Resultados del Método Simplex

Problema: **DakotaMultiples**

Emily Sánchez
Viviana Vargas

Curso: Investigación de Operaciones
Semestre II: 2025

12 de noviembre de 2025

Índice

1. El Algoritmo Simplex

1.1. Historia

El método Simplex fue desarrollado por George Dantzig en 1947 mientras trabajaba para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos.

Es uno de los algoritmos más importantes en la historia de la optimización matemática y ha sido fundamental en el desarrollo de la programación lineal. Usa operaciones sobre matrices hasta encontrar la solución óptima o determinar que el problema no tiene solución. Parte de un vértice de la región factible y "salta.ª vértices adyacentes que mejoren lo encontrado hasta encontrar la condición de salida.

1.2. Complejidad

En el peor de los casos el Símplex podría probar tantas bases como el método exhaustivo. (Solo en ejemplos montados para que falle.) Normalmente va a encontrar la solución óptima en $3n$ intentos.

1.3. Propiedades Fundamentales

- **Convergencia:** El algoritmo converge a la solución óptima en un número finito de pasos (en la mayoría de los casos prácticos)
- **Complejidad:** En el peor caso tiene complejidad exponencial, pero en la práctica es muy eficiente
- **Optimalidad:** Garantiza encontrar la solución óptima global para problemas convexos
- **Factibilidad:** Mantiene la factibilidad en cada iteración

1.4. Aplicaciones

Símplex se usa en aplicaciones profesionales como la optimización de recursos empresariales, la logística y la gestión de proyectos, donde se usa para encontrar la solución más eficiente a problemas complejos con múltiples variables y restricciones.

1.5. Descripción del Método

El método Simplex opera moviéndose entre vértices adyacentes del poliedro factible, mejorando el valor de la función objetivo en cada paso hasta alcanzar el óptimo.

2. Pasos del Método Simplex

1. **Formulación del problema:**

- Define la función objetivo a maximizar o minimizar y las restricciones lineales asociadas.
- Asegúrate de que todas las variables de decisión sean no negativas.

2. **Conversión a forma estándar:**
    - Transforma todas las restricciones de desigualdad en igualdades introduciendo variables de holgura (sumar una variable para restricciones $\leq$) o variables de exceso (restar una variable para restricciones $\geq$).
    - Asegúrate de que la función objetivo también se iguale a cero.

3. **Creación de la tabla inicial:**
    - Organiza el problema en una tabla llamada Tabla Simplex.
    - La tabla inicial se construye con las variables del problema y una matriz identidad formada por las variables de holgura/exceso.

4. **Iteración:**
    - **Selección de la variable entrante:** Elige la columna con el valor más negativo en la fila de la función objetivo (para maximizar) o el más positivo (para minimizar). Esta es la columna que entra en la base.
    - **Selección de la variable saliente:** Calcula la razón entre el lado derecho de cada restricción y el valor correspondiente en la columna de la variable entrante. La fila con el cociente más pequeño es la que sale de la base.
    - **Pivoteo:** Realiza operaciones de escalerización para hacer que el elemento en la intersección de la fila entrante y la columna saliente sea 1 y todos los demás elementos en esa columna sean 0. Esto actualiza la tabla y la solución.

5. **Comprobación de la solución óptima:**
    - Verifica si la fila de la función objetivo en la tabla ya no contiene coeficientes negativos (para maximizar) o positivos (para minimizar).
    - Si es así, la solución es óptima y se puede leer directamente de la tabla.
    - Si no, repite el proceso de iteración.

3. Problema Original

3.1. Formulación Matemática

Problema de Maximización

$$\text{Maximizar } Z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3$$

Sujeto a:

$$8x_1 + 6x_2 + 1x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}50x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1{,}50x_2 + 0{,}50x_3 \leq 8$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 5$$

Con:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

4. Tabla Inicial del Método Simplex

La tabla inicial del método Simplex se construye agregando variables de holgura para convertir las desigualdades en igualdades.

Variable	**Z**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	**b**
Z	1	-60	-35	-20	0	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	0	48
S_2	0	4	2	1.50	0	1	0	0	20
S_3	0	2	1.50	0.50	0	0	1	0	8
S_4	0	0	1	0	0	0	0	1	5

S_1: Coeficientes de las variables de holgura

S_2: Coeficientes de las variables de holgura

S_3: Coeficientes de las variables de holgura

S_4: Coeficientes de las variables de holgura

b: Términos independientes (lado derecho)

Base inicial: Variables de holgura $S_1, S_2, \ldots, S_4$

5. Proceso Iterativo del Método Simplex

A continuación se detalla el proceso iterativo del algoritmo Simplex, mostrando cada tabla y las operaciones de pivoteo realizadas.

