IMA203-TP03

Leying ZHANG

January 2022

1 Débruitage par régularisation quadratique

1.1

Pour cette méthode, on voudrait minimiser énergie1:

$$E_1(u) = \|u - v\|^2 + \lambda\|\nabla u\|^2$$

L'outil resoud_quad_fourier peut nous aider à trouver le minimiseur de énergie1 parce que il calcule mathématiquement le minimiseur dont la transformée de fourier vérifie l'équation ci dessous, et $h_x = [1 \quad -1], h_y = [1 \quad -1]^\top$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\overline{\hat{h}(\omega)}\hat{g}(\omega)}{\|\hat{h}(\omega)\|^2 + \lambda\left(\|\widehat{h_x}(\omega)\|^2 + \|\widehat{h_y}(\omega)\|^2\right)}$$

On peut voir que dans cette fonction de python, K et V représentent respectivement le dénominateur et le numérateur. Aprèe la transformée de Fourier inverse, on obtenu le minimiseur.

1.2

Dans cette méthode, $\lambda\|\nabla u\|^2$ est une énergie de régularité et on controle cette énergie par une paramètre λ. Si λ est grande, l'effet de débruitage est plus important (Cependant, cela peut parfois donner lieu à des images floues). Si λ est petite, l'effet de débruitage n'est pas visible et c'est une mauvais débruitage.

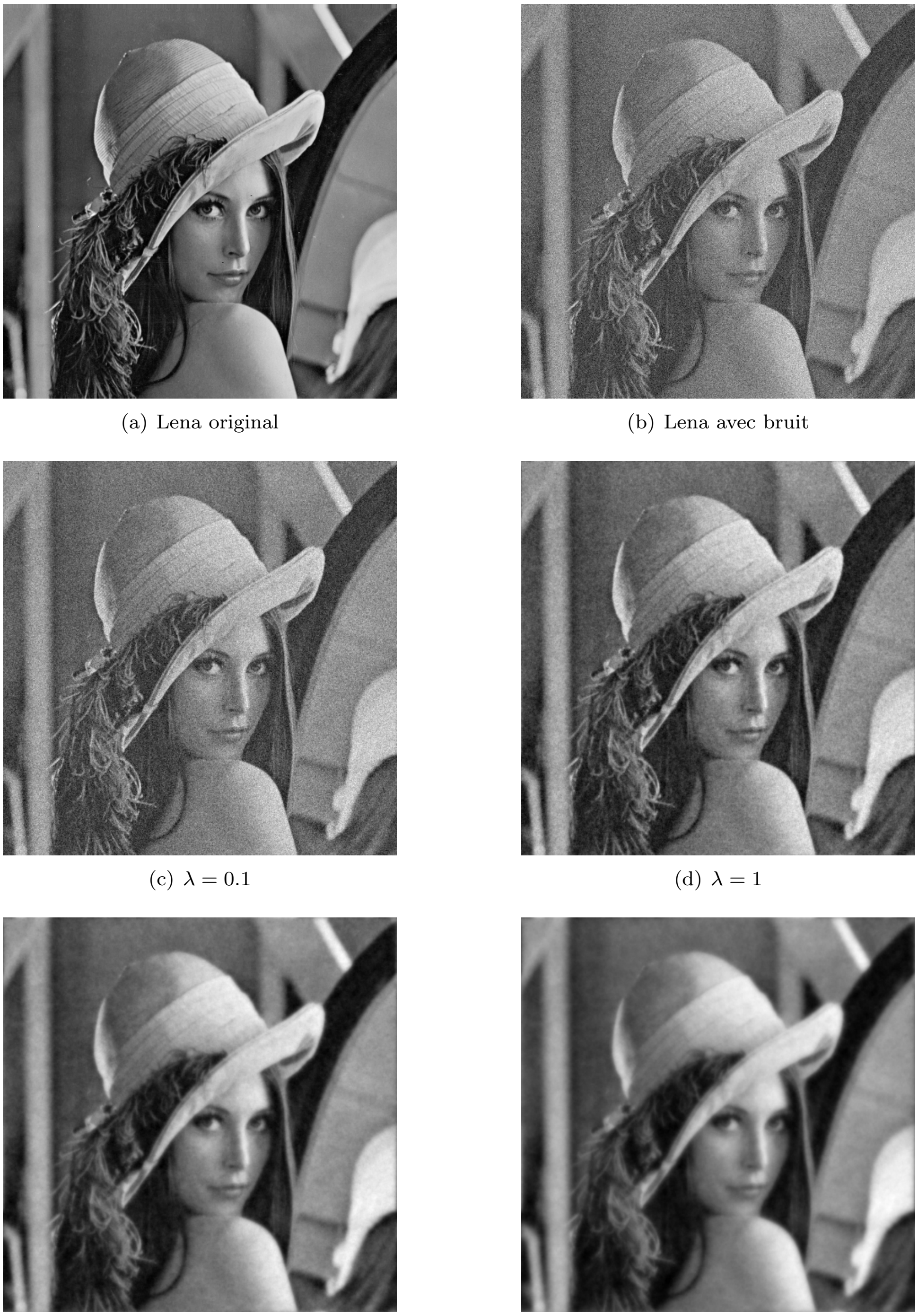
Par exemple, on utilise lena.tif en ajoutant un bruit de variance $\sigma = 25$, en changant λ, on a l'effet sur l'image dans la Figure 1.

