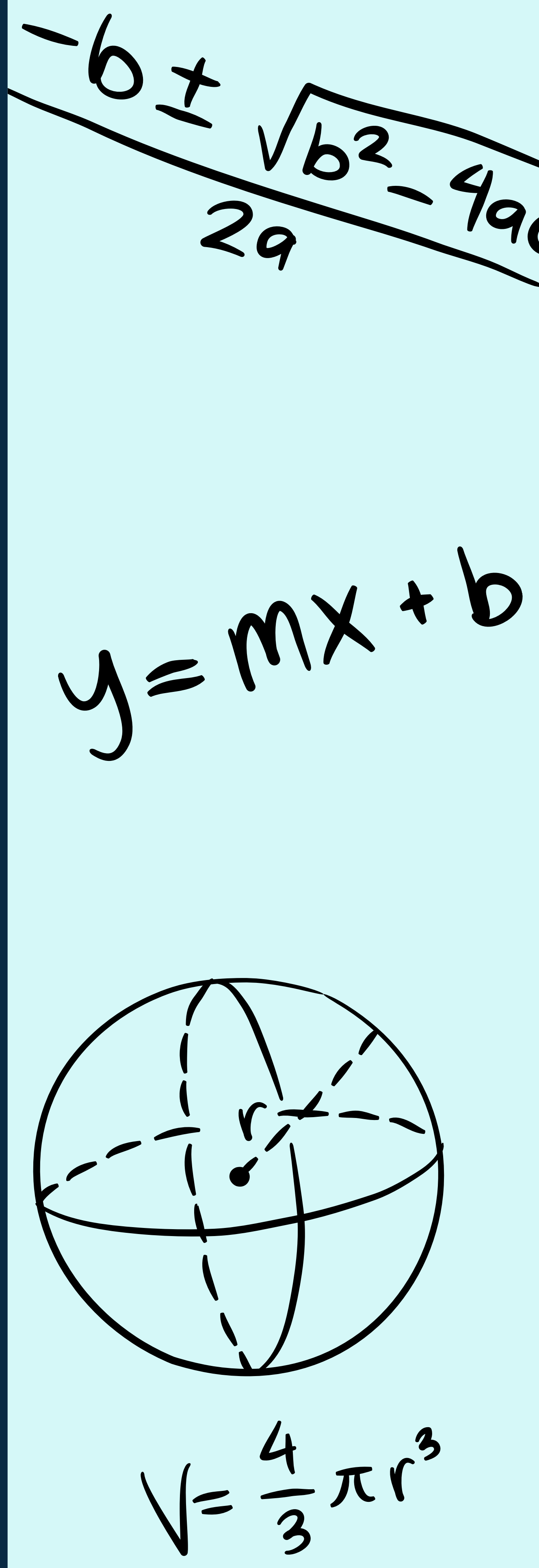
Processos Estocásticos

Fila M/M/∞

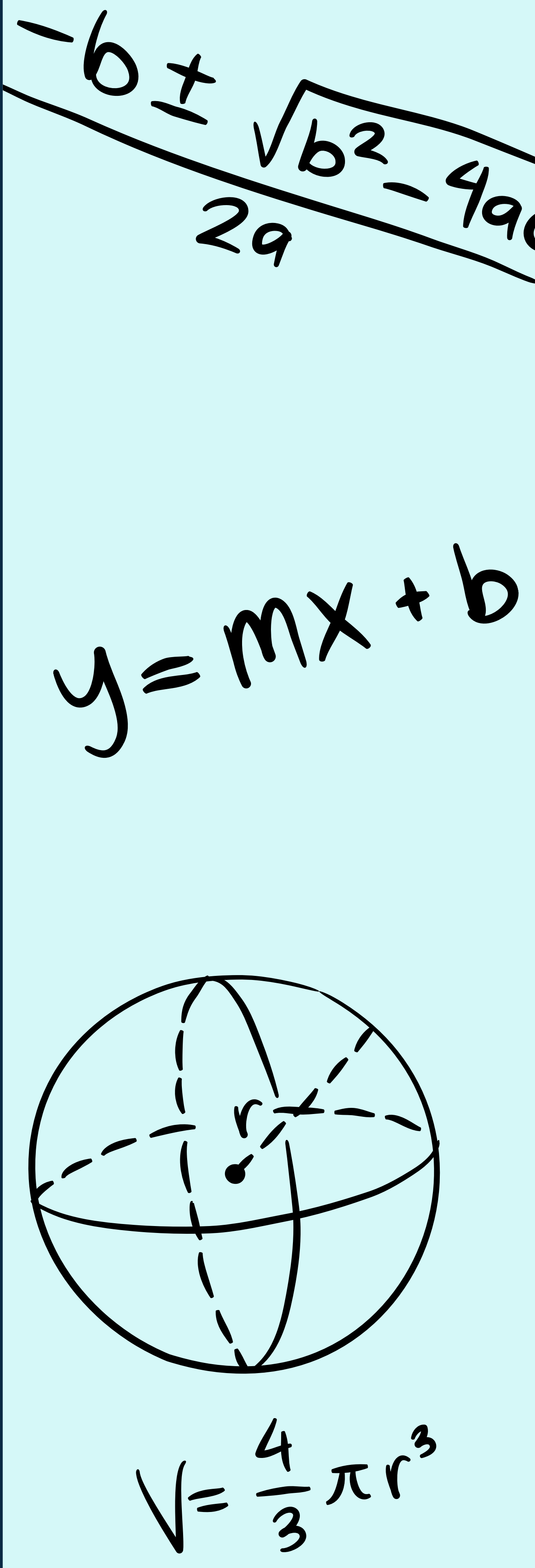
João Vittor Vieira Pinto

Introducao



Introducao

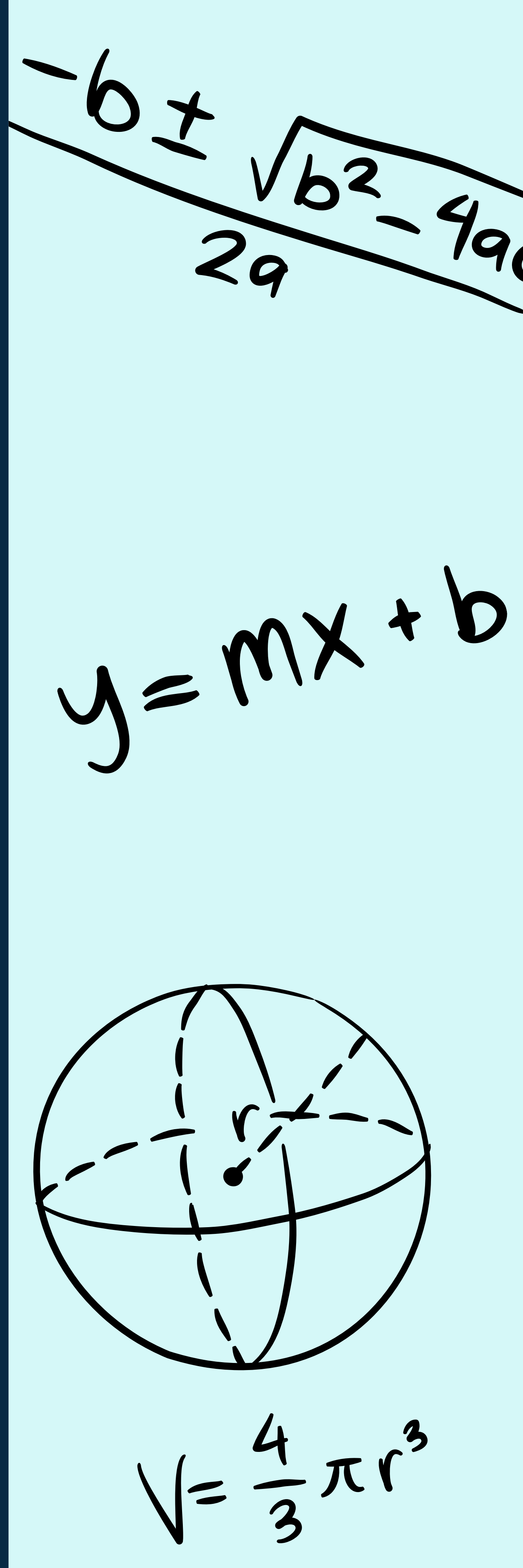
- Não há exatamente uma "fila" aqui;
- Servidor Responsivo;
- Nuvem;
- Recursos Abundantes.



