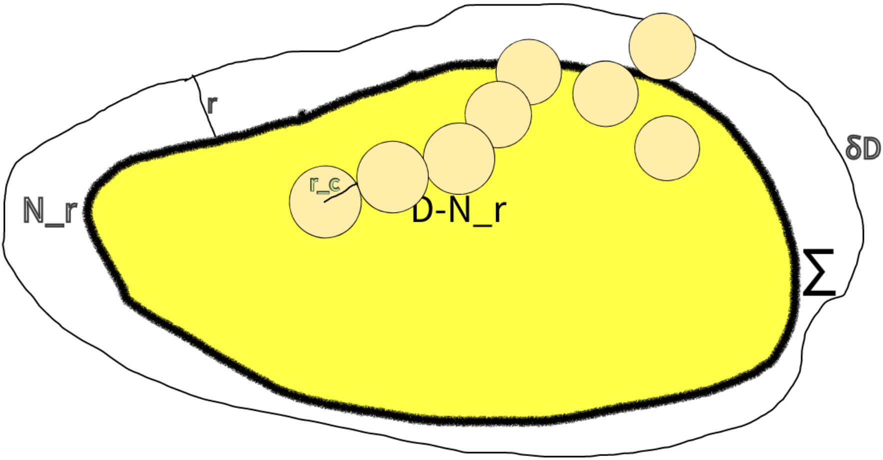
Напоминание из предыдущей части

Постановка задачи



Идеалистичный критерий

Критерий

$H_d(\mathcal{U} \cup N_r, N_r) \neq 0 \equiv D_r = D - N_r \subset \mathcal{U}$.

Как доказывать:

Примем на веру утверждение из текста, что $H_d(D_r \cup \Sigma, \Sigma) = \mathbb{Z}$. В одну сторону утверждение отсюда следует.

Выделим области $Err = D_r - U$ и $\overline{N_r} = \mathbb{R}^n - D_r$. Применим двойственность Александера: $H_d(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r}) = H^0(D_r, Err) = 0$. Но по вырезанию гомологии слева равны гомологиям исходной пары.

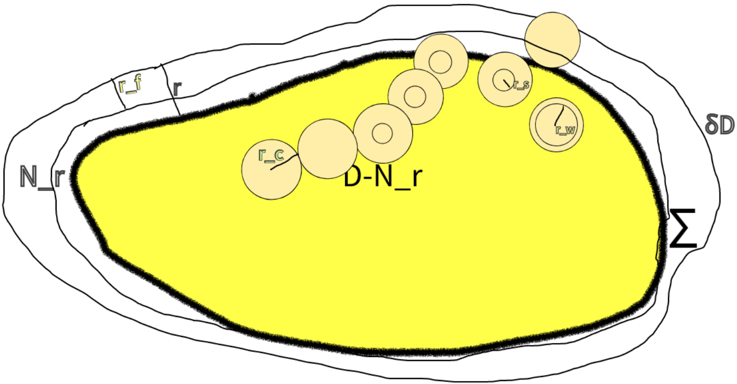
Напоминание

- Мы постулировали существование радиуса r_s шаров покрытия, для которого комплекс Рипса по центрам шаров вкладывается в комплекс Чеха. Пока не пояснив, зачем это нужно.
- Мы постулировали умение узлов детектировать другие в радиусе r_s и границу в радиусе r_f.
- Мы построили комплексы Рипса R_s на всех узлах и F_s на узлах, лежащих не дальше r_f от границы всей области.
- Проверили, что ранее определённый критерий для $H_d(R_s, F_s)$ не работает, но заметили, что препятствие исчезает, если увеличивать радиус комплекса.
- Сформулировали достаточное условие, которое и доказывается при должных технических условиях в статье. А именно нетривиальность отображения $H_d(R_s, F_s) \xrightarrow{i_\star} H_d(R_w, F_w)$, где r_w — ещё один радиус детектирования других узлов.

