Erros e Aproximações

De onde vem os erros?

- Simplificações na modelagem do problema;
- Equacionamento do modelo;
- Implementação computacional.

O que é erro?

- **Exatidão:** medida de perfeição do resultado, se refere à conformidade com o valor real;
- **Precisão:** é o grau de variação de resultados de uma medição. Está relacionado ao número de dígitos da mantissa.
- Ex.: com um paquímetro de resolução (precisão) de 0,05 mm encontra-se a medida de 33,0 ± 0,05 mm. Porém, ao fazer testes com outros paquímetros constata-se que a medida real do objeto é de 30,0 ± 0,05mm, ou seja, o paquímetro que mediu errado é preciso mas não é exato.
- Por que medir erros?
  - Para determinar a acurácia dos resultados numéricos.
  - Para desenvolver critérios de parada para métodos iterativos.
- **Condicionamento de Algoritmos:** bom/mau condicionamento de problemas e métodos.
  - Problema bem posto/ bem condicionado: pequenas perturbações na entrada produzem pequenas perturbações no resultado. O problema é *estável com relação aos dados*.
  - Método estável: pequenas perturbações na entrada produzem pequenas perturbações no resultado.
    - Problemas bem postos com algoritmos instáveis!
    - Ex.: Fórmula de Bháskara (Cunha, pg.23)

Erro Real

- É a diferença numérica entre o valor real/exato da solução de um problema e o valor encontrado utilizando, p.ex., um método numérico.

Erro Real = Valor Real – Valor Aproximado

$$E_r = x - \bar{x}$$

- O grande problema do Erro Real é que ele depende de se conhecer a solução do problema, o que normalmente não é possível.
- Exemplo: A derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ pode ser aproximada pela equação:

  $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.3$ então:

  1. O valor aproximado de $f'(2)$ é dado por:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3} \\ &= \frac{f(2.3)-f(2)}{0.3} \\ &= \frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3} \\ &= \frac{22.107-19.028}{0.3} \quad = 10.263 \end{aligned}$$

  2. O valor exato de $f'(2)$ pode ser obtido calculando-se a derivada:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7e^{0.5x} \\ f'(x) &= 7 \times 0.5 \times e^{0.5x} \\ &= 3.5e^{0.5x} \end{aligned}$$

     de forma que o valor real de $f'(2)$ é:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3.5e^{0.5(2)} \\ &= 9.5140 \end{aligned}$$

  3. O erro real é dado por:

$$E_r = \text{Valor Real – Valor Aproximado}$$
$$\cdots = 9{,}5140 - 10{,}263 = -0{,}722$$

Erro Aproximado

- O que fazer quando os valores reais são difíceis ou impossíveis de serem calculados?
  - Utiliza-se como medida de erro a distância entre aproximações sucessivas de um método iterativo;
  - Parte-se da premissa de que o método está convergindo;

- Mede **o quanto** um método converge, mas o erro aproximado não diz nada sobre se a convergência está na direção certa, ou seja, se está convergindo para a solução exata, nem quão próximo se está desta solução, pois ela é desconhecida.

Erro Aproximado = Aproximação atual – Aproximação anterior

$$E_a = \overline{x_k} - \overline{x_{k-1}}$$

- Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.3$ então o valor aproximado de $f'(2)$ é dado por:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3} \\ &= \frac{f(2.3)-f(2)}{0.3} \\ &= \frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3} \\ &= \frac{22.107-19.028}{0.3} \quad = 10.263 \end{aligned}$$

- Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.15$ então o valor aproximado de $f'(2)$ é dado por:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2+0.15)-f(2)}{0.15} \\ &= \frac{f(2.15)-f(2)}{0.15} \\ &= \frac{7e^{0.5(2.15)}-7e^{0.5(2)}}{0.15} \\ &= \frac{20.50-19.028}{0.15} \quad = 9.8800 \end{aligned}$$

- Assim o erro aproximado E_a é dado por:

E_a = Valor atual – Valor anterior

$$= 9.8800 - 10.263$$
$$= -0.38300$$

Erro Absoluto x Erro Relativo

- **Erro** absoluto é a diferença entre o valor exato de um número x e de seu valor aproximado $\bar{x}$.
  - **Erro Absoluto Real**: $EA_r = x - \bar{x}$
  - **Erro Absoluto Aproximado** : $EA_a = \overline{x_k} - \overline{x_{k-1}}$

- **Erro relativo** é a razão entre o erro absoluto (real ou aproximado) e o valor aproximado.
  - **Erro Relativo Real**: $ER_r = \frac{|EA_r|}{|x|}$
  - **Erro Relativo Aproximado**: $ER_a = \frac{|EA_a|}{|\bar{x}_k|}$
- O erro relativo dá uma ideia da dimensão do erro.
- Bastante utilizado como critério de parada.
- Exemplo: os valores $x = 2112{,}9$ e $y = 5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA = 0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x = \frac{0{,}1}{2112{,}9} = 0{,}000047$$

$$ER_y = \frac{0{,}1}{5{,}3} = 0{,}019$$

Qual valor foi obtido com maior precisão?

Qual valor foi obtido com maior exatidão?