1.3

Si on sait la variance d'un bruit $\sigma = 5$, on peut trouver le meilleur paramètre λ en utilisant la méthode de dichotimie. Le code est ci-dessous:

```python
def dichotomie (im,imb,lambda_max,lambda_min,epsilon):
    distance = np.linalg.norm(im-imb)
    utild = minimisation_quadratique(imb,lambda_max)
    while np.linalg.norm(utild - imb)**2 - distance**2 > epsilon:
        lambda_max = (lambda_max + lambda_min )/2
        #print("lambda_min = {}, lambda_max = {}".format(lambda_min, lambda_max))
        utild = minimisation_quadratique(imb,lambda_max)

    utild = minimisation_quadratique(imb,lambda_min)
    while np.linalg.norm(utild - imb)**2 - distance**2 <-epsilon:
```



(a) Lena original

(b) Lena avec bruit

(c) $\lambda = 0.1$

(d) $\lambda = 1$

(e) $\lambda = 5$

(f) $\lambda = 10$

Figure 1: Débruitage par régularisation quadratique avec le terme de régularisation différents

```
        lambda_min = (lambda_max + lambda_min )/2
        #print("lambda_min = {}, lambda_max = {}".format(lambda_min, lambda_max))
        utild = minimisation_quadratique(imb,lambda_max)
        if lambda_max - lambda_min < 0.01:
            return (lambda_max + lambda_min )/2

    return (lambda_max + lambda_min )/2
```

On trouve que pour cette figure, le meilleur $\lambda = 0.3076$, Voici l'image avant et après la bruitage dans la Figure 2. Dans ce cas, $\|\tilde{u} - u\|^2 = 2438$.

(a) Lena avec bruit

(b) $\lambda = 0.3076$

Figure 2: Débruitage par régularisation quadratique quand $\sigma = 0.3076$

1.4

Pour trouver le paramètre λ tel que $\|\tilde{u} - u\|^2$ est petite, on peut commencer par dessiner le changement de $\|\tilde{u} - u\|^2$en fonction de λ. Voir la Figure 3. On trouve que le meilleur $\lambda = 0.12$, dans ce cas $\|\tilde{u} - u\|^2 = 2112$.

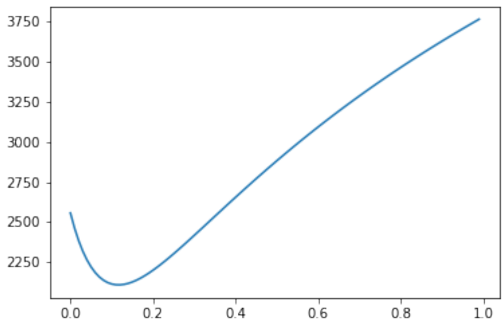


Figure 3: $\|\tilde{u} - u\|^2$en fonction de λ

2 Débruitage par variation totale

On peut utiliser un autre terme de régularisation en utilisant la variation totale. Il faut maintenant minimiser l'énergie 2 de cette forme:

$$E_2(u) = \|u - v\|^2 + \lambda\|\nabla u\|_1 = \|u - v\|^2 + \lambda \iint \|\nabla u(x, y)\| dxdy$$