Все введённые константы на одном рисунке

Соотношения

$r_w > r_c$, $r_c > r_s$ (не пояснено), $r > r_f$. Для приложений авторы строят оптимальные точные оценки.



Новая часть

Подробнее про r_s

Теорема 1

Пусть X — множество узлов. C_ϵ — комплекс Чеха покрытия шарами радиуса ϵ с центрами в X. Тогда $R_\varepsilon \subset C_\epsilon \subset R_{2\epsilon}$, где $\epsilon \geq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}\varepsilon$.

Правое включение очевидно.

Левое эквивалентно следующему:

Пусть X — множество точек $\mathbb{R}^d$ диаметра не больше ε. Тогда шары радиуса ϵ с центрами в этих точках имеют общую точку.

Доказательство

Теорема об опорной гиперплоскости

Пусть A и B — два дизьюнктных замкнутых выпуклых множества. Тогда существует вектор v и константа c такие, что для всех $a \in A$ $(v, a) > c$, а для всех $b \in B$ $(v, b) > c$. Если B — одна точка, второе неравенство можно заменить на равенство.

Доказываем для множеств X мощности $d' + 1$, где $d' \leq d$. Рассмотрим функцию $f(y) = max(d(x_i, y))$. Она имеет глобальный минимум y_0 и соответствующие ему критические точки с $d(x, y_0) = f(y_0)$.

Пусть y_0 не лежит в выпуклой оболочке критических точек. Тогда выполнены условия теоремы об опорной гиперплоскости. Вычитая второе условие из первого, получаем $(v, x - y_0) > 0$.

Доказательство

Проведём выкладки для $\lambda > 0$.

$(x - y_0, x - y_0) = (x - (y_0 + \lambda v) + \lambda v, x - (y_0 + \lambda v) + \lambda v) =$
$(x - (y_0 + \lambda v), x - (y_0 + \lambda v)) + 2(x - (y_0 + \lambda v), \lambda v) + (\lambda v, \lambda v)$.

$2(x - (y_0 + \lambda v), \lambda v) = 2\lambda(x - y_0, v) - 2\lambda^2(v, v)$;
$(x - y_0, x - y_0) = (x - (y_0 + \lambda v), x - (y_0 + \lambda v)) + 2\lambda(x - y_0, v) - (\lambda v, \lambda v)$

Для достаточно маленьких лямбд получили, что $d(x, y_0 + \lambda v) < d(x, y_0)$. Противоречие с минимальностью. Следовательно, y_0 лежит в выпуклой оболочке критических точек.

Доказательство

Запишем эту выпуклую комбинацию с a_0 — наибольшим коэффициентом: $y_0 = a_0 x_0 + \ldots + a_{d''} x_{d''}$.

Сдвинем на y_0: $0 = a_0 x'_0 + \ldots + a_{d''} x'_{d''}$

Выразим x'_0, скалярно на него домножим:
$-f(y_0)^2 = -(x'_0, x'_0) = \sum_{i=1}^{d''} \frac{a_i}{a_0}(x_i, x_0)$

Для какого-то i справа верно, что $\frac{a_i}{a_0}(x_i, x_0)) \leq -\frac{(x'_0, x'_0)}{d''}$, что можно ослабить как $\frac{f(y_0)^2}{d} \leq -(x'_0, x'_i)$. При этом $f(y_0)^2 = (x'_0, x'_0) = (x'_i, x'_i)$.

Суммируем: $f(y_0)^2(1 + \frac{2}{d} + 1) \leq (x'_0, x'_0) - 2(x'_0, x'_i) + (x'_i, x'_i) = (x'_0 - x'_i, x'_0 - x'_i) = (x_0 - x_i, x_0 - x_i) \leq \varepsilon^2$.
Получаем $f(y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{2d}{d+1}}$. Значит, шары радиуса правой части с центрами в точках набора встретятся в y_0.

