

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Часть I. Теория

Учебно-методическое пособие

Составители:
В. В. Корзунина,
К. П. Лазарев,
З. А. Шабунина

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики 20 марта 2014 г., протокол №7

Рецензент: доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ Воронежского госуниверситета Горбенко О.Д.

Учебное пособие подготовлено на кафедре вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики информатики и механики Воронежского государственного университета.

Для направлений: 010400 – Прикладная математика и информатика, 010500 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 010300 – Фундаментальная информатика и информационные технологии, 010800 –

Содержание

Введение.....	4
§1. Алгебраическое интерполирование и основные интерполяционные формулы	5
1.1. Разрешимость задачи алгебраического интерполирования.....	5
1.2. Интерполяционная формула Лагранжа.....	5
1.3. «Барицентрическая» форма многочлена Лагранжа	9
1.4. Многочлены Эрмита	9
1.5. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона	11
1.6. Остаточный член интерполирования	13
1.7. О сходимости интерполяционных процессов	14
1.8. Стандартная задача (программа) интерполирования	16
1.9. Уплотнение таблиц	17
§2. Локальное сглаживание сеточных функций	22
§3. Эмпирические формулы	27
§4. О демонстрации работы программ.....	30
Список литературы	32

Введение

Одним из основных курсов, читаемых на факультете прикладной математики, информатики и механики, является курс «Численные методы» (для некоторых направлений – «Методы вычислений» или «Вычислительная математика»). Приближение функций – важный раздел этих курсов. Настоящее учебно-методическое пособие в части I содержит краткое конспективное изложение лекционного материала, а также включает теоретические материалы, передаваемые студентам для самостоятельного изучения; дает описание основных вычислительных алгоритмов и рекомендации к их практическому использованию; учит грамотно составлять тестовые и демонстрационные примеры. В части II даны индивидуальные задания для выполнения лабораторных работ, которые разделены по уровню сложности. Этот уровень может быть или рекомендован преподавателем, или выбран самим студентом. В дальнейшем при проведении промежуточных аттестаций преподавателем помимо качества выполнения задания учитывается и его сложность. Индивидуальные задания составлены авторами так, чтобы они соответствовали девизу Р.В. Хемминга “Цель расчетов – не числа, а понимание”.

§1. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ОСНОВНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть заданы точки x_0, x_1, \dots, x_n и значения функции $f(x)$ в этих точках.

Алгебраическим интерполяционным многочленом называется многочлен

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1)$$

степени не выше n , который в узлах x_0, x_1, \dots, x_n принимает значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ соответственно. Функция $f(x)$, по значениям которой строится интерполяционный многочлен, называется интерполируемой функцией. Соответствие

x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_n)$

будем называть **таблицей значений функции $f(x)$ в узлах x_0, x_1, \dots, x_n** .

1.1. Разрешимость задачи алгебраического интерполирования

Имеет место следующая теорема существования и единственности интерполяционного многочлена [1].

Теорема 1. Пусть заданы узлы x_0, x_1, \dots, x_n , среди которых нет совпадающих, и значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ функции в этих узлах. Тогда существует один и только один многочлен $P_n(x) = P_n(x, f, x_0, x_1, \dots, x_n)$ степени не выше n , принимающий в заданных узлах x_k заданные значения $f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Интерполяционный многочлен $P_n(x)$ допускает различные формы записи, наиболее употребительными являются записи интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

1.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Введём в рассмотрение вспомогательные многочлены

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (2)$$

Очевидно, что $L_n^{(i)}(x)$ есть многочлен степени n и что выполняются равенства

$$L_n^{(i)}(x) \Big|_{x_j} = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Многочлены $L_n^{(i)}(x)$ называются **коэффициентами Лагранжа**, а интерполяционный многочлен $P_n(x)$, записанный в виде

$$P_n(x) = f(x_0)L_n^{(0)}(x) + f(x_1)L_n^{(1)}(x) + \dots + f(x_n)L_n^{(n)}(x),$$

называется **интерполяционным многочленом в форме Лагранжа** и обозначается $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (3)$$

Коэффициенты Лагранжа обладают двумя полезными в вычислительных задачах свойствами.

Свойство 1. Пусть по заданным узлам x_0, x_1, \dots, x_n , среди которых нет совпадающих, построены коэффициенты Лагранжа $L_n^{(i)}(x)$ и $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда сумма коэффициентов $L_n^{(i)}(x)$ тождественно равна единице в любой точке x :

$$\sum_{i=0}^n L_n^{(i)}(x) \equiv 1. \quad (4)$$

Свойство 2. Коэффициенты Лагранжа инвариантны относительно линейной замены переменной x . Иными словами, если переменные x и t связаны линейной зависимостью $x = at + b$, причём $x_i = at_i + b$, $i = 0, 1, \dots, n$, то имеют место равенства:

$$L_n^{(i)}(x) = L_n^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Пример. Функция $f(x)$ задана в точках $x_i = 1 + i \cdot \frac{\pi}{8}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Получить расчетную формулу для вычисления $f(1 + \frac{5}{16}\pi)$.

Решение. Функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $(1, 1 + \frac{\pi}{8}, 1 + \frac{2\pi}{8}, 1 + \frac{3\pi}{8})$. Для упрощения построения коэффициентов Лагранжа найдём линейное преобразование $t = \alpha x + \beta$, переводящее узлы x_i в узлы t_i с более простыми значениями, например, в узлы $(-1, 0, 1, 2)$. Не-

трудно определить, что такое преобразование имеет вид $t = \frac{8}{\pi}x - 1 - \frac{8}{\pi}$.

Кроме того, значению $x = 1 + \frac{5}{16}\pi$ соответствует значение $t = \frac{3}{2}$. Вычислим три коэффициента Лагранжа $L_3^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, 2$ в точке $t = \frac{3}{2}$:

$$L_3^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{t(t-1)(t-2)}{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)} \Big|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{-6} = \frac{1}{16},$$

$$L_3^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{1 \cdot (-1) \cdot (-2)} \Big|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{5}{16},$$

$$L_3^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{(t+1) \cdot t \cdot (t-2)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} \Big|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{-2} = \frac{15}{16}.$$

По свойству 1 коэффициентов Лагранжа:

$$L_3^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - L_3^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right) - L_3^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right) - L_3^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{16}.$$

Расчетная формула для вычисления $f(x)$ в точке $1 + \frac{5}{16}\pi$, имеет вид:

$$f\left(1 + \frac{5}{16}\pi\right) \cong L_3\left(1 + \frac{5}{16}\pi\right) = (f(x_0) - 5f(x_1) + 15f(x_2) + 5f(x_3)) / 16.$$

Если требуется найти не общее выражение интерполяционного многочлена $L_n(x)$, а его значение при некотором значении x , удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена [1]. Опишем её.

