Probabilités

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Chacun des résultats possibles de l'expérience est appelé **issue** (ou **éventualité**).

Exemples : On prend, sans regarder, une boule dans une urne, on jette un dé, on choisit au hasard un nom dans une liste, etc. sont des expériences aléatoires.

1.2 Evénements

Définitions :

- Un événement est un ensemble d'issues. On dit qu'il est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est une des issues qui le composent.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule issue.
- Un événement certain est toujours réalisé ; il contient toutes les issues.
- Un événement impossible n'est jamais réalisé ; il ne contient aucune issue.
- Deux événements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent être réalisés en même temps.
- L'événement contraire d'un événement A, noté $\overline{A}$ (se lit « A barre »), est l'événement qui se réalise quand l'événement A ne se réalise pas.

Exemples : On tire une boule sans regarder dans une urne contenant trois boules rouges, quatre boules vertes et une boule jaune indiscernables au toucher.

- L'événement A : « la boule tirée est rouge » comporte trois
- L'événement B : « la boule tirée est jaune » est un événement
- L'événement C : « la boule tirée est colorée » est un événement
- L'événement D : « la boule tirée est violette » est un événement
- Les événements A et B sont
- L'événement $\overline{A}$ est : « la boule tirée n'est pas ».

Remarque : Un événement est souvent noté par une lettre majuscule d'imprimerie : A, B, C, etc.

2. Probabilité d'un événement

Définition :

Quand on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

Remarques : • La probabilité d'un événement A se note $p(\text{A})$.
• Une probabilité peut s'exprimer sous la forme d'un nombre décimal, d'une fraction ou d'un pourcentage.

Propriétés :

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité d'un événement certain est 1 et celle d'un événement impossible est 0.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- Si deux événements A et B sont incompatibles, alors : $p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$.
- Soit A un événement. La probabilité de l'événement contraire est : $p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$.

Exemples :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, …, 6. Soient les événements :

A : « le nombre obtenu est inférieur à 10 ».

B : « le nombre obtenu est supérieur à 15 ».

C : « le nombre obtenu est supérieur à 4 ».

D : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4 ».

On a ainsi :

- $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$
- $p(\mathrm{A})=$
- $p(\mathrm{B})=$
- $p(\mathrm{C})=p(\ )+p(\ )$
- $p(\mathrm{D})=p(\overline{\mathrm{C}})=1-p(\ )$.

3. Situation d'équiprobabilité

Définition :

Quand tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Exemple : Reprenons l'expérience aléatoire du paragraphe 1.
Les boules étant indiscernables au toucher, chaque boule a la même chance d'être tirée que chacune des autres.
Il s'agit donc d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété :

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale à la proportion des issues de cet événement par rapport à l'ensemble de toutes les issues.

Autrement dit, pour tout événement A, $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$

Remarque : On désigne parfois par « **cas favorables** » les issues de l'événement et par « **cas possibles** » les issues de l'expérience.

Exemple : Dans l'exemple du paragraphe 1, il y a trois boules rouges, donc $p(\mathrm{A})=\frac{3}{8}$.

4. Arbre de probabilité

Vocabulaire :

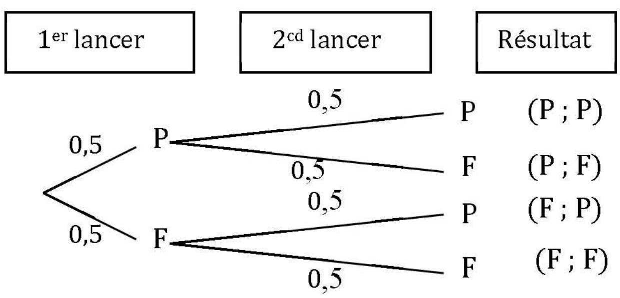
- Un **arbre de probabilité** est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire comportant une ou plusieurs épreuves. Une **branche** représente un événement.
- Lorsque l'on fait apparaître les probabilités des événements sur les branches, on dit que l'arbre est pondéré.
- Une succession de branches est appelé un « **chemin** ».

