

Задача про мембрану

Аксенов Виталий

9.7.2018 — ∞

1 Уравнение движения элемента

Строим сетку на поверхности мембраны. Запишем второй закон Ньютона для элемента сетки:

$$m\bar{a} = \bar{F}_{el} + \bar{F}_{ext} \quad (1.1)$$

F_{ext} — внешняя сила, действует не везде, а в месте удара. Распишем упругую силу F_{el} . Представим поверхность как $w(x, y)$. Базис на поверхности задается векторами $r_x = (1, 0, \frac{\partial w}{\partial x})^T$, $r_y = (0, 1, \frac{\partial w}{\partial y})^T$. В проекции на эти векторы

$$m \frac{\partial v_x}{\partial t} = h\delta(\sigma_{xx}^{right} - \sigma_{xx}^{left}) + h\delta(\sigma_{xy}^{right} - \sigma_{xy}^{left}) \quad (1.2)$$

$$m \frac{\partial v_y}{\partial t} = h\delta(\sigma_{yy}^{top} - \sigma_{yy}^{bottom}) + h\delta(\sigma_{xy}^{top} - \sigma_{xy}^{bottom}) \quad (1.3)$$

Напряжения выражаются через деформации:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\mu}{E}\sigma_{yy} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\mu}{E}\sigma_{xx} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.6)$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_{xx} + \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_{yy} \quad (1.7)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_{yy} + \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_{xx} \quad (1.8)$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} \quad (1.9)$$

Пусть u^*, v^* — координаты в базисе на поверхности мембраны (вблизи какой-то точки (x_0, y_0)). Если в тензоре деформаций откинуть квадратичные члены, то:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^*}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \quad (1.12)$$

2 Численное приближение

Схема расчета:

- Считаем деформации.
- Считаем напряжения.
- Добавляем внешние силы. Получаем dv .
- Делаем шаг по dt , пересчитываем скорости.
- Делаем шаг по dt , пересчитываем координаты.

Приближаем векторы r_x, r_y . В точке с индексами (n, k) :

$$\frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{w_{n+1,k} - w_{n-1,k}}{2h} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{w_{n,k+1} - w_{n,k-1}}{2h} \quad (2.1)$$

Введем векторы

$$\bar{\delta}_x = \begin{pmatrix} u_{n+1,k} - u_{n-1,k} \\ v_{n+1,k} - v_{n-1,k} \\ w_{n+1,k} - w_{n-1,k} \end{pmatrix} \quad \bar{\delta}_y = \begin{pmatrix} u_{n,k+1} - u_{n,k-1} \\ v_{n,k+1} - v_{n,k-1} \\ w_{n,k+1} - w_{n,k-1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Спроецируем их на наш локальный базис \bar{r}_x, \bar{r}_y :

$$\Pi_{xx} = \frac{(\bar{\delta}_x, \bar{r}_x)}{\sqrt{(\bar{r}_x, \bar{r}_x)}} \quad \Pi_{yy} = \frac{(\bar{\delta}_y, \bar{r}_y)}{\sqrt{(\bar{r}_y, \bar{r}_y)}} \quad (2.3)$$

$$\Pi_{xy} = \frac{(\bar{\delta}_x, \bar{r}_y)}{\sqrt{(\bar{r}_y, \bar{r}_y)}} \quad \Pi_{yx} = \frac{(\bar{\delta}_y, \bar{r}_x)}{\sqrt{(\bar{r}_x, \bar{r}_x)}} \quad (2.4)$$

Приближаем деформации:

$$\varepsilon_{xx} \sim \frac{1}{2h} \Pi_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} \sim \frac{1}{2h} \Pi_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} \sim \frac{1}{4h} (\Pi_{xy} + \Pi_{yx}) \quad (2.5)$$

Зная деформации, получаем напряжения σ_{ij} , затем приращения скоростей. Проецируем их обратно в трёхмерное пространство:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}} \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.8)$$