Выражение

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} \quad (6)$$

является многочленом первой степени, построенным по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$. Выражение

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

является многочленом второй степени. Вычислим его значения в узлах x_0, x_1, x_2 :

$$L_{012}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_0; \quad L_{012}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & x_0 - x_1 \\ f_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_1;$$

$$L_{012}(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0 - x_2 \\ f_2 & 0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_2.$$

Следовательно, $L_{012}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$. Аналогичным образом легко показать, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ можно выразить через значения многочленов $L_{012\dots n-1}(x), L_{123\dots n}(x)$:

$$L_{0123\dots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012\dots n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{123\dots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}. \quad (7)$$

Отметим, что порядок точек и их нумерация не имеют значения.

Вычислительную схему Эйткена для получения значения интерполяционного многочлена можно представить в виде таблицы 1, которая последовательно заполняется по строкам:

Таблица 1

i	x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$L_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}$
0	x_0	y_0	$x_0 - x$				
1	x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
2	x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
3	x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
4	x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$
...

Интерполяционный процесс Эйткена характерен своим единообразием и поэтому легко реализуется на ЭВМ. При численной реализации хранить в памяти машины всю таблицу нет необходимости, так как для заполнения некоторой $(k + 1)$ -й строки таблицы используются значения только предыдущей, k -й строки. Отметим, что использование схемы Эйткена позволяет добавлять всё новые и новые точки (x_i, f_i) без пересчёта всей таб-

лицы, в то время как при вычислении значения многочлена Лагранжа в форме (3) добавление новой точки требует полного пересчёта всего многочлена.

1.3. «Барицентрическая» форма многочлена Лагранжа

Формулу (3) интерполяционного многочлена Лагранжа можно записать несколько иначе, сделав её более удобной для вычислений. Введём обозначения:

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k), \quad (8)$$

$$A_i = \frac{1}{\prod_k' (x_i - x_k)}, \quad (9)$$

где штрих у знака произведения означает: «исключая i -й сомножитель», то есть

$$\prod_k' (x_i - x_k) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n),$$

$$\prod_k' (x - x_k) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

Тогда свойство 1 коэффициентов Лагранжа (4) принимает вид:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\prod_k' (x - x_k)}{\prod_k' (x_i - x_k)} = 1$$

или

$$\omega_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{(x - x_i)} = 1, \quad (10)$$

а многочлен Лагранжа запишется как

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^n f_i \frac{A_i}{(x - x_i)}. \quad (11)$$

Поделив правую часть многочлена Лагранжа на соотношение (10), получим «барицентрическую» форму многочлена Лагранжа:

$$L_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n f_i \frac{A_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{A_i}{(x - x_i)}}. \quad (12)$$

1.4. Многочлены Эрмита

Построим интерполяционный многочлен, принимающий в узлах интерполирования $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ значения f_i и имеющий в них производ-

ные, равные f_i' . Такие многочлены называются **многочленами Эрмита**. Ясно, что многочлен Эрмита имеет степень не меньше, чем $2n+1$, поскольку должны быть удовлетворены $2n+2$ условий. Аналогично коэффициентам Лагранжа $L_n^{(i)}(x)$ определим коэффициенты Эрмита $H_i(x)$ и $h_i(x)$. **Коэффициенты Эрмита** – это многочлены степени $2n+1$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} H_i(x_j) &= \delta_{ij}; & h_i(x_j) &= 0; \\ H_i'(x_j) &= 0; & h_i'(x_j) &= \delta_{ij}; \end{aligned} \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

Построим многочлен $h_i(x)$. Если $h_i(x_j) = h_i'(x_j) = 0$ при $i \neq j$, то $h_i(x)$ должен содержать множители $(x-x_j)^2$. Так как $h_i(x_i) = 0$, то $h_i(x)$ должен содержать простой множитель $(x-x_i)$. Для того чтобы $h_i'(x_i) = 1$, нужно взять

$$h_i(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots (x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2 \dots (x-x_n)^2}{(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2 \dots (x_i-x_{i-1})^2(x_i-x_{i+1})^2 \dots (x_i-x_n)^2}. \quad (14)$$

Построение многочлена $H_i(x)$ похоже на построение многочлена $h_i(x)$. Многочлен $H_i(x)$ должен иметь множители $(x-x_j)^2$ для $i \neq j$ и простой множитель $(a_i x + b_i)$. Будем искать $H_i(x)$ в виде:

$$H_i(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots (x-x_{i-1})^2(a_i x + b_i)(x-x_{i+1})^2 \dots (x-x_n)^2}{(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2 \dots (x_i-x_{i-1})^2(x_i-x_{i+1})^2 \dots (x_i-x_n)^2}. \quad (15)$$

Продифференцировав выражение $H_i(x)$ и подставив в производную $H_i'(x)$ значение $x = x_i$, получим

$$H_i'(x_i) = \frac{2}{x_i-x_1} + \frac{2}{x_i-x_2} + \dots + \frac{2}{x_i-x_{i-1}} + a_i + \frac{2}{x_i-x_{i+1}} + \dots + \frac{2}{x_i-x_n}.$$

По определению коэффициента Эрмита $H_i'(x_i) = 0$ и $H_i(x_i) = 1$. Следовательно, необходимо положить

$$a_i = -2 \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_k}, \quad b_i = 1 - a_i x_i. \quad (16)$$

Итак, требуемая формула (15) для коэффициентов Эрмита $H_i(x)$ построена. Теперь записать многочлены Эрмита не представляет труда:

$$H(x) = \sum_{i=0}^n (H_i(x)f_i + h_i(x)f_i'). \quad (17)$$

Заметив, что коэффициенты Эрмита (14), (15) связаны соотношениями

$$H_i(x) = (a_i x + b_i) \cdot h_i(x), \quad (18)$$

запишем многочлен Эрмита в иной, более удобной для вычислений форме:

$$H(x) = \sum_{i=0}^n [(a_i x + b_i) f_i + f_i'] \cdot h_i(x). \quad (19)$$

1.5. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Разделённая разность нулевого порядка $f(x_k)$ функции $f(x)$ в точке x_k совпадает со значением функции $f(x)$ в точке x_k . *Разделённая разность первого порядка* $f(x_k, x_t)$ функции $f(x)$ для произвольной пары точек x_k, x_t определяется через разделённые разности нулевого порядка:

$$f(x_k, x_t) = \frac{f(x_t) - f(x_k)}{x_t - x_k}.$$

Разделённая разность $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ n -ого порядка определяется через разделённые разности $(n-1)$ -ого порядка:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \quad (20)$$

Теорема 2. Интерполяционный многочлен $P_n(x, f, x_0, x_1, \dots, x_n)$ допускает запись в следующей форме Ньютона:

$$\begin{aligned} P_n(x, f, x_0, x_1, \dots, x_n) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (21)$$

Напомним некоторые полезные свойства разделённых разностей и интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

1. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} P_n(x, f, x_0, x_1, \dots, x_n) = & P_{n-1}(x, f, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (22)$$

2. Разделённая разность $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ порядка n равна коэффициенту c_n при члене x^n , входящем в интерполяционный многочлен

$$P_n(x, f, x_0, x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n, \quad (23)$$

то есть справедливо равенство: $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = c_n$.