Algarismos Significativos

Algarismos significativos são importantes para mostrar a confiança que um número apresenta. O número de algarismos significativos de uma grandeza medida ou um valor calculado, é uma indicação da incerteza: mais algarismos significativos, menor a incerteza no valor.

Por exemplo, perguntado sobre o tamanho da população de Curitiba, posso responder que ela é de três milhões de habitantes. Entretanto, se uma informação mais precisa é necessária, então a melhor informação seria 3.168.980 habitantes (IBGE 2013).

Quantos algarismos significativos tem cada resposta? No primeiro caso, 1 algarismo ($3.000.000 = 3 \times 10^6$); no segundo, sete algarismos ($3.168.980 = 3{,}168980 \times 10^6$).

Todos algarismos de um número em notação científica ou notação em ponto flutuante **normalizada** são significativos (também chamado de *mantissa*).

- Atenção para dígitos inseridos de forma espúria no caso de representações de tamanho fixo. Estes não são significativos.
- Em caso de ponto flutuante denormalizados, os zeros antes do primeiro dígito não nulo não são significativos.

Exemplos:

- 3200 ou $3{,}2 \times 10^3$ (2 algarismos significativos)

- 3200, ou $3{,}200 \times 10^3$ (4 algarismos significativos)
- 3200,0 ou $3{,}2000 \times 10^3$ (5 algarismos significativos)
- 32.050 ou $3{,}205 \times 10^4$

Número de algarismos corretos

Caso se queira especificar um número m mínimo de algarismos significativos corretos para um determinado resultado, então o valor do erro relativo deve ser $|ER| \leq 0.5 \times 10^{2-m}\%$.

Por outro lado, dado o valor do erro relativo, o número mínimo de algarismos corretos é dado por $m \leq 2 - \log\left(\frac{|ER|}{0.5}\right)$ ou ainda $m = \lfloor 2 - \log\left(\frac{|ER|}{0.5}\right) \rfloor$.

Propagação de Erros

Cálculos efetuados com números imprecisos geram resultados que também possuem erros. Como os erros se propagam através dos cálculos?

Um intervalo fechado X é um conjunto contínuo de números reais $[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} | \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\}$

Dados dois intervalos $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ podemos encontrar o intervalo em que se encontra a solução das operações:

- $X + Y = [\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$
- $X - Y = [\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}]$
- $X * Y = [\underline{x}, \overline{x}] * [\underline{y}, \overline{y}] = [min(\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}), max(\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y})]$

Caso 1

Encontrar os limites da propagação de erros na adição de dois números. Por exemplo, calcular $X+Y$ onde: $X = 1{,}5 \pm 0{,}05$, $Y = 3.4 \pm 0.04$.

Solução 1

Os valores máximos de X e Y são $X = 1{,}55$ e $Y = 3{,}44$. Portanto $X + Y = 1{,}55 + 3{,}44 = 4{,}99$ é o valor máximo de $X+Y$.
Os valores mínimos de X e Y são $X = 1{,}45$ and $Y = 3{,}36$. Portanto $X + Y = 1{,}45 + 3{,}36 = 4{,}81$ é o valor mínimo de $X+Y$.
Assim $4{,}81 \leq X + Y \leq 4{,}99 \Rightarrow X + Y = 4{,}9 \pm 0{,}09$.

Como encontrar a propagação de erros em uma função?

Seja f uma função com diversas variáveis $x_{1,} x_{2,} x_{3,} \cdots, x_{n-1}, x_n$ e Δ o erro absoluto, então o maior erro possível em f é

$$\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$

Caso 2
Subtração de números próximos pode criar erros grandes.
Seja $z = x - y$, então o erro absoluto Δz é dado por:

$$|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| = |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

E o erro relativo máximo é dado por $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x - y|}$

Quando e são números próximos, o denominador fica pequeno, gerando grandes erros relativos.
Exemplo: $x = 2 \pm 0{,}001$ e $y = 2{,}003 \pm 0{,}001$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|0{,}002| + |0{,}002|}{|2 - 2{,}003|} = 1{,}3333 = 13{,}33\%$$

Ruggiero pg. 14-15

Causas de Erro

Exemplo dos mísseis Patriot

- O sistema Patriot consiste em um dispositivo de detecção eletrônica que calcula uma área no espaço aéreo na qual deve procurar por mísseis.
- Para descobrir a localização do próximo alvo, ele calcula a velocidade do míssil e o tempo em que este foi avistado pelo radar pela última vez.
- Como o relógio interno do sistema é lido a cada um décimo de segundo, 1/10 é representado em um registrador de 24 bits como 0.00011001100110011001100.
- Esta representação não é exata, e a cada leitura acumula-se um erro de $9{,}5 \times 10^{-8}$ segundos.
- O sistema estava operacional a 100 horas consecutivas, causando uma imprecisão de:

$$\begin{aligned} &= 9.5 \times 10^{-8} \frac{s}{0.1\mathrm{s}} \times 100\mathrm{hr} \times \frac{3600\mathrm{s}}{1\mathrm{hr}} \\ &= 0.342\, s \end{aligned}$$

