (GH3) % Criando o lugar das raízes
92 %set ( findall (gcf , 'type' , 'line') , 'linewidth' ,2);
93 axis([-0.15 0.02 -0.4 0.4])
94 title ('Lugar das raízes');
95 xlabel ('Eixo real');
96 ylabel ('Eixo imaginário')
97 %
98 %% Controlador PID
99 Kd = 5.92; % Ganho derivativo
100 Gc_PID = tf ([Kd Kp Ki] ,[1 0]); % FT do PID
101 T_3 = feedback (Gc_PID*GH1,1); % FT em malha fechada do PID
102 t = 0:0.01:600; % vetor tempo
103 [y_cpid , t_cpid] = step (T_3, t); % Degrau unitário para sistema controlado
    (P)
104
105 f6 = figure;
106 plot (t_cpid,y_cpid , 'LineWidth' ,2)
107 ylabel ('Posição x (m)')
108 xlabel ('Tempo (s)')
109 title ('Resposta ao degrau com controlador PID')
110 grid on
111 %print (f6 , 'LRrespDegPID.png' , '-dpng' , '-r300')
112

```

```

113 %% Compensador com PID
114 GH4 = Gc_PID*GH1; % FT PID + Planta
115
116 %f7 = figure;
117 %margin(GH4) % Estabilidade relativa FTMA
118 %grid on
119
120 %f8 = figure;
121 %pzplot(T_3)
122
123 Phi = (35 + 5)*pi/180; % Fase a vançar do compensador
124 alpha = (1+sin(Phi))/(1-sin(Phi)); % Razão de avanço
125 %alpha = 6;
126 v = -10*log10(alpha); % Valor para determinar om_n
127 om_n = 0.1; % Nova frequência de corte
128 p = alpha*om_n/sqrt(alpha); % Polo do compensador
129 z = om_n/sqrt(alpha); % Zero do compensador
130 Gc = alpha*tf([1 z],[1 p]); % FT compensador
131
132 GH5 = Gc*Gc_PID*GH1; % FT Compensador + PID + Planta
133
134 %f8 = figure;
135 %margin(GH5) % Estabilidade relativa FTMF
136 %grid on
137
138 T_4 = feedback(GH5,1); % FTMF com compensador
139 t2=0:0.01:600;
140 [ycomp, tcomp] = step(T_4, t2); % Degrau unitário para sistema controlado (P)
141
142 %f9 = figure;
143 %pzplot(T_4)
144
145 f10 = figure;
146 plot(tcomp, ycomp, 'LineWidth', 2)
147 ylabel('Posição x (m)')
148 xlabel('Tempo (s)')
149 title('Resposta ao degrau com controlador PID e compensador')
150 grid on
151 %print(f10, 'LRrespDegPIDeCompensador.png', '-dpng', '-r300')
152
153 %{
154 %% Ação de Controle
155 u1 = acao(y_cpid, t_cpid, 1, Kp, Ki, Kd);
156 u2 = acao(y, t, 1, Kp, Ki, Kd);
157
158 f11 = figure;

```

```

159 plot(t_cpid, u1*10, 'LineWidth', 2)
160 title('Ação de controle')
161 ylabel('Ação de controle (N)')
162 xlabel('Tempo (s)')
163 grid on
164 print(f11, 'LREsforcosfake.png', '-dpng', '-r300')
165
166 f12 = figure;
167 plot(t, u2*10, 'LineWidth', 2)
168 title('Ação de controle')
169 ylabel('Ação de controle (N)')
170 xlabel('Tempo (s)')
171 grid on
172 print(f12, 'LRCompEsforcosfake.png', '-dpng', '-r300')
173 %}

```

Trabalho/T2/codigos/LR.m

- Função para construir os gráficos de ação de controle

```

1 function u = acao(y, t, ref, Kp, Ki, Kd)
2     e = ref - y;
3     up = Kp*e;
4     de = diff(e);
5     dt = diff(t);
6     dedt = de./dt;
7     dedt = [dedt; dedt(end)];
8     ud = Kd*dedt;
9     inte = cumtrapz(e, t);
10    ui = Ki*inte;
11    u=up+ud+ui;
12 end

```

Trabalho/T2/codigos/acao.m