Hvorfor er ikke kakaoen min kald ennå?

Tenk deg at du driver og koker opp noe kakao på kjele, men så husker du plutselig at du må skrive ferdig et obligatorisk matteprosjekt til om en halvtimes tid. Av den grunn skrur du av varmen på kokeplaten og løper fra kakaoen din umiddelbart. Når du driver og jobber er kanskje det eneste spørsmålet i dine tanker, med unntak på spørsmålet om du får ta eksamen dette semesteret, om kakaoen din er blitt kald innen du er ferdig.

I denne oppgaven skal jeg svare på ved å bruke differensialer for å regne på temperatur endringen over tid. Av den grunn anvender jeg Newtons avkjølingslov for å utlede en funksjon for temperaturen til kakaoen. Til slutt kommer jeg til å sjekke om temperaturendringen som predikeres ut ifra modellen lagd av differensialen faktisk er realistisk ved å sammenlikne den med svært nøyaktige målinger hentet fra mitt (og 5 andres) kjøkken.

Ifølge Newtons avkjølingslov er temperatur endringen til et objekt gitt ved differansen i temperatur mellom objektet og sine omgivelser. Denne endringen varierer selvfølgelig med hensyn til varmekapasiteten, varmeflyten mellom kjelen og omgivelsene og mange andre faktorer så derfor ganges differansen med en proporsjonalitetskonstant α. Slik blir differensialen seende ut som:

$$\dot{T}(t) = \alpha(T - T_k)$$

Med litt enkel omregning får vi en funksjon for temperaturen til objektet gitt ved tiden passert:

$$\dot{T} - \alpha T = -\alpha T_k$$

$$(e^{-\alpha \dot{t}} * T) = -\alpha T_k * e^{-\alpha t}$$

$$e^{-\alpha t} * T + C_1 = -\alpha T_k \int e^{-\alpha t}$$

$$e^{-\alpha t} * T + C_1 = -\frac{\alpha T_k}{-\alpha} e^{-\alpha t} + C_2$$

$$T(t) = T_k + C * e^{\alpha t}$$

Hvor $C = C_2 - C_1$

Med dette har vi en enkel funksjon vi kan bruke for å predikere temperaturendringen så lenge vi har T_k, temperaturen ved utgangspunktet for å definere C og en eller annen måte å anslå α på.

Neste steg i oppgaven hadde vanligvis vært å varme opp noe kakao i en kopp og ta 2 målinger av temperaturen dets for å gjøre et anslag på α i modellen, men heldigvis hadde jeg stelt i stand en kopp kakao i forkant av å begynne på oppgaven. Datapunktene jeg endte opp med å få var: T(0) = 80 $\ ^{o}C$ og T(64) = 35.7 $\ ^{o}C$ hvor t er gitt i minutter.

For å finne T_k løftet jeg steketermometeret i været og leser av verdien 22.5 grader.

Dette gir:

$$T(0) = 22.5 + C * e^0 = 80$$

$$\Rightarrow C = 80 - 22.5 = 57.5$$

Med dette kan vi gjøre at anslag på α med andre datapunkt:

$$T(64) = 22.5 + 57.5 * e^{\alpha * 64} = 35.7$$

$$\Rightarrow \frac{35.7 - 22.5}{57.5} = e^{\alpha * 64}$$

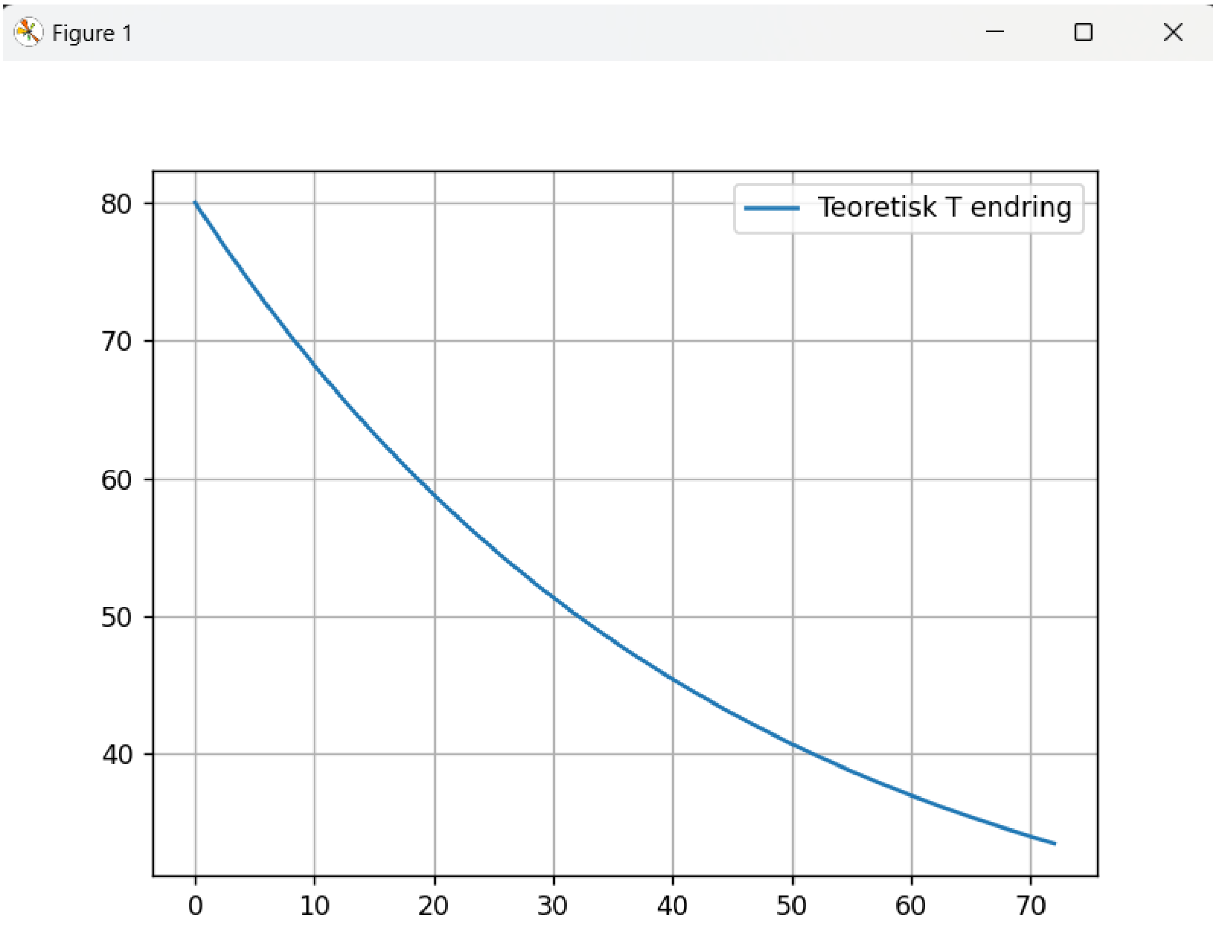
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\ln\left(\frac{35.7 - 22.5}{57.5}\right)}{64} = -0.023$$

Dette er selvfølgelig et veldig røft estimat for α og det fins sikkert bedre metoder å gjøre det på, men dette holder nok for dette lille prosjektet. Vi setter verdiene inn i funksjonen vi fant for temperaturendring over tid og får endelig modellen for temperaturendringen til kakaoen:

$$T(t) = 22.5 + 57.5 * e^{-0.023t}$$

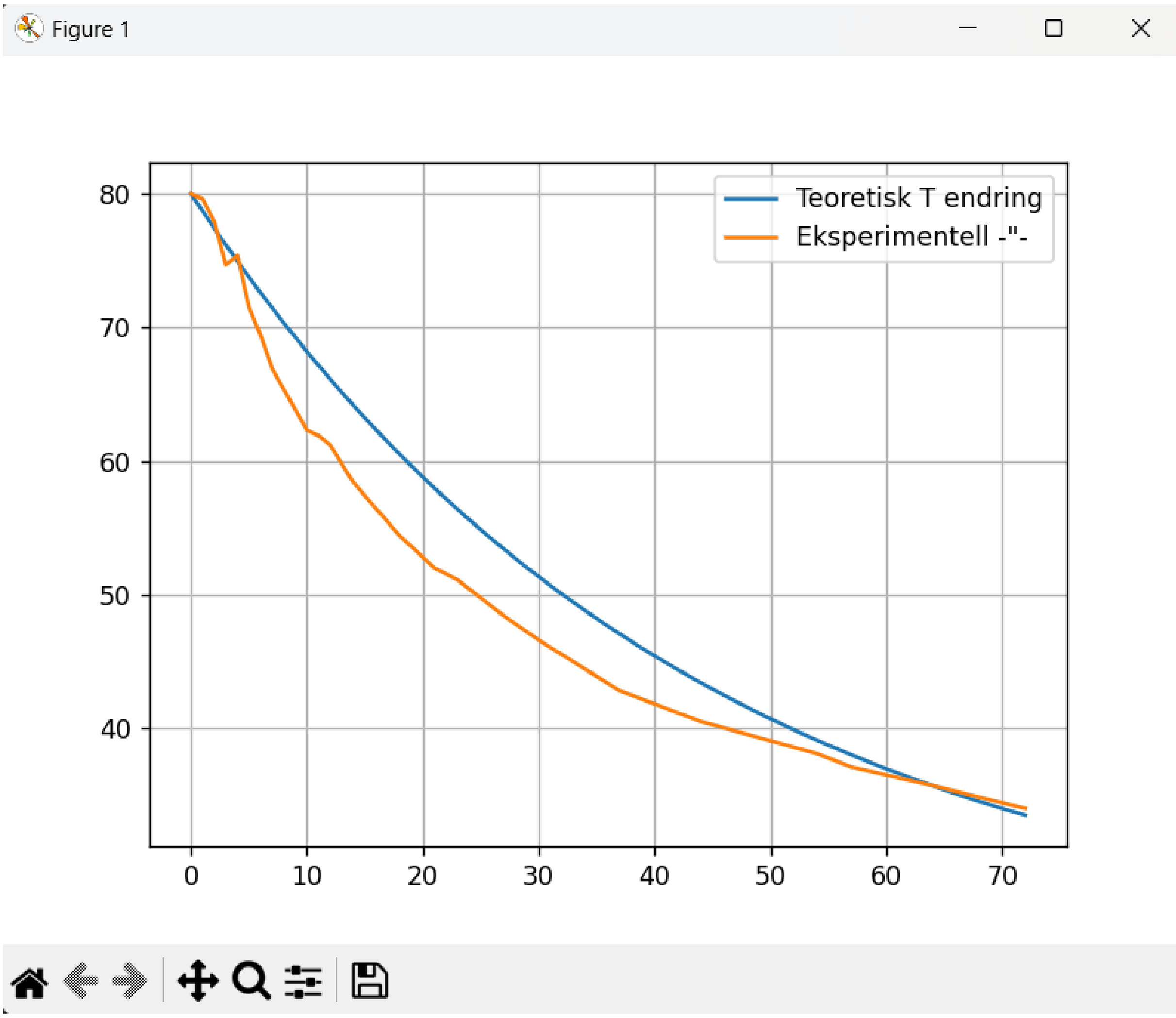
Grafen ble seende slik ut:

Figur 1. En modell av kakaoens temperaturendring over tid



Jeg bestemmer meg for at kakaoen er blitt for kald etter en vilkårlig temperatur som for eksempel 50 grader. Da kan jeg ifølge dette diagrammet holde på med dette prosjektet i omtrent en halvtime og dra tilbake til kjøkkenet for å drikke kakaoen før den har blitt kald igjen, men stemmer dette overens med virkeligheten? For å teste dette varmer jeg nok en kjele med kakao for å få flere datapunkt, og plotter dette inn i python:

Figur 2. Et "plotdiagram" som viser den teoretiske modellen og de eksperimentelle målingene jeg tok side om side.



Når man sammenlikner modellen og de eksperimentelle verdiene side om side er det tydelig at kakaoen synker i temperatur langt raskere i virkeligheten. I praksis betyr dette at jeg hadde kommet tilbake til en kald kjele med kakao når jeg egentlig forventet en premie for arbeidet mitt.

Det er en rekke årsaker som kunne ført til forskjellene mellom modellen og de eksperimentelle verdiene. Blant annet deler jeg på en hybel med 5 andre mennesker som stadig går inn og ut av huset, tar i bruk komfyren og åpner og lukker vinduer og som følge er temperaturen på omgivelsene sannsynligvis ikke konstant. Dessuten tas målingene på et steketermometer med rimelig lav nøyaktighet, men dette spiller ikke en så stor rolle når forskjellen i temperatur på modellen og målingene varierer så mye som de gjør.

For å konkludere synes jeg at den generelle formen på modellen passer ganske godt til situasjonen, så Newton var virkelig inne på noe med avkjølingsloven sin. Akkurat i dette tilfellet er modellen dessverre litt for enkel til å ta hensyn til påtrykket på starten som fører til at temperaturen synker drastisk og dermed fører til den store forskjellen mellom teorien og praksis i dette tilfellet. Hva enn som fører til at temperaturen synker raskere på starten er vanskelig for meg å si når det var så mange ulike faktor i spill. Blant annet helte jeg ikke kakaoen ut av kjelen etter den var tatt av komfyren, så det kan godt hende at kjelen var langt varmere enn kakaoen. Dessuten er jeg ikke sikker på om varmen var uniform i hele løsningen da jeg tok temperaturen med steketermometeret. Det er vanskelig å si noe konkret om resultatene i dette prosjektet som et resultat av alle disse unøyaktighetene, men noe jeg kan si med fullstendig sikkerhet nå er at jeg er lei av kakao. I tillegg hadde jeg nok funnet en mer nøyaktig modell om man skal drive med mer finurlige prosjekter på labben, men dette passer ganske godt for å finne et kjapt estimat hjemme.