Теорема Малера о компактности

Определитель решётки

Решётка

Множество Λ линейных комбинаций набора из n линейно-независимых векторов b (базиса решётки) $\mathbb{R}^n$ с целыми коэффициентами.

Целочисленная решётка Y

Базис – базис e единичных векторов в $\mathbb{R}^n$.

Определитель решётки

Пусть Λ — решётка с базисом b. $d(\Lambda) = |det(B)|$, где столбцы B — векторы b в базисе e. Таким образом, $\Lambda = BY$.

Определелитель решётки: корректность

Определитель решётки не зависит от выбора базиса

Пусть a и b — базисы Λ. Тогда $\Lambda = AY = BY$, $Y = A^{-1}BY$, $A^{-1}B$ — матрица перехода из базиса A в базис B. Она обратима и целочисленна, так как отображает векторы с целыми координатами в e в векторы с целыми координатами в e, значит, её определитель обратим и цел, значит, $\left|det(A^{-1}B)\right| = 1$.

Подготовительные утверждения

Утверждение 1

Пусть Λ — решётка. Тогда существует набор векторов $a^1, \ldots, a^n$ в Λ таких, что a^1 — вектор наименьшей ненулевой длины, а начиная с $i = 2$ $a^i \in Dist_i \cap K_i$, где $Dist_i$ — множество векторов решётки на минимальном ненулевом расстоянии от $L_i =< a^1, \ldots, a^{i-1} >$, а K_i — множество векторов, проекции которых на L_i попадают в множество P_i линейных комбинаций $a^1, \ldots, a^{i-1}$ с коэффициентами $\leq \frac{1}{2}$ по модулю.

Если $n = 1$, утверждение верно. Пусть оно верно для $n = i - 1$. Множество P_i содержит по крайней мере нулевой вектор, а множество $Dist_i$ не пусто. Выберем произвольный вектор из $Dist_i$ и вычтем из него вектор решётки, ближайший к его проекции на L_i. Получим вектор, проецирующийся в вектор, достаточно близко от нулевого и лежащий на том же расстоянии от L_i, его можно взять в качестве a^i и провести индуктивный переход.

Подготовительные утверждения

Утверждение 2

$a = a^1, \ldots, a^n$ — базис Λ.

a — базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x' \in \Lambda$ и $x' = \sum_i \alpha_i a^i$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n$. Сдвинем этот вектор по решётке в вектор x' так, чтобы все коэффициенты стали меньше единицы. Тогда $dist(x, L_n) = \alpha_i \cdot dist(a^n, L_n) = 0$ по конструкции a, то есть $\alpha_n = 0$. Аналогично $\alpha_i = 0$ для любого i. Следовательно, a — базис решётки.

Подготовительные утверждения

Лемма

$\frac{\prod_{i=1}^{n} \left|a^i\right|}{d(\Lambda)} \le C$, где C зависит только от n.

Подготовительные утверждения

Лемма

$\frac{\prod_{i=1}^{n} \left|a^i\right|}{d(\Lambda)} \leq C$, где C зависит только от n.

Пусть $d_1 = \left|a^1\right|$, $d_i = dist(a^i, L_i)$. Тогда $d(\Lambda) = \prod_i d_i$ как объём параллелотопа, натянутого на a.

Подготовительные утверждения

Лемма

$\frac{\prod_{i=1}^{n} \left|a^i\right|}{d(\Lambda)} \leq C$, где C зависит только от n.

Пусть $d_1 = \left|a^1\right|$, $d_i = dist(a^i, L_i)$. Тогда $d(\Lambda) = \prod_i d_i$ как объём параллелотопа, натянутого на a.

По построению a $\left|a^i\right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \left|a^k\right| + d_i$ (1).

Подготовительные утверждения

Лемма

$\frac{\prod_{i=1}^{n}\left|a^i\right|}{d(\Lambda)} \leq C$, где C зависит только от n.

Пусть $d_1 = \left|a^1\right|$, $d_i = dist(a^i, L_i)$. Тогда $d(\Lambda) = \prod_i d_i$ как объём параллелотопа, натянутого на a.

