

Complexité - TDs

Nicolas Bourras

September 14, 2020

Contents

0.1	Jeudi 10 Septembre 2020	2
0.1.1	Exercice 1	2
0.1.2	Exercice 2	3

0.1 Jeudi 10 Septembre 2020

Planche de TD 1.

0.1.1 Exercice 1

Pour savoir si $g(n) \in O(f(n))$, il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , la fonction est majorée par $O(Cf(n))$, avec C une constante :

$$\exists C \in R, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0, g(n) \leq Cf(n)$$

Question 1

- $g(n) = 6n + 12 \in O(n)$

On trouve C et n_0 , et on vérifie que $g(n) \leq Cf(n)$. Dans ce cas, on peut prendre $C = 7$ et $n_0 = 12$.

Puis-ce que $\forall n \geq 12, g(n) < 7n$, alors $g(n) \in O(n)$

- $g(n) = 3n \in O(n^2)$

$$C = 4, n_0 = 10$$

- $g(n) = 10^{1000000}n \in O(n)$

$$C = 10^{1000000} + 1, n_0 = 1$$

- $g(n) = 5n^2 + 10n \in O(n^2)$

$$C = 6, n_0 = 100$$

- $g(n) = n^3 + 1000n^2 + n + 8 \notin O(n^2)$

Par l'absurde:

$$\forall C \in R, \forall n_0 \in N, \exists n \geq n_0, g(n) \geq Cf(n)$$

$$\iff \forall C \in R, \forall n_0 \in N, \exists n \geq n_0, n^3 + 1000n^2 + n + 8 \geq Cn^2$$

$$\iff \forall C \in R, \forall n_0 \in N, \exists n \geq n_0, n + 1000 + \frac{1}{n} + \frac{8}{n^2} \geq C$$

$$\forall C \in N, \text{ il existe } n > C - 1000 - \frac{1}{n} - \frac{8}{n^2}$$

Question 2

$g(n) \in \theta(f(n))$ si :

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, C_1 f(n) \leq g(n) \leq C_2 f(n)$$

- $g(n) = 5n^2 + 10n \in \theta(n^2)$
 $5n^2 \leq 5n^2 + 10n \leq 6n^2$ avec $n_0 = 1000$
- $g(n) = n^2 + 1000000n \in \theta(n^2)$
 $n^2 \leq n^2 + 1000000n \leq 2n^2$ avec $n_0 = 10^{100}$
- $g(n) = 4n^2 + n \log(n) \in \theta(n^2)$
 $4n^2 \leq 4n^2 + n \log(n) \leq 5n^2$ avec $n_0 = 1000$
- $g(n) = 3n + 8 \notin \theta(n^2)$

Il suffit de montrer que $\forall C_1 \in$

$$\mathbb{R}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, C_1 n^2 > 3n + 8$$

$$\iff C_1 n^2 > 3n + 8 \iff C_1 > \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2} \leq 11, \text{ donc avec } C_1 > 11 \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N}^*, C_1 n^2 > 3n + 8$$

0.1.2 Exercice 2

Question 1

puissance(x, p):

```
res = 1
while p > 0:
    res = res * x
    p = p - 1
return res
```

Question 2

Rappel : $t_x = \text{taille}(x) = \lfloor \log(x) \rfloor + 1$

On a donc $x = 2^{t_x} - 1$ et $p = 2^{t_p} - 1$.

La ligne **res = res * x** est au pire $\leq t_x * p$. La ligne **p = p - 1** est au pire t_p opérations.

Ces deux lignes sont donc égales (au pire) à $P(tx * p + tp) \iff 2^{tp}(tx * 2^{tp} + tp) \simeq 2^{2tp} tx + tp * 2^{tp} \in \theta(2^{2tp} tx)$.

Note : on aurait du ajouter le test de la boucle.