Variable Compleja

Viviana Márquez
Código: 614132005

Marzo 24, 2017

PROFESORA: LORENA VALENCIA

DATOS SOBRE EL ARTÍCULO ESCOGIDO

Título: THE GAUSSIAN INTEGERS I: THE FUNDAMENTAL THEOREM.

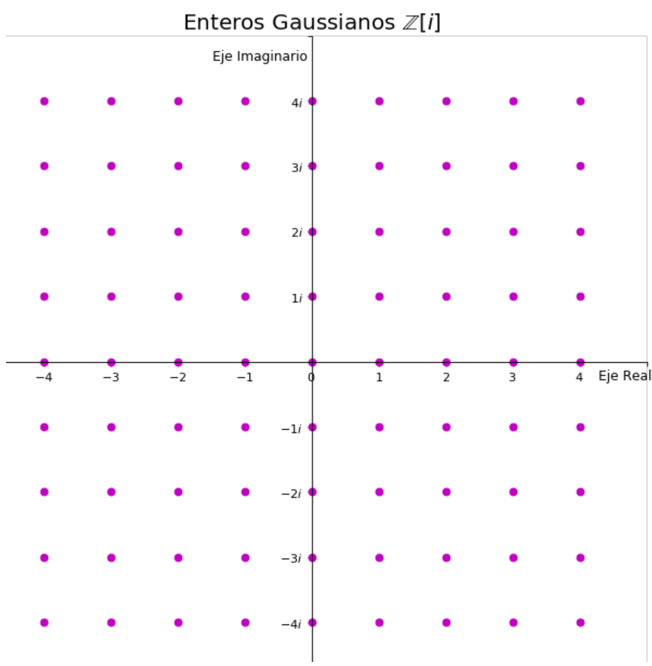
Autor: Pete L. Clark - Departamento de Matemáticas, Universidad de Georgia, Estados Unidos.

Enlace: http://math.uga.edu/~pete/4400gaussian.pdf

RESUMEN

El objetivo de este artículo es introducir al lector a los **Enteros Gaussianos**. Primero comienza resaltando el hecho de que todos los anillos no necesariamente cumplen el teorema fundamental de la aritmética, tal como lo es el caso del anillo de los números enteros pares $\mathbb{E}$. Los anillos que sí satisfacen este teorema se les llama Dominio de Factorización Única (DFU).

Un ejemplo particular de DFU es el anillo de los Enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[i]$, que está definido por el subconjunto de los números complejos de la forma $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $i = \sqrt{-1}$. Una manera intuitiva de asimilar los enteros Gaussianos es darse cuenta que forman un retículo de puntos en el plano de los complejos, tal como lo vemos en la siguiente figura:



Después, el artículo procede a verificar que efectivamente $\mathbb{Z}[i]$ es un sub-anillo de $\mathbb{C}$. En seguida, pasa a definir el concepto de número primo en este anillo, es decir, los números que son irreducibles. Para esto, primero nota que las unidades de este anillo son $\{\pm 1, \pm i\}$, ya que todo número de $\mathbb{Z}[i]$ es divisible por cualquiera de estos cuatro números.

En consecuencia, obtenemos la definición de un número **Gaussiano primo**: Cualquier entero Gaussiano g es primo sí y sólo sí es divisible únicamente por $\{\pm 1, \pm i, \pm g, \pm ig\}$.

¿Cuál es la relación del artículo con la clase?

Este artículo me gustó mucho porque cuando tomé la clase de álgebra abstracta estudié sobre el anillo de los enteros Gaussianos, pero ahora usando los conocimientos aprendidos en la clase de Variable Compleja, pude apropiarme más del tema. En el artículo también vemos la relación entre los enteros Gaussianos, su representación geométrica, su forma polar, su norma, etc.; análogo a lo que hemos estudiado en clase sobre los números complejos.

Desarrollos formales matemáticos del artículo

Similar a la demostración que hicimos en clase a principio del semestre sobre que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, el artículo realiza la demostración que $\mathbb{Z}[i]$ es un anillo, como veremos a continuación.

Un anillo es un conjunto con dos operaciones bien definidas (suma y producto), que cumple los siguientes axiomas:

- Suma:
  - Asociatividad
  - Conmutatividad
  - Elemento neutro aditivo
  - Opuesto inverso aditivo
- Producto:
  - Asociatividad
  - Conmutatividad (anillo conmutativo)
  - Elemento neutro del producto (anillo unitario)
- Distributividad

Claramente, $\mathbb{Z}[i]$ contiene $0 = 0 + 0i$ y $1 = 1 + 0i$. Nos interesa es demostrar que este conjunto es cerrado bajo las operaciones de suma y producto.

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}; (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}; (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + cb)i$, dado que $i^2 = -1$.

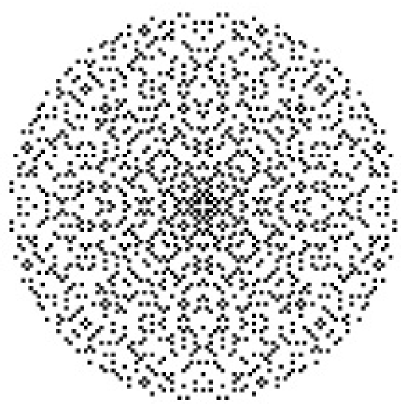
Observemos que $\mathbb{Z}[i]$ no es un cuerpo ya que no posee un elemento inverso para el producto.

Historia detrás de la matemática del artículo

Según el portal de internet *Gaussianos*, Carl Friedrich Gauss, científico alemán del siglo XIX, frecuentemente conocido como "El Principe de las Matemáticas", fue el primero en preguntarse si tendría alguna utilidad pensar en el conjunto de los números complejos donde tanto la parte real como la parte imaginaria de cada número fueran números enteros.

En 1832, motivado por un estudio sobre la suma de cuadrados, Gauss encontró un conjunto que cumple varias propiedades particulares: el ahora llamado anillo de los enteros Gaussianos. Precisamente, el própio Gauss descubrió que la ley de reciprocidad cuadrática (también conocida como el teorema áureo) se puede demostrar usando estos números especiales.

Es de interés también estudiar la distribución de los números primos Gaussianos en el plano complejo, ya que forman una estructura simétrica especial, tal como podemos observar en la siguiente figura tomada de Wolfram MathWorld:



El número primo Gaussiano más grande conocido hasta el momento es $(1+i)^{1203793-1}$ que fue descubierto en el 2006. En la actualidad, los enteros Gaussianos son utilizados en algoritmos de sistemas de seguridad.