CONCEITOS M/M/∞

Chegadas (M)

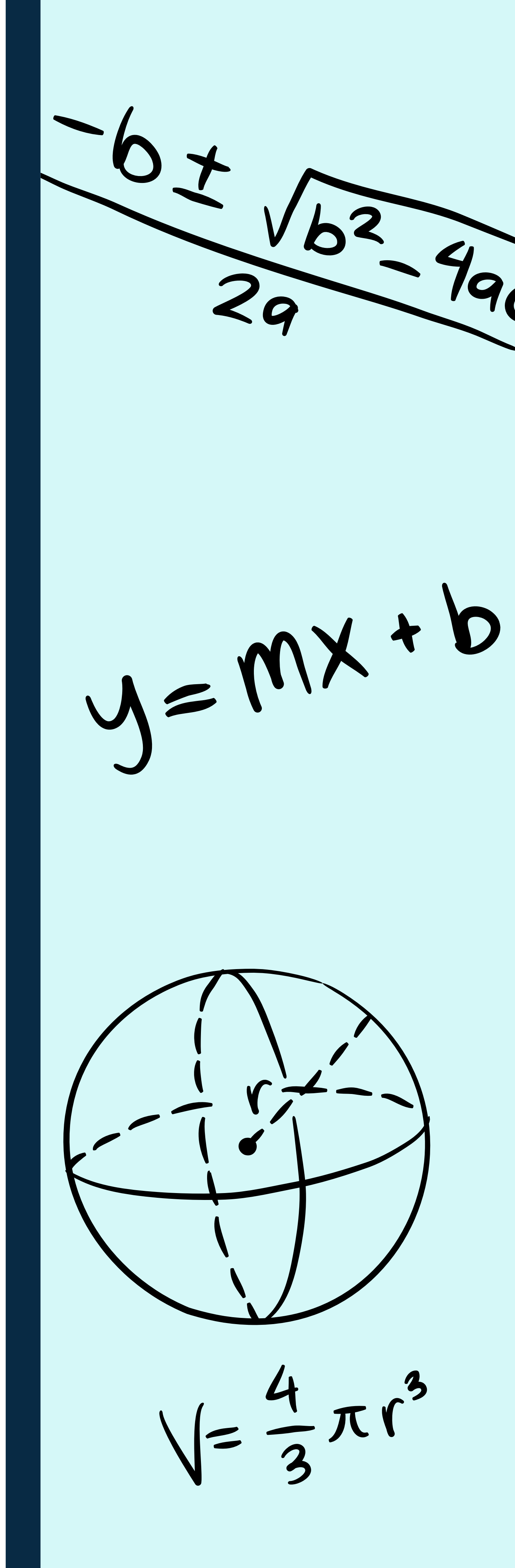
- Memoryless Arrivals
  - **Processo de Poisson:** As chegadas ocorrem aleatoriamente e independentemente umas das outras.
  - **Distribuição Exponencial:** O tempo entre chegadas consecutivas é exponencialmente distribuído.
  - **Lambda (λ):** Número médio de chegadas por unidade de tempo.



Conceitos M/**M**/∞

Serviços (M)

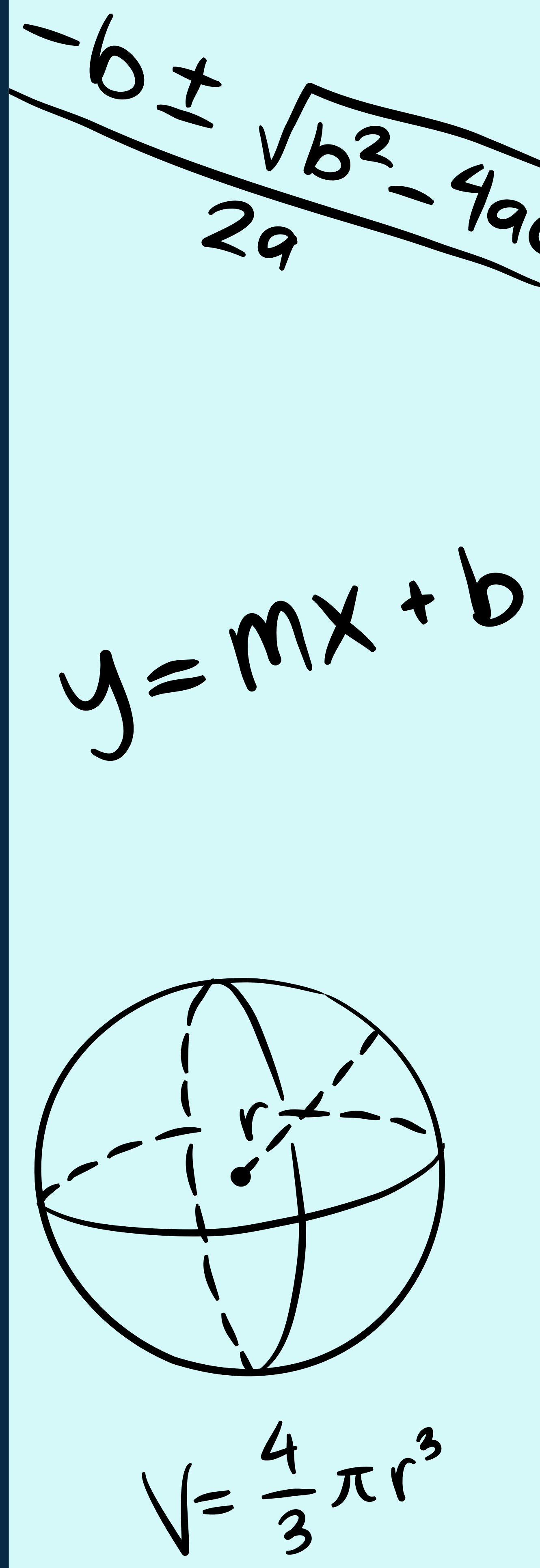
- Memoryless Service
  - **Distribuição Exponencial:** O tempo de serviço de cada cliente é exponencialmente distribuído.
  - **Propriedade de Sem Memória:** A probabilidade de terminar o serviço não depende do tempo já gasto no atendimento.
  - **Mi (μ):** Número médio de clientes atendidos por unidade de tempo.