По построению a $\left|a^i\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}\left|a^k\right| + d_i$ (1).

Для любого вектора $p \in P_{i+1}$ $dist(p, L_i) \leq \frac{d_i}{2}$. Тогда $dist(a^{i+1}, L_i) \leq \frac{d_i}{2} + d_{i+1}$, но $dist(a^{i+1}, L_i) \geq d_i$. Отсюда $2d_{i+1} \geq d_i$ (2).

Подготовительные утверждения

Лемма

$\frac{\prod_{i=1}^{n} |a^i|}{d(\Lambda)} \leq C$, где C зависит только от n.

Пусть $d_1 = |a^1|$, $d_i = dist(a^i, L_i)$. Тогда $d(\Lambda) = \prod_i d_i$ как объём параллелотопа, натянутого на a.

По построению a $|a^i| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}|a^k| + d_i$ (1).

Для любого вектора $p \in P_{i+1}$ $dist(p, L_i) \leq \frac{d_i}{2}$. Тогда $dist(a^{i+1}, L_i) \leq \frac{d_i}{2} + d_{i+1}$, но $dist(a^{i+1}, L_i) \geq d_i$. Отсюда $2d_{i+1} \geq d_i$ (2).

Утверждение 3

$|a^i| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}|a^k| + d_i \leq \xi_i d_i$, где $\xi_1 = 1$, $\xi_i = 3\xi_{i-1} - 1$.

Это верно для $i = 1$. Пусть теперь это верно для всех индексов до i включительно. Тогда
$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i}|a^k| + d_{i+1} \leq_{(1)} \frac{3}{2}(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}|a^k| + d_i) + d_{i+1} - d_i \leq$
$(\frac{3}{2}\xi_1 - 1)d_i + d_{i+1} \leq_{(2)} (3\xi_i - 1)d_{i+1} = \xi_{i+1}d_{i+1}$.

Множества решёток. Определения

Ограниченное множество решёток

Множество $\mathcal{L}$ решёток называется ограниченным, если существует радиус $\rho > 0$ такой, что внутренность шара радиуса ρ пересекается с каждой $\Lambda \in \mathcal{L}$ только по нулевому вектору, и число $\sigma > 0$ такое, что $\forall \Lambda \in \mathcal{L}\ d(\Lambda) \leq \sigma$.

Сходящаяся последовательность

Пусть $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots\}$ — последовательность решёток. Она сходится к решётке Λ, если для любого базиса a с матрицей столбцов A существует набор базисов a_i Λ_i, матрицы которых сходятся к A по норме максимума модуля.

Сходимости в каком-то базисе достаточно

$A_r \to A \Rightarrow A_r U \to AU$, где U — матрица замены базиса.

Теорема Малера о компактности

Ограниченная (с константами ρ, σ) последовательность решёток имеет сходящуюся подпоследовательность

Применим лемму для каждой решётки Λ_r в последовательности: $\rho^n \le \prod_{i=1}^{n} \left|a_r^i\right| \le Cd(\Lambda) \le \sigma$, где a_r — базис Λ_r. В частности, $\left|a_r^i\right| \le C\sigma\rho^{-n+1}$ для любого вектора a_r^i базиса a_r.

Следовательно, последовательности векторов a_r^i для всех i ограничены и имеют сходящиеся (по максимуму модуля координат) подпоследовательности, можно выбрать набор индексов r_k такой, что подпоследовательность будет сходиться для всех i. Тогда $\{A_{r_k}\}$ сходится.

Следствие. Критерий компактности Малера

Пространство унимодулярных решёток

X_n — пространство решёток с определителем 1.
$X_n \cong SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$

Критерий компактности

Множество решёток $\{\Lambda_r \in X_n\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности тогда и только тогда, когда есть последовательность векторов $\{v_r\}$ этих решёток такая, что $|v_r| \to 0$.

В качестве примера, в котором теорема встречается в таком виде, лекция Линденштраусса ссылкой