Lógica Aplicada à Computação

Prof. Vivek Nigam

Aula 2 – História da Lógica

Um pequeno teste de lógica

Um **escravo**, por desobediência foi aprisionado e condenado à morte. O **senhor** resolveu ser gentil com escravo e disse-lhe: Deixo-te escolher a maneira como vai morrer. Se disseres uma frase verdadeira, serás decapitado. Se disseres uma frase falsa, serás enforcado.

O **escravo** disse –“Vou morrer enforcado.” Com esta afirmação o escravo escapou da morte. Por que?

O que veremos hoje

- A **história** da lógica;
- Entender a **importância** da lógica para a computação;

  "Lógica esta para a Computação como o Cálculo para a Matemática." (M. Vardi)

- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática (**Parte I**);

  Conjuntos

Agenda

- **História da Lógica**
  - Primeira Era: Lógica Simbólica;
  - Segunda Era: Lógica Algebraica;
  - Terceira Era: Lógica Matemática;
  - Quarta Era: Lógica Computacional.
- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática

Curiosidade

Curiosidade

A palavra *trivial* se refere à palavra *trivium* que por sua vez se refere ao currículo fundamental:

Curiosidade

A palavra *trivial* se refere à palavra *trivium* que por sua vez se refere ao currículo fundamental:

- Gramática
- Retórica
- **Lógica**

Curiosidade

A palavra *trivial* se refere à palavra *trivium* que por sua vez se refere ao currículo fundamental:

- Gramática
- Retórica
- **Lógica**

Para dominar outras matérias, como a **aritimética**, precisa-se primeiro dominar as matérias acima.

O que é lógica?

O que é lógica?

Várias definições:

- A habilidade de determinar argumentos **corretos sistematicamente**;
- Lógica é o **estudo** das inferências (raciocínios) válidas;
- Uma **sequência de argumentos** que podem ser verificados;
- **Raciocínio** ao contrário de intuição;
- A **dedução de afirmações** a partir de um conjunto de afirmações.

O que é lógica?

Várias definições:

- A habilidade de determinar argumentos **corretos sistematicamente**;
- Lógica é o **estudo** das inferências (raciocínios) válidas;
- Uma **sequência de argumentos** que podem ser verificados;
- **Raciocínio** ao contrário de intuição;
- A **dedução de afirmações** a partir de um conjunto de afirmações.

Inicialmente usada pelos Sofistas em debates formais para saber quem ganhou um argumento sem a menor dúvida.

Retórica versus **Lógica**

Agenda

- História da Lógica
  - **Primeira Era: Lógica Simbólica;**
  - Segunda Era: Lógica Algébrica;
  - Terceira Era: Lógica Matemática;
  - Quarta Era: Lógica Computacional.
- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Uso da linguagem natural (Grego, Português, Inglês, etc)

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Uso da linguagem natural (Grego, Português, Inglês, etc)

Todos os homens são mortais.

Socrates é um homen.

Portanto Socrates é mortal.

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Uso da linguagem natural (Grego, Português, Inglês, etc)

Todos os homens são mortais.

Socrates é um homen.

Portanto Socrates é mortal.

Problema: Linguagens naturais são ambíguas!

Fernando viu Maria usando óculos escuros.

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Uso da linguagem natural (Grego, Português, Inglês, etc)

Todos os homens são mortais.

Socrates é um homen.

Portanto Socrates é mortal.

Problema: Linguagens naturais são ambíguas!

Fernando viu Maria usando óculos escuros.

Paradoxo: Esta sentença é falsa.

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Descoberta de Provas Matemáticas – Método Axiomático

Primeira Era da Lógica: Lógica Simbólica (500 aC – Século XIX)

Descoberta de Provas Matemáticas – Método Axiomático

Euclides na sua obra Elementos descreve como deduzir teoremas sobre a geometria a partir de axiomas.

Estes axiomas são basicamente os mesmo usados até agora: **Geometria Euclidiana**.

