

Resultados del Método Simplex

Problema: **Degenerado**

Emily Sánchez

Viviana Vargas

Curso: Investigación de Operaciones

Semestre II: 2025

12 de noviembre de 2025

Índice

1. El Algoritmo Simplex	3
1.1. Historia	3
1.2. Complejidad	3
1.3. Propiedades Fundamentales	3
1.4. Aplicaciones	3
1.5. Descripción del Método	3
2. Pasos del Método Simplex	3
3. Problema Original	4
3.1. Formulación Matemática	4
4. Tabla Inicial del Método Simplex	5
5. Proceso Iterativo del Método Simplex	5
5.1. Tabla Inicial	5
5.2. Iteración 1	6
5.3. Iteración 2	6
6. Tabla Final	6
7. Solución Óptima	7
7.1. Explicación del Problema Degenerado	7

1. El Algoritmo Simplex

1.1. Historia

El método Simplex fue desarrollado por George Dantzig en 1947 mientras trabajaba para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos.

Es uno de los algoritmos más importantes en la historia de la optimización matemática y ha sido fundamental en el desarrollo de la programación lineal. Usa operaciones sobre matrices hasta encontrar la solución óptima o determinar que el problema no tiene solución. Parte de un vértice de la región factible y "salta" a vértices adyacentes que mejoren lo encontrado hasta encontrar la condición de salida.

1.2. Complejidad

En el peor de los casos el Simplex podría probar tantas bases como el método exhaustivo. (Solo en ejemplos montados para que falle.) Normalmente va a encontrar la solución óptima en $3n$ intentos.

1.3. Propiedades Fundamentales

- **Convergencia:** El algoritmo converge a la solución óptima en un número finito de pasos (en la mayoría de los casos prácticos)
- **Complejidad:** En el peor caso tiene complejidad exponencial, pero en la práctica es muy eficiente
- **Optimalidad:** Garantiza encontrar la solución óptima global para problemas convexos
- **Factibilidad:** Mantiene la factibilidad en cada iteración

1.4. Aplicaciones

Simplex se usa en aplicaciones profesionales como la optimización de recursos empresariales, la logística y la gestión de proyectos, donde se usa para encontrar la solución más eficiente a problemas complejos con múltiples variables y restricciones.

1.5. Descripción del Método

El método Simplex opera moviéndose entre vértices adyacentes del poliedro factible, mejorando el valor de la función objetivo en cada paso hasta alcanzar el óptimo.

2. Pasos del Método Simplex

1. Formulación del problema:

- Define la función objetivo a maximizar o minimizar y las restricciones lineales asociadas.
- Asegúrate de que todas las variables de decisión sean no negativas.

2. Conversión a forma estándar:

- Transforma todas las restricciones de desigualdad en igualdades introduciendo variables de holgura (sumar una variable para restricciones \leq) o variables de exceso (restar una variable para restricciones \geq).
- Asegúrate de que la función objetivo también se iguale a cero.

3. Creación de la tabla inicial:

- Organiza el problema en una tabla llamada Tabla Simplex.
- La tabla inicial se construye con las variables del problema y una matriz identidad formada por las variables de holgura/exceso.

4. Iteración:

- **Selección de la variable entrante:** Elige la columna con el valor más negativo en la fila de la función objetivo (para maximizar) o el más positivo (para minimizar). Esta es la columna que entra en la base.
- **Selección de la variable saliente:** Calcula la razón entre el lado derecho de cada restricción y el valor correspondiente en la columna de la variable entrante. La fila con el cociente más pequeño es la que sale de la base.
- **Pivoteo:** Realiza operaciones de escalerización para hacer que el elemento en la intersección de la fila entrante y la columna saliente sea 1 y todos los demás elementos en esa columna sean 0. Esto actualiza la tabla y la solución.

5. Comprobación de la solución óptima:

- Verifica si la fila de la función objetivo en la tabla ya no contiene coeficientes negativos (para maximizar) o positivos (para minimizar).
- Si es así, la solución es óptima y se puede leer directamente de la tabla.
- Si no, repite el proceso de iteración.

