1 Опорный конспект доклада

Общая постановка задачи — есть покрытие $\mathcal{U}$ некоторого топологического подмногообразия с краем $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^n$ с шарами радиуса r_c с центрами в точках множества X. Хотим достаточное условие того, что связное множество $\mathcal{D}_r = \mathcal{D} - N_r$, где $N_r = \{x \in \mathcal{D} : d(x, \delta D) \leqslant r\}$ и r такое, что $\mathcal{D}_r$ непусто, лежит в $\mathcal{U}$.

Мы хотим обойтись минимальными техническими возможностями узлов. Предполагается, что они могут посылать какие-то сигналы, но по ним невычислимы точные расстояния и они не знают карту покрытия. Естественные на практике требования.

Введём также $\Sigma = \{x \in \mathcal{D} : \ d(x, \delta D) = r\}$ — внутреннюю границу N_r.

1.1 Первая петля

Заметим, что в описанных условиях $\mathcal{D}$ — гладкое ориентированное многообразие с краем.

Утверждение 1.1. *Гомология пары $H_d(\mathcal{U} \cup N_r, N_r)$ нетривиальна тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} - N_r \subset \mathcal{U}$.*

Доказательство. По аксиоме вырезания $H_d(\mathcal{D}, N_r) = H_d(\mathcal{D}_r \cup \Sigma, \Sigma)$ По двойственности Пуанкаре-Лефшеца для многообразий с краем $H_d(\mathcal{D}_r \cup \Sigma, \Sigma) = H^0(\mathcal{D}_r \cup \Sigma) = \mathbb{Z}$. Последнее следует из связности $\mathcal{D}_r$.

Пусть $\mathcal{D} - N_r \subset \mathcal{U}$. Тогда $H_d(\mathcal{U} \cup N_r, N_r)$ содержит порождающий цикл $H_d(\mathcal{D}, N_r)$, следовательно, нетривиальна.

Рассмотрим расширенную приграничную область $\overline{N_r} = \mathbb{R}^d - (\mathcal{D} - N_r)$. Пусть $Err = (\mathcal{D} - N_r) - \mathcal{U}$ По вырезанию $H_d(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r}) = H_d(\mathcal{U} \cup N_r, N_r)$.

По двойственности Александера $H_d(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r}) = H^0(\mathcal{D}_r, (\mathcal{D} - N_r) - \mathcal{U}) = 0$. □

Это могло бы быть хорошим критерием, если бы нам были доступны нужные гомологии напрямую, это неверно. Мы хотим к нему приблизиться.

1.2 Вторая петля

Мы везде рассматриваем гомологии относительно края. Вычислимый инвариант, который хочется построить, тоже должен будет учитывать край.

Вносим в параметры узлов умение детектировать наличие границы в радиусе r_f. При r достаточно превышающем r_f гомологии $H_d(Cech(\mathcal{D}), Cech(N_r))$ комплекса и подкомплекса Чеха, построенного по всем узлам и узлам близко к границе соответственно, будут равны искомым (теорема о нерве). Но для вычисления комплекса Чеха нужны точные данные о попарных расстояниях, которых нет.

1.3 Третья петля

Данных хватает, чтобы построить (абстрактный) комплекс Вьеториса-Рипса с радиусом r_c. Как он связан с топологией пространства, непонятно совершенно. Здесь рисунок с октаэдром и точками на окружности, первый из двух в статье. Зато можно сказать, что узлы посылают свои идентификаторы и в некотором радиусе $r_s < r_c$ другие узлы их видят. И строить комплекс Рипса радиуса r_s. r_s можно задать такой, чтобы $Rips_{r_s} \subset Cech_{r_c} \subset Rips_{r_c}$. Это теорема 2.5 статьи. Тонкость, что в коплексе Чеха r_c — диаметр.

Далее разбор теоремы 2.5, схема:

1. Правое включение по определению.

2. Левое переформулируется как наличие общей точки у шаров в нужном комплексе Рипса.

3. Для $d+1$ и меньших наборов см. выкладки.

4. Применяем теорему Хелли.

Выкладки (предположение, что точки на попарном расстоянии не выше ε):

Доказываем для множества $d'+1$ точек, где $d' < d$.