3. Разделённая разность $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ обращается в ноль в том и только том случае, если $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ есть значения некоторого многочлена $Q_m(x)$, степень которого m строго меньше n .

4. Разделённая разность $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ не изменяется при произвольной перестановке её аргументов x_0, x_1, \dots, x_n .

5. Справедливо равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n, f, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}. \quad (24)$$

6. Разделённые разности можно расположить в следующей таблице

x_0	y_0	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
x_1	y_1	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	
x_2	y_2	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4, x_5)$		
x_3	y_3	$f(x_3, x_4)$	$f(x_3, x_4, x_5)$			
x_4	y_4	$f(x_4, x_5)$				
x_5	y_5					

Разделённые разности, входящие в многочлен Ньютона (18), расположены в первой строке таблицы. Таблицу можно заполнять последовательно по столбцам, поэтому при реализации на ЭВМ нет необходимости использовать двумерные массивы, а можно обойтись двумя столбцами (одномерными массивами).

Если не вводить обозначения для разделённых разностей, то можно сказать, что интерполяционный многочлен Ньютона – это многочлен вида $P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$. (25)

Из теоремы 2 следует, что b_i – это значения соответствующих разделённых разностей, которые определяются рекуррентно в соответствии с определением (20).

Получим явные выражения для разделённых разностей через значения функции в узлах интерполирования.

Рассмотрим формулы (3) и (25) при $n = k$, и сравним коэффициенты при x^k . В силу единственности интерполяционного многочлена, эти коэффициенты должны совпадать. Поэтому

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f_i}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)} \quad (26)$$

при любых $k = 0, 1, \dots$, и мы получаем компактное выражение для разделённых разностей:

$$\begin{aligned} b_0 &= f_0, \\ b_1 &= \frac{f_0}{x_0 - x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0}, \\ b_2 &= \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что если узлы равноотстоящие, например, $x_i = x_0 + ih$, то формула (26) легко преобразуется к виду

$$b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \frac{f_i}{i!(k-i)!h^k}. \quad (28)$$

1.6. Остаточный член интерполирования

Разность между интерполируемой функцией $f(x)$ и её интерполяционным многочленом $P_n(x)$ называют **остаточным членом (погрешностью) интерполирования** и обозначают $R_n(f, x)$:

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x). \quad (29)$$

Теорема 3. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз на промежутке $[a, b]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n . Тогда для любой точки $x \in [a, b]$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$R_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (30)$$

Заметим, что остаточный член не зависит от формы записи интерполяционного многочлена. Поэтому (30) является остаточным членом и для многочлена Лагранжа, и для многочлена Ньютона, и для любого иного многочлена, построенного по значениям $f(x_i)$ в узлах $x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема $(2n+2)$ раза на промежутке $[a, b]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n , в которых известны значения функции $f(x_i)$ и её производных $f'(x_i)$. Тогда для любой точки $x \in [a, b]$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что остаточный член $R_H(f, x)$ интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$ определяется соотношением:

$$R_H(f, x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2. \quad (31)$$

1.7. О сходимости интерполяционных процессов

Если для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ строится единый для всего отрезка интерполяционный многочлен $P_n(x)$, то его называют **глобальным интерполяционным многочленом**. На первый взгляд, кажется, что чем выше степень глобального интерполяционного многочлена, тем точнее он приближает интерполируемую функцию $f(x)$. Поэтому при решении задачи интерполяции функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, неплохо бы иметь один многочлен, пригодный для приближения функции $f(x)$ во всех точках $x \in [a, b]$ с достаточно высокой степенью ε . Существование такого многочлена следует из теоремы Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_n(x)$ степени $n = n(\varepsilon)$ такой, что

$$\max_{[a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Однако существуют веские причины, по которым в вычислительной практике глобальная интерполяция многочленами возрастающей степени практически не используется. Оказывается, что добиться повышения точности интерполяции за счёт увеличения числа узлов (и, соответственно, степени n многочлена) не так легко. Необходимо знать стратегию выбора набора узлов интерполяции при каждом n (о которой, кстати, ничего не говорится в теореме Вейерштрасса). Такая стратегия может задаваться бесконечной треугольной матрицей узлов

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (32)$$

в каждой n -ой строке которой записаны узлы $x_i^{(n)}, i = 0, 1, \dots, n$ из промежутка $[a, b]$, причём $x_k^{(n)} \neq x_m^{(n)}$ при $k \neq m$. Рассматривая элементы $(n+1)$ -ой строки матрицы как узлы интерполяции функции $f(x)$ многочленом степе-

ни n , можно построить последовательность многочленов $P_0(f, x), P_1(f, x), \dots, P_n(f, x)$, интерполирующих в точках $x_i^{(n)}, i = 0, 1, \dots, n$.

Будем говорить, что интерполяционный процесс для функции $f(x)$ **сходится в точке** $x \in [a, b]$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f, x) = f(x)$. Если последовательность $P_n(f, x)$ сходится к $f(x)$ равномерно, то интерполяционный процесс называют **равномерно сходящимся**.

Приведём несколько фундаментальных результатов теории сходимости интерполяционных процессов.

Теорема Фабера. Какова бы ни была стратегия выбора узлов интерполяции, найдётся непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$, для которой

$$\max_{[a, b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, единой для всех непрерывных функций стратегии выбора узлов интерполирования не существует, хотя для каждой непрерывной функции она есть, о чём говорит следующая теорема.

Теорема Марцинкевича. Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ найдётся такая матрица узлов, что соответствующий ей интерполяционный процесс для функции $f(x)$ сходится равномерно.

Не так пессимистично обстоит дело с гладкими функциями.

Теорема. Пусть в качестве узлов интерполирования на отрезке $[a, b]$ выбираются **чебышевские узлы**

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2i+2} \pi\right), i = 0, 1, \dots, n. \quad (33)$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ интерполяционный процесс сходится равномерно.

Далее приведём два наиболее известных примера расходимости интерполяционных процессов.

Пример Рунге. Аналитическая функция $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ интерполируется глобальным образом по равноотстоящим узлам на отрезке $[-1, 1]$. При больших n интерполяция даёт очень хорошие результаты в центральной части отрезка. Для $0.7 < |x| \leq 1$ последовательность $P_n(x)$ расходится.

Пример Бернштейна. Последовательность интерполяционных многочленов $P_n(x)$ для функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$, построенная по равноотстоящим узлам, не стремится к $f(x)$ ни в одной точке, за исключением точек $-1, 0, 1$.

Чебышевский набор узлов (33) может быть полезен для непрерывных функций, но для них требуется некоторое видоизменение интерполяционного процесса. Рассмотрим частный случай интерполяционного многочлена Эрмита (17), построенного в предположении, что $f_i'(x) = 0, i = 0, 1, \dots, n$:

$$H(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot H_i(x). \quad (34)$$

Такой многочлен называется интерполяционным **многочленом Файера** и обозначается $\Phi_{2n+1}(x)$.