3. Problema Original

3.1. Formulación Matemática

Problema de Maximización

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 1x_2$$

Sujeto a:

$$3x_1 + 1x_2 \leq 6$$

$$1x_1 - 1x_2 \leq 2$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 3$$

Con:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

4. Tabla Inicial del Método Simplex

La tabla inicial del método Simplex se construye agregando variables de holgura para convertir las desigualdades en igualdades.

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	3	1	1	0	0	6
S_2	0	1	-1	0	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	3

S_1 : Coeficientes de las variables de holgura

S_2 : Coeficientes de las variables de holgura

S_3 : Coeficientes de las variables de holgura

b: Términos independientes (lado derecho)

Base inicial: Variables de holgura S_1, S_2, \dots, S_3

5. Proceso Iterativo del Método Simplex

A continuación se detalla el proceso iterativo del algoritmo Simplex, mostrando cada tabla y las operaciones de pivoteo realizadas.

5.1. Tabla Inicial

Estado inicial: Variables de holgura en la base.

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	3	1	1	0	0	6
S_2	0	1	-1	0	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	3

Variables en la base: S_1, S_2, S_3

5.2. Iteración 1

Operación de pivoteo:

- Variable que entra: x_1
- Variable que sale: S_1
- Elemento pivote: 3 (fila 1, columna 1)
- **Empate detectado:** 2 filas con ratio mínimo
 Filas empatadas: 1, 2
 Selección: Fila 1 (aleatoria)

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	-0.33	0.67	0	0	4
x_1	0	[1]	0.33	0.33	0	0	2
S_2	0	0	-1.33	-0.33	1	0	0
S_3	0	0	1	0	0	1	3

- Filas en azul: empates en la selección del pivote

Variables en la base: x_1 , S_2 , S_3

5.3. Iteración 2

Operación de pivoteo:

- Variable que entra: x_2
- Variable que sale: S_3
- Elemento pivote: 1 (fila 3, columna 2)

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	0	0.67	0	0.33	5
x_1	0	1	0	0.33	0	-0.33	1
S_2	0	0	0	-0.33	1	1.33	4
x_2	0	0	[1]	0	0	1	3

Variables en la base: x_1 , S_2 , x_2

6. Tabla Final

La siguiente tabla representa la solución óptima del problema:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	L.D.
Z	0	0	0.67	0	0.33	5
x_1	1	0	0.33	0	-0.33	1
s_2	0	0	-0.33	1	1.33	4
x_2	0	1	0	0	1	3

7. Solución Óptima

Valor óptimo de la función objetivo: $Z = 5$

Valores de las variables:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$S_2 = 4$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

Tipo: Problema Degenerado

7.1. Explicación del Problema Degenerado

Un problema de programación lineal se considera **degenerado** cuando al menos una variable básica toma el valor cero en la solución óptima.

Características de la degeneración:

- Al menos una variable básica tiene valor cero
- Puede ocurrir cuando hay restricciones redundantes
- Puede llevar a ciclado en el algoritmo Simplex (aunque es raro en la práctica)
- La solución óptima puede no ser única
- En problemas prácticos, la degeneración es común pero generalmente no afecta la calidad de la solución

Causas comunes:

- Restricciones redundantes en el modelo
- Múltiples restricciones que se intersectan en el mismo punto
- Problemas con estructura especial que genera empates en la selección de variables

Manejo en el algoritmo Simplex:

- Se utiliza una tolerancia numérica ($\epsilon = 10^{-10}$) para detectar valores cero
- Cuando hay empates en la regla del ratio mínimo, se elige arbitrariamente
- La elección arbitraria evita el ciclado en la mayoría de los casos prácticos
- En este problema se realizaron 2 iteraciones sin ciclado

Implicaciones prácticas:

- La solución encontrada es válida y óptima
- Puede existir más de una solución óptima (soluciones alternativas)
- En aplicaciones prácticas, la degeneración generalmente no es problemática
- Si es necesario, se pueden usar técnicas anti-ciclado (regla de Bland)

Variables básicas con valor cero (degeneradas):

Iteraciones realizadas: 2

Observaciones: Se detectó degeneración (1 variables básicas = 0)