

Resultados del Método Simplex

Problema: **Degenerado**

Emily Sánchez

Viviana Vargas

Curso: Investigación de Operaciones

Semestre II: 2025

11 de noviembre de 2025

Índice

1. El Algoritmo Simplex	3
1.1. Historia	3
1.2. Propiedades Fundamentales	3
1.3. Descripción del Método	3
2. Problema Original	3
2.1. Formulación Matemática	3
3. Tabla Inicial del Método Simplex	4
4. Proceso Iterativo del Método Simplex	4
4.1. Tabla Inicial	4
4.2. Iteración 1	4
4.3. Iteración 2	5
5. Tabla Final	5
6. Solución Óptima	6
6.1. Explicación del Problema Degenerado	6

1. El Algoritmo Simplex

1.1. Historia

El método Simplex fue desarrollado por George Dantzig en 1947 mientras trabajaba para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos.

Es uno de los algoritmos más importantes en la historia de la optimización matemática y ha sido fundamental en el desarrollo de la programación lineal.

1.2. Propiedades Fundamentales

- **Convergencia:** El algoritmo converge a la solución óptima en un número finito de pasos (en la mayoría de los casos prácticos)
- **Complejidad:** En el peor caso tiene complejidad exponencial, pero en la práctica es muy eficiente
- **Optimalidad:** Garantiza encontrar la solución óptima global para problemas convexos
- **Factibilidad:** Mantiene la factibilidad en cada iteración

1.3. Descripción del Método

El método Simplex opera moviéndose entre vértices adyacentes del poliedro factible, mejorando el valor de la función objetivo en cada paso hasta alcanzar el óptimo.

2. Problema Original

2.1. Formulación Matemática

Problema de Maximización

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 1x_2$$

Sujeto a:

$$3x_1 + 1x_2 \leq 6$$

$$1x_1 - 1x_2 \leq 2$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 3$$

Con:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

3. Tabla Inicial del Método Simplex

La tabla inicial del método Simplex se construye agregando variables de holgura para convertir las desigualdades en igualdades.

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	3	1	1	0	0	6
S_2	0	1	-1	0	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	3

S_1 : Coeficientes de las variables de holgura

S_2 : Coeficientes de las variables de holgura

S_3 : Coeficientes de las variables de holgura

b: Términos independientes (lado derecho)

Base inicial: Variables de holgura S_1, S_2, \dots, S_3

4. Proceso Iterativo del Método Simplex

A continuación se detalla el proceso iterativo del algoritmo Simplex, mostrando cada tabla y las operaciones de pivoteo realizadas.

4.1. Tabla Inicial

Estado inicial: Variables de holgura en la base.

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	3	1	1	0	0	6
S_2	0	1	-1	0	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	3

Variables en la base: S_1, S_2, S_3

4.2. Iteración 1

Operación de pivoteo:

- Variable que entra: x_1
- Variable que sale: S_1
- Elemento pivote: 3,0000 (fila 1, columna 1)

- **Empate detectado:** 2 filas con ratio mínimo

Filas empatadas: 1, 2

Selección: Fila 1 (aleatoria)

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	-0.33	0.67	0	0	4
x_1	0	[1]	0.33	0.33	0	0	2
S_2	0	0	-1.33	-0.33	1	0	0
S_3	0	0	1	0	0	1	3

- Filas en azul: empates en la selección del pivote

Variables en la base: x_1 , S_2 , S_3

4.3. Iteración 2

Operación de pivoteo:

- Variable que entra: x_2
- Variable que sale: S_3
- Elemento pivote: 1,0000 (fila 3, columna 2)

Variable	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	0	0.67	0	0.33	5
x_1	0	1	0	0.33	0	-0.33	1
S_2	0	0	0	-0.33	1	1.33	4
x_2	0	0	[1]	0	0	1	3

Variables en la base: x_1 , S_2 , x_2

5. Tabla Final

La siguiente tabla representa la solución óptima del problema:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	L.D.
Z	0	0	0.67	0	0.33	5
x_1	1	0	0.33	0	-0.33	1
s_2	0	0	-0.33	1	1.33	4
x_2	0	1	0	0	1	3

6. Solución Óptima

Valor óptimo de la función objetivo: $Z = 5$

Valores de las variables:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$S_2 = 4$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

Tipo: Problema Degenerado

6.1. Explicación del Problema Degenerado

Un problema de programación lineal se considera **degenerado** cuando al menos una variable básica toma el valor cero en la solución óptima.

Características de la degeneración:

- Al menos una variable básica tiene valor cero
- Puede ocurrir cuando hay restricciones redundantes
- Puede llevar a ciclado en el algoritmo Simplex (aunque es raro en la práctica)
- La solución óptima puede no ser única
- En problemas prácticos, la degeneración es común pero generalmente no afecta la calidad de la solución

Causas comunes:

- Restricciones redundantes en el modelo
- Múltiples restricciones que se intersectan en el mismo punto
- Problemas con estructura especial que genera empates en la selección de variables

Manejo en el algoritmo Simplex:

- Se utiliza una tolerancia numérica ($\epsilon = 10^{-10}$) para detectar valores cero
- Cuando hay empates en la regla del ratio mínimo, se elige arbitrariamente
- La elección arbitraria evita el ciclado en la mayoría de los casos prácticos
- En este problema se realizaron 2 iteraciones sin ciclado

Implicaciones prácticas:

- La solución encontrada es válida y óptima
- Puede existir más de una solución óptima (soluciones alternativas)
- En aplicaciones prácticas, la degeneración generalmente no es problemática
- Si es necesario, se pueden usar técnicas anti-ciclado (regla de Bland)

Variables básicas con valor cero (degeneradas):

Iteraciones realizadas: 2

Observaciones: Se detectó degeneración (1 variables básicas = 0)