Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б)* $\sqrt{1998}$? Ответ на оба вопроса задачи утвердительный. Начнем построение примера к пункту а). Длина суммы $O\vec{B}2 + O\vec{B}3 + O\vec{B}4$ векторов рисунка 2 равна 2. Чтобы построить систему векторов, длина суммы которых равна 3, помимо шестиугольника рассмотрим пятиугольник (рис.3).

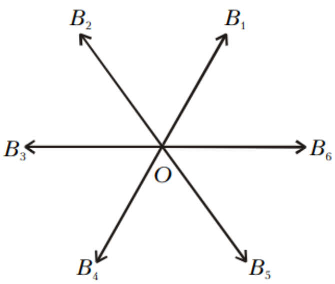

Рис.2

Благодаря формуле (1) сумма четырех векторов $O\vec{C}_1 + O\vec{C}_2 + O\vec{C}_3 + O\vec{C}_4$, проведенных из центра в четыре вершины правильного пятиугольника, противоположна вектору $O\vec{C}_5$, соединяющему центр с пятой вершиной пятиугольника. И вершины пятиугольника, и вершины шестиугольника лежат в вершинах правильного 30-угольника. Аналогично, чтобы построить систему векторов,

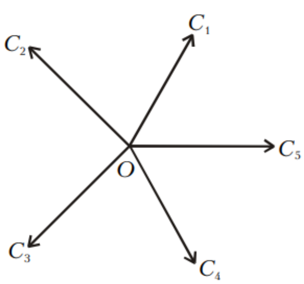

Рис.3

длина суммы которых равна 4, добавим еще 6 векторов $O\vec{A}_1, \dots O\vec{A}_6$, соединяющих центр с вершинами семиугольника (см. рис.1). Продолжая в таком же духе, мы и получим пример к пункту а). Формальное описание изложенной конструкции таково. Пусть $n_1, n_2, \dots n_{1998}$ – попарно взаимно простые числа. Рассмотрим правильный $n_1 n_2 \dots n_{1998}$ -угольник. Зафиксируем некоторую его вершину А. Назовем «выделенным» n_i -угольником ($i = 1, \dots 1998$) правильный n_i -угольник, одной из вершин которого является точка A, а другие вершины являются вершинами $n_1 n_2 \dots n_{1998}$ -угольника. Выделенные n_i -угольник и n_j -угольник ($i \neq j$) имеют, благодаря взаимной простоте чисел n_i и n_j , единственную общую вершину A. Рассмотрим векторы, идущие из центра О многоугольника во все вершины всех выделенных n_i -угольников, кроме A. Их сумма равна $-1998\vec{OA}$, что и требовалось. б) В следующем разделе статьи мы построим с привлечением комплексных чисел сумму длиной $\sqrt{n}$ при любом натуральном n, а пока предлагаем ряд упражнений. Тот, кто справится с ними, получит решение пункта б), не использующее никаких выходящих за рамки школьной программы понятий (но, к сожалению, существенно использующее специфику числа $\sqrt{1998}$).

Упражнение 1. Воспользовавшись приемом решения пункта а), докажите, что если можно представить в искомом виде (т.е. в виде суммы векторов, проведенных из центра вписанного в единичную окружность правильного многоугольника в его вершины) некоторый вектор $\vec{v}$, то можно представить в таком виде и вектор $a\vec{v}$, где a – натуральное число.

Упражнение 2. Докажите, что если можно представить в искомом виде вектор длиной x, то можно представить в таком виде и вектор длиной а) $x\sqrt{a^2+b^2}$, б) $x\sqrt{a^2+2b^2}$, где a и b – натуральные числа. *Замечание.* Если в искомом виде можно представить некоторый вектор длиной $\sqrt{m}$, то можно представить и вектор длиной $\sqrt{2m}$. Поэтому в дальнейшем мы можем искать вектор длиной $\sqrt{n}$ только для нечетных n.

Упражнение 3. Решите пункт б) задачи М1648.
Указание. $\sqrt{1998} = \sqrt{3^2+18^2} \cdot \sqrt{2^2+2\cdot 1^2}$.

Корни из еденицы

Сейчас мы запишем равенство (1) в довольно неожиданном виде. Для этого рассмотрим уравнение $z^{n-}1 = 0$ и разложим его левую часть на множители:

$$(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$$

Значит, если $z^n = 1$ и $z \neq 1$, то

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0 \quad (2)$$

. В статье «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 год) рассказано о том, что уравнение $z^n = 1$ имеет n решений – «корней из единицы». Они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, и имеют вид

$$\zeta^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, k = 1, \ldots, n$. Сумма всех корней n-й степени из единицы (при $n > 1$) равна 0:

$$1 + \zeta + \ldots + \zeta^{n-2} + \zeta^{n-1} = 0$$

. Это, по сути, и есть равенство (1)! Зная все n корней $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^n (= 1)$ многочлена $\zeta^n - 1$, мы можем разложить его на множители:

$$\zeta^n - 1 = (z-\zeta)(z-\zeta^2)\ldots(z-\zeta^{n-1})(z-1) \quad (3)$$

Сократив обе части на $z - 1$, получим

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = (z-\zeta)(z-\zeta^2)\ldots$$
$$\ldots(z-\zeta^{n-1}. \qquad (4)$$

Подставим в последнее равенство вместо z число 1:

$$n = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\ldots(1-\zeta^{n-1}). \qquad (5)$$

Упражнение 4. Чтобы получить равенство (5), мы подставили $z = 1$ в равенство (4), которое получилось делением на z^-1 обеих частей равенства (3). Объясните, почему так делать можно, хотя «на ноль делить нельзя».

Пусть n – нечетное число. Тогда все множители правой части (5) можно разбить на комплексно сопряженные (т.е. симметричные относительно оси абсцисс) пары чисел $1 - \zeta^k = 1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$ и $1 - \zeta^{n-k} = 1 - \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ (рис. 4.) Взяв из каждой пары сопряженных множителей только один множитель, мы получим число, модуль которого – квадратный корень из

№ бутылки	время наполнения	время закупоривания
4	2	4
6	5	12
1	7	10
2	9	8
5	11	6
3	3	1