Agenda

- História da Lógica
  - Primeira Era: Lógica Simbólica;
  - **Segunda Era: Lógica Algebraica;**
  - Terceira Era: Lógica Matemática;
  - Quarta Era: Lógica Computacional.
- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

George Boole (1847) tentou formalizar argumentos lógicos usando conceitos vindos da algebra:

$a * (b + c) = a * b + a * c$

$a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c$

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

George Boole (1847) tentou formalizar argumentos lógicos usando conceitos vindos da algebra:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \qquad\qquad a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c$$

Boole formalizou várias regras de inferência usando somente simbolos matemáticos assim como feito na algebra.

Origem da Lógica Booleana: Usada na Eng. Eletrônica no desenho de circuitos eletrônicos.

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

George Boole (1847) tentou formalizar argumentos lógicos usando conceitos vindos da algebra:

$a * (b + c) = a * b + a * c$ $\qquad$ $a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c$

Boole formalizou várias regras de inferência usando somente simbolos matemáticos assim como feito na algebra.

Origem da Lógica Booleana: Usada na Eng. Eletrônica no desenho de circuitos eletrônicos.

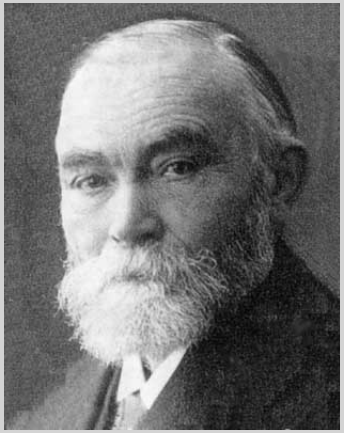
Problema: Boole foi longe demais. Tentou formalizar a divisão algo que não existe em lógica.

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

Outro Problema: Como formalizar para todos, por exemplo?

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

Outro Problema: Como formalizar para todos, por exemplo?

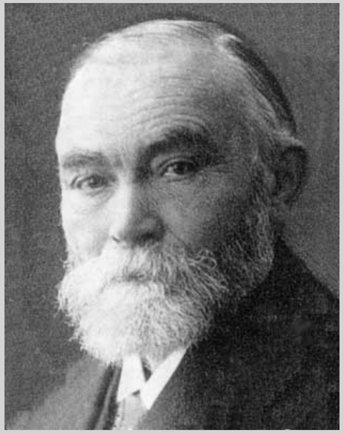


Gottlob Frege (1848 – 1925) foi o primeiro a formular *precisamente* a diferença entre variáveis e constantes. Introduziu simbolos para **quantificadores**:

$$\forall x.\exists y.p(x) \Rightarrow q(x, y)$$

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

Outro Problema: Como formalizar para todos, por exemplo?



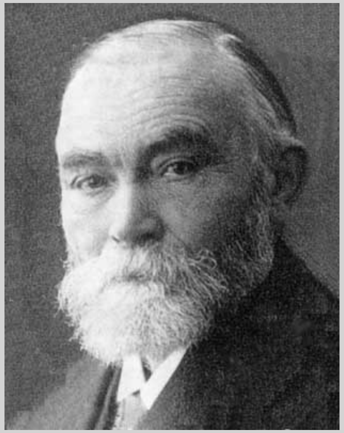
Gottlob Frege (1848 – 1925) foi o primeiro a formular *precisamente* a diferença entre variáveis e constantes. Introduziu simbolos para **quantificadores**:

$$\forall x. \exists y. p(x) \Rightarrow q(x, y)$$

Frege propos utilizar a lógica matemática como uma linguagem da matemática.

Segunda Era da Lógica: Lógica Algébrica (segunda metáde do Século XIX)

Outro Problema: Como formalizar para todos, por exemplo?



Gottlob Frege (1848 – 1925) foi o primeiro a formular *precisamente* a diferença entre variáveis e constantes. Introduziu simbolos para **quantificadores**:

$$\forall x.\exists y.p(x) \Rightarrow q(x, y)$$

Frege propos utilizar a lógica matemática como uma linguagem da matemática.

A lógica simbólica começou a ajudar a resolver problemas fundamentais da matemática.