Доказательство

Теорема Хелли

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — конечный набор выпуклых подмножеств R_n таких, что пересечение любых $d+1$ из них непусто. Тогда пересечение всех непусто.

Применение теоремы к шарам покрытия доказывает теорему 1.

Лемма

Лемма

Если попарные расстояния набора точек $X = \{x_0, \dots, x_k\}$ не превосходят δ, расстояние от любой точки их выпуклой оболочки до какой-то из них не превосходит $\epsilon = \delta\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.

Запишем уравнение для p как для точки выпуклой оболочки, сдвинем его на p, скалярно перемножим с общей точкой шаров из коплекса Чеха на X радиуса ϵ.

Среди слагаемых справа есть хотя бы одно неположительное, т.е. $(x'_i, y') \leq 0$. Тогда $\epsilon \geq (x_i - y, x_i - y) = (x'_i - y', x'_i - y') = (x'_i, x'_i) - 2(x'_i, y') + (y', y') \geq (x'_i, x'_i) = (x - p, x - p)$.

Если $k < d$, d можно заменить на k, работая в подпространстве.

Следствие

Утверждение

Если $r_c \geq r_s\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ и некоторое множество узлов образует симплекс в R_s, геометрическая реализация этого симплекса (выпуклая оболочка его вершин) целиком лежит в $\mathcal{U}$.

Следовательно, признак верен для случая, когда $D - N_r$ целиком содержится в d-симплексе R_s. Этот тривиальный случай обосновывает требование $r_c > r_s$ и даёт точную связь констант.

Ещё одно геометрическое утверждение

Утверждение

Либо геометрическая реализация любого симплекса F_s лежит в $\overline{N_r}$, либо $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{U}$.

Параллельно с доказательством дадим выражение для r.

Теорема Каратеодори

Пусть $P \subset \mathbb{R}^d$ — множество, а $x \in Conv(P)$ — точка в его выпуклой оболочке. Тогда x можно записать как выпуклую комбинацию не более чем $d+1$ точки.

Доказательство

По теореме Каратеодори достаточно проверить d-мерный остов F_s.

Для любого геометрического симплекса на узлах размерности не больше, чем $d-1$, верно, что любая его точка отстоит от какой-то из его вершин не более чем на $r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$. Вершины лежат на расстоянии не больше r_f от границы, следовательно, мы получили по неравенству треугольника наименьшее возможное значение $r = r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}} + r_f$.

Рассуждение для d-мерного остова можно провести так же, утолщив границу, но этого можно не делать. Пусть σ — d-симплекс. Граница этого симплекса лежит в $d-1$-мерном остове, следовательно, в $\overline{N_r}$. Следовательно, или он полностью содержит D_r (см. опять первый рисунок статьи), либо он весь в $\overline{N_r}$.

Доказательство теоремы

Основной признак

Из нетривиальности отображения $H_d(R_s, F_s) \xrightarrow{i_\star} H_d(R_w, F_w)$ следует, что $D_r \in \mathcal{U}$.

Из точной последовательности пары и предыдущего утверждения возникает следующая коммутативная диаграмма (игнорируем случай, учитываемый следствием теоремы 1):

$$\begin{tikzcd}
H_d(R_s, F_s) \arrow[r, "\delta_\star"] \arrow[d, "||"] & H_{d-1}(F_s) \arrow[d, "||"] \\
H_d(\mathbb{R}^d, \overline{N_r}) \arrow[r, "\delta_\star"] & H_{d-1}(\overline{N_r})
\end{tikzcd}$$

Пусть $[\alpha] \in H_d(R_s, F_s)$ — эдемент с нетривиальным образом под действием $i_\star$. Рассмотрим $|\delta_\star([\alpha])| = |[\partial\alpha]|$.

Первый случай: $|\delta_\star([\alpha])| \neq 0$

Пусть Err непусто. Поскольку $|R_s| \in \mathcal{U}$, геометрическая реализация (R_s, F_s) лежит в $(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r})$. Мы уже знаем, что $H_d(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r})$, следовательно, $|\delta_\star([\alpha])| = 0$. Противоречие.