Рассмотрим $f(y) = max(d(x_0, y))$, у этой функции есть глобальный минимум y_0 и соответствующие ему критические точки $\{x_0, \ldots, x_{d''}\}$. Предположим, что есть вектор v, разделяющий выпуклую оболочку критических точек от y_0 (то есть для всех критических точек $(x_i - y_0, v) > 0$). Тогда для любой критической точки x $(x - y_0, x - y_0) = (x - (y_0 + \lambda v) + \lambda v, x - (y_0 + \lambda v) + \lambda v) = (x - (y_0 + \lambda v), x - (y_0 + \lambda v)) + 2(x - (y_0 + \lambda v), \lambda v) + (\lambda v, \lambda v)$.

$2(x - (y_0 + \lambda v), \lambda v) = 2\lambda(x - y_0, v) - 2\lambda^2(v, v)$; $(x - y_0, x - y_0) = (x - (y_0 + \lambda v), x - (y_0 + \lambda v)) + 2\lambda(x - y_0, v) - (\lambda v, \lambda v)$. Для достаточно маленьких лямбд получаем, что $d(x, y_0 + \lambda v) < d(x, y_0)$, что противоречит минимальности. Следовательно, y_0 лежит в выпуклой оболочке критических точек f.

Значит, существует выпуклая комбинация $y_0 = a_0 x_0 + \ldots + a_{d''} x_{d''}$, без ограничения общности a_0 — наибольший коэффициент. Сдвинули на y_0: $0 = a_0 x'_0 + \ldots + a_{d''} x'_{d''}$, выразили x'_0 через вот это всё, скалярно домножили на x'_0 с обеих сторон. Получили $-f(y_0)^2 = -(x'_0, x'_0) = \sum_{i=1}^{d''} \frac{a_i}{a_0}(x_i, x_0))$.

Для какого-то i справа верно, что $\frac{a_i}{a_0}(x_i, x_0)) \leqslant -\frac{(x'_0, x'_0)}{d''}$, что можно ослабить как $\frac{f(y_0)^2}{d} \leqslant -(x'_0, x'_i)$. При этом $f(y_0)^2 = (x'_0, x'_0) = (x'_i, x'_i)$.

Суммируем: $f(y_0)^2(1 + \frac{2}{d} + 1) \leqslant (x'_0, x'_0) - 2(x'_0, x'_i) + (x'_i, x'_i) = (x'_0 - x'_i, x'_0 - x'_i) = (x_0 - x_i, x_0 - x_i) \leqslant \varepsilon^2$.
Получаем $f(y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{2d}{d+1}}$. Значит, шары радиуса правой части с центрами в точках набора встретятся в y_0.

Получили ограничение (оптимальное — достигается уже нарисованным примером) на r_s. Допишем условие на сенсорную сеть: $r_c \geqslant r_s\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.

Некоторый набор следствий или сходных утверждений:

Утверждение 1.2. *Если попарные расстояния набора точек $X = \{x_0, \dots, x_k\}$ не превосходят δ, расстояние от любой точки их выпуклой оболочки до какой-то из них не превосходит $\epsilon = \delta\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.*

Доказательство. Запишем уравнение для p как для точки выпуклой оболочки, сдвинем его на p, скалярно перемножим с общей точкой шаров из коплекса Чеха на X радиуса ϵ.

Среди слагаемых справа есть хотя бы одно неположительное, т.е. $(x'_i, y') \leqslant 0$. Тогда $\epsilon \geqslant (x_i - y, x_i - y) = (x'_i - y', x'_i - y') = (x'_i, x'_i) - 2(x'_i, y') + (y', y') \geqslant (x'_i, x'_i) = (x - p, x - p)$. □

В этой теореме можно взять $k = d$, потому что рассуждение помещается в k-мерное подпространство.

Следствие 1.3. *При имеющейся связи на r_s и r_c геометрическая реализация любого симплекса R_s на своих вершинах лежит в U.*

Напоминание, что геометрический симплекс — выпуклая оболочка его вершин.

