

# TP de méthodes variationnelles (IMA203)

**Préambule :** Le but du TP est d'explorer les méthodes variationnelles pour la restauration des images. On rappelle que les méthodes variationnelles consistent à trouver une image de bonne qualité à partir de données dégradées. Pour cela, on exprime l'image de bonne qualité comme celle qui minimise une énergie (parfois appelée "fonctionnelle") souvent constituée de deux termes. Un terme d'attache aux données qui exprime le fait que l'image reconstruite doit bien expliquer l'observation. L'autre terme est dit "de régularité" et il permet d'introduire une connaissance a priori sur les images. Essentiellement, il s'agit d'exprimer le fait que les images naturelles varient peu si on les compare au bruit.

Dans une première partie nous nous attacherons à étudier l'influence des différents termes d'attache aux données et de régularité sur le résultat d'une restauration variationnelle. La recherche du bon compromis passe par ce que l'on appelle "paramètre de régularisation". Pour cette première étude nous utiliserons comme énergie de régularité, une énergie quadratique.

Dans la seconde partie, nous introduisons une énergie appelée variation totale, qui bien que très proche de l'énergie quadratique, donne de meilleurs résultats. Cependant, nous verrons que sa minimisation d'un point de vue numérique pose certains problèmes. Et nous donnerons une méthode adaptée à cette énergie de régularité dans le cas du débruitage (méthode de projection de Chambolle).

Enfin, vous comparerez qualitativement les deux approches.

## Outils

Vous utiliserez matlab ou python et divers outils qui sont déjà écrits. Pour python toutes les fonctions sont dans un seul fichier `tp_ima203_variatio.py` (à ouvrir avec spyder) (voir le fichier USAGE.TXT sur le site ecampus). Il faut exécuter toutes les cellules du programme fourni qui définissent des fonctions ou font des import (sous colab le programme se charge aussi de télécharger les données il s'agit de simplement deux images pour tester) :

```
curl https://perso.telecom-paristech.fr/ladjal/donnees_IMA203.tgz -o donnees_IMA203.tgz
tar xvzf donnees_IMA203.tgz
```

Les dernières cellules du programme fourni donnent des exemples d'utilisation.

## 1 Débruitage par régularisation quadratique

Le modèle d'observation est

$$v = u + b$$

où  $v$  est l'image observée (la donnée),  $u$  l'image parfaite et  $b$  le bruit.

On cherche à retrouver  $u$  comme minimiseur de l'énergie

$$E_1(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|^2$$

Le premier terme est simplement la norme au carré de la différence entre  $u$  et  $v$ . Le second est

$$\iint \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

C'est-à-dire l'intégrale du carré du gradient de l'image en tout point.

1. Comment utiliser l'outil **resoud\_quad\_fourier** pour trouver le minimiseur de cette énergie (voir le programme **minimisation\_quadratique**) ?
2. Décrire le résultat de ce débruitage lorsque  $\lambda$  est très grand ou très petit.
3. Après avoir ajouté un bruit d'écart type  $\sigma = 5$  à l'image de lena, trouver (par dichotomie) le paramètre  $\lambda$  pour lequel  $\|\tilde{u} - v\|^2 \sim \|u - v\|^2$ . C'est-à-dire le paramètre pour lequel l'image reconstruite  $\tilde{u}$  est à la même distance de l'image parfaite  $u$  que ne l'est l'image dégradée.
4. Ecrire un algorithme pour trouver le paramètre  $\lambda$  tel que  $\|\tilde{u} - u\|^2$  soit minimale. (dans le cadre de ce TP on connaît l'image parfaite  $u$ ). Commentaires ?

## 2 Débruitage par variation totale

Dans cette section on utilise la variation totale comme terme de régularisation. Cela donne l'énergie

$$E_2(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|_1$$

Le second terme est

$$\iint \|\nabla u(x, y)\| dx dy$$

### 2.1 Descente de gradient

La première idée pour minimiser cette fonctionnelle est d'utiliser une descente de gradient. Nous allons voir que cela peut entraîner des problèmes numériques.

Le gradient de la fonctionnelle  $E_2$  est donné par

$$\nabla E_2(u) = 2(u - v) - \lambda \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

Il est calculé par la fonction **gradient\_TV**. Utiliser le programme **minimise\_TV\_gradient** pour différentes valeurs du pas de descente. Atteignez-vous toujours le même minimum d'énergie ? (le programme renvoie l'évolution de l'énergie).

### 2.2 Projection Chambolle

Le programme **vartotale\_Chambolle** applique la méthode de Chambolle (expliquée dans le polycopié) au même problème posé par  $E_2$ . Utilisez ce programme et que constatez-vous quant à la vitesse de cette algorithme et sa précision (minimisation effective de  $E_2$ ) par rapport à la descente de gradient. Dans la suite vous n'utiliserez plus que cette technique pour minimiser la fonctionnelle  $E_2$ .

## 3 Comparaison

Après avoir fixé une image bruitée par un bruit de 25. Trouver pour chacune des deux méthodes le meilleur paramètre  $\lambda$  et comparez qualitativement le résultat obtenu par les deux méthodes pour le débruitage.