Теорема Файера. Пусть в качестве узлов интерполяции на отрезке $[a, b]$ выбираются чебышевские узлы (33). Тогда для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ последовательность многочленов Файера $\Phi_{2n+1}(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

1.8. Стандартная задача (программа) интерполирования

По установившейся традиции под стандартной задачей (программой) интерполирования понимается следующая задача.

Дана таблица значений некоторой функции $f(x)$; требуется для заданного значения x^* вычислить значение $f(x^*)$ с заданной точностью EPS или с наилучшей возможной точностью при имеющейся информации.

Пусть есть некоторая формула или некоторое правило для построения интерполяционных многочленов $P_m(x)$. Каждый многочлен вычисляется по значению в узлах матрицы, наименее удалённых от точки x^* , поэтому перед началом всех вычислений перенумеруем узлы матрицы в порядке возрастания $|x_i - x^*|$. Предполагая функцию $f(x)$ гладкой, примем следующий практический критерий оценки погрешности

$$\varepsilon_m = |f(x^*) - P_m(x^*)| \cong |P_{m+1}(x^*) - P_m(x^*)|. \quad (35)$$

Далее строим интерполяционный процесс, вычисляем многочлены возрастающих степеней с одновременной оценкой погрешностей:

$$P_0(x^*), P_1(x^*), \varepsilon_0, P_2(x^*), \varepsilon_1, P_3(x^*), \varepsilon_2, \dots, P_{m+1}(x^*), \varepsilon_m, \dots \quad (36)$$

Интерполяционный процесс прекращается при выполнении одного из следующих условий:

- $\varepsilon_m < \text{EPS}$, то есть достигается заданная точность интерполяции;
- $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$, то есть абсолютное значение разности между двумя последовательными интерполяционными значениями перестаёт уменьшаться (проверка начинается с $m = 2$);

- использованы все значения заданной таблицы;
- обнаружены два одинаковых значения среди заданных табличных значений аргумента.

Заметим, что при построении интерполяционного процесса (37) становится очевидным преимущество использования многочлена в форме Ньютона (21) по сравнению с формой Лагранжа (3). Пусть многочлен P_n уже найден и для его уточнения привлекается ещё один узел x_{n+1} . Тогда для вычисления P_{n+1} в форме Лагранжа приходится полностью пересчитывать весь многочлен, а при вычислении в форме Ньютона достаточно к уже вычисленному значению добавить одно слагаемое (22), модуль которого даёт оценку погрешности ε_n .

Описанное выше преимущество использования многочлена в форме Ньютона относится также к случаю построения многочленов по схеме Эйткена.

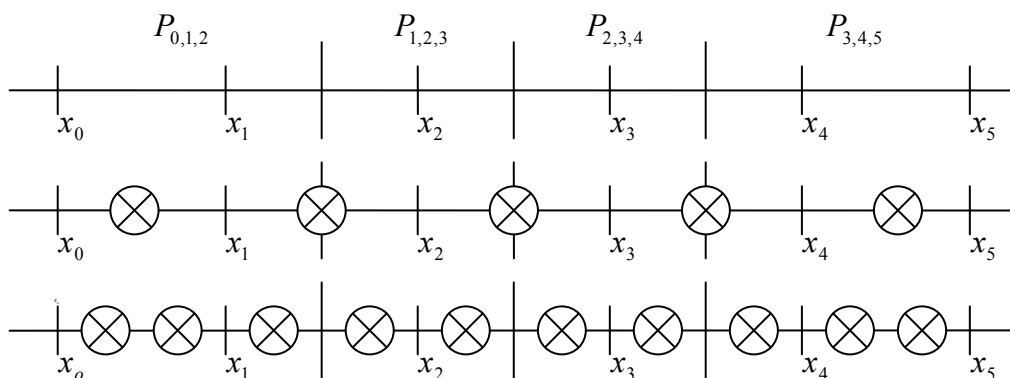
1.9. Уплотнение таблиц

Пусть задана таблица значений некоторой функции $f(x)$ в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Построение по этой таблице новой таблицы с меньшим шагом, например, с шагом $\frac{h}{2}, \frac{h}{3}, \frac{h}{4}$, называется уплотнением таблицы в два, три, четыре раза соответственно. При уплотнении таблицы применяются «движущиеся» многочлены Лагранжа. Допустим, что уплотнение таблиц нужно проводить с помощью многочленов степени m . Тогда строят набор «движущихся» многочленов степени m

$$P_{0,1,\dots,m}, P_{1,2,\dots,m+1}, P_{2,3,\dots,m+2}, \dots, P_{n-m,n-m+1,\dots,n},$$

каждый из которых совпадает с табличными значениями $(m+1)$ -ой последовательной точки. Многочлен $P_{0,1,\dots,m}$ строится по узлам x_0, x_1, \dots, x_m , многочлен $P_{1,2,\dots,m+1}$ строится по узлам x_1, x_2, \dots, x_{m+1} и т.д. Каждый такой многочлен будет использоваться для вычисления интерполяционного значения функции в тех точках, для которых узлы таблицы, по которым построен многочлен, являются ближайшими.

Пример. Рассмотрим сетку узлов $x_i, i = 0, 1, \dots, 5$. Предположим, что по этой сетке узлов нам надо уплотнить таблицу значений функции: а) в два раза, б) в три раза.



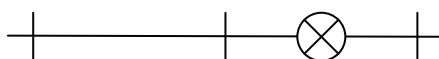
Рассмотрим схему, изображённую на рисунке. В первой строке схемы помечены только точки исходной схемы. Во второй и третьей строках крестиками помечены новые точки, в которых необходимо вычислить значения функции при уплотнении таблицы в два и в три раза соответственно. Вертикальными линиями размечены области, для точек которых ближайшими узлами являются узлы 0,1,2; 1,2,3; 2,3,4; 3,4,5 и для которых можно построить последовательность многочленов второй степени $P_{0,1,2}$, $P_{1,2,3}$, $P_{2,3,4}$, $P_{3,4,5}, \dots$. Заметим, что точки пересечения оси абсцисс с вертикальными линиями можно отнести как к левой, так и к правой областям.

Учитывая, что коэффициенты Лагранжа инвариантны относительно линейной замены переменных (5), выделим конфигурации точек (шаблоны), для которых необходимо вычислить коэффициенты Лагранжа. В случае уплотнения таблицы в два раза (см. вторую строку схемы) таких шаблонов два:

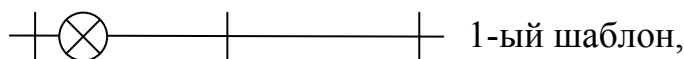
1-ый шаблон.



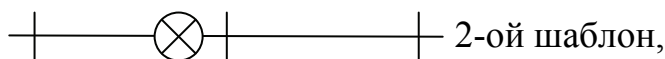
2-ой шаблон.