5.1. Tabla Inicial

Estado inicial: Variables de holgura en la base.

Variable	**Z**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	**b**
Z	1	-60	-35	-20	0	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	0	48
S_2	0	4	2	1.50	0	1	0	0	20
S_3	0	2	1.50	0.50	0	0	1	0	8
S_4	0	0	1	0	0	0	0	1	5

Variables en la base: S_1, S_2, S_3, S_4

5.2. Iteración 1

Operación de pivoteo:

- **Variable que entra:** x_1
- **Variable que sale:** S_3
- **Elemento pivote:** 2 (fila 3, columna 1)

Variable	**Z**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	**b**
Z	1	0	10	-5	0	0	30	0	240
S_1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	16
S_2	0	0	-1	0.50	0	1	-2	0	4
x_1	0	[1]	0.75	0.25	0	0	0.50	0	4
S_4	0	0	1	0	0	0	0	1	5

Variables en la base: S_1, S_2, x_1, S_4

5.3. Iteración 2

Operación de pivoteo:

- **Variable que entra:** x_3
- **Variable que sale:** S_2
- **Elemento pivote:** 0,5000 (fila 2, columna 3)

Variable	**Z**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	**b**
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	280
S_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	[1]	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	1.25	0	0	-0.50	1.50	0	2
S_4	0	0	1	0	0	0	0	1	5

Variables en la base: S_1, x_3, x_1, S_4

5.4. Iteración 3

Variable	**Z**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	**b**
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	280
S_1	0	1.60	0	0	1	1.20	-5.60	0	27.20
x_3	0	1.60	0	1	0	1.20	-1.60	0	11.20
x_2	0	0.80	1	0	0	-0.40	1.20	0	1.60
S_4	0	-0.80	0	0	0	0.40	-1.20	1	3.40

Variables en la base: S_1, x_3, x_2, S_4

6. Tabla Final

Soluciones Múltiples: Se encontraron dos tablas finales que representan diferentes soluciones óptimas.

6.1. Primera Solución Óptima

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	**L.D.**
Z	0	0	0	0	10	10	0	280
s_1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	1	1.25	0	0	-0.50	1.50	0	2
s_4	0	1	0	0	0	0	1	5

6.2. Segunda Solución Óptima

	X1	**X2**	**X3**	s_1	s_2	s_3	s_4	**L.D.**
Z	0	0	0	0	10	10	0	280
s	1.60	0	0	1	1.20	-5.60	0	27.20
$X3$	1.60	0	1	0	1.20	-1.60	0	11.20
$X2$	0.80	1	0	0	-0.40	1.20	0	1.60
s	-0.80	0	0	0	0.40	-1.20	1	3.40

7. Solución Óptima

Valor óptimo de la función objetivo: $Z = 280$

Valores de las variables:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 8 \\
S_1 &= 24 \\
S_4 &= 5 \\
S_2 &= 0 \\
S_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Tipo: Soluciones Múltiples

7.1. Explicación de Soluciones Múltiples

Cuando un problema de programación lineal tiene soluciones múltiples, significa que existe más de una combinación de valores para las variables de decisión que produce el mismo valor óptimo de la función objetivo.

Condición para soluciones múltiples:

- Al menos una variable no básica tiene coeficiente cero en la fila Z de la tabla óptima
- Esto indica que podemos introducir esa variable en la base sin cambiar el valor de Z
- El conjunto de soluciones óptimas forma un segmento de recta (en 2D) o un hiperplano (en nD)

Ecuación para generar todas las soluciones óptimas:

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Donde X_1 y X_2 son las dos soluciones básicas encontradas y λ es un parámetro entre 0 y 1.

7.2. Soluciones Adicionales

A continuación se presentan 3 soluciones adicionales obtenidas como combinaciones convexas de las dos soluciones básicas:

7.2.1. Solución con $\lambda = 0,25$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}50 \\
x_2 &= 1{,}20 \\
x_3 &= 10{,}40
\end{aligned}
$$

Verificación: $Z = 280$ (mismo valor óptimo)

7.2.2. Solución con $\lambda = 0,50$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 0{,}80 \\
x_3 &= 9{,}60
\end{aligned}
$$

Verificación: $Z = 280$ (mismo valor óptimo)

7.2.3. Solución con $\lambda = 0,75$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1{,}50 \\
x_2 &= 0{,}40 \\
x_3 &= 8{,}80
\end{aligned}
$$

Verificación: $Z = 280$ (mismo valor óptimo)
Iteraciones realizadas: 2
Observaciones: Se detectaron soluciones múltiples