Agenda

- História da Lógica
  - Primeira Era: Lógica Simbólica;
  - Segunda Era: Lógica Algébrica;
  - **Terceira Era: Lógica Matemática;**
  - Quarta Era: Lógica Computacional.
- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

Com o avanço da matemática, novos paradoxos surgiram – assim como no uso de linguagens naturais.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

Com o avanço da matemática, novos paradoxos surgiram – assim como no uso de linguagens naturais.

Cauchy provou que para todas sequências infinitas de funções contínuas:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

a soma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

também é contínua.

Contudo **Abel** descobriu um contra-exemplo!

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

Com o avanço da matemática, novos paradoxos surgiram – assim como no uso de linguagens naturais.

Cauchy provou que para todas sequências infinitas de funções contínuas:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

a soma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

também é contínua.

Contudo **Abel** descobriu um contra-exemplo!

Lógica pode ajudar a resolver essas contradições.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

David Hilbert, o mais prominente matemático do seu tempo, propos um programa muito ambicioso para formalizar toda a matemática usando lógica. O seu objetivo foi de acabar de vez todas as contradições na matemática.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

David Hilbert, o mais prominente matemático do seu tempo, propos um programa muito ambicioso para formalizar toda a matemática usando lógica. O seu objetivo foi de acabar de vez todas as contradições na matemática.

"Wir müssen wissen, wir werden wissen."

Ele propos 23 problemas os quais ele imaginou ocupariam os matemáticos pelas próximas décadas.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

David Hilbert, o mais prominente matemático do seu tempo, propos um programa muito ambicioso para formalizar toda a matemática usando lógica. O seu objetivo foi de acabar de vez todas as contradições na matemática.

"Wir müssen wissen, wir werden wissen."

Ele propos 23 problemas os quais ele imaginou ocupariam os matemáticos pelas próximas décadas.

Entre eles, achar um sistema formal que seja capaz de dizer se uma afirmação é verdadeira ou não.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1931)

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1931)

Kurt Gödel

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1931)

Kurt Gödel

- Primeiro Teorema de Incompletude: Para todo sistema capaz de modelar a aritmética, não pode ser ao mesmo tempo consistente e completo.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1931)

Kurt Gödel

- Primeiro Teorema de Incompletude: Para todo sistema capaz de modelar a aritmética, não pode ser ao mesmo tempo consistente e completo.
- Segundo Teorema de Incompletude: Para todo sistema capaz de modelar a aritmética, se o sistema inclui uma afirmação sobre sua consistência, então o sistema é inconsistente.

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1936)

Alan Turing

Alonzo Church

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1936)

Alan Turing

Alonzo Church

- Indecibilidade: Eles mostraram que existem problemas para os quais não existe nenhum algoritmo capaz de resolver!

Terceira Era da Lógica: Lógica Matemática (final do Século XIX – segunda metáde do Século XX)

A Morte do Programa do Hilbert (1936)

Alan Turing

Alonzo Church

- Indecibilidade: Eles mostraram que existem problemas para os quais não existe nenhum algoritmo capaz de resolver!

Ao invés da lógica se tornar a base para toda a matemática, como Hilbert sonhou, se tornou um ramo importante dela.

Agenda

- História da Lógica
  - Primeira Era: Lógica Simbólica;
  - Segunda Era: Lógica Algebraica;
  - Terceira Era: Lógica Matemática;
  - **Quarta Era: Lógica Computacional.**
- Revisão de Conceitos Elementares da Matemática

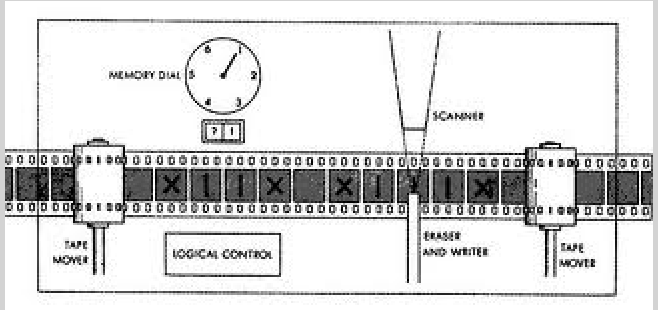
Quarta Era da Lógica: Lógica Computacional

Alan Turing (1912 – 1954): O pai da computação.