2.1

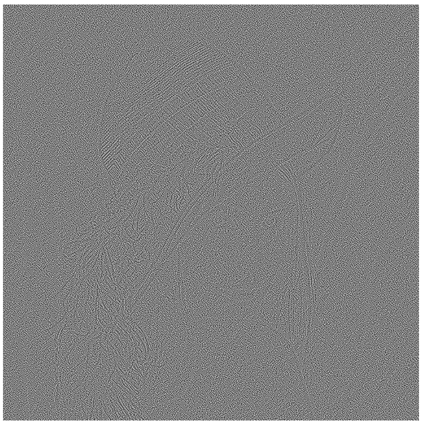
Le gradient de la fonction E_2 est

$$\nabla E_2(u) = 2(u - v) - \lambda \mathrm{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

On utilise la méthode de descnte de gradient, et on a $u^{k+1} = u^k - \rho_k \nabla E_2$, dont ρ_k est le pas. En utilisant les pas différent, on a des résultat différents. De plus, le résultat aussi change quand le nombre totale de pas change. Dans la Figure 4, on montre les résultat des pas différents. Dans la Figure 6, on peut voir le changement d'énergie pour les pas différents. On trouve que pour le pas =1.0, la variation totale augment, mais pour le pas 0.5 et 0.1, cela diminue. Quand le nombre de pas augment, on aura un meilleur résultat, et la performance de pas 0.1 est mieux que celle de pas 0.5.

2.2

On utilise la méthode de Chambolle maintenant. On trouve que cette méthode est plus rapide que la méthode de descente de gradient. Par exemple, on utilise$\lambda = 0.12$, pour la méthode de Chambolle, on choisit max iteration = 30 et pour la méthode de Descente_gradient on utilise pas = 0.1, nombre de pas = 100. On trouve que le temps de calcul est 0.74 et 3.28 respectivement, et l'énergie E_2 est presque les même.



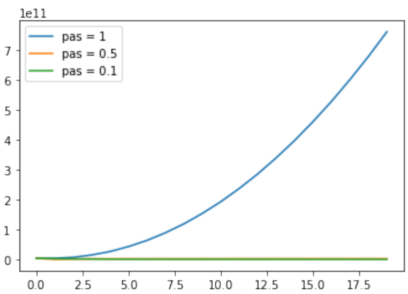
(a) Pas=1, nombre totale = 20

(b) Pas=0.5, nombre totale = 20

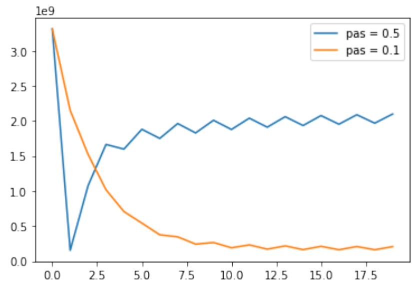
(c) Pas=0.5, nombre totale = 200

(d) Pas=0.1, nombre totale = 20

Figure 4: Débruitage par Variation Totale en utilisant les pas différents



(a) Comparaison de pas 1,0.5,0.1



(b) Comparaison de pas 0.5,0.1

Figure 5: Changement de l'énergie

3 Comparaison

On utilise maintenant lena et on ajout un bruit de $\sigma = 25$. En utilisant la méthode de dichotomie, on trouve le meilleur paramètre $\lambda = 2.495$ pour la débruitage par régularisation quadratique, et le meilleur paramètre $\lambda = 31.25$. Voici les résultat. On voit que la deuxième méthode donne une résultat plus précise que la débruitage de régularisation quadratique. Pour la Figure 6-c $\|\tilde{u} - u\|^2 = 5757$, et la Figure 6-b est de $\|\tilde{u} - u\|^2 = 4800$, qui montre aussi que la méthode de variation totale est mieux.

(a) Lena original

(b) Lena avec bruit

(c) Débruitage par régularisation quadratique

(d) Débruitage par variation totale

Figure 6: Changement de l'énergie