Строим комплексы Рипса для радиуса r_s полный и приграничный $\mathcal{F}_{r_s}$ — на вершинах, видящих границу. В этот раз надежда, что попадём во что-то правдоподобное, заявляя нетривиальность $H_d(Rips_{r_s}(\mathcal{D}), \mathcal{F}_{r_s})$. Здесь контрпример с приграничным циклом и круговой областью как опровержение, это второй рисунок статьи (стоит заметить, что все грани с красной вершиной затянуты). Его можно увидеть, смотря на точную последовательность пары, в которой возникает изоморфизм $H_1(\mathcal{F}_{r_s}) = H_2(Rips_{r_s}, \mathcal{F}_{r_s})$ — весь комплекс является конусом над циклом в $\mathcal{F}_{r_s}$, следовательно, стягиваем.

1.4 Четвёртая петля

Заметим, что если узлы посылают два типа сигналов с разными радиусами охвата, одна пара комплексов Рипса вкладывается в другую и в этой второй при достаточно большом различии радиусов дыры на границе затягиваются. Вводим радиус приёма второго типа сигнала $r_w > r_s$.

Признак, который мы доказываем, формулируется для данного многообразия следующим образом: индуцированное вложением отображение старших относительных гомологий $H_d(Rips_{r_s}, \mathcal{F}_{r_s}) \xrightarrow{i^\star} H_d(Rips_{r_w}, \mathcal{F}_{r_w})$ нетривиально.

Заметим, что для случая $\mathcal{D}_r$, лежащей в каком-то симплексе $Rips_{r_s}$, теорема верна в силу следствия 1.3. Заметим также, что теорема должна содержать условие на связь r_w и r_s, более сильное, нежели их неравенство.

Следующее утверждение верно при дополнительном условии на r.

Утверждение 1.4. *Либо геометрическая реализация любого симплекса $\mathcal{F}_{r_s}$ лежит в $\overline{N_r}$, либо $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{U}$.*

Доказательство. По теореме Каратеодори любая точка выпуклой оболочки множества точек в $\mathbb{R}^d$ лежит в каком-то d-симплексе. То есть достаточно проверить d-мерный остов $\mathbb{F}_{r_s}$.

Для любого геометрического симплекса на узлах размерности не больше, чем $d-1$, верно, что любая его точка отстоит от какой-то из его вершин не более чем на $r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$. Вершины лежат на расстоянии не больше r_f от границы, следовательно, мы получили по неравенству наименьшее возможное значение $r = r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}} + r_f$.

Рассуждение для d-мерного остова можно провести так же, утолщив границу, но этого можно не делать. Пусть σ — d-симплекс. Граница этого симплекса лежит в $d-$ 1-мерном остове, следовательно, в $\overline{N_r}$. Следовательно, или он полностью содержит D_r (см. первый рисунок), либо он в $\overline{N_r}$. □

Утверждается, что это оптимальное значение r, тут должен быть пример.

Теперь начнём доказывать признак.

Сначала применим геометрическую реализацию, которая в силу предыдущего утверждения отправит $(Rips_{r_s}, \mathcal{F}_{r_s})$ в $(\mathbb{R}^d, \overline{N_r})$, и запишем две точные последовательности пары, связанные гомоморфизмом σ в коммутативную диаграму.

$$\ldots \to H_d(Rips_{r_s}, \mathcal{F}_{r_s}) \xrightarrow{\delta_\star} H_{d-1}(\mathcal{F}_{r_s}) \to \ldots$$
$$\ldots \to H_d(\mathbb{R}^d, \overline{N_r}) \xrightarrow{\delta_\star} H_{d-1}(\overline{N_r}) \to \ldots.$$

Рассмотрим класс $[\alpha]$, образ которого под действием $i_\star$ нетривиален. Верно, что $\sigma_{star} \circ \delta_\star[\alpha]$ или равен нулю, или не равен. Пусть не равен.

В силу коммутативности диаграммы $\sigma_\star[\alpha] \neq 0$. Пусть $\mathcal{U}$ не содержит $\mathcal{D}_r$, тогда рассмотрим Err. Поскольку $\sigma(Rips_{r_s})$ лежит в $\mathcal{U}$, σ пропускается через $H_d(\mathbb{R}^d - Err, \overline{N_r}) = 0$. Это уже знакомое рассуждение. Пришли к противоречию с $\sigma([\alpha]) \neq 0$.