Второй случай: $|\delta_\star([\alpha])| = 0$. Шаг 1

Докажем, что геометрический цикл $|\delta_\star(\alpha)|$ лежит в некоторой узкой полосе, окаймляющей Σ.

По конструкции относительных гомологий верно, что $\delta_\star(\alpha) \subset F_s$.

Зададим функцию знакового расстояния $h(y)$, положительную снаружи от Σ. На симплексе $\sigma \subset \partial\alpha$ она положительна. При этом σ — граница симплекса τ из α, то есть из $Rips_{r_s} - \mathcal{F}_{r_s}$. Для другой вершины τ y $h(y) < 0$.

Пусть p — внутренняя точка τ. По неравенству треугольника $h(p) \leq h(y) + d(p,y) < 0 + r_s = r_s$. p отстоит от какой-то вершины $x \in \tau$ на $r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$, имеем $h(p) \geq h(x) - d(p,x) \geq 0 - r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$. Тем самым мы запихнули любой симплекс границы относительного цикла в полосу S около Σ.

Утверждение о полосе и дополнительные условия

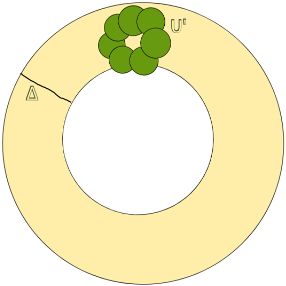
Утверждение

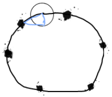
Пусть S гомеоморфна $d-1$-многообразию, умноженному на отрезок, и накрывается отрезками длины не больше Δ. Пусть X — набор точек, формирующих цикл $[\gamma] \in H_{d-1}(R_\epsilon(X))$ и γ целиком лежит в S.

Тогда $[y] \in H_{d-1}(S) = 0$ влечёт $[y] \in H_{d-1}(Rips_\varepsilon(X))$, где $\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon^2 \frac{d-1}{d}}$.

Доказательство

Рассмотрим покрытие U шарами радиуса $\frac{\Delta}{2}$ с центрами во всех точках кривой γ. Оно лежит в покрытии U' шарами радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами в точках X. См. рисунок. Выбор эпсилонов позволяет применить теорему 1, то есть γ гомологически нетривиален в объединении покрытия U'.





Существует (по двойственности Александера) точка $p \in S - U'$, вокруг которой обходит γ. Но тогда отрезок через p, соединяющий границы, пересекает γ дважды, а значит, p лежит в одном из шаров U. Противоречие.

Условие на S

S — полоса толщины $\Delta = r_s(1+\sqrt{\frac{d-1}{2d}})$. Нам нужно подвести её под условие утверждения. Для этого авторы требуют гладкость S, разделяют S на два независимых многообразия, внутреннее и внешнее, и ограничивают снизу радиусы инъективности Σ в этих двух многообразиях. В итоге S распадается в объединение окрестностей $\mathbb{R}^{d-1} \times I$.

По предположению случая $\partial\alpha$ гомологичен нулю в S. Значит, при увеличении радиуса до $r_m = \sqrt{\Delta^2 + r_s(1+\sqrt{\frac{d-1}{2d}})} = \sqrt{\frac{7d-5+2\sqrt{2d(d-1)}}{2d}}$ $[\partial\alpha] \in H_{d-1}(F_m)$ зануляется.

Завершение доказательства и точное условие на $r_w > r_s$

Рассмотрим коммутативную диаграмму, составленную из точных последовательностей пар для Рипсов разных радиусов (В статье).

Оставшийся диаграммный поиск покажу тоже на статье. В нём возникает дополнительное требование на связь r_m и r_w, которое нужно, чтобы пропустить вложение через комплекс Чеха. И существенное утверждение, что $H_d(P \in \mathbb{R}^d) = 0$.