Quarta Era da Lógica: Lógica Computacional

Alan Turing (1912 – 1954): O pai da computação.

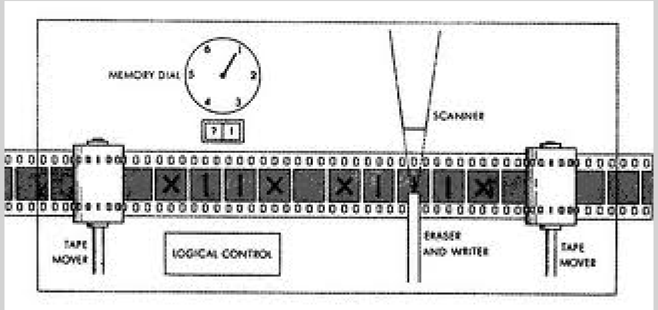
Para provar a existência de problemas indecidíveis, Turing propôs um modelo de uma máquina abstrata capaz de cálcular funções computáveis (Tese de Church-Turing): máquina de Turing.



Quarta Era da Lógica: Lógica Computacional

Alan Turing (1912 – 1954): O pai da computação.

Para provar a existência de problemas indecidíveis, Turing propôs um modelo de uma máquina abstrata capaz de cálcular funções computáveis (Tese de Church-Turing): máquina de Turing.



A influência de Turing é considerável. Ele participou na construção dos primeiros computadores. Ele imaginava que os computadores podem ser tão poderosos capazes de pensar como humanos. (O teste de Turing.) A teoria de complexidade de algoritmos se baseia na noção de máquinas de Turing.

Quarta Era da Lógica: Lógica Computacional

Lógica aparece em todos os lugares da Computação

- Circuitos Booleanos
- Complexidade de algorítmos: NP versus P
- Base de dados: linguagens como SQL
- Especificação e Verificação de Sistemas
- Inteligência Artificial
- Linguagens de Programação
- Segurança

Exercício: Paradoxos

Paradoxo do Barbeiro: Numa pequena cidade do interior vive um barbeiro, muito conhecido dos moradores da cidade, que barbeia todas (e somente aquelas) pessoas moradoras da cidade que não se barbeiam sozinhas. Ora, o barbeiro é um morador da cidade. Coloca-se a questão: quem faz a barba do barbeiro?

Exercício: Paradoxos

Paradoxo do Berry: Proposto em 1906. Existe um número finito de símbolos (letras, sinais de pontuação, etc.) na língua portuguesa. Então, existe um número finito de expressões em nossa língua que contem menos de 200 símbolos, mesmo contando as repetições. Há, portanto, um número finito de inteiros positivos que podem ser denotados por expressões da língua portuguesa que contem menos de 200 símbolos. Agora consideremos a sentença:

"O menor inteiro positivo que não se consegue denotar numa expressão em português com menos de 200 símbolos".

Agenda

- História da Lógica
  - Primeira Era: Lógica Simbólica;
  - Segunda Era: Lógica Algebraica;
  - Terceira Era: Lógica Matemática;
  - Quarta Era: Lógica Computacional.
- **Revisão de Conceitos Elementares da Matemática**

Conjuntos: Definições Básicas

Conjuntos: Definições Básicas

É um a coleção de elementos.

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

É um a coleção de elementos.

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x pertence ao conjunto A é escrita como $x \in A$.

$$a \in \{a, b, c\}, \quad 37 \in \mathbb{N}, \quad \text{azul} \in \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

É um a coleção de elementos.

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x pertence ao conjunto A é escrita como $x \in A$.

$$a \in \{a, b, c\}, \quad 37 \in \mathbb{N}, \quad \text{azul} \in \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x não pertence ao conjunto A é escrita como $x \notin A$.

$$d \notin \{a, b, c\}, \quad -43 \notin \mathbb{N}, \quad \text{rosa} \notin \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

É um a coleção de elementos.