Следовательно, случай, который должен зависеть от r_w — случай $\sigma_\star \circ \delta_\star[\alpha] = 0$. Мы ищем условие на r_w и r_s такое, чтобы этот случай был невозможен.

1.5 Финал

Выберем геометрический относительный цикл α, представляющий $[\alpha]$. Его геометрическая граница лежит в $\mathcal{F}_{r_s}$. Зададим функцию знакового расстояния $h(y)$, положительную снаружи от Σ. На симплексе $\sigma \subset \partial\alpha$ она положительна. При этом σ — граница симплекса τ из α, то есть из $Rips_{r_s} - \mathcal{F}_{r_s}$. Для другой вершины τ у $h(y) < 0$.

Пусть p — внутренняя точка τ. По неравенству треугольника $h(p) \leqslant h(y) + d(p,y) < 0 + r_s = r_s$. p отстоит от какой-то вершины $x \in \tau$ на $r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$, имеем $h(p) \geqslant h(x) - d(p,x) \geqslant 0 - r_s\sqrt{\frac{d-1}{2d}}$. Тем самым мы запихнули любой симплекс границы относительного цикла в полосу S около Σ.

Теперь нам нужно некоторое утверждение про S.

Утверждение 1.5. *Пусть S гомеоморфна $d-1$-многообразию, умноженному на отрезок, и накрывается отрезками длины не больше Δ. Пусть X — набор точек, формирующих цикл в S, $[\gamma] \in H_{d-1}(R_\epsilon(X))$ и γ целиком лежит в S.*

Тогда $[y] \in H_{d-1}(S) = 0$ влечёт $[y] \in H_{d-1}(Rips_\varepsilon(X))$, где $\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon^2 \frac{d-1}{d}}$.

Доказательство. Рисунок, на нём теорема Пифагора. Итог — утверждение, что покрытие U шарами радиуса $\frac{\Delta}{2}$ с центрами по всех точках геометрического цикла лежит в покрытии U' радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами в вершинах.

Пусть $[\gamma]$ нетривиален в $H_{d-1}(Rips_\varepsilon(X))$, но тривиален в $H_{d-1}(S)$. Цикл $[\gamma]$ нетривиален в комплексе Чеха для U', через гомологии которого пропускается индуцированный гомоморфизм из меньшего Рипса в больший. Существует точка $p \in S - U'$, вокруг которой обходит γ — утверждается, что по двойственности Александера, видимо, имеется ввиду аргумент из начала доклада для $H_{d-1}(Rips_\varepsilon, U)$ и $H_{d-1}(S, U)$, но как-то хитро.

Через эту точку проходит отрезок длины не больше δ, соединяющий концы, он пересекает γ в двух точках в двух сторон от p, получаем, что этот отрезок лежит в объединении шаров радиуса $\frac{\Delta}{2}$, что противоречит $p \notin U'$. □

Потребуем от полосы S вдоль Σ, чтобы она удовлетворяла условиям утверждения. В предпосылках это записывается как требование на радиусы инъективности Σ во внешность и во внутренность относительно $\mathcal{D}_r$, но в ремарках уточняется, что это требование можно ослабить и гладкость полосы не требовать. По предположению случая $\partial\alpha$ гомологичен нулю в S. Берём $\Delta = r_s(1 + \sqrt{\frac{d-1}{2d}})$, получаем, что класс $\partial\alpha$ нулевой в комплексе Рипса радиуса $r_m = \sqrt{\frac{7d-5+2\sqrt{2d(d-1)}}{2d}}$.

Диаграммным поиском по диаграмме из девяти элементов из конца статьи находим элемент $H_d Rips_{r_m}$. Гомологии d-мерного подмножества $\mathbb{R}^d$ нулевые, следовательно, гомологии комплекса Чеха подходящего радиуса тоже. Наложим связь на r_m и r_w, следующую из утверждения о двойном вложении, получим, что вложении d-х гомологий R_{r_*} пропускается через 0. Из диаграммы получаем противоречие с посылкой теоремы.