- A diferença na distância percorrida estimada pelo míssil foi de 687 metros

Erros de Arredondamento

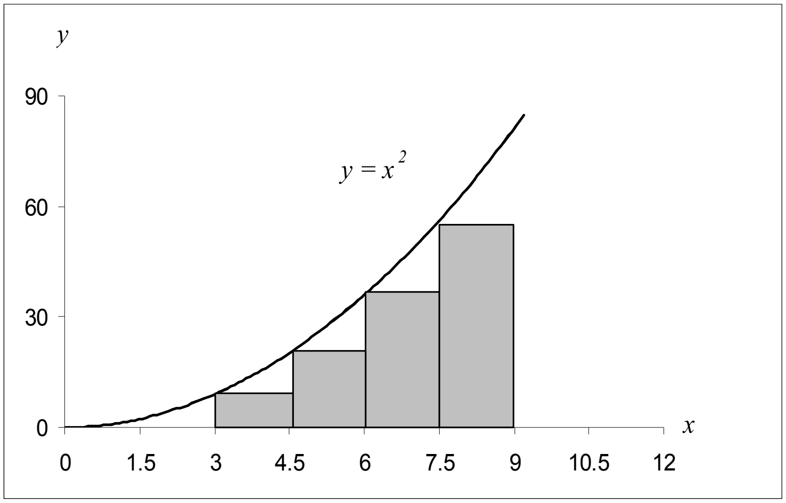
- Causados devido à representação aproximada de números reais.
- Problemas na conversão para base binária
- **Cancelamento Subtrativo ou Cancelamento Catastrófico:** efeito de aumento substancial no erro relativo em operações aritméticas de ponto flutuante. Um exemplo típico ocorre quando há adição de números muito diferentes ou subtração de números muito próximos.
- Exemplo: máquina com 4 dígitos de precisão, $x_1 = 0{,}3491 \times 10^4$; $x_2 = 0{,}2345 \times 10^0$.
    - $$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= (0{,}2345 \times 10^0 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= (0{,}00002345 \times 10^4 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= (0{,}0000 \times 10^4 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= 0{,}0000\end{aligned}$$
    - $$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= 0{,}2345 \times 10^0 + (0{,}3491 \times 10^4 - 0{,}3491 \times 10^4) \\ &= 0{,}2345 \times 10^0 + 0{,}0000 \\ &= 0{,}2345 \times 10^0\end{aligned}$$
    - Os resultados são diferentes, mas não deveriam ser pois a adição é associativa.
        - Conclusão: soma/multiplicações em ponto flutuante nem sempre são associativas
        - **Como atenuar o problema?** Procurar efetuar sempre primeiro as operações em grandezas de mesma ordem.

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático
- Exemplos:
    1. Truncando uma série Macluriana

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Uso de retângulos para aproximar uma integral



Exercícios

1) Defina, exemplificando, os conceitos de:
   a) Erro real
   b) Erro aproximado
   c) Erro absoluto
   d) Erro relativo
2) A Agência Nacional do Petróleo efetuou verificações em bombas de postos de gasolina, obtendo como resultado a tabela apresentada abaixo. Qual dos postos está enganando o consumidor em maior proporção?

Posto	Quantidade de gasolina efetivamente dispensada	Quantidade de gasolina medida pela bomba
Shill	9,90	10,00
Bri	19,90	20,00
Texis	29,80	30,00
Ipiris	29,95	30,00

3) Se $A=3{,}56\pm 0{,}05$ e $B=3{,}25\pm 0{,}04$, em qual intervalo encontra-se o resultado de: $A+B$, $A\div B$, $A\times B$, A^B
4) A fórmula para calcular a tensão normal em uma barra longitudinal é dada por $\in=\frac{F}{AE}$, onde F = força normal aplicada, A = área da barra e E= módulo de Young.

Se $F=50\pm 0.5\mathrm{N}$, $A=0.2\pm 0.002\mathrm{m}^2$ e $E=210\mathrm{x}10^9\pm 1\times 10^9\,Pa$, qual é o maior erro na medida da tensão?

5) Caso se queira especificar um número m mínimo de dígitos significativos corretos para um determinado resultado, o valor do erro relativo deve ser $|ER|\leq 0.5\mathrm{x}10^{2-m}\%$. Por outro lado, dado o valor de $|ER|$, o número mínimo de dígitos corretos é dado por $m=\lfloor 2-\log(\frac{|ER|}{0.5})\rfloor$. Responda:
   a) O erro relativo no cálculo da raiz de uma equação é 0,004%. Qual o número mínimo de dígitos significativos corretos da solução?
   b) Qual o menor erro aproximado relativo para obtermos uma solução com 6 dígitos corretos?
6) No cálculo do volume de um cubo com lado de 5cm, a incerteza na medição de cada lado é de 10%. Qual o erro relativo máximo na medida do volume do cubo?
7) Considere o cálculo de $f'(2)$ para a função $f(x)=x^2$ utilizando $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Responda:
   a) Qual o erro se utilizarmos $h=0.2$?
   b) Qual o valor de *h* para que tenhamos ao menos 3 dígitos corretos na solução?