Задача про мембрану

Аксенов Виталий

9.7.2018 — ∞

1 Уравнение движения элемента

Строим сетку на поверхности мембраны. Запишем второй закон Ньютона для элемента сетки:

$$m\overline{a} = \overline{F}_{el} + \overline{F}_{ext} \tag{1.1}$$

F_{ext} — внешняя сила, действует не везде, а в месте удара. Распишем упругую силу F_{el}. Представим поверхность как $w(x, y)$. Базис на поверхности задается векторами $r_x = (1, 0, \frac{\partial w}{\partial x})^{\mathbf{T}}$, $r_y = (0, 1, \frac{\partial w}{\partial y})^{\mathbf{T}}$. В проекции на эти векторы

$$m\frac{\partial v_x}{\partial t} = h\delta(\sigma_{xx}^{right} - \sigma_{xx}^{left}) + h\delta(\sigma_{xy}^{top} - \sigma_{xy}^{bottom}) \tag{1.2}$$

$$m\frac{\partial v_y}{\partial t} = h\delta(\sigma_{yy}^{top} - \sigma_{yy}^{bottom}) + h\delta(\sigma_{xy}^{right} - \sigma_{xy}^{left}) \tag{1.3}$$

Напряжения выражаются через деформации:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\mu}{E}\sigma_{yy} \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\mu}{E}\sigma_{xx} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1.6}$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_{xx} + \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_{yy} \tag{1.7}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_{yy} + \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_{xx} \tag{1.8}$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} \tag{1.9}$$

Пусть u^*, v^* — координаты в базисе на поверхности мембраны (вблизи какой-то точки (x_0, y_0)). Если в тензоре деформаций откинуть квадратичные члены, то:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^*}{\partial y} \tag{1.11}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right) \tag{1.12}$$

2 Численное приближение

Схема расчета:

- Считаем деформации.
- Считаем напряжения.
- Добавляем внешние силы. Получаем dv.
- Делаем шаг по dt, пересчитываем скорости.
- Делаем шаг по dt, пересчитываем координаты.

Приближаем векторы r_x, r_y. В точке с индексами (n, k) (не на границе сетки):

$$\frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{w_{n+1,k} - w_{n-1,k}}{2h} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{w_{n,k+1} - w_{n,k-1}}{2h} \tag{2.1}$$

Введем векторы

$$\overline{\delta}_x = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} u_{n+1,k} - u_{n-1,k} \\ v_{n+1,k} - v_{n-1,k} \\ w_{n+1,k} - w_{n-1,k} \end{pmatrix} \qquad \overline{\delta}_y = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} u_{n,k+1} - u_{n,k-1} \\ v_{n,k+1} - v_{n,k-1} \\ w_{n,k+1} - w_{n,k-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

На границе, например на левом краю, определим

$$\overline{\delta}_x = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} u_{n+1,k} - u_{n,k} \\ v_{n+1,k} - v_{n,k} \\ w_{n+1,k} - w_{n,k} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

и аналогичным образом $\overline{\delta}_x$, $\overline{\delta}_y$ на всех краях.

Спроецируем их на наш локальный базис $\overline{r}_x, \overline{r}_y$:

$$\Pi_{xx} = \frac{(\overline{\delta}_x, \overline{r}_x)}{\sqrt{(\overline{r}_x, \overline{r}_x)}} \qquad \Pi_{yy} = \frac{(\overline{\delta}_y, \overline{r}_y)}{\sqrt{(\overline{r}_y, \overline{r}_y)}} \tag{2.4}$$

$$\Pi_{xy} = \frac{(\overline{\delta}_x, \overline{r}_y)}{\sqrt{(\overline{r}_y, \overline{r}_y)}} \qquad \Pi_{yx} = \frac{(\overline{\delta}_y, \overline{r}_x)}{\sqrt{(\overline{r}_x, \overline{r}_x)}} \tag{2.5}$$

Приближаем деформации:

$$\varepsilon_{xx} \sim \Pi_{xx},\ \varepsilon_{yy} \sim \Pi_{yy}, \varepsilon_{xy} \sim \frac{1}{2}(\Pi_{xy} + \Pi_{yx}) \tag{2.6}$$

Зная деформации, получаем напряжения σ_{ij}, затем приращения скоростей. Проецируем их обратно в трёхмерное пространство:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial v_x}{\partial t} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}} \frac{\partial v_y}{\partial t} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.9}$$