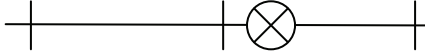
В случае уплотнения таблицы в три раза (см. третью строку схемы) шаблонов четыре:

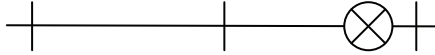


1-ый шаблон,

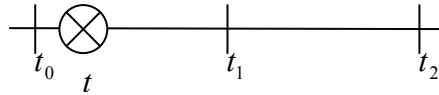


2-ой шаблон,

 3-ий шаблон,

 4-ый шаблон.

Вычислим коэффициенты Лагранжа для первого шаблона



при уплотнении таблицы в три раза:

$$L_2^{(0)}(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}$$

$$L_2^{(1)}(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}$$

$$L_2^{(2)}(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}.$$

Опираясь на инвариантность коэффициентов Лагранжа, положим для простоты вычислений $t_0 = -3, t_1 = 0, t_2 = 3, t = -2$. Тогда

$$L_2^{(0)}(t)|_{t=-2} = \frac{-2 * (-2-3)}{(-3)(-6)} = \frac{5}{9}; L_2^{(1)}(t)|_{t=-2} = \frac{1 * (-5)}{3 * (-3)} = \frac{5}{9}; L_2^{(2)}(t)|_{t=-2} = \frac{1 * (-2)}{3 * 6} = -\frac{1}{9}.$$

Теперь можно выписать значения многочлена в точке $t = -2$:

$$L_2(t)|_{t=-2} = \frac{5}{9}y_0 + \frac{5}{9}y_1 - \frac{1}{9}y_2. \quad (37)$$

Итак, расчётная формула для первого шаблона для уплотнения таблицы в три раза имеет вид

$$y(x_i + \frac{h}{3}) = \frac{5}{9}y_i + \frac{5}{9}y_{i+1} - \frac{1}{9}y_{i+2}. \quad (38)$$

Аналогичным образом нетрудно получить расчетную формулу для других шаблонов. Замечая, что шаблоны 1 и 4 симметричны, и, опираясь на свойство инвариантности коэффициентов Лагранжа относительно линейной замены аргумента, можно не вычислять заново коэффициенты Лагранжа для шаблона 4, а сразу выписать расчетную формулу

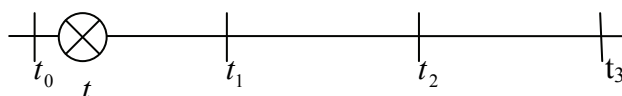
$$y(x_i - \frac{h}{3}) = \frac{5}{9}y_i + \frac{5}{9}y_{i-1} - \frac{1}{9}y_{i-2}. \quad (39)$$

Таким образом, при уплотнении таблицы в три раза необходимо фактически вычислить коэффициенты Лагранжа только для двух шаблонов –

первого и второго, так как третий шаблон симметричен второму, а четвёртый – первому.

Если требуется оценить точность полученных уплотнённых значений, то поступают стандартным образом. А именно, в исследуемой точке вычисляют второе приближённое значение функции по интерполяционному многочлену большей степени, и модуль разности двух приближённых значений принимается за абсолютную погрешность полученного значения в рассматриваемой точке.

Пример. Оценить погрешность интерполирования в точке $x_0 + \frac{h}{3}$ по формуле (38) из предыдущего примера при уплотнении таблицы в три раза. Получим значения коэффициентов Лагранжа для шаблона



в предположении, что $t_0 = -3, t_1 = 0, t_2 = 3, t_3 = 6, t = -2$:

$$\begin{aligned} L_3^{(0)}(t) \Big|_{t=-2} &= \frac{t * (t-3)(t-6)}{(-3)(-6)(-9)} \Big|_{t=-2} = \frac{40}{81}; \\ L_3^{(1)}(t) \Big|_{t=-2} &= \frac{(t+3)(t-3)(t-6)}{3 * (-3)(-6)} \Big|_{t=-2} = \frac{20}{27}; \\ L_3^{(2)}(t) \Big|_{t=-2} &= \frac{(t+3) * t * (t-6)}{6 * 3 * (-3)} \Big|_{t=-2} = -\frac{8}{27}; \\ L_3^{(3)}(t) \Big|_{t=-2} &= \frac{(t+3) * t * (t-3)}{9 * 6 * 3} \Big|_{t=-2} = \frac{5}{81}. \end{aligned}$$

Следовательно, приближённое значение функции точки $x_0 + \frac{h}{3}$, вычисленное по многочлену Лагранжа третьей степени, равно $\frac{1}{81}(40y_0 + 60y_1 - 24y_2 + 5y_3)$. Вычитая из этого выражения значение, вычисленное по многочлену Лагранжа второй степени по формуле (39), и беря полученную разность по абсолютной величине, будем иметь оценку погрешности в точке $x_0 + \frac{h}{3}$:

$$\left| R_2\left(x_0 + \frac{h}{3}\right) \right| \cong \frac{1}{81} |-5y_0 + 15y_1 - 15y_2 + 5y_3|.$$

Рассмотрим теперь случай, когда исходные табличные значения функции, заданной с некоторой предельной абсолютной погрешностью EPS_Y , т.е. табличные значения y_i , связаны с точными значениями функции $y_i^{точн.}$ неравенством:

$$\left| y_i - y_i^{точн.} \right| \leq EPS_Y . \quad (40)$$

Тогда, погрешность формулы (40), возникающая за счёт входных данных, оценивается как

$$\left| y(x_i - \frac{h}{3}) - y_{i-1/3}^{точн.} \right| \leq EPS_Y * (\frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{1}{9}) = \frac{11}{9} EPS_Y \quad (41)$$

и не зависит от значений функции y_i, y_{y-1}, y_{y-2} . Если при уплотнении таблиц хотят получить максимально возможно точные значения уплотнённой таблицы, то метод интерполирования подбирают таким образом, чтобы погрешность метода интерполирования и погрешность за счёт входных данных были примерно одинаковы.

§2. ЛОКАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Замена таблично заданной функции приближённой аналитической функцией называется **аппроксимацией** табличной функции. Аппроксимация – задача более общая, чем задача интерполирования. Известно много методов аппроксимации функции. Приведём пример точечного среднеквадратичного аппроксимирования функции.

Пусть в узлах x_0, x_1, \dots, x_n заданы значения функции $y_i = f(x_i)$, и надо построить приближающий эту функцию $f(x)$ многочлен $Q_m(x)$, причём степень многочлена m меньше числа узлов. За меру отклонения многочлена

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (42)$$

от функции $f(x)$ на множестве точек x_0, x_1, \dots, x_n принимают величину

$$S = \sum_{i=0}^n (Q_m(x_i) - y_i)^2. \quad (43)$$

Очевидно, что S есть положительно определённая квадратичная функция коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m . Эти коэффициенты надо подбирать так, чтобы значение S было минимальным. Приравнявая частные производные по a_0, a_1, \dots, a_m нулю, получим систему $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными a_0, a_1, \dots, a_m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot 1 = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_m} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Введём обозначения

$$s_k = x_0^k + x_1^k + \dots + x_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2m, \quad (45)$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \dots + x_n^k y_n, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Преобразуем систему (44), используя введённые обозначения (45):

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \dots \\ t_m \end{bmatrix}, \quad (46)$$

здесь $s_0 = n+1$. Если среди точек x_0, x_1, \dots, x_n нет совпадающих и $m \leq n$, то определитель системы (46) отличен от нуля и, следовательно, эта система

имеет единственное решение. Заметим, что если $m = n$, то аппроксимирующий многочлен $Q_m(x)$ совпадает с интерполяционным.

Говорят, что построенный таким образом многочлен является **многочленом среднееквadraticного приближения** степени m , или многочленом, полученным **методом наименьших квадратов**.

Пример. Построим многочлен первой степени $Q_1(x) = a_0 + a_1x$, имеющий минимальное среднееквadraticное отклонение

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2.$$

Приравнивая нулю частные производные $S(a_0, a_1)$ по a_0, a_1 , приходим к системе двух линейных уравнений относительно a_0, a_1 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i - y_i) \cdot 1 &= 0; \\ \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i - y_i) \cdot x_i &= 0. \end{aligned}$$

Принимая обозначения, введённые выше, а именно,

$$s_0 = n + 1, \quad s_1 = \sum_{i=0}^n x_i, \quad s_2 = \sum_{i=0}^n (x_i)^2, \quad t_0 = \sum_{i=0}^n y_i, \quad t_1 = \sum_{i=0}^n x_i y_i,$$

полученную систему уравнений запишем как

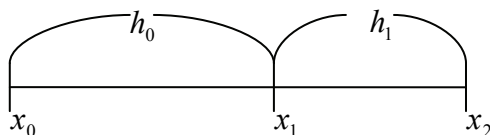
$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{Bmatrix}. \quad (47)$$

Нетрудно выписать решение этой системы:

$$a_0 = \frac{t_0 s_2 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}, \quad a_1 = \frac{t_1 s_0 - t_0 s_1}{s_0 s_2 - s_1^2}. \quad (48)$$

Итак, многочлен первой степени $Q_1(x)$ методом наименьших квадратов построен.

Остановимся на случае, часто встречающемся в приложениях, когда аппроксимирующий многочлен строится по трём точкам ($n = 2$):



Получим значение $Q_1(x_1) = a_0 + a_1x_1$. Используя выражения (48) для a_0, a_1 и обозначения $h_0 = x_1 - x_0, h_1 = x_2 - x_1$, вычислим интересующее нас значение

$$Q_1(x_1) = \frac{y_0(h_0 + h_1)h_1 + y_1(h_0^2 + h_1^2) + y_2(h_0 + h_1)h_0}{2(h_0^2 + h_0h_1 + h_1^2)}. \quad (49)$$

Вводя параметр $\xi = h_1/h_0$, перепишем последнюю формулу в виде

$$Q_1(x_1) = \frac{y_0(1 + \xi)\xi + y_1(1 + \xi^2) + y_2(1 + \xi)}{2(1 + \xi + \xi^2)}. \quad (50)$$

Если узлы x_0, x_1, x_2 равноотстоящие, то $\xi = 1$ и формула (50) приобретает особенно простой вид:

$$Q_1(x_1) = \frac{y_0 + y_1 + y_2}{3}. \quad (51)$$

Сделаем следующее **замечание**. Если многочлен среднеквадратичного приближения строится вручную для того чтобы вычислить значение в некоторой точке x^* , а сами коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m не представляют интереса, то поступают следующим образом. Многочлен среднеквадратичного приближения ищется не в форме (42), а в форме

$$Q_m(x) = a_0 + a_1(x - x^*) + a_2(x - x^*)^2 + \dots + a_m(x - x^*)^m.$$

Иными словами, вводится линейное преобразование $z = x - x^*$ и ищется многочлен

$$Q_m(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m,$$

совпадающий по форме с многочленом (42), коэффициенты которого определяются из системы (46) с учётом того, что $z = x - x^*$. Определить только один коэффициент a_0 , равный значению среднеквадратичного многочлена в точке $x = x^*$, часто бывает проще, чем целиком решать систему (46).

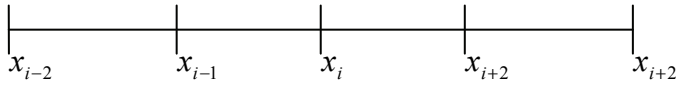
Если таблица значений функции $f(x)$ получена путём измерения какой-либо физической величины или с помощью численных расчетов, то к ней часто применяют процедуру сглаживания, то есть заменяют табличные значения иными, более гладкими приближёнными значениями. Многие методы локального сглаживания сеточных функций базируются на идее среднеквадратичного аппроксимирования. Такие методы локального сглаживания отличаются друг от друга двумя параметрами – степенью многочлена m , которым аппроксимируется табличная функция, и количеством точек, по которым этот аппроксимирующий многочлен строится. Допустим, что мы хотим проводить аппроксимацию многочленом второй степени по пяти точкам. Это значит, что для каждой табличной точки x_i , за исключением точек начала и конца таблицы, надо найти в таблице четыре ближайшие к ней точки. По пяти точкам (сама точка и четыре ближайшие) среднеквадратичным образом строится многочлен второй степени и его значение в точке x_i

принимается за новое сглаженное значение в этой точке. Подчеркнём, что точки начала и конца таблицы не сглаживаются, а аппроксимирующие многочлены строятся по исходным табличным значениям функции.

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, можно сказать, что формула (50) – это формула для вычисления сглаженных значений функции по трём неравноотстоящим точкам с помощью многочлена первой степени. Формула (51) имеет аналогичный смысл для равноотстоящих точек.

Пример. Сглаживание функций, заданных таблицей значений в равноотстоящих точках, с помощью многочленов второй степени по пяти точкам.

Рассмотрим такую точку x_i таблицы, у которой слева и справа есть по две соседние точки из заданной таблицы:



Построим многочлен $Q_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ по пяти точкам $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ методом наименьших квадратов. С учётом сделанного выше замечания, положим $x_{i-2} = -2h$, $x_{i-1} = -h$, $x_i = 0$, $x_{i+1} = h$, $x_{i+2} = 2h$. Тогда значения $s_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$, вычисленные по (45), равны

$$s_0 = 5, s_1 = \sum_{k=i-2}^{k+2} x_k = 0, s_2 = \sum_{k=i-2}^{k+2} (x_k)^2 = 10h^2, s_3 = \sum_{k=i-2}^{k+2} (x_k)^3 = 0, s_4 = \sum_{k=i-2}^{k+2} (x_k)^4 = 34h^4.$$

Составим систему, аналогичную (46):

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10h^2 \\ 0 & 10h^2 & 0 \\ 10h^2 & 0 & 34h^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2} \\ h(-2y_{i-2} - y_{i-1} + y_{i+1} + 2y_{i+2}) \\ h^2(4y_{i-2} + y_{i-1} + y_{i+1} + 4y_{i+2}) \end{Bmatrix}. \quad (52)$$

Решая систему трёх линейных уравнений, нетрудно получить значения для a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} a_0 &= (-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2})/35; \\ a_1 &= (-2y_{i-2} - y_{i-1} + y_{i+1} + 2y_{i+2})/10h; \\ a_2 &= (2y_{i-2} - y_{i-1} - 2y_i - 2y_{i+1} + 2y_{i+2})/14h^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Теперь получим значения среднеквадратичного многочлена $Q_2(x)$ в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1} :

$$Q_2(x_{i-1}) = (18y_{i-2} + 26y_{i-1} + 24y_i + 12y_{i+1} - 10y_{i+2})/70;$$

$$Q_2(x_i) = (-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2})/35; \quad (54)$$

$$Q_2(x_{i+1}) = (-10y_{i-2} + 12y_{i-1} + 24y_i + 26y_{i+1} + 18y_{i+2})/70.$$

Формулы (54) есть расчетные формулы локального сглаживания. Если сглаживание производится на системе равноотстоящих точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$, то значения функции в точках x_0, x_n не изменяются. Сглаженное значение функции в точке x_1 вычисляется по первой формуле (54), если положить в ней $i = 2$; значение в точке x_{n-1} вычисляется по третьей формуле (54), если положить в ней $i = n - 2$; во всех остальных точках сглаженные значения функции вычисляются по второй формуле (54).

Итак, расчётные формулы сглаживания на системе равноотстоящих точек, полученные с помощью многочлена второй степени по пяти точкам, имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &= y_0; \\ \tilde{y}_1 &= (18y_0 + 26y_1 + 24y_2 + 12y_3 - 10y_4)/70; \\ \tilde{y}_i &= (-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2})/35, i = 2, 3, \dots, n-2; \\ \tilde{y}_{n-1} &= (-10y_{n-4} + 12y_{n-3} + 24y_{n-2} + 26y_{n-1} + 18y_n)/70.; \\ \tilde{y}_n &= y_n, \end{aligned} \quad (55)$$

где знаком “тильда” помечены сглаженные значения. Заметим, что в формулы для сглаженных значений функции (55) не входит величина шага таблицы h .

§3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть задана таблица экспериментальных значений $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ некоторой функции $y = f(x)$. Мы хотим на основе метода наименьших квадратов получить эмпирическую формулу

$$y = Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

где a_0, a_1, \dots, a_m – числовые параметры. Наилучшими параметрами $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ будем считать те, для которых сумма квадратов отклонений функции $Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ от экспериментальных точек $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ является минимальной, то есть функция

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (Q(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i)^2$$

достигает минимума в точке $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$. Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем систему уравнений для определения параметров $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, \dots, m. \quad (56)$$

Если система (56) имеет единственное решение $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$, то оно является искомым и эмпирическая формула приобретает вид:

$$y = Q(x, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m).$$

Сделаем два замечания. Первое: если

$Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, то мы получаем среднеквадратичную аппроксимацию многочленами, описанную в предыдущем пункте, где показывалось, что система (56) для определения $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ является линейной системой уравнений. Второе: подчеркнём, что в общем случае система (56) нелинейна и её решение может вызвать определённые трудности.

Далее ограничимся рассмотрением эмпирических формул с двумя параметрами $y = Q(x, \alpha, \beta)$. В этом случае система (56) является системой двух уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n (Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i) \frac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \\ \sum_{i=0}^n (Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i) \frac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases}. \quad (57)$$

В частном случае, когда эмпирическая формула является линейной, имеем $y = Q(x, k, b) = kx + b$; $\frac{\partial Q}{\partial k} = x$; $\frac{\partial Q}{\partial b} = 1$. Тогда система уравнений (57) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n ((kx_i + b) - y_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n ((kx_i + b) - y_i)x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(n+1) + k \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i \\ b \sum_{i=0}^n x_i + k \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{cases} \quad (58)$$

Естественно, что система уравнений (58) с точностью до обозначений совпадает с системой (47).

Пусть априори известно, что экспериментальные данные плохо «укладываются» на прямую. Тогда возможны две ситуации. Первая ситуация – известен вид функциональной зависимости $y = f(x)$. Например, заранее известно, что экспериментальные данные удовлетворяют зависимости $y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$ и нужно только определить значения параметров α, β . Вторая ситуация – вид функциональной зависимости $y = f(x)$ неизвестен, нужно подобрать наиболее удачную из некоторого набора зависимостей. В обеих ситуациях для определения функциональных зависимостей можно воспользоваться приёмом, называемым **методом выравнивания экспериментальных данных**. Суть его состоит в том, что выбираются новые переменные

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y), \quad (59)$$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $X_i = \varphi(x_i, y_i)$, $Y_i = \psi(x_i, y_i)$ в новой системе координат (X, Y) давали точки X_i, Y_i , мало уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой $Y = kX + b$ параметры k, b определяются из уравнений (58), где вместо x_i, y_i подставляются значения X_i, Y_i .

Таким образом, функциональная зависимость $y = f(x)$ определяется неявным уравнением $\psi(x, y) = k\varphi(x, y) + b$, разрешить которое относительно y удаётся в некоторых частных случаях. Ниже приведена таблица для шести наиболее употребительных функциональных зависимостей с двумя параметрами α, β .

Таблица 2

N	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X = x, Y = xy$	$y = \alpha + \frac{\beta}{x}, \alpha = k, \beta = b$
2	$X = x, Y = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$
3	$X = x, Y = \frac{x}{y}$	$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$
4	$X = x, Y = \ln y$	$y = \alpha \beta^x, \alpha = \exp(b), \beta = \exp(k)$

5	$X = \ln x, Y = y$	$y = \alpha \ln x + \beta, \alpha = k, \beta = b$
6	$X = \ln x, Y = \ln y$	$y = \alpha x^\beta, \alpha = \exp(b), \beta = k$

Предложенные в таблице экспериментальные формулы нужно выбирать одновременно с проверкой применения линейной зависимости для исходных данных. Критерием выбора наилучшей эмпирической формулы является либо минимальность отклонения преобразованных экспериментальных данных от прямой, либо минимальность отклонения исходных экспериментальных данных от полученной функциональной зависимости.

Пример. Табличные данные $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ отвечают показательной зависимости

$$y = ce^{ax}, c > 0. \quad (61)$$

Найти параметры a, c .

Логарифмируя зависимость (61), будем иметь $\ln y = \ln c + ax$. Отсюда, полагая $X = x, Y = \ln y$, получим линейную зависимость:

$$Y = kX + b, k = a, b = \ln c. \quad (62)$$

Параметры k, b определяются системой уравнений вида (58), в которой значения x_i соответствуют исходным значениям, а вместо y_i подставляются значения $\ln y_i$. Таким образом, параметры искомой показательной зависимости $a = k, c = e^b$ получены. Отметим, что разобранный пример является частным случаем эмпирической формулы (4) приведенной таблицы.

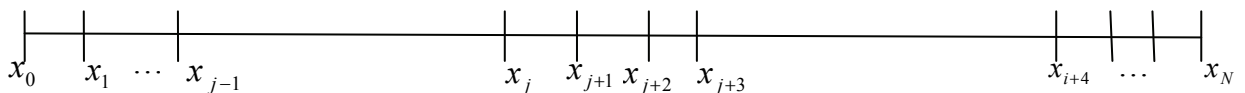
§4. О ДЕМОНСТРАЦИИ РАБОТЫ ПРОГРАММ

Во время сдачи преподавателю программы студент на ряде тестовых примеров, которые подготавливает самостоятельно, должен показать, что его программа работает в соответствии с заданием. Построение тестовых примеров требует глубокого понимания программируемого метода и не должно сопровождаться большой вычислительной работой. Ниже приведён ряд общих замечаний относительно разработки тестовых примеров.

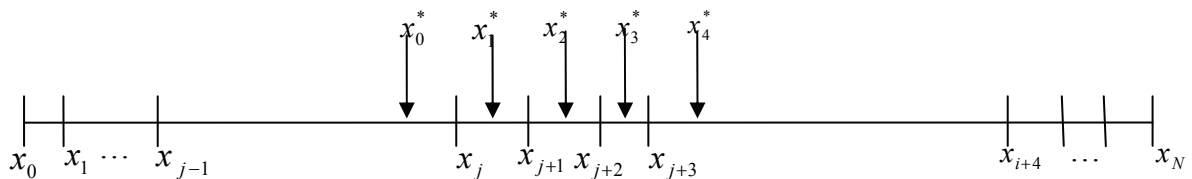
Замечание 1 (об определении значения функции в точке x^* с помощью интерполяционного многочлена степени m). Если дана таблица значений $x_i, y_i, i = 0, 1, \dots, n$ и требуется вычислить значение табулированной функции в точке x^* , построив многочлен степени m по ближайшим к x^* точкам, то нужно показать, что:

- а) действительно строится многочлен степени m и на выход подаётся значение этого многочлена в точке x^* ;
- б) многочлен строится по ближайшим точкам;
- в) в исходной таблице содержится достаточное количество точек для построения многочлена степени m , то есть точек больше, чем m . Последнее требование тестируется очевидным образом. Поэтому полагаем, что в исходной таблице достаточно много точек. Тестирование требований а, б рассмотрим на примере, взяв $m = 3$, то есть многочлен должен строиться по четырём ближайшим к x^* точкам.

Выберем такой набор узлов $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, в котором четыре последовательных узла $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$ находятся на значительном расстоянии от остальных узлов.



Тогда в точках $x_k^*, k = 0, 1, 2, 3, 4$ приближённые значения функции должны определяться значениями многочлена $P_3(x)$, построенного по точкам $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$:



Возьмём некоторый конкретный многочлен $\tilde{P}_3(x)$ и положим в узлах $x_k, k = j, j+1, j+2, j+3$ табличные значения y_k равными значениям многочлена $\tilde{P}_3(x)$. В остальных узлах $x_i, i = 0, 1, \dots, n, i \neq j, j+1, j+2, j+3$ табличные значения не есть значения многочлена $\tilde{P}_3(x)$, а равны, к примеру, $1000 + \tilde{P}_3(x)$. Построив описанную выше входную таблицу, можно провести пять тестов: зададимся некоторым конкретным многочленом $\tilde{P}_3(x)$, программно вычислим значения в точке $x_k^*, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Полученные значения должны совпадать со значениями $\tilde{P}_3(x_k^*)$. Этими тестами мы показываем, что в самом деле строится многочлен третьей степени по ближайшим к x^* узлам таблицы при любом взаимном расположении узлов и точки x^* .

Теперь возьмём произвольную сетку узлов $x_i, i = 0, 1, \dots, n, n > 3$ и произвольное $x^*, x_0 < x^* < x_n$. Проведём три теста: во всех узлах сетки значениям $y_i, i = 0, 1, \dots, n$ присвоим значения $y_i = Q_0(x_i)$ в первом тесте, $y_i = Q_1(x_i)$ во втором, $y_i = Q_2(x_i)$ в третьем, где $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены нулевой, первой и второй степени соответственно. Поскольку многочлены $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)$ формально являются многочленами третьей степени, вычисленные программные значения функции в точке x^* должны быть равны $Q_0(x^*), Q_1(x^*), Q_2(x^*)$.

Замечание 2 (о выходном параметре «индикатор» ошибки). Среди тестов, демонстрирующих работу программы, должны быть тесты, в которых программа завершается со всеми (!) требуемыми кодами завершения (значениями «индикатора» ошибки).

Замечание 3 (об определении значения функции в точке x^* с помощью интерполяционных многочленов Эрмита). Идеи тестирования при интерполировании многочленами Эрмита аналогичны идеям тестирования, изложенным в **Замечании 1**. Нужно только иметь в виду, что если многочлен Эрмита строится по k точкам, то он будет иметь степень $2k - 1$. Например, по одной точке можно построить многочлен первого порядка, а по двум точкам – многочлен третьего порядка и т.д.

Замечание 4 (об уплотнении таблиц). В заданиях об уплотнении таблиц обязательно указывается метод получения новых приближённых значений. Например, при уплотнении таблицы в два раза (Задание 11) в качестве нового значения уплотнённой таблицы принимаются значения многочлена Лагранжа второй степени, вычисленного по трём ближайшим точкам. Обязательным тестовым примером в этом случае должен быть пример, когда уплотнение проводится для таблицы значений некоторого многочлена вто-

рой степени. Понятно, что все новые значения точно совпадают со значениями этого многочлена в соответствующих точках.

Замечание 5 (о сглаживании функции). В заданиях на локальное сглаживание локально заданных функций обязательно указывается метод сглаживания. Например, сглаженные значения определяются с помощью многочлена второй степени, построенного больше, чем по трём точкам. В этом случае обязательным является тест, когда исходная таблица значений является таблицей значений многочлена второй степени. Очевидно, что после сглаживания ни одно табличное значение не должно измениться.

Замечание 6 (о вычислении параметров эмпирических формул). Допустим, что подбираются параметры α, β для эмпирической формулы $y = \alpha + \frac{\beta}{x}$. Если входная таблица является таблицей значений функции $f(x) = \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{x}$, то программно полученные значения α, β должны совпадать со значениям $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы : учеб. Пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. ; Спб. : Физматлит, 2002. – 630 с.

Учебное издание

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ.

Часть I. Теория.

Учебно-методическое пособие

Составители:

Корзунина Вера Васильевна,
Лазарев Константин Петрович,
Шабунина Зоя Александровна

Редактор В. В. Юргелас
Компьютерная верстка Н. А. Сегида

Подписано в печать 16.06.14. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1,9.

Тираж 25 экз. Заказ 543

Издательский дом ВГУ
394000, г. Воронеж, пл. Ленина, 10

Отпечатано в типографии Издательского дома ВГУ
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3