Propriété :

Lorsqu'une expérience aléatoire comportant plusieurs épreuves est représentée par un arbre pondéré, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités indiquées sur les branches de ce chemin.

Exemple :

On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
A chaque lancer, on note le résultat, « Pile » ou « Face ».
L'expérience est résumée par l'arbre pondéré ci-contre.
La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est :
$p(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.



Quizz : Vocabulaire des probabilités (1ère Bac Pro)

1. On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On regarde le nombre obtenu, puis on s'intéresse à sa parité (est-il pair ou impair).

a) Il y a deux issues possibles : obtenir un nombre pair ou obtenir un nombre impair.
b) Il y a six issues possibles : 1,2,3,4,5 et 6.
c) Obtenir un nombre pair est une issue possible.
d) Obtenir un nombre pair est un événement possible.
e) Obtenir 3 est une issue possible.

2. On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance deux pièces identiques. On regarde le côté apparent de ces deux pièces, puis on s'intéresse à la disparité de ce résultat (les pièces sont-elles tombées de la même façon ?).
a) Il y a deux issues possible : Pile et Face.
b) Pile est une issue possible
c) L'une Pile et l'autre Face est une issue possible
d) Les pièces tombent de la même façon est une issue possible
e) Les pièces tombent de la même façon est un événement possible

3. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On tire au hasard une boule dans une urne contenant 49 boules numérotées de 1 à 49. On regarde le nombre tiré, puis on s'intéresse au chiffre des dizaines de ce nombre.
a) Obtenir le 1 est une issue possible.
b) Il y a 49 issues possibles.
c) Il y a 49 événements possibles.
d) Tirer une boule portant un nombre dont le chiffre des dizaines est 2 est une issue possible.
e) Tirer une boule portant un nombre dont le chiffre des dizaines est 2 est un évènement possible.

4. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On gratte un billet de Banco à 1€. Pour 360 000 tickets, la Française des Jeux indique:

- *8 billets gagnant 1000 €*
- *6 billets gagnant 200 €*
- *560 billets gagnant 100 €*
- *950 billets gagnant 15 €*
- *9 400 billets gagnant 5 €*
- *28 000 billets gagnant 2 €*
- *44 350 billets gagnant 1 €*
- *276 726 billets perdant*

On regarde le résultat du grattage, puis on s'intéresse au bilan (a-t-on gagné ou perdu de l'argent en achetant ce billet).
a) Il y a 360000 issues possibles.
b) Il y a 8 issues possibles.
c) Il y a 3 issues possibles (Gain, Perte, ni gain ni perte).
d) Gagner est un événement possible.
e) Gagner est une issue possible.

5. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
Je parie que je ferai plus de 7 en lançant 2 dés
On lance deux dés identiques à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On regarde la somme des 2 nombres sortis, puis on s'intéresse au résultat du pari.
a) Il y a 12 issues possibles.
b) Il y a 11 issues possibles
c) Il y a 36 issues possibles.
d) Obtenir 7 est une issue possible.
e) Obtenir plus de 7 est un événement possible.
f) Obtenir plus de 7 est une issue possible.

6. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On lance deux dés identiques à 6 faces numérotées de 1 à 6. On regarde les nombres tirés.
a) Il y a 12 issues possibles
b) Il y a plus de 12 issues possibles
c) Il y a moins de 12 issues possibles
d) Obtenir 7 est une issue possible.
e) Obtenir 4 et 3 est une issue possible.
f) Obtenir un double est une issue possible.
g) Obtenir un double est un événement possible.

7. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On tire une boule dans un sac qui contient les douze boules suivantes :

On ne regarde que la couleur de la boule tirée.
a) Il y a 12 issues possibles.
b) Il y a 4 issues possibles.
c) Il y a 3 issues possibles.
d) Obtenir une boule rouge est une issue possible.
e) Ne pas obtenir une boule rouge est une issue possible.
f) Ne pas obtenir une boule rouge est un événement possible.

8. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On tire une boule dans un sac qui contient les douze boules suivantes :

On ne regarde que le nombre écrit sur la boule.
a) Il y a 12 issues possibles
b) Il y a 4 issues possibles
c) Il y a 3 issues possibles
d) Obtenir 4 est une issue possible
e) Obtenir moins de 3 est un événement possible
f) Obtenir moins de 3 est une issue possible

9. **On considère l'expérience aléatoire suivante :**
On tire une boule dans un sac qui contient les douze boules suivantes :

On regarde le numéro de la boule et la couleur.
a) Il y a 12 issues possibles
b) Il y a 10 issues possibles
c) Il y a 4 issues possibles
d) Il y a 3 issues possibles
e) Obtenir un 4 rouge est une issue possible
f) Obtenir 1 est une issue possible
g) Obtenir 1 est un événement possible
h) Obtenir moins de 3 est une issue possible
i) Obtenir moins de 3 est un événement possible

VOCABULAIRE DES PROBABILITES

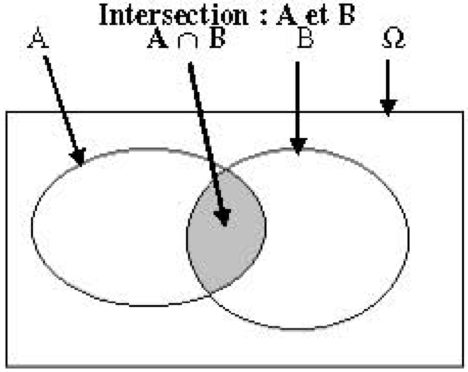
Vocabulaire et notations ensemblistes	Vocabulaire et notations probabilistes	Un exemple pour illustrer : le tirage d'une carte d'un jeu de 32 cartes.
Ω : ensemble de référence	Ω : *univers* (ou référentiel)	Ω : le jeu de 32 cartes
les éléments de Ω	les *éventualités* (ou issues)	les 32 tirages possibles d'une carte du jeu
A, B, C sont des parties de Ω	A, B, C sont des *événements*	A : tirer un cœur (8 éventualités) B : tirer un roi (4 éventualités) C : tirer un trèfle (8 éventualités)
$\varnothing$: le vide (partie à 0 élément) Ω : la partie constituée de tous les éléments de Ω	$\varnothing$: événement *impossible* Ω : événement *certain*	$\varnothing$: par exemple tirer une carte cœur et trèfle Ω : tirer une valeur au moins égale au 7
$A \cup B$: « A union B »	$A \cup B$: l'événement « *A ou B* » (ce *ou* est inclusif)	$A \cup B$: tirer une carte qui soit un cœur ou un roi (11 éventualités)
$A \cap B$: « A intersection B »	$A \cap B$: l'événement « *A et B* »	$A \cap B$: tirer une carte qui soit à la fois un cœur et un roi (1 éventualité : le roi de cœur)
$A \cap C = \varnothing$: A et C sont disjoints	$A \cap C = \varnothing$: A et C sont dits *incompatibles*	$A \cap C = \varnothing$: il est impossible de tirer une carte qui soit à la fois cœur et trèfle
$\overline{A}$: le complémentaire de A dans Ω (l'ensemble des éléments de Ω n'appartenant pas à A)	$\overline{A}$: le *contraire* de A	$\overline{A}$: tirer une carte qui n'est pas un cœur

Définition : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses éventualités.

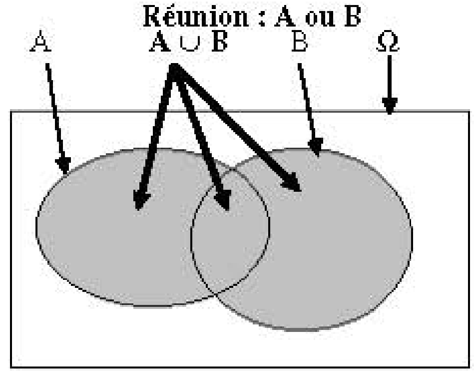
Propriétés à retenir :

$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$	Si $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$

Intersection : A et B



Réunion : A ou B



Complémentaire de A : contraire de A