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x pertence ao conjunto A é escrita como $x \in A$.

$$a \in \{a, b, c\}, \quad 37 \in \mathbb{N}, \quad \text{azul} \in \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x não pertence ao conjunto A é escrita como $x \notin A$.

$$d \notin \{a, b, c\}, \quad -43 \notin \mathbb{N}, \quad \text{rosa} \notin \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

Um conjunto pode ser membro de um outro conjunto:

$$\{a, b, c\} \in \{\{a, b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

É um a coleção de elementos.

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x pertence ao conjunto A é escrita como $x \in A$.

$$a \in \{a, b, c\}, \quad 37 \in \mathbb{N}, \quad \text{azul} \in \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

A relação x não pertence ao conjunto A é escrita como $x \notin A$.

$$d \notin \{a, b, c\}, \quad -43 \notin \mathbb{N}, \quad \text{rosa} \notin \{\text{azul, vermelho, laranja}\}$$

Um conjunto pode ser membro de um outro conjunto:

$$\{a, b, c\} \in \{\{a, b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$$

Notação: Indicamos em geral um conjunto com letras maiúsculas, *e.g.*, $A, B, C, \ldots$ e elementos com letras minúsculas, *e.g.*, $a, b, c, \ldots$. A exceção é quando um elemento é um conjunto, neste caso usamos letras maiúsculas.

Conjuntos: Definições Básicas

Existem várias formas de descrever um conjunto:

Conjuntos: Definições Básicas

Existem várias formas de descrever um conjunto:

- Simplesmente escrevendo os seus elementos:

$\{a, b, c\}$ – Quando o conjunto é finito.

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ – Quando o conjunto é infinito e é claro qual a sua lei de formação.

Conjuntos: Definições Básicas

Existem várias formas de descrever um conjunto:

- Simplesmente escrevendo os seus elementos:

$\{a, b, c\}$ – Quando o conjunto é finito.

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ – Quando o conjunto é infinito e é claro qual a sua lei de formação.

- Explicitando sua propriedade:

$\{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$

$\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 10\} = \{11, 12, 13, \ldots\}$

$\{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 3\} = \{-3, -1, 1, 3\}$

Conjuntos: Definições Básicas

Alguns conjuntos especiais:

Conjuntos: Definições Básicas

Alguns conjuntos especiais:

- **Conjunto unitário**: que tem somente um elemento.

$$\{a\} \qquad \{\{1, 2, 3\}\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

Alguns conjuntos especiais:

- **Conjunto unitário**: que tem somente um elemento.

$$\{a\} \qquad \{\{1,2,3\}\}$$

- **Conjunto vazio**: que não possui nenhum elemento. Duas formas de escrever: $\{\}$ ou $\emptyset$.

$$\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$$

$$\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$$

Conjuntos: Definições Básicas

Alguns conjuntos especiais:

- **Conjunto unitário**: que tem somente um elemento.

$$\{a\} \qquad \{\{1,2,3\}\}$$

- **Conjunto vazio**: que não possui nenhum elemento. Duas formas de escrever: $\{\}$ ou $\emptyset$.

$$\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$$

$$\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$$

A cardinalidade de um conjunto, escrito $|A|$, é o número de elementos que ele contém.

Conjuntos: Definições Básicas

- **Relação Subconjunto**: Se A e B são conjuntos, dizemos que A é um subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$ se todo o elemento de A é um elemento de B. Escrevemos $A \subset B$ se existe um elemento de B que não pertence a A.

Conjuntos: Definições Básicas

- **Relação Subconjunto**: Se A e B são conjuntos, dizemos que A é um subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$ se todo o elemento de A é um elemento de B. Escrevemos $A \subset B$ se existe um elemento de B que não pertence a A.

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

- **Relação Subconjunto**: Se A e B são conjuntos, dizemos que A é um subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$ se todo o elemento de A é um elemento de B. Escrevemos $A \subset B$ se existe um elemento de B que não pertence a A.