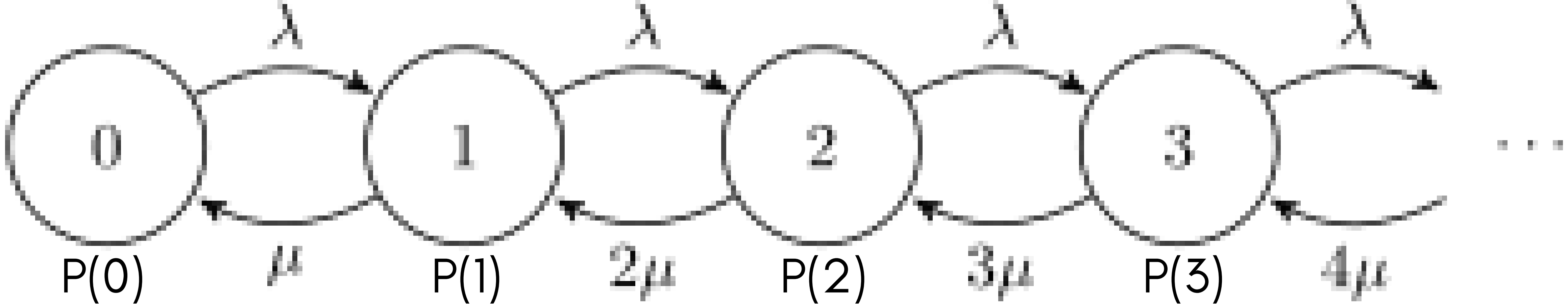
CONCEITOS M/M/∞

Número Infinito de Servidores (∞)

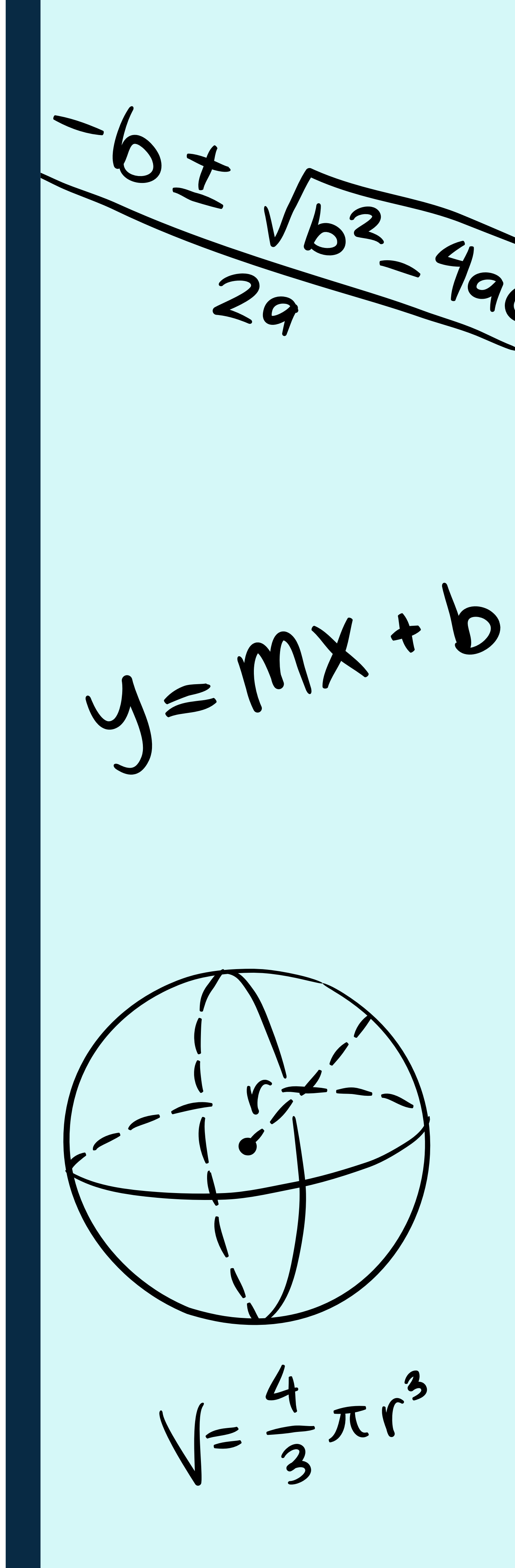
- No limite number of people receiving service
  - **Servidores Infinitos:** Não há limite no número de clientes que podem ser atendidos simultaneamente.
  - **Sem Tempo de Espera:** Cada cliente é atendido imediatamente ao chegar no sistema.



Conceitos

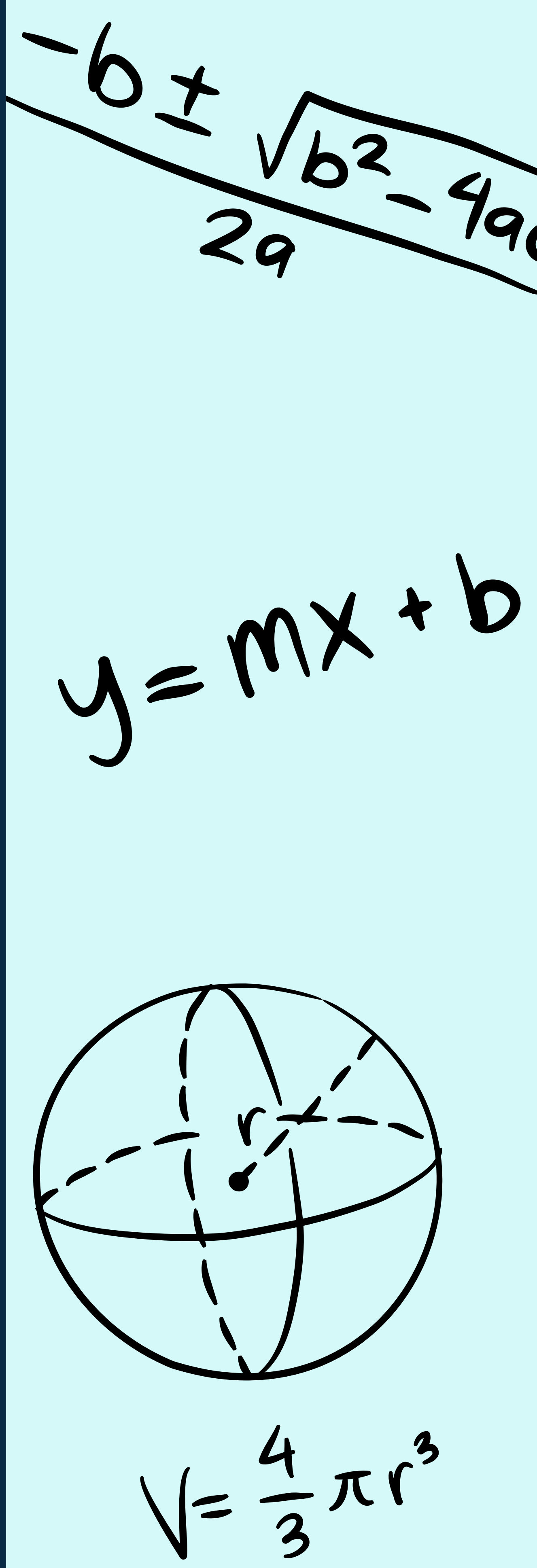


- **Taxa de Entrada (λ):** Taxa com que os clientes chegam ao sistema.
- **Taxa de Partida (μ):** A taxa de partida de um único cliente;
- **Taxa de Partida para k Clientes:** Quando existem k clientes, a taxa de partida é kμ;
- **Taxa de Ocupação (ρ):** A taxa de ocupação dos servidores, dada por **????**



Demonstracao

- Ao **longo do tempo**, em qual proporção de tempo não há **ninguém vendo** minha live stream? **(P(0))**
- Ao **longo do tempo**, qual é o número **médio de pessoas** que está vendo minha live stream? **(Taxa de ocupação)**



Probabilidade de ocorrência do estado n

Primeiro, temos a expressão para θ_n:

$$\theta_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$$

Utilizando essa expressão, a distribuição limite P_n é dada por:

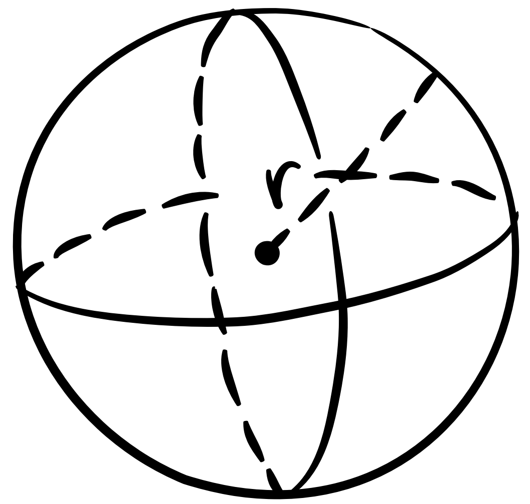
$$P_n = \lim_{t \to +\infty} P[X(t) = n] = \frac{\theta_n}{\sum_{n \geq 0} \theta_n}$$

Substituindo θ_n na expressão acima, temos:

$$P_n = \frac{\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}}{\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = mx + b$$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Probabilidade de ocorrência do estado n

Podemos simplificar essa expressão definindo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

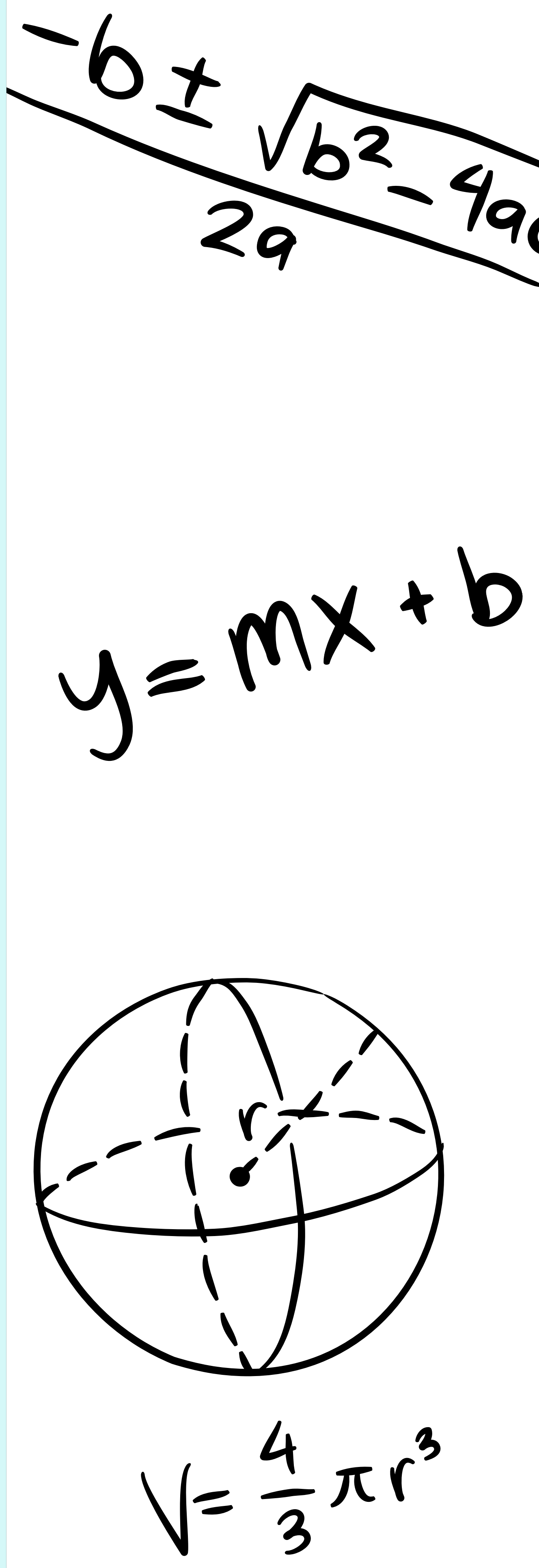
$$P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{n!}}$$

A soma no denominador é a série de Taylor da função exponencial e^{ρ}:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho}$$

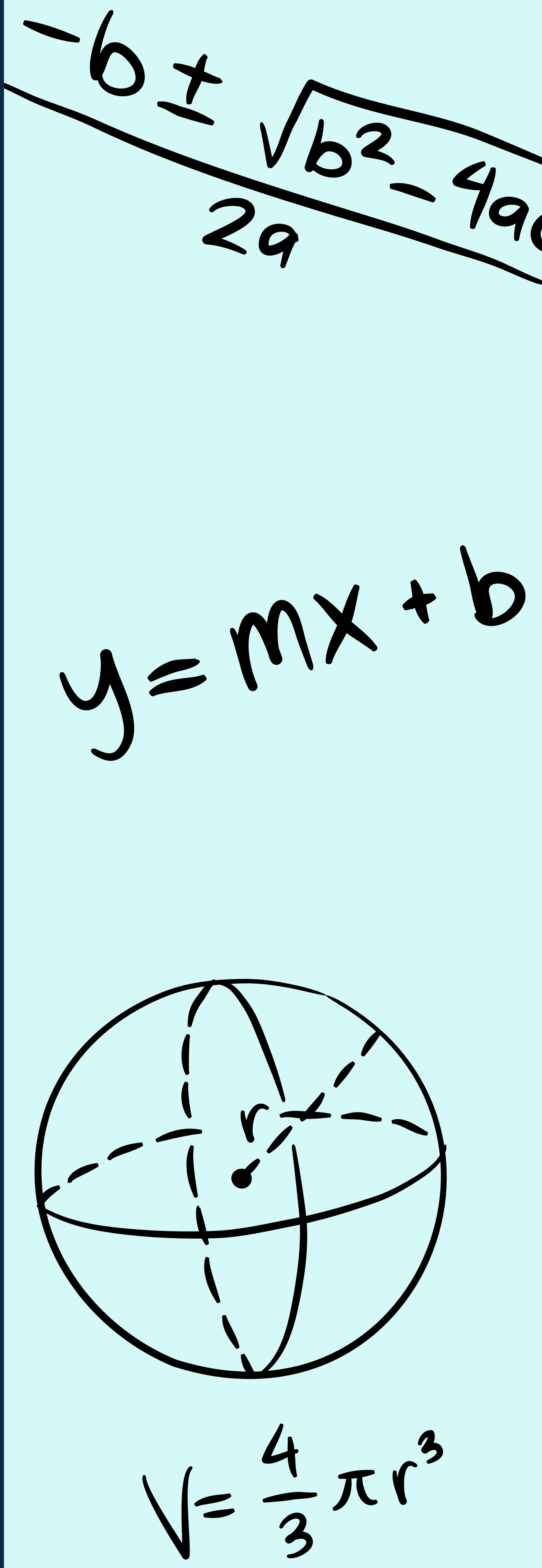
Portanto, a expressão de P_n se torna:

$$P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{e^{\rho}} = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$$



Analise Pn

A distribuição limite **corresponde** à distribuição de Poisson com **parâmetro ρ** porque a **probabilidade** $P\ n$ de encontrar exatamente n **eventos** no **estado estacionário** tem a mesma forma que a função de probabilidade da **distribuição de Poisson.**



Probabilidade de o corrência do estado 0

$$P_n = \frac{(\rho^n/n!)}{e^\rho}$$

onde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ é a taxa de ocupação.

Para $n = 0$ (ou seja, a probabilidade de que não haja nenhum cliente no sistema), temos:

$$P_0 = \frac{(\rho^0/0!)}{e^\rho}$$

Sabendo que $\rho^0 = 1$ e $0! = 1$, isso se simplifica para:

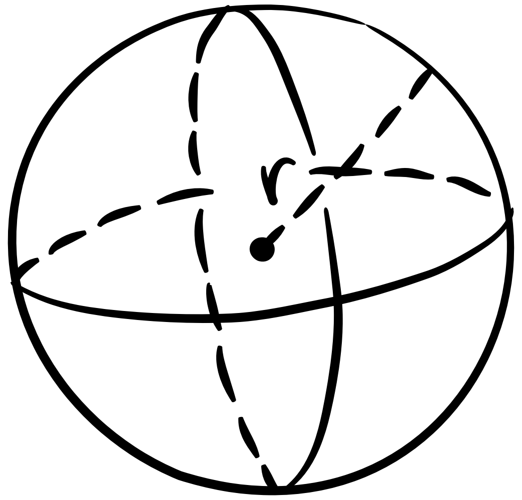
$$P_0 = \frac{1}{e^\rho}$$

Portanto:

$$P_0 = e^{-\rho}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

$$y = mx + b$$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

DEMONSTRANDO ρ

O número médio de clientes L em uma fila M/M/∞ é dado por:

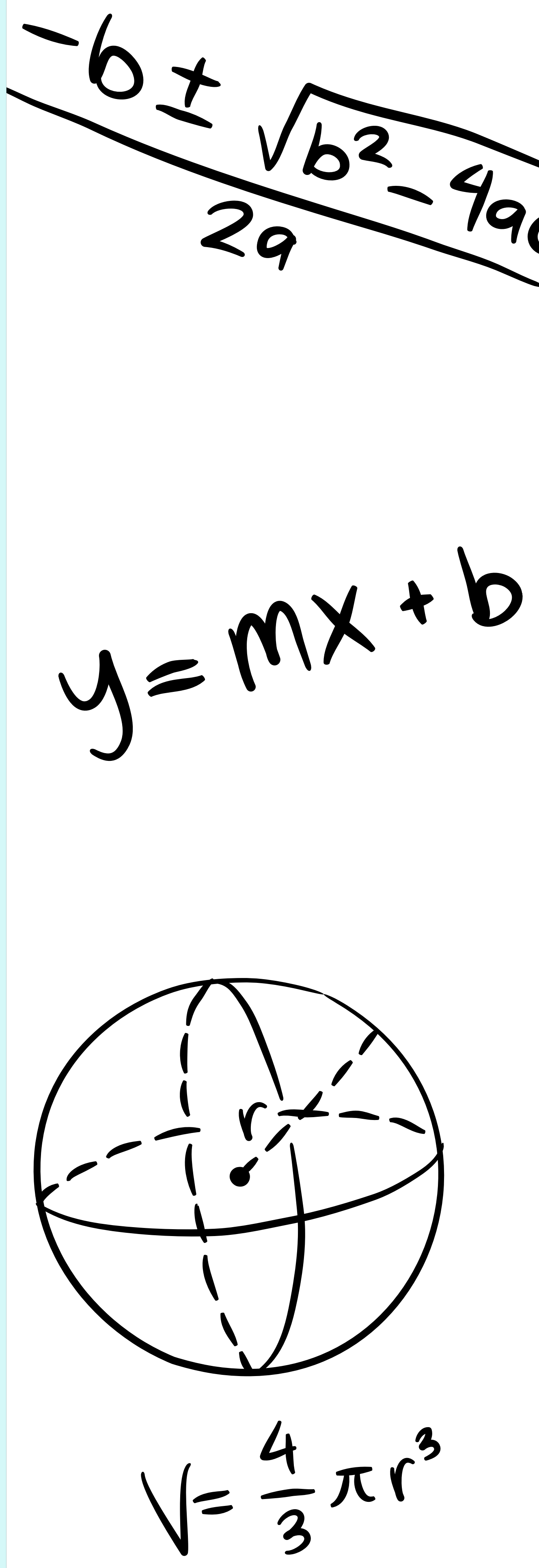
$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

Substituindo a fórmula da distribuição de Poisson:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Reconhecendo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = 1$$



Demonstrando ρ

E que para $n = 0$, $n \cdot P_n = 0$, temos:

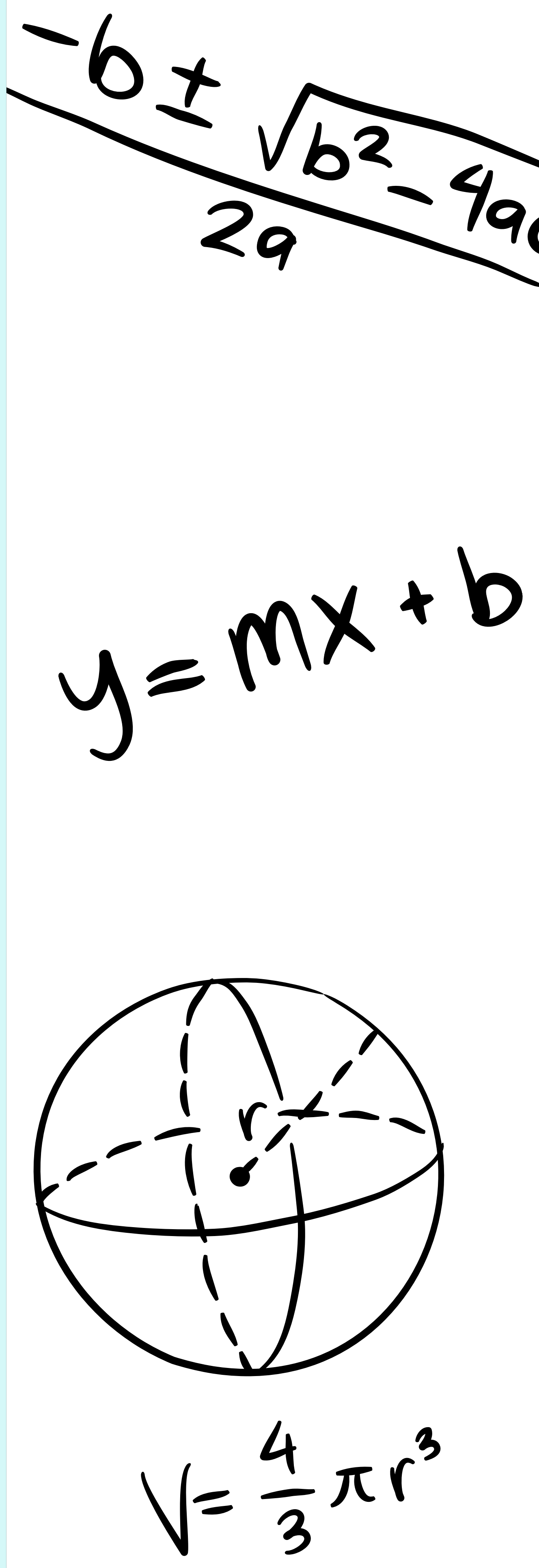
$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Pode-se simplificar essa soma ao notar que $n \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu}) \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^{n-1}}{(n-1)!}$, então:

$$L = (\frac{\lambda}{\mu}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Reconhecendo que essa série é a série de Taylor da exponencial, deslocada de um índice:

$$L = (\frac{\lambda}{\mu}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$



Demonstrando ρ

Essa soma novamente equivale a 1, então:

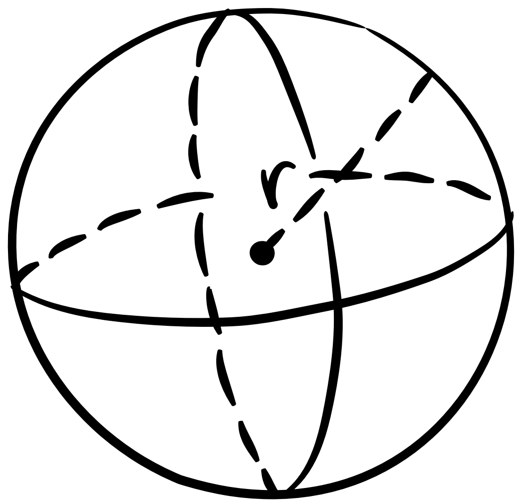
$$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot 1 = \frac{\lambda}{\mu}$$

Portanto, a taxa de ocupação ρ em uma fila M/M/∞ é:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = mx + b$



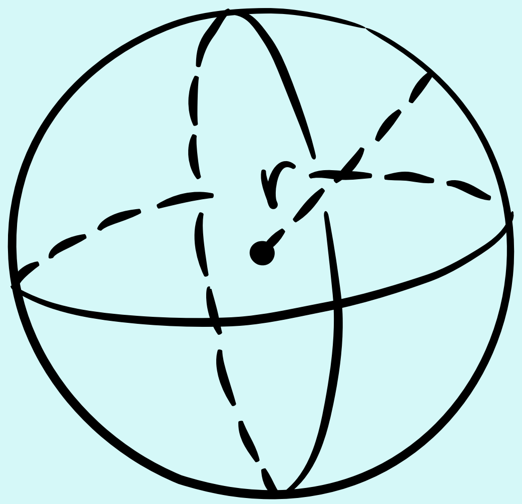
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Probabilidades

Vamos analisar as probabilidades de existir um determinado número de clientes no sistema, usando a **taxa de ocupação (ρ)** que é definida como a **razão** entre a taxa de chegada dos **clientes (λ)** e a **taxa de serviço (μ).**

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

$$y = mx + b$$

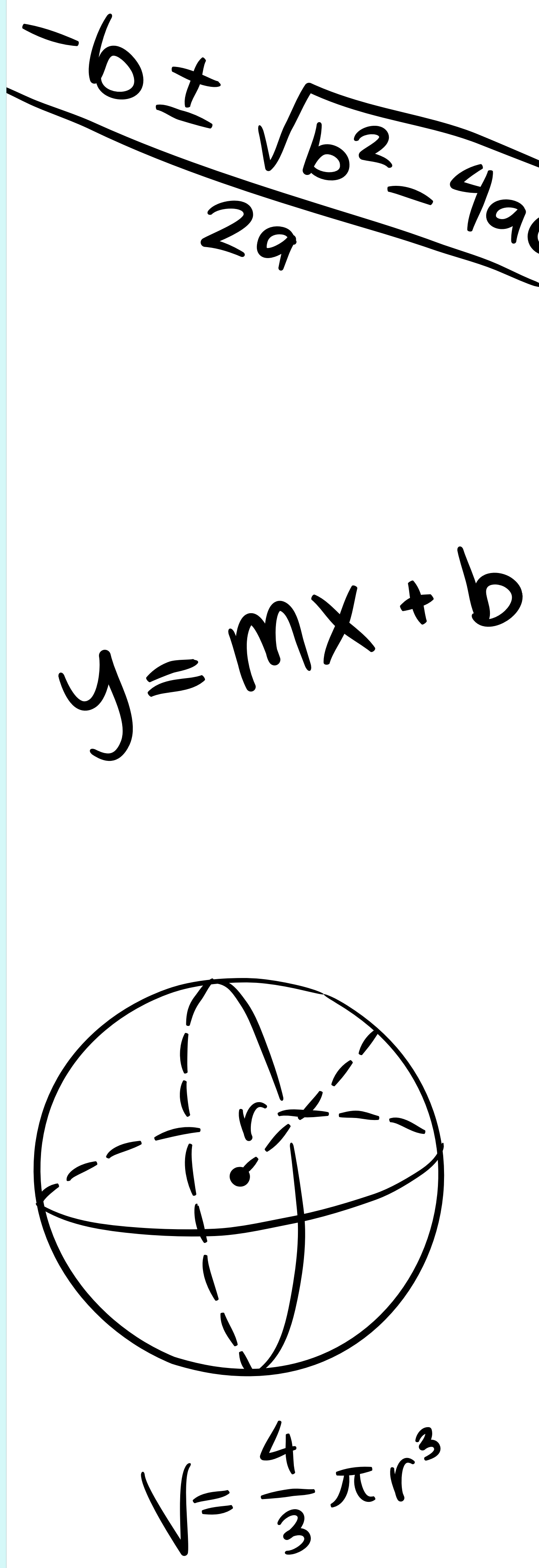


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Probabilidades

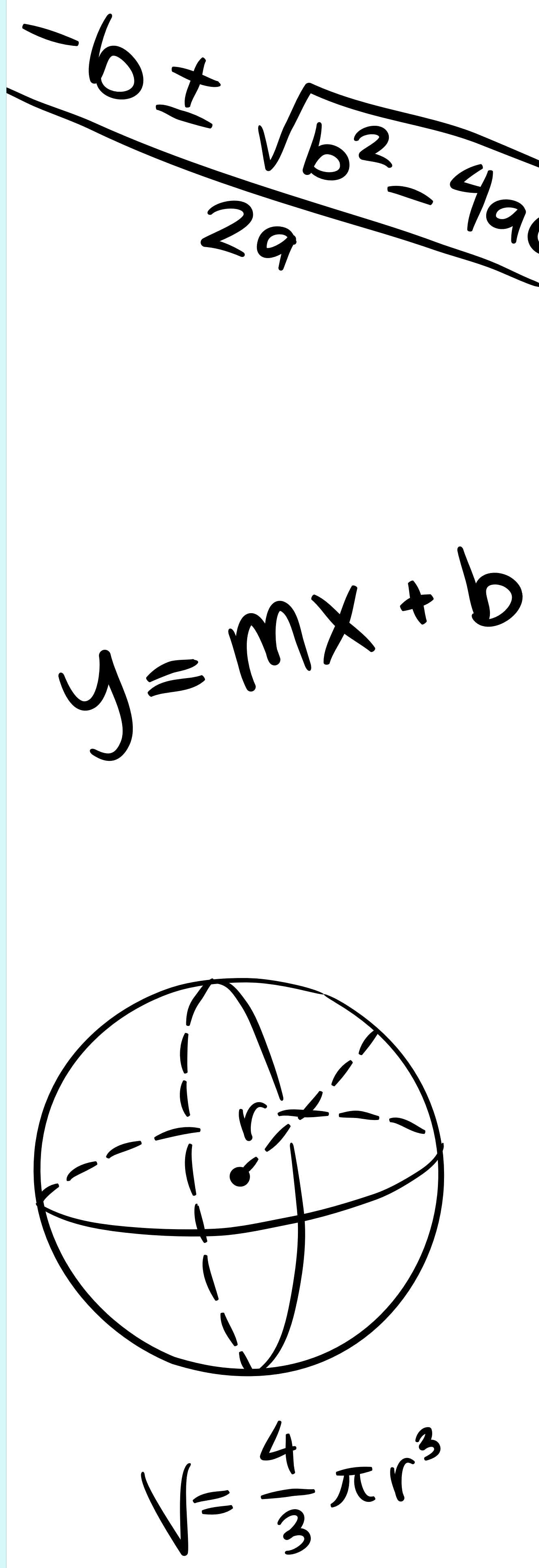
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- **Probabilidade de zero clientes no sistema (P0):**
  - Quando a taxa de ocupação é zero (ρ = 0), a probabilidade de haver zero clientes no sistema é 1.
  - À medida que a taxa de ocupação aumenta, essa probabilidade diminui.
- **Probabilidade de haver exatamente 1 cliente no sistema (P1):**
  - Quando ρ = 0, a probabilidade de existir 1 cliente é zero.
  - À medida que a taxa de ocupação aumenta, a probabilidade de existir exatamente 1 cliente aumenta inicialmente, mas nunca chega a 0.5, e depois começa a decrescer novamente.



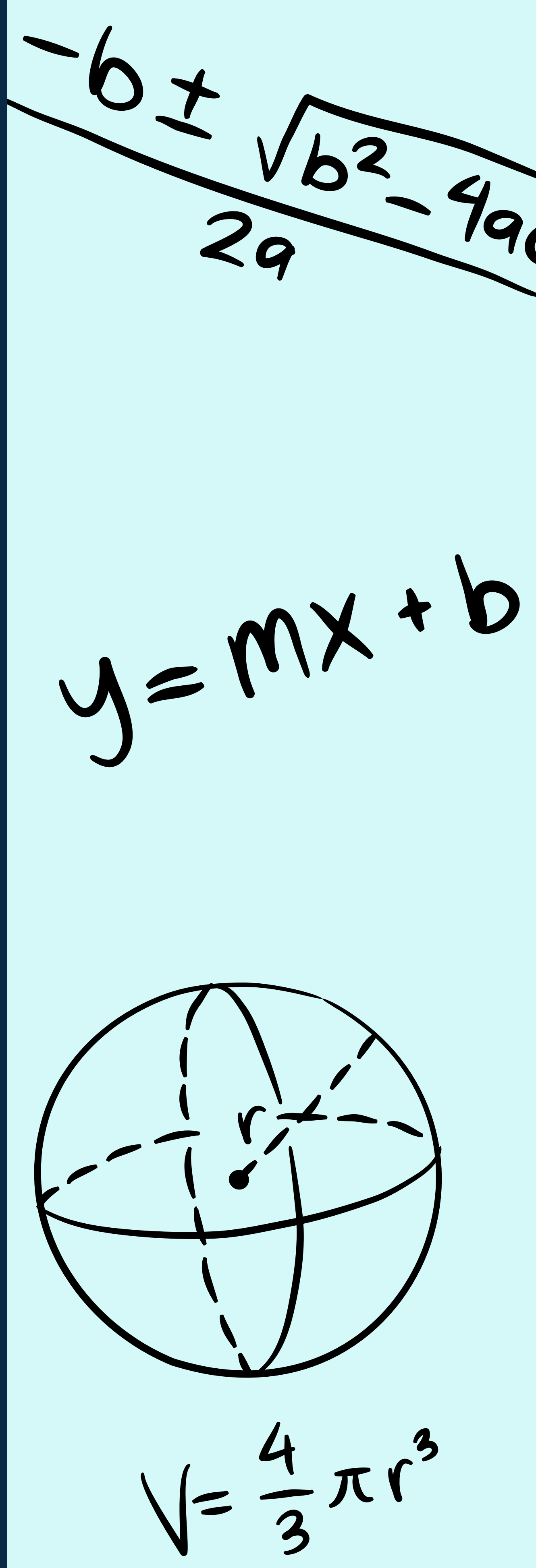
Probabilidades

- **Probabilidade de haver 2 ou mais clientes no sistema (Pn):**
  - Semelhante ao caso anterior, começa em zero e aumenta com a taxa de ocupação, mas tende a um comportamento de diminuição após certo ponto.



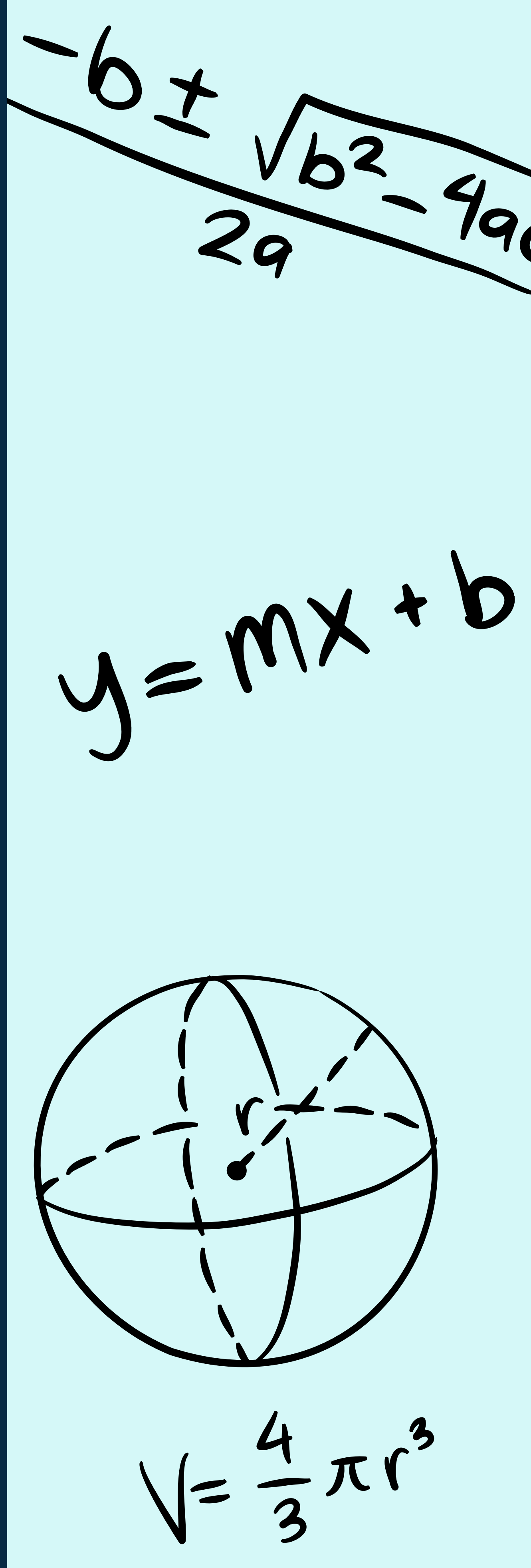
Conclusoes

- **O número médio de clientes no sistema (Ls)** é igual à taxa de ocupação (ρ): $L\,s = \varrho$.
- **O tempo esperado que cada cliente passa no sistema (Ws)** é dado pela fórmula inversa da taxa de serviço (μ): $Ws = \mathbf{1} \,/\, \mu$
    - Ws é inversamente proporcional à **taxa de serviço**. Quanto maior for a taxa de serviço, menor será o tempo esperado no sistema.



Conclusoes

- Cada cliente que chega é **atendido imediatamente** por um dos **infinitos servidores disponíveis.** Portanto, não há clientes esperando na fila, ou seja, Lq = **0;**
- Pelo mesmo motivo, como cada cliente é atendido imediatamente sem esperar, o **tempo esperado** que um cliente passa na fila, Wq, é zero. **Não há tempo de espera antes de ser atendido.**



Demonstrando Lq e Wq

Little's Law

A Lei de Little relaciona o número médio de clientes na fila (L_q) com a taxa média de chegada (λ) e o tempo médio de espera na fila (W_q):

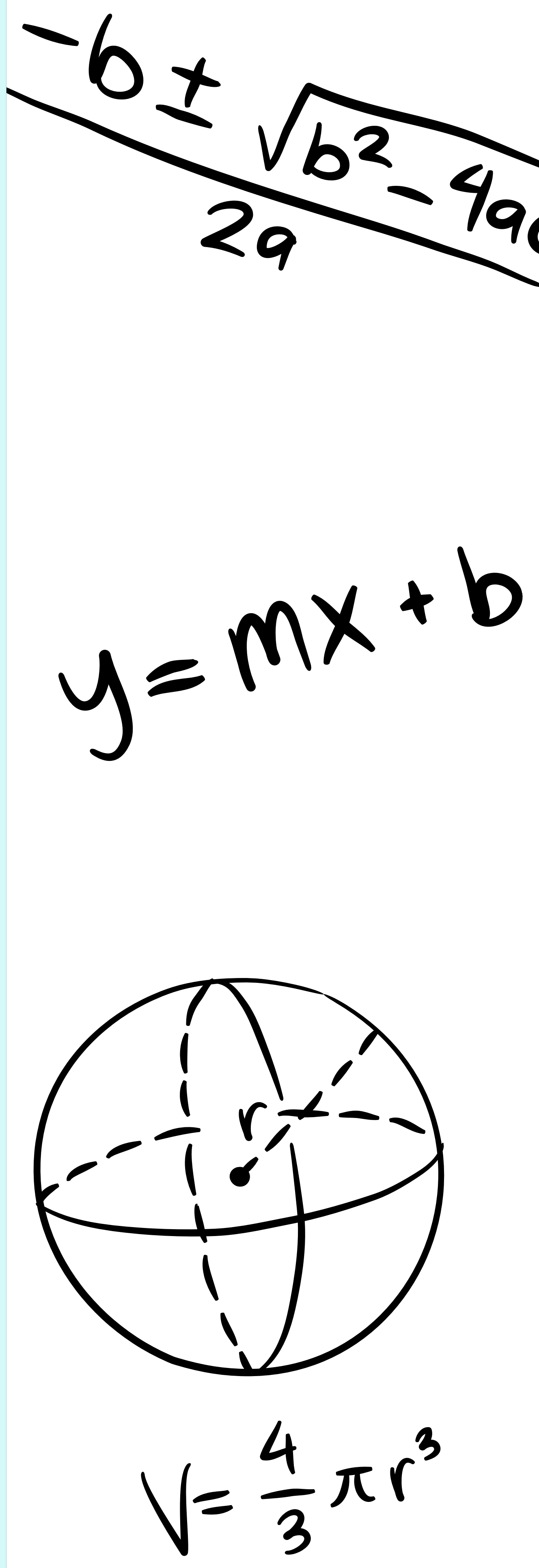
$$L_q = \lambda W_q$$

Para $M/M/\infty$, sabemos que $L_q = 0$ porque não há fila. Aplicando a Lei de Little, temos:

$$0 = \lambda W_q$$

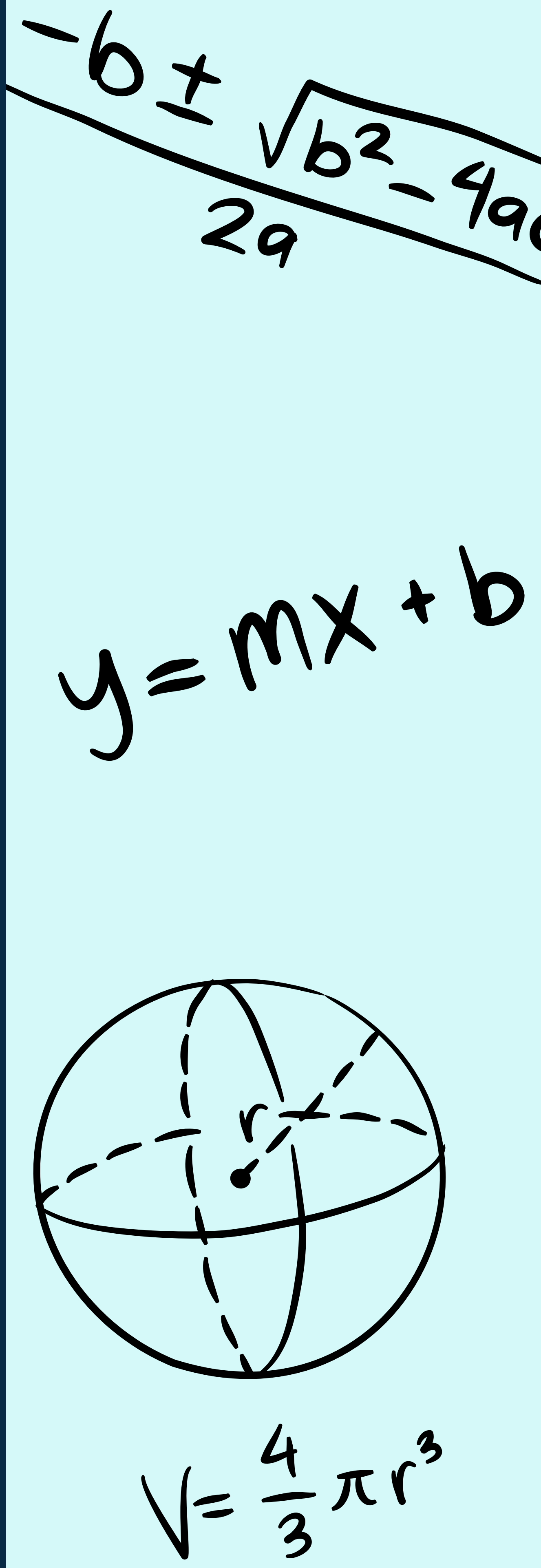
Para que essa equação seja verdadeira, W_q deve ser 0:

$$W_q = 0$$



Graficos

- **Python**
  - Numpy
  - Matplotlib



Perguntas?

REFERENCIAS

- Pereira, Cláudia Rossana Velosa. Uma Introdução às Filas de Espera. Mestrado em Matemática, Universidade da Madeira - Departamento de Matemática e Engenharias, Portugal, 2009.
- Prado, Darci Santos do. Teoria das Filas e da Simulação. Belo Horizonte: INDG Tecnologia e Serviços LTDA, 2004. ISBN 85-86948-12-8.