<u>Séquence 11</u> : Probabilité d'un événement, d'une union, d'une intersection

I. Expérience aléatoire

<u>Définition</u> :
- Une **expérience aléatoire** est une expérience liée au hasard qui a plusieurs issues possibles que l'on ne peut pas prévoir.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω .

<u>Exemple</u> : On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé : C'est une expérience aléatoire puisqu'on ne pas prévoir le résultat.

L'univers est $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

Autres exemples : pile ou face, tirer une carte dans un jeu de 32 cartes…

II. Loi de probabilité

<u>Définition</u> : Soit $\Omega = \{ x_1 , x_2 \ \dots \ x_n \}$ l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une **loi de probabilité sur Ω**, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i compris entre 0 et 1, appelé probabilité de x_i de telle façon que :

$$\sum_{1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

<u>Exemple</u> : On lance une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile est le double d'obtenir face.
On peut définir la loi de probabilité suivante sur $\Omega = \{P ; F\}$:

x_i	P	F
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

<u>Définition</u> : Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p, on parle de **loi équiprobable**. Dans ce cas, la probabilité d'une issue est $\frac{1}{n}$.

III. Probabilité d'un événement

1. Evènement

<u>Définition</u> :
Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Un **événement** est une partie de Ω.
Un événement qui contient une seule issue est appelé **événement élémentaire**

<u>Remarques</u> :
- L'évènement impossible n'est réalisé par aucune issue, sa probabilité est 0.
- L'événement certain est réalisé par toutes les issues, sa probabilité est 1.

<u>Exemples</u> :
On lance un dé non pipé.
Soit A l'évènement : « Obtenir un nombre pair »
Soit B l'évènement : « Obtenir un nombre multiple de 3 ».
$A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3; 6\}$

2. Probabilité d'un évènement

<u>Définition</u> :
La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. On la note $P(A)$.

<u>Exemple</u> :
On lance un dé non pipé.
Soit A l'évènement : « Obtenir un nombre pair »
Soit B l'évènement : « Obtenir un nombre multiple de 3 ».
$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

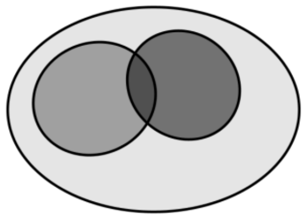
3. Cas de l'équiprobabilité

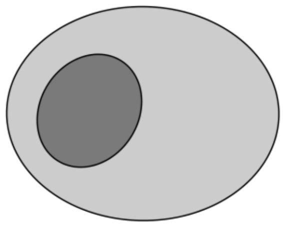
Définition :
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues total}}$$

Exemple :
Soit C l'évènement : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »
En lançant un dé, la probabilité de l'évènement C est : $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

IV. Réunion et intersection de deux évènements

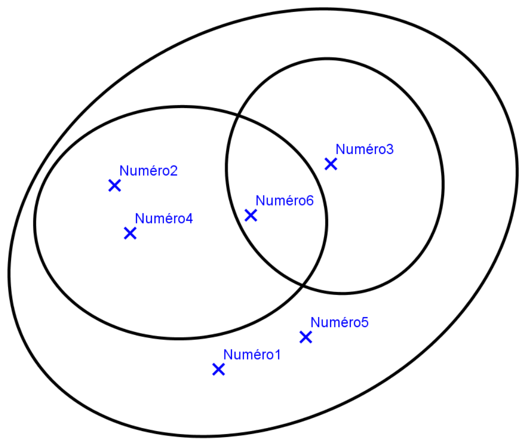




Définition :
Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire.

- L'évènement $\boldsymbol{A \cap B}$, qui se lit A inter B, (A et B) est formé des issues qui réalisent à la fois A et B. (intersection)
  Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, on dit que A et B sont **incompatibles**.
- L'évènement $\boldsymbol{A \cup B}$, qui se lit A union B, (A ou B) est formé des issues qui réalisent A ou B ou les deux.
- L'évènement $\bar{A}$ est formé de toutes les issues qui ne réalisent pas A.
  C'est l'événement contraire de A. (on dit aussi complémentaire)

Exemple :
On lance un dé à 6 faces non pipé.
On s'intéresse au chiffre obtenu.
L'univers est : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Soit A l'évènement : « Obtenir un nombre pair »
Soit B l'évènement : « Obtenir un multiple de 3 »
Alors $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3; 6\}$
On peut représenter cette situation par un diagramme :



$A \cap B$ est l'évènement :
« Obtenir un nombre pair et un nombre multiple de 3 ».

$$A \cap B = \{6\}$$

$A \cup B$ est l'évènement :
« Obtenir un nombre pair ou un nombre multiple de 3 ».

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$$

$\bar{B}$ est l'évènement :
« Ne pas obtenir un nombre multiple de 3 »

$$\bar{B} = \{1; 2; 4; 5\}$$

V. Calcul sur les probabilités

Propriété :
Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Conséquences :

- Si A et B sont incompatibles ou disjoints, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$