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$$
$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

- **Conjuntos Iguais**: Dois conjuntos A e B são iguais, escrito $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

$$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}$$
$$\{a, a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}$$

Conjuntos: Definições Básicas

- **Relação Subconjunto**: Se A e B são conjuntos, dizemos que A é um subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$ se todo o elemento de A é um elemento de B. Escrevemos $A \subset B$ se existe um elemento de B que não pertence a A.

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$$
$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

- **Conjuntos Iguais**: Dois conjuntos A e B são iguais, escrito $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

$$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}$$
$$\{a, a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}$$

Perceba que todos os conjutos contém o conjunto vazio. Quer dizer, a afirmação é sempre verdadeira: $\emptyset \subset A$.

Conjuntos: Operações Básicas

- **União**: Dado dois conjuntos A e B a sua união, escrito $A \cup B$, é o conjunto contendo os elementos de A ou B ou ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cup \{a, 1, 2\} = \{a, b, c, 1, 2\}$$

Conjuntos: Operações Básicas

- **União**: Dado dois conjuntos A e B a sua união, escrito $A \cup B$, é o conjunto contendo os elementos de A ou B ou ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cup \{a, 1, 2\} = \{a, b, c, 1, 2\}$$

- **Interseção**: A interseção de dois conjuntos A e B, escrito $A \cap B$, é o conjunto contendo os elementos que pertencem a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \{a, 1, 2\} = \{a\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$$

Conjuntos: Operações Básicas

- **União**: Dado dois conjuntos A e B a sua união, escrito $A \cup B$, é o conjunto contendo os elementos de A ou B ou ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cup \{a, 1, 2\} = \{a, b, c, 1, 2\}$$

- **Interseção**: A interseção de dois conjuntos A e B, escrito $A \cap B$, é o conjunto contendo os elementos que pertencem a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \{a, 1, 2\} = \{a\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$$

Se o conjunto A é uma coleção de conjuntos, *i.e.*, $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, definimos:

$$\bigcup A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcap A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Conjuntos: Operações Básicas

- **Diferença**: A diferença de dois conjuntos A e B, escrito $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto contendo os elementos que pertencem a A mas que não pertencem a B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$\{a, b, c\} \setminus \{a, 1, 2\} = \{b, c\}$$

Conjuntos: Operações Básicas

- **Diferença**: A diferença de dois conjuntos A e B, escrito $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto contendo os elementos que pertencem a A mas que não pertencem a B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$\{a, b, c\} \setminus \{a, 1, 2\} = \{b, c\}$$

- **Produto Cartesiano**: Dado dois conjuntos A e B o seu produto cartesiano, escrito $A \times B$, é o conjunto:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \times \{a, 1\} = \{(a, a), (a, 1), (b, a), (b, 1), (c, a), (c, 1)\}$$

Conjuntos: Operações Básicas

- **Diferença**: A diferença de dois conjuntos A e B, escrito $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto contendo os elementos que pertencem a A mas que não pertencem a B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$\{a, b, c\} \setminus \{a, 1, 2\} = \{b, c\}$$

- **Produto Cartesiano**: Dado dois conjuntos A e B o seu produto cartesiano, escrito $A \times B$, é o conjunto:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \times \{a, 1\} = \{(a, a), (a, 1), (b, a), (b, 1), (c, a), (c, 1)\}$$

- **Conjunto de Partes**: O conjunto de partes de um conjunto A, escrito $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto contendo todos os subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Exercício: Conjuntos

Sejam $A = \{1, 2, 4, 8\}$ e $B = \{1, 2, 9, 0\}$

- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $A \cup B$

Para quaisquer conjuntos A, B, C, classifique em verdadeiro ou falso as afirmações abaixo. Tente provár-las ou fornecer um contra-exemplo.

- $\emptyset \subseteq (A \cap B)$
- $\emptyset \subseteq (A \cup B)$
- $A \in (A \cup B)$
- $A \subseteq (A \cup B)$
- $(A \cup B) \subseteq A$
- $(A \cap B) \subseteq A$
- $(A \cap B) \subseteq (A \cap B)$
- $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$

Seja $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 5\}$. Quantos elementos tem $\mathcal{P}(A)$?