

1. Olkoon

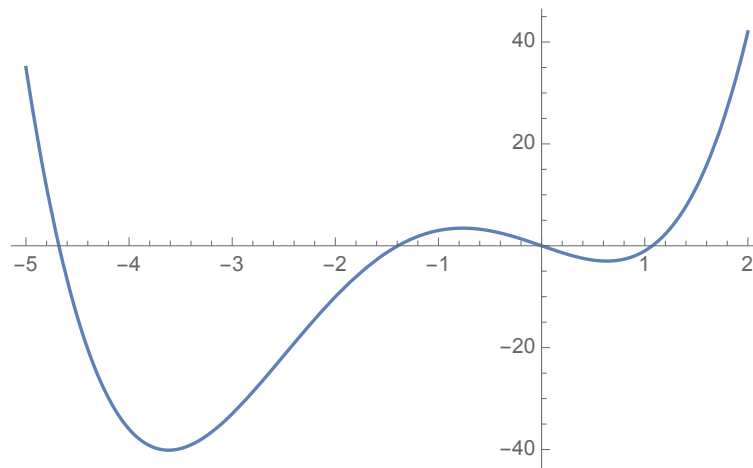
$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x$$

Laske funktion  $f$  (paikallinen) minimi  $x_{\min}$  käyttäen *gradient descent* -menetelmää. Laske käsin derivaatta  $f'(x)$  ja etsi minimikohta  $x_{\min}$  iteraatiokaavan

$$x_{i+1} = x_i - \alpha f'(x_i)$$

avulla. Voit tehdä laskut käsin laskimen avulla tai Pythonilla.

Jos teet tehtävän Pythonin avulla, kokeile useampia eri aloitusarvoja  $x_0$  ja eri arvoja parametrille  $\alpha$ , jotta löydät molemmat minimikohdat.



(Vastaus:  $x = -3.61617$  tai  $x = 0.631954$ .)

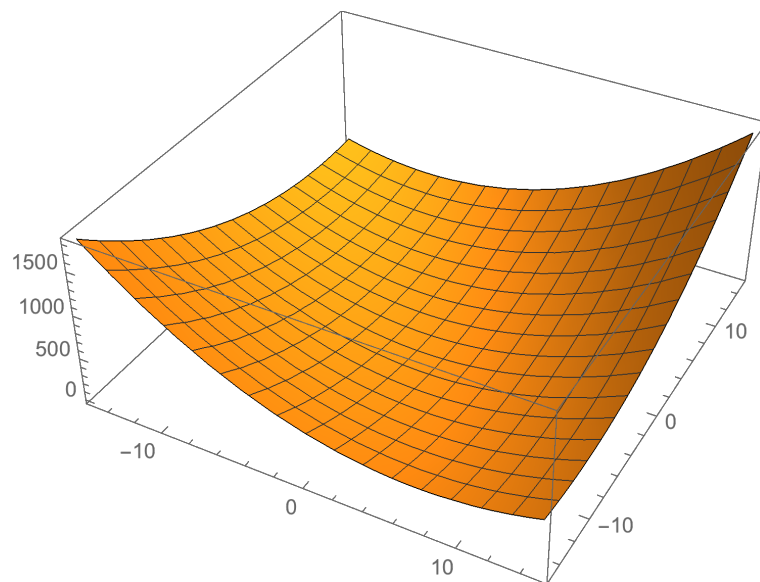
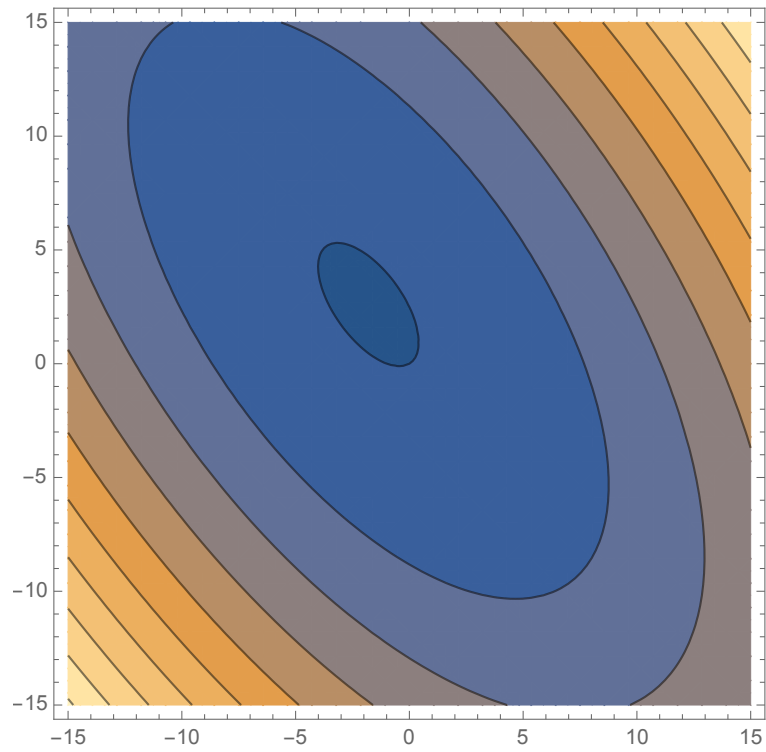
2. Olkoon

$$f(x, y) = 3x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x - 5y$$

Etsi funktion  $f(x, y)$  minimikohta  $(x_{\min}, y_{\min})$  *gradient descent* -menetelmällä. Laske funktion  $f$  osittaisderivaatat käsin ja muodosta niiden avulla gradientti  $\nabla f(x, y)$ . Laske minimikohta  $(x_{\min}, y_{\min})$  käyttäen iteraatiokaavaa

$$x_{i+1} = x_i - \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i - \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i).$$

Voit tehdä laskut käsin laskimella tai käyttää laskuihin Pythonia. Käyttäessäsi Pythonia kokeile useita eri aloituspisteitä ja eri arvoja *learning rate* -parametrille  $\alpha$ .



(Vastaus:  $x_{\min} = -1.8$  ja  $y_{\min} = 2.6$ .)

3. a) Olkoot  $f_i(x) = w_i x + b_i$ ,  $i = 1, 2$ , missä  $w_i$  ja  $b_i$  ovat vakioita. Laske osittaisderivaatat

$$\frac{\partial}{\partial w_1} f_2(f_1(x)) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial b_1} f_2(f_1(x)).$$

- b) (*Vapaaehtoinen*) Osoita laskemalla, että *sigmoid*-funktion

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

derivaatta voidaan kirjoittaa muodossa

$$g'(x) = g(x) (1 - g(x))$$

- c) Käyttäen b)-kohdan tulosta ja merkintää  $a_1 = g(f_1(x))$  laske osittaisderivaatat

$$\frac{\partial}{\partial w_1} g(f_1(x)) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial b_1